اللمسات الأخيرة في النهايات

1. رمزها.

2. العمليات على الرمز ∞ :

(الجمع – الضرب – القسمة – الجذور - القوى)

3. قواعد ايجاد النهايات:

- التابع الصحيح
- التابع الكسري

4. ملاحظات وزارية:

- هل يوجد للتابع f نهاية عند a
- هل يوجد للتابع f نهاية حقيقة عند a

5. حالات عدم التعين وكيفية إزالتها.

6. النهايات المثلثية ومبرهنات الإحاطة.

7. محدودية تابع

8. سلوك تابع

9. التابع المركب:

① النمط لأول:

- اكتب $fog(x)$ بدلالة x
- عبر عن $fog(x)$ بدلالة x
- اوجد قاعدة ربط التابع $fog(x)$

② النمط الثاني:

إيجاد: $\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big)$

③ النمط الثالث:

ايجاد نهاية تابع معطى بأحد لأشكال:

- لوغاريتم مضمونه تابع اخر
- جذري مضمونه تابع اخر
- مثلثي مضمونه تابع اخر
- أسي مضمونه تابع اخر
- قوة أساسها تابع اخر

10. النهاية باستخدام التعريف:

- تعين A
- تعين مجال

11. المقاربات:

تعريف المقارب

- o المقارب (الأفقي-الشاقولي):
  - أوجد النهايات واكتب معادلة كل مقارب وجدتهُ
  - أوجد النهايات واشرح التأويل الهندسي
- o المقارب المائل:

① النمط الأول:

هل يوجد مقارب مائل في جوار ∞

② النمط الثاني:

أثبت أن المستقيم Δ (معادلته معطاة) مقارب مائل للخط البياني في جوار ∞

③ النمط الثالث:

ادرس الوضع النسبي بين المستقيم Δ ("معادلته معطاة" مقارب مائل/ مقارب أفقي/مماس/مستقيم عشوائي) والخط البياني

④ النمط الرابع:

استنتاج معادلة المقارب المائل.

12. الاستمرار عند نقطة:

① النمط الأول:

- هل f مستمر عند a
- ادرس استمرار f عند a
- أثبت أن التابع f مستمر عند a

② النمط الثاني:

عين قيمة m التي تجعل f مستمر عند $x = a$

١.٣ الاستمرار على مجال:

١.٤ تابع الجزء الصحيح:

- التخلص من $E(x)$ على المجال
- أنماط التمارين:

① النمط الأول:

كتابة التابع f بصيغة مستقلة عن $E(x)$

② النمط الثاني: تابع الجزء الصحيح والاستمرار

③ النمط الثالث: تابع الجزء الصحيح والرسم

④ النمط الرابع: إيجاد نهاية تابع الجزء الصحيح

١.٥ مقصور تابع

١.٦ التقابل العكسي

- إيجاد التقابل العكسي
- إثبات التقابل العكسي
- استنتاج رسم الخط البياني للتقابل العكسي

مخططات داعمة:

المخطط الأول: إزالة حالات عدم التعيين:

- حالة $\frac{0}{0}$
  - البسط أو المقام قابل للتحليل
    - التحليل
  - يحوي جذر
    - المرافق
- حالة $\frac{\infty}{\infty}$
  - عامل مناسب
- حالة $\infty - \infty$
  - المرافق
    - أحد الحدود داخل الجذر $=$ $\left(\text{الحد الموجود خارج الجذر}\right)^2$
  - العامل مناسب
    - أحد الحدود داخل الجذر $\neq$ $\left(\text{الحد الموجود خارج الجذر}\right)^2$

المخطط الثاني: النهايات المثلثية:

وجود مبرهنة

$$\lim_{\text{شغلة}\to 0}\frac{\sin(\text{شغلة})}{\text{شغلة}}=1$$

تطبيق فوري

عدم وجود مبرهنة

تعويض

الحصول على $\sin\infty$ أو $\cos\infty$

الحصول على حالة عدم تعيين

يجب إزالتها.
كيفية الإزالة:
باستخدام اصلاحات مناسبة نحول البسط أو المقام ليشبه مضمون الـ $\sin$ ⬚ ونميز:

المسعى هو الصفر

تطبيق مبرهنة

المسعى مختلف عن الصفر

تغيير متحول

الحصول على ناتج

التمرين انتهى

نطبق مرحلتين:
المرحلة الأولى: مرحلة الحصر أو مرحلة تأليف التابع حيث ننطلق من إحدى العلاقات:
$0\le\cos^2(\text{زاوية})\le 1$ أو $0\le\sin^2(\text{زاوية})\le 1$ أو $-1\le\cos(\text{زاوية})\le 1$ أو $-1\le\sin(\text{زاوية})\le 1$.
ثم نبدأ رحلة تأليف التابع وانتبه: عندما تكون إشارة الـ x غير محددة فإننا نناقش حالتين.
المرحلة الثانية: مرحلة تطبيق مبرهنات الإحاطة ونميز وفق:

نهاية الأطراف هي عدد حقيقي

نكمل بالإحاطة

نهاية الأطراف هي $+\infty$

نحذف الطرف الكبير ونكمل بالمقارنة

نهاية الأطراف هي $-\infty$

نحذف الطرف الصغير ونكمل بالمقارنة

المخطط الثالث: القوانين المثلثية:

وحدة النهايات	وحدة التكامل
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$1 - \cos^2(\text{زاوية}) = 2\sin^2(\text{زاوية})$	$\cos^2(\text{زاوية}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\text{ضعفي الزاوية}\right)$
$1 - \cos(\text{زاوية}) = 2\sin^2\left(\text{نصف الزاوية}\right)$	$\sin^2(\text{زاوية}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\text{ضعفي الزاوية}\right)$
$\sin(\text{زاوية}) = 2\sin\left(\text{نصف الزاوية}\right).\cos\left(\text{نصف الزاوية}\right)$	$\sin(\text{زاوية}) = 2\sin\left(\text{نصف الزاوية}\right)\cos\left(\text{نصف الزاوية}\right)$
دساتير التحويل من مجموع إلى جداء	**دساتير التحويل من جداء إلى مجموع**
$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cos x . \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$
$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sin x . \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))$
$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ .1	$\boxed{\cos x . \sin y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))}$ .1
$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sin x . \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

طريقة الحفظ:

نضع 2

تكون النسبة الأخيرة في الجداء حسب الإشارة في منتصف المجموع أيّ:

الإشارة $(+)$ تكون النسبة $\cos$

الإشارة $(-)$ تكون النسبة $\sin$

نكمل حسب:

مجموع	جداء
$\cos$ و $\cos$	تماثل
$\sin$ و $\sin$	اختلاف

طريقة الحفظ:

نضع $\frac{1}{2}$

تكون الإشارة في منتصف المجموع حسب النسبة الأخيرة من الجداء أيّ:

النسبة $\cos$ إذاً الإشارة $(+)$

النسبة $\sin$ إذاً الإشارة $(-)$

نكمل حسب:

جداء	مجموع
تماثل	$\cos$ و $\cos$
اختلاف	$\sin$ و $\sin$

المخطط الرابع: الاستمرار:

- الاستمرار عند نقطة
  - نهاية وصورة
- الاستمرار على مجال
  - قواعد ثم مناقشة
- استمرار تابع الفروع على مجال
  - استمرار على مجال ثم استمرار عند نقطة

المخطط الخامس: التقابل العكسي:

- إيجاد التقابل العكسي
  - * نضع y بدلاً من $f(x)$
  - * نبدل المتغيرات
  - * نعزل y
  - * نضع $f'(x)$ بدلاً من y
- إثبات التقابل العكسي
  - تركيب التابعين والناتج هو x
- استنتج رسم الخط البياني للتقابل العكسي
  - يكون c_g نظير c_f بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y = x$ "منصف الربعين الأول والثالث"

المخطط السادس: المقارب المائل:

المقارب المائل

النمط الأول

هل يقبل الخط البياني مقارب مائل في جوار الـ ∞

تتحقق من وجود مقارب أفقي ونميز:

- إمكانية وجود مقارب مائل
- عدم وجود مقارب أفقي
- لا يوجد مائل
- وجود مقارب أفقي

النمط الثاني

أثبت أنّ المستقيم Δ "معادلته مُعطاة" مقارب مائل في جوار الـ ∞

نشكل الفرق: $h(x) = f(x) - y_\Delta$ ثم نثبت أنّ: $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$

النمط الثالث

دراسة وضع نسبي بين خط بياني و "مقارب مائل-مقارب أفقي-مماس"

نشكل الفرق: $h(x) = f(x) - y_\Delta$ ثم نعدم الفرق أي نحل المعادلة: $h(x) = 0$

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	
$h(x)$	
الوضع النسبي	

النمط الرابع

استنتاج معادلة المقارب المائل

الحالة الأولى: إذا كان لدينا: $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$ يكون المقارب المائل هو $y = ax + b$

الحالة الثانية: إذا كان لدينا: $f(x) = ax + b + g(x)$ وتحقق: $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ نفهم أنّ: $y = ax + b$ مقارب مائل.

الحالة الثالثة: إذا كان لدينا التابع f عبارة عن كسر درجة بسطه أكبر من درجة مقامه بواحد فإننا نستخدم القسمة الإقليدية ثم نتابع كما في الحالة الثانية.

الحالة الرابعة: إذا كان لدينا التابع f من الشكل: $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ فإننا:

* نكتب $ax^2 + bx + c$ بالصيغة القانونية
* نخمن معادلة المقارب المائل ثم نثبت صحة هذا التخمين بالاعتماد على تشكل الفرق

الحالة الخامسة: الحالة العامة:

نوجد a حيث: $a = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ ثم نوجد b حيث: $b = \lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x) - ax\big)$ فيكون المقارب المائل هو: $y = ax + b$

اللمسات الأخيرة في بحث الاشتقاق

١. الرمز.

٢. قواعد للاشتقاق.

٣. المماس:

* كتابة معادلة المماس.
* هل يقبل الخط البياني مماس ميلهُ m ؟

٤. التقريب التآلفي.

٥. قابلية الاشتقاق عند نقطة.

٦. قابلية الاشتقاق على مجال.

٧. استنتاج مشتق.

٨. مشتقات من مراتب عليا.

٩. اطراد تابع.

١٠. دراسة تغيرات تابع.

١١. قراءة جدول التغيرات.

١٢. مبرهنة القيمة الوسطى.

١٣. حصر حل معادلة.

١٤. الصفات التناظرية.

زوجي – فردي - مركز تناظر - محور تناظر - دوري

١٥. تحديد الثوابت.

١٦. رسم الخطوط البيانية.

١٧. استنتاج رسم الخطوط البيانية.

١٨. المناقشة البيانية.

١٩. قراءة الخط البياني.

مخططات داعمة:

المخطط الأول: معادلة المماس:

النمط الأول: كتابة معادلة مماس:

كتابة معادلة المماس

اكتب معادلة المماس في النقطة $A(x_A, y_A)$	النقطة: "معلومة" $A(x_A, y_A)$ ، الميل: $m = f'(x_A)$
اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها x_A	النقطة: $y_A = f(x_A)$ ، الميل: $m = f'(x_A)$
اكتب معادلة المماس في النقطة التي ترتيبها y_A	النقطة: $f(x) = y_A$ وحل هذه المعادلة هو فاصلة لنقطة التماس انتبه: عدد الحلول هو عدد المماسات ، الميل: $m = f'(x_A)$
اكتب معادلة المماس للخط البياني في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب	النقطة: فاصلة نقطة التماس هي $x_A = 0$ وترتيب النقطة $y_A = f(0)$ والميل: $m = f'(0)$
اكتب معادلة المماس للخط البياني في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل أو النقطة التي تعدم $f(x)$	نحل المعادلة $f(x) = 0$ وحل المعادلة فاصلة نقطة التماس ، انتبه: عدد الحلول يساوي عدد المماسات ، والميل $m = f'(x_A)$
اكتب معادلة المماس للخط البياني في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$	نحل المعادلة $f''(x) = 0$ وحل المعادلة هو فاصلة نقطة التماس ، انتبه: عدد الحلول يساوي عدد المماسات والميل $m = f'(x_A)$
اكتب معادلة المماس للخط البياني علماً أنّ ميله m	نحل المعادلة $f'(x) = m$ وحل هذه المعادلة هو فاصلة نقطة التماس ، انتبه: عدد الحلول يساوي عدد المماسات والميل معلوم
اكتب معادلة المماس المار من النقطة A	* نفرض نقطة التماس: $M(a, f(a))$ * نوجد ميل المماس $m = f'(a)$ * نكتب معادلة المماس بدلالة a * بما أن المماس مار من النقطة A فإننا نعوض إحداثيات A في معادلة المماس فنحصل على قيم a

المخطط الثاني: قابلية الاشتقاق:

- عند نقطة
  - دراسة قابلية الاشتقاق عند a والتفسير الهندسي
    - تابع مساعد ثم نهاية هذا التابع المساعد
  - إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ والمقام يكون x ناقص المسعد
    - نفرض تابع g وفق: كل شيء يحوي x في البسط $g(x) =$
      نوجد $g(a)$ و $g'(x)$ و $g'(a)$
      يكون: $\lim\limits_{x \to a}\left[\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right] = g'(a)$
  - استنتاج نهاية
    - تذكر: $\lim\limits_{x \to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right] = f'(a)$
- على مجال
  - هل التابع اشتقاقي على المجال
    - قواعد ثم مناقشة
  - أوجد مجموعة الاشتقاق
    - المجال مفتوح: نفسها
    - المجال مغلق: نفتح المجال

شيفرة ال 600

اللمسات الأخيرة

المخطط الثالث: تعيين الثوابت:

النمط الأول: علاقتين متكافئتين إحداهما تحوي ثوابت.

* باستخدام إصلاحات مناسبة "قسمة إقليدية – نشر – توحيد مقامات" نحول إحدى العلاقتين لتشبه العلاقة الثانية
* مقارنة

النمط الثاني: علاقة تحوي ثوابت ودلالات.

نترجم هذه الدلالات وفق:

نقطة: $A(x_A, y_A)$ الترجمة: $f(x_A) = y_A$	مماس الترجمة: $f'(x_A) = m$	قيمة حدية الترجمة: $f'(x_A) = 0$

نصلح فنحصل على معادلات وبحل هذه المعادلات نحصل على المطلوب

ملاحظة: يمكن دمج أكثر من دلالة معًا بحيث يكون عدد الدلالات يساوي عدد الثوابت وهنا نضع جميع الترجمات الموافقة

اللمسات الأخيرة في قسم الأشعة

في قسم الأشعة سنتعامل مع الأفكار التالية:

١. تذكرة وعموميات:

- تعريف الشعاع
- تعريف الشعاع الصفري
- تعريف الشعاعين المتساويين
- تعريف الشعاعين المتعاكسين

٢. العمليات على لأشعة (شعاعياً):

- مجموع شعاعين متساوين
- مجموع شعاعين متعاكسين
- مجموع شعاعين في حالة تعاقب
- مجموع شعاعين لهما نفس البداية
- طرح شعاعين

٣. تمهيد تحليلي:

- المعلم في الفراغ
- إحداثيات نقطة في الفراغ
- مركبات شعاع في الفراغ
- إيجاد مركبات شعاع

٤. العمليات على لأشعة (تحليلياً):

- جداء عدد حقيقي بشعاع
- مجموع شعاعين
- تساوي شعاعين

٥. إيجاد إحداثيات النقاط:

- إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة
- إحداثيات مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات)
- إحداثيات مركز متوازي أضلاع
- إحداثيات نقطة بمعلومية علاقة شعاعية وإحداثيات باقي النقاط
- إحداثيات النقطة التي تجعل الرباعي متوازي أضلاع
- إحداثيات نقطة نظيرة نقطة بالنسبة إلى نقطة
- إحداثيات نقطة نظيرة نقطة بالنسبة إلى المبدأ

٦. أنواع المعالم:

المعلم (المتجانس – المتعامد - الكيفي)

٧. إيجاد إحداثيات النقاط

بالاعتماد على معلم متجانس في:

- المكعب
- متوازي مستطيلات أبعاده معلومة
- هرم يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة
- رباعي وجوه يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة

٨. نظيم شعاع (المسافة بين نقطتين في الفراغ):

- قانون نظيم شعاع
- قانون المسافة في الفراغ

٩. تطبيقات المسافة بين نقطتين في الفراغ:

- تحديد نوع المثلث
- انتماء نقطة إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة
- وقوع نقطة على كرة
- إحداثيات نقطة تقع على أحد المحاور الإحداثية ومتساوية البعد عن نقطتين

١٠. الارتباط الخطي لشعاعين:

- إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة "إثبات أن نقطة تقع على مستقيم"
- إثبات أنّ ثلاثة نقاط تشكل مستوي

١١. الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

- إثبات وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد
- إثبات أن مستقيم يوازي مستوي
- إثبات تقاطع مستقيمان

١٢. مركز الأبعاد المتناسبة (لنقطتين / لثلاثة نقاط / لأربعة نقاط):

* ايجاد إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة
* قراءة علاقة
* إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة "إثبات أن نقطة تقع على مستقيم"
* إثبات وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد
* إثبات تلاقي مستقيمات
* توضيع مركز الأبعاد المتناسبة في شكل
* تعين ثوابت

١٣. الجداء السلمي في الفراغ:

* أوجد الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$
* هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين
* عين قيمة الوسيط α ليكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين
* استنتج النسبة المثلثية للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$
* أثبت أن النقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث (ABC)

١٤. معادلات المستوي:

* معادلة مستوي يوازي مستوي آخر
* معادلة مستوي يُعامد مستقيم
* معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة
* معادلة مستوي مار من نقطة ويحوي شعاعين موجهين
* معادلة مستوي مار من نقطة ويُعامد مستويان
* معادلة مستوي مار من نقطتين ويُعامد مستوي آخر
* معادلة مستوي مار من ثلاثة نقاط
* معادلة مستوي يحوي مستقيمان متقاطعان
* معادلة مستوي مماس لكرة في نقطة

١٥. تطبيقات معادلة المستوي:

* انتماء نقطة إلى مستوي
* إثبات معدلة مستوي (معطاة)
* وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد

* بعد نقطة عن مستوي في الفراغ
* البعد بين مستويين متوازيين
* كتابة معادلة مستوي مار من أربعة نقاط
* إثبات أن شعاع (معطى) ناظم على المستوي

١٦. التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ:

* التمثيل الوسيطي لمستقيم يوازي مستقيم
* التمثيل الوسيطي لمستقيم يُعامد مستوي
* التمثيل الوسيطي لمستقيم مار من نقطتين
* التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لمستويان

١٧. تطبيقات التمثيل الوسيطي:

* إثبات تمثيل وسيطي لمستقيم
* انتماء نقطة إلى مستقيم في الفراغ

١٨. الكرة:

* معادلة كرة مركزها معلوم وتمر من نقطة
* معادلة كرة قطرها $[AB]$
* معادلة كرة مركزها معلوم وتمس مستوي

١٩. معادلة المخروط:

* اكتب معادلة المخروط
* صف مجموعة النقاط التي تحقق المعادلة.
* وقوع نقطة على مخروط

٢٠. معادلة لأسطوانة:

* اكتب معادلة لأسطوانة
* صف مجموعة النقاط التي تحقق معادلة (معطاة)
* وقوع نقطة على اسطوانة.

٢١. الأوضاع النسبية:

o الوضع النسبي لمستويان في الفراغ:
* إثبات أن مستويان متوازيان
* إثبات أن مستويان متقاطعان
* إثبات أن مستويان متعامدان
* إثبات أن مستويان منطبقان

- كيفية إيجاد الفصل المشترك لمستقيمان متقاطعان

o الوضع النسبي لمستقيمان في الفراغ:
- إثبات أن مستقيمان متوازيان
- إثبات أن مستقيمان منطبقان
- إثبات أن مستقيمان متخالفان
- إثبات أن مستقيمان متقاطعان
- إثبات أن مستقيمان متعامدان
- كيفية إيجاد إحداثيات نقطة تقاطع مستقيمان
- هل المستقيمان d_1, d_2 يقعان في مستوٍ واحد؟

o الوضع النسبي بين مستقيم ومستوي في الفراغ:
- إثبات أن مستقيم ومستوي متوازيان
- إثبات أن مستقيم ومستوي متقاطعان
- إثبات أن مستقيم ومستوي متعامدان بحيث ناظم المستوي معلوم
- إثبات أن مستقيم ومستوي متعامدان بحيث ناظم المستوي غير معلوم
- ايجاد إحداثيات نقطة تقاطع مستقيم ومستوي
- إثبات أنّ مستقيم محتوى في مستوي.

o الوضع النسبي لثلاث مستويات في الفراغ
o الوضع النسبي لمستوي وكرة:
- إثبات أن مستوي مماس لكرة
- إثبات أن مستوي قاطع لكرة
- إثبات أن مستوي خارج الكرة
- تحديد نقطة تماس المستوي والكرة

o الوضع النسبي لمستقيم وكرة:
- إثبات أن مستقيم مماس لكرة
- إثبات أن مستقيم قاطع لكرة
- إثبات أن مستقيم خارج الكرة
- تحديد النقطة المشتركة للمستقيم والكرة

٢٢. المساقط القائمة:
- المسقط القائم لنقطة على مستوي (عشوائي/معلم)
- المسقط القائم لنقطة على مستقيم (عشوائي/معلم)

٢٣. بُعد نقطة عن مستقيم في الفراغ.

٢٤. مجموعات النقاط

٢٥. المساحات – الحجوم.

مخططات داعمة:

المخطط الأول: نص السؤال: أثبت وقوع ثلاثة نقاط على استقامة واحدة نميز:

- وجود إحداثيات أو إمكانية إيجادها
  - الارتباط الخطي لشعاعين
- غير ذلك
  - نثبت أنّ إحدى النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الباقيتين

المخطط الثاني: هل النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

- وجود إحداثيات أو إمكانية إيجادها
  - الأسلوب الأول
    - الارتباط الخطي لثلاثة أشعة "الجاهزة"
  - الأسلوب الثاني
    - نكتب معادلة المستوي المار من ثلاثة نقاط منها "الحالة السابعة" ثم نتحقق من انتماء النقطة المتبقية لهذا المستوي
- غير ذلك
  - نثبت أنّ إحدى النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثلاثة المتبقية.

المخطط الثالث: معادلات المستوي "نقطة وناظم":

أولاً: الناظم الفوري نميز:

- مستوي P يوازي مستوي Q
  - $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{n_Q}$
- مستوي P يعامد مستقيم d
  - $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{u_d}$
- مستوي محوري للقطعة المستقيمة $[AB]$
  - * ناظم المستوي: هو الشعاع اسم القطعة المستقيمة.
  - * نقطة منه: هي النقطة منتصف القطعة المستقيمة
- مستوي مماس للكرة في نقطة
  - * ناظم المستوي: هو الشعاع الواصل بين مركز الكرة ونقطة التماس
  - * نقطة منه: نقطة التماس

ثانياً: الناظم غير فوري "يحتاج معادلتين" ليكن $\vec{n}(a, b, c)$ ونميز:

- مستوي يقبل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موجهين له
  - $\vec{n}.\vec{u} = 0$
  - $\vec{n}.\vec{v} = 0$
- مستوي P يعامد مستويان R و Q
  - $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0$
  - $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R} = 0$
- مستوي P مار من A و B ويعامد المستوي Q
  - $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AB} = 0$
  - $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0$
- مستوي مار من ثلاثة نقاط A و B و C
  - نثبت أنّ A و B و C تشكل مستوي ونثبت أنّ
  - $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AB} = 0$
  - $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AC} = 0$
- مستوي يحوي مستقيمان متقاطعان
  - * ناظم المستوي:
    - $\vec{n}.\vec{u} = 0$
    - $\vec{n}.\vec{v} = 0$
  - * نقطة من المستوي: نقطة تقاطع المستقيمان

المخطط الرابع: معادلة الكرة "مركز ونصف قطر"

- معادلة كرة مركزها Ω وتمر من A
  - $R = \Omega A$
- معادلة كرة قطرها $[AB]$
  - المركز هو: النقطة I منتصف $[AB]$
  - نصف القطر:
  - $R = \frac{AB}{2}$ أو $R = IA$ أو $R = IB$
- معادلة كرة مركزها Ω وتمر مستوى P
  - دائمًا في الكرة التي تمس المستوي يتحقق:
  - $R = dist($المستوي , مركز الكرة$)$

المخطط الخامس: التمثيل الوسيطي للمستقيم في الفراغ "شعاع توجيه ونقطة":

التمثيل الوسيطي لمستقيم d يوازي مستقيم Δ	التمثيل الوسيطي لمستقيم يعامد مستوي	الصيغة الأولى: التمثيل الوسيطي لمستقيم مار من نقطتين A و B الصيغة الثانية: اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)	التمثيل الوسيطي للمستقيم d للفصل المشترك للمستويان P و Q
$\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{u_\Delta}$	$\vec{u} = \vec{n}$	$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$	جملة معادلتين ثم فرضية t بدلالة

المخطط السادس الوضع النسبي لمستويان في الفراغ:

نص السؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ P وQ متوازيان	نثبت أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و$\overrightarrow{n_Q}$ مرتبطان خطّياً
أثبت أنّ P وQ متقاطعان	نثبت أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و$\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطّياً
أثبت أنّ P وQ متعامدان	نثبت أنّ: $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0$
أثبت أنّ P وQ منطبقان	نثبت أنّ معادلتي P و Q متكافئتان أيّ: إحدى المعادلتين تنتج عن الاخرى بضربها بعدد حقيقي
في حال تقاطع P و Q ما هو تقاطعهما؟	تقاطعهما هو فصل مشترك (مستقيم)
اكتب التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لـ P وQ	الحالة الرّابعة من حالات كتابة التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ

المخطط السابع: الوضع النسبي لمستقيمان في الفراغ:

نص السؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ d_1 وd_2 متوازيان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و$\vec{u}_2$ مرتبطان خطّياً * d_1 وd_2 لا يشتركان بأيّة نقطة
أثبت أنّ d_1 وd_2 منطبقان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و$\vec{u}_2$ مرتبطان خطّياً * d_1 وd_2 يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط
أثبت أنّ d_1 وd_2 متخالفان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و$\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطّياً * d_1 وd_2 لا يشتركان بأيّة نقطة
أثبت أنّ d_1 وd_2 متقاطعان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و$\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطّياً * d_1 وd_2 يشتركان بنقطة
أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع d_1 وd_2	بالحلّ المشترك لجملة التمثيلات الوسيطيّة لـd_1 وd_2
أثبت أنّ d_1 وd_2 متعامدان	نثبت أنّ: $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$
هل d_1 وd_2 يقعان في مستوٍ واحد؟	ندرس الوضع النسبي لـd_1 وd_2 ونميّز الحالات: حالة ①: d_1 وd_2 متخالفان، إذاً d_1 وd_2 لا يقعان في مستوٍ واحد حالة ②: باقي الحالات إذاً d_1 وd_2 يقعان في مستوٍ واحد.

المخطط الثامن: دراسة الوضع النسبي بين مستقيم ومستوي في الفراغ:

نص السؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ P و d متوازيان	نثبت أنّ: $\vec{n}.\vec{u} = 0$
أثبت أنّ P و d متقاطعان	نثبت أنّ: $\vec{n}.\vec{u} \neq 0$
أثبت أنّ P و d متعامدان بحيث $\vec{n}$ معلوم	نثبت أنّ $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطّياً
أثبت أنّ P و d متعامدان بحيث $\vec{n}$ غير معلوم	نثبت أنّ شعاع توجيه المستقيم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطّياً من المستوي
أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي P	بالحلّ المشترك لجملة معادلات المستوي ومعادلات المستقيم نحصل على نقطة التّقاطع
هل المستقيم d محتوى في المستوي P ؟	بالحلّ المشترك لجملة المعادلات الأربعة نلاحظ أنّ المستقيم والمستوي يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط إذاً المستقيم محتوى في المستوي

المخطط التاسع: مستقيمان متقاطعان "تلاقي مستقيمان"

أثبت أنّ d_1 و d_2 متقاطعان: نميز:

وجود النقاط وأشعة التوجيه أو إمكانية إيجادها

الأسلوب الأول

* نثبت أنّ d_1 و d_2 غير متوازيان وذلك بإثبات أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيًا.
* نثبت أنّ d_1 و d_2 يقعان في مستو واحد وذلك بإثبات أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطيًا "علاقة الجاهة" ويتم تحديد نقطة التقاطع من خلال الزرع.

الأسلوب الثاني

* نكتب التمثيل الوسيطي لكل من d_1 و d_2
* اختبار الارتباط الخطي
* اختبار الاشتراك بنقطة
* ويتم تحديد نقطة التقاطع من خلال تعويض t و s في المعادلات المناسبة.

غير ذلك

نثبت وجود نقطة مشتركة على جميع المستقيمات من خلال مراكز الأبعاد المتناسبة

المخطط العاشر: المسقط القائم لنقطة على:

مستوي

- معلم: فورًا
- عشوائي:
  * معادلة المستوي
  * مستقيم عمودي
  * تقاطع مستقيم ومستوي "أربعة معادلات"

مستقيم

- معلم: فورًا
- عشوائي:
  - الأسلوب الأول:
    * المستقيم
    * مستوي عمودي
    * تقاطع مستقيم ومستوي
  - الأسلوب الثاني:
    * المستقيم
    * النقطة A' "بدلالة t"
    * يتحقق: $\overrightarrow{AA'}.\vec{u} = 0$ فنحصل على قيمة t
    * نعوض في A'

المخطط الحادي عشر: بُعد نقطة عن في الفراغ:

نقطة

المسافة بين نقطتان في الفراغ

$$\sqrt{\left(\text{المركبة الأولى}\right)^2 + \left(\text{المركبة الثانية}\right)^2 + \left(\text{المركبة الثالثة}\right)^2}$$

مستوي

يوجد قانون:

$$P: ax + by + cz + d = 0$$
$$A(x_A, y_A, z_A)$$
$$\text{dist}(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cZ_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

مستقيم

- المستقيم d هو الفصل المشترك لمستويان متعامدان P و Q

  استنادًا إلى مبرهنة فيثاغورث يتحقق:

  $$\text{dist}(A, d) = \sqrt{\text{dist}^2(A, P) + \text{dist}^2(A, Q)}$$

- غير ذلك: يكون بعد النقطة عن مستقيم في الفراغ هو المسافة بين هذه النقطة ومسقطها على هذا المستقيم

المخطط الثاني عشر: مجموعات النقاط:

صف مجموعة القاط / ماذا تمثل مجموعة النقاط نميز:

أولًا: يكون المعطى هو علاقة "مساواة" تحوي طويلة "نظيم"

نصل في هذه العلاقة للوصول إلى

- $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ تمثل الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB
- $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

ثانيًا: يكون المعطى هو علاقة:

نعوض في هذه العلاقة ونصل وصولًا إلى معادلة كما سبق.

ثالثًا: يكون المعطى هو علاقة من الشكل:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

بالإتمام إلى مربعات كاملة نحصل على:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k$$

- $k < 0$ مجموعة خالية
- $k = 0$ تمثل نقطة (x_0, y_0, z_0)
- $k > 0$ تمثل كرة مركزها (x_0, y_0, z_0) ونصف قطرها $R = \sqrt{k}$

المخطط الثالث عشر: الوضع النسبي لثلاث مستويات في الفراغ:

الوضع النسبي لثلاثة مستويات في الفراغ.

ادرس الوضع النسبي للمستويات P و Q و R

نستخدم طريقة غاوس وفق:

الخطوة الأولى: نرتب المعادلات

الخطوة الثانية: المرحلة الأولى: تحتاج أمرين وفق:

$$L_1 + L_2 \to L_2' \begin{pmatrix} \text{معكوس} \\ \text{أسفل} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{مقلوب} \\ \text{فوق} \end{pmatrix}$$

$$L_1 + L_2 \to L_3' \begin{pmatrix} \text{معكوس} \\ \text{أسفل} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{مقلوب} \\ \text{فوق} \end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: المرحلة الثانية: تحتاج أمر واحد:

$$L_2' + L_3' \to L_3'' \begin{pmatrix} \text{معكوس} \\ \text{أسفل} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{مقلوب} \\ \text{فوق} \end{pmatrix}$$

تطبيق الأوامر يحتاج العمليات الحسابية واستعن بالمسودة عند اللزوم

الخطوة الرابعة: ننظر إلى L_3'' ونميز:

- وجود Z
  - للجملة حل وحيد من L_3'' نوجد Z ، نعوض في L_2' لإيجاد y ونعوض في L_1 لإيجاد قيمة x وتكون المستويات تشترك بنقطة وحيدة.
- اختفاء Z
  - محققة: للجملة عدد لا نهائي من الحلول والمستويات تشترك بفصل مشترك
  - غير محققة: الجملة مستحيلة الحل والمستويات لا تشترك بأية نقطة

تدريج طلبات

لدينا ثلاث مستويات P و Q و R :

① أثبت أنّ P و Q يتقاطعان بفصل مشترك d أوجد تمثيله الوسيطي.

$\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطان خطياً + جملة معادلتين + فرضية t

② استنتج أن إحداثيات A نقطة تقاطع المستويات P و Q و R

تكون نقطة تقاطع المستويات P و Q و R هي ذاتها نقطة تقاطع المستقيم d و R "أربعة معادلات"

لإيجاد حجم الهرم "رباعي الوجوه"

الخطوة الأولى: نحدد قاعدة الهرم, اختر قاعدة يكون حساب مساحتها ممكناً.

الخطو الثانية: نحدد رأس الهرم.

الخطوة الثالثة: نحدد ارتفاع الهرم ونميز:

- قاعدة الهرم مستوي معلم
  - يكون ارتفاع الهرم هو المسافة بين النقطة. رأس الهرم ومسقطها على مستوي القاعدة.
- قاعدة الهرم مستوي عشوائي
  - يكون: $h = dist(\text{مستوي القاعدة , رأس الهرم})$

الخطوة الرابعة: نضع القانون ونعوّض.

ملاحظة: عندما يكون لدينا طلب إيجاد حجم مجسم ثم استنتاج مساحة وجه فإننا نعود ونحسب حجم المجسم باعتبار قاعدة المجسم هي الوجه المراد استنتاج مساحته ثم نعوض ونعزل المطلوب.

اللمسات الأخيرة في بحث التابع اللوغاريتمي

١. خواص.

٢. معادلات.

٣. متراجحات.

٤. مجموعة تعريف تابع لوغاريتمي.

٥. نهايات تابع لوغاريتمي.

٦. اشتقاق تابع لوغاريتمي.

٧. دراسة تغيرات تابع لوغاريتمي.

٨. معادلة مختلطة.

٩. متراجحة مختلطة.

١٠. مماس مشترك

اللمسات الأخيرة في بحث التابع الأسي

١. خواص.

٢. معادلات.

٣. متراجحات.

٤. مجموعة تعريف تابع أسي.

٥. نهايات تابع أسيي.

٦. نهايات مميزة.

٧. اشتقاق تابع أسي.

٨. دراسة تغيرات تابع أسي.

٩. معادلة مختلطة.

١٠. متراجحة مختلطة.

١١. مماس مشترك.

١٢. معادلات تفاضلية:

- إثبات أنّ تابع $f(x)$ هو حل لمعادلة تفاضلية
- تعيين قيمة مجهول ليكون $f(x)$ حل للمعادلة التفاضلية
- حل المعادلة التفاضلية
- تعيين حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق شرط مُعطى
- تعيين تابع يحقق المعادلة التفاضلية

١٣. التابع الأسي الذي أساسه a.

مخططات داعمة في التابع اللوغاريتمي والتابع الأسي:

المخطط الأول: المعادلة المختلطة:

دراسة تغيرات ثم اسأل نفسك هل ينعدم $g(x)$ ؟

نعم

للمعادلة حل وحيد ونحدد هذا الحل بالتجريب

لا

المعادلة مستحيلة الحل

المخطط الثاني: تطبيقات المعادلة المختلطة "لا تخلي المختلطة تاخدك بالعبطة":

التطبيق الأول: دراسة تغيرات تابع: نص السؤال: دراسة تغيرات تابع:

1. نحدد مجموعة تعريف التابع ونكتبها على هيئة مجالات
2. نوجد النهايات والصور
3. نوجد $f'(x)$
4. نعدم $f'(x)$, نتصدم أنّ المعادلة $f'(x) = 0$ مختلطة سنعود بعد قليل: نتفاهم مع المعادلة المختلطة كما تعلمنا سابقاً.
   عدنا: نميز:

للمعادلة $f(x) = 0$ حل α : فإننا نوجد $f(\alpha)$ ثم ننظم جدول تغيرات التابع f	المعادلة $f(x) = 0$ مستحيلة الحل: ننظم جدول تغيرات التابع f

التطبيق الثاني: دراسة الوضع النسبي: نص السؤال: ادرس الوضع النسبي لـ c_f و Δ

1. نشكل الفرق: $f(x) - y_\Delta$
2. نعدم الفرق: نتصدم أنّ $f(x) - y_\Delta = 0$ مختلطة سنعود بعد قليل: نتفاهم مع المختلطة كما تعلمنا سابقاً.
3. عدنا: ننظم جدول الوضع النسبي.

x	
$f(x) - y_\Delta$	
الوضع النسبي	

ملاحظة: نضع الإشارات في جدول الوضع النسبي باستخدام أسلوب التجريب.

الحسابات:

١. العاملي:
- حساب
- اختزال

٢. التراتيب:
- حساب
- إثبات علاقة
- إيجاد قيمة n

٣. التوافيق:
- حساب
- إثبات علاقة
- إيجاد قيمة n
- إيجاد قيمة n و r

٤. منشور ذو الحدين:
- قانون
- قانون الحد ذو الدليل r
- النشر
- تعيين حد
- استنتاج قيمة مجموع
- تمرين 11^{11}
- تمرين المجموع $a+b$
- تمرين إثبات أنّ A_n طبيعي
- أويلر ومنشور ذو الحدين

طرائق العد:

٥. المبدأ الأساسي في العد(تجربة تتم على مراحل)

٦. التوافيق:

(اختيار مجموعة جزئية من كلية دون الاهتمام بالترتيب) ومسائلهُ:
- عدد المصافحات
- اختيار أسئلة
- لجان لا تحوي مناصب
- عدد القطع المستقيمة
- سحب كرات معاً

ملاحظة: عند استخدام التوافيق وتثبيت مقدار ما فإننا نطرح عددهُ من فوق ومن تحت

٧. التراتيب:

(اختيار مجموعة جزئية من كلية مع الاهتمام بالترتيب والتكرار غير مسموح) ومسائلهُ:
- مسابقات تحوي مراكز أو ميداليات
- لجان تحوي مناصب
- سحب كرات على التتالي بدون إعادة

٨. القوائم المكررة:

(اختيار مجموعة جزئية من كلية مع الاهتمام بالترتيب والتكرار مسموح) ومسائلهُ: سحب كرات على التتالي مع إعادة

٩. الخانات:
- (تشكيل كلمات – رمازات – أرقام)
- ترتيب كتب

مع الانتباه أنهُ يجب مراعاة الشروط أولاً.
وفي حال كان الشرط أن العناصر مختلفة فإننا نتعامل معه بأسلوب كم عدد صفيان؟

ملاحظات:
- في مسائل اللجان إذا كانت اللجنة تحوي أكثر من نوع فإننا نكتب بالعربي ثم نترجم.
- في مسائل اللجان عند وجود متخاصمين فإننا نوجد عدد اللجان الكلي ونحذف منه عدد اللجان التي تحوي متخاصمين.
- في مسائل الهدايا نميز:
  - عدد الهدايا يساوي عدد الأشخاص نستخدم العاملي.
  - عدد الهدايا أكثر من عدد الأشخاص بواحد فإننا نحتاج إلى مرحلتين.

المرحلة الأولى:

مرحلة اختيار 2 هدية ودمجها في هدية واحدة وتتم ب $\binom{\text{عدد الهدايا}}{2}$

المرحلة الثانية:

مرحلة توزيع الهدايا على عدد الأشخاص وتتم بالعاملي

ثم نستخدم المبدأ الأساسي في العد.

ملاحظة: تباديل الحالة:

$$\text{عدد تباديل الحالة} = \frac{\text{الكلي عاملي}}{\text{جداء المكرر عاملي}}$$

حيث:

حالات خاصة:

- حالة تشابه: لا يوجد تباديل للحالة.
- حالة نسق: لا يوجد تباديل للحالة
- حالة ثلاثة مقادير اثنان منها متشابهان: نضرب بالعدد 3
- حالة ثلاثة مقادير مختلفة: نضرب بالعدد 6 .

قاعدة: في مسائل المصافحات:

- عدد المصافحات: $\binom{n}{2}$
- عدد المصافحات لـ n شخص بينهم m شخص متخاصم:

$$\text{عدد المصافحات} = \binom{n}{2} - \binom{m}{2}$$

في مسائل المضلعات المحدبة يتحقق:

$$\text{عدد أقطار مضلع محدب} = \binom{n}{2} - n$$

$$\text{عدد نقاط تقاطع الأقطار} = \binom{n}{4} + n$$

مخططات داعمة:

التراتيب P_n^r حيث: $1 \le r \le n$

المخطط الأول: قوانين التراتيب:

القانون الأول

$$P_{\text{كبير}}^{\text{صغير}} = \frac{(\text{كبير})!}{(\text{الفرق})!}$$

نستخدم هذا القانون عندما يكون الصغير مجهولاً

القانون الثاني

ضرب تنازلي بحيث عدد مرات الضرب تقابل الصغير.

$$P_5^2 = 5 \times 4 = 20$$

$$P_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

التوافيق: $\binom{n}{r}$ حيث: $0 \le r \le n$

المخطط الثاني: قوانين التوافيق:

القانون الأول

$$\binom{\text{كبير}}{\text{صغير}} = \frac{(\text{كبير})!}{(\text{صغير})!\,(\text{الفرق})!}$$

نستخدم هذا القانون عندما يكون الصغير مجهولاً

القانون الثاني

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$$

يستخدم هذا القانون عندما يكون الصغير معلوم

١. **تمهيد:**

- فضاء العينة
- الحدث
- قانون الاحتمال

٢. **الاستقلال الاحتمالي لحدثين.**

٣. **الاحتمال الشرطي.**

٤. **المسائل الكلامية:**

- معطيات الشجرة كاملة
- معطيات الشجرة غير كاملة

٥. **المتحولات العشوائية:**

- القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي
- القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية
- المتحولات العشوائية الحدانية "برنولي"

٦. **صندوق القوانين:**

- $P(\Omega) = 1 \ , \ P(\phi) = 0 \ , \ 0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$
  $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ و $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ويسمى بقانونا دومورغان
- A و B مستقلان احتمالياً
  $$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
  A و B مستقلان احتمالياً
  $$P(A|B) = P(A) \text{ أو } P(B|A) = P(B)$$
- قانون الاحتمال الشرطي:
  $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
  $P(A \cap B) = P(B|A).P(A)$ و $P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$
- التقاطع والاجتماع عملية تبديلية أيّ: $A \cup B = B \cup A$ و $A \cap B = B \cap A$

مخططات داعمة:

المخطط الأول:

فضاء العينة	الجدول "الشبكة"	الشجرة "التمثيل الشجري"	قوانين	برنولي
نضع فضاء العينة المناسب للتجربة "تعامل بإسلوب العد". المسائل: * قطع نقود متوازنة * الولادات والأطفال * حجر نرد واحد	نضع الجدول المناسب للتجربة "تتعامل بإسلوب العد". المسائل: * سحب كرتين * سحب بطاقتين * رمي حجري نرد * صندوقان وسحب كرتين من الصندوق	نضع الشجرة المناسبة "تتعامل معها حسب قوانين التمثيل الشجري" المسائل: * قطع نقود غير متوازنة * مسائل النسب المئوية * باقي المسائل تكون شجرة	كتابة بالعربي ثم ترجمة. المسائل: * سحب ثلاث كرات * سحب ثلاث بطاقات	يتم بناء قانون المسألة ثم إيجاد المطلوب المسائل: كل شي يزيد عن حده يقلب برنولي

المخطط الثاني: متحول عشوائي واحد:

النمط الأول:

اكتب القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي X :

* نضع فضاء العينة المناسب
* نحدد قيم X "معطاة صراحة أو تحسب"
* نوجد احتمالات قيم X
* نكتب القانون الاحتمالي لـ X

x_i	
p_i	

النمط الثاني:

أوجد التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . p_i$$

النمط الثالث:

أوجد التباين:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

حيث:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 . p_i$$

النمط الرابع:

أوجد الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

المخطط الثالث: القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) :

اكتب القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)

* نضع فضاء العينة الشهير المناسب.
* نحدد قيم X ونوجد احتمالاتها
* نحدد قيم Y ونوجد احتمالاتها
* ننظم جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) حيث:

الإطارات: هي قانون X و Y

الداخل: هي التقاطعات

هل X و Y مستقلان

* نوجد: $P((X = x_i) \cap (Y = y_i))$
* نحدد: $P(X = x_i)$ و $P(Y = y_i)$ ونوجد $P(X = x_i).P(Y = y_i)$
* ويكون X و Y مستقلان احتمالياً إذا تحقق:

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_i)) = P(X = x_i).P(Y = y_i)$$

اكمال جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)

* نستخدم الجمع الأفقي والشاقولي.
* في حال كان X و Y مستقلان احتمالياً فإننا نستفيد من:

(إطار)(إطار) = الداخل

$$\text{إطار} = \frac{\text{الداخل}}{\square}$$

المخطط الرابع: التعامل مع مسائل برنولي:

أولاً: يجب بناء قانون للمسألة وفق:

نحدد n

نحدد p "وهي احتمال الحدث الهدف في المرة الواحدة ويتم تحديد p بالاعتماد على فضاءات عينة شهيرة"

نحدد q حيث: $q = 1 - p$

نضع قانون المسألة وفق: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$

ثانياً: نتابع حسب نمط التمرين حيث الأنماط هي:

ايجاد احتمال حدث ما

* نحدد المطلوب
* نوجد المطلوب بحيث نعوض في قانون المسألة

القانون الاحتمالي وبرنولي

* نحدد قيم X "بحيث قيم X من 0 إلى n "
* نوجد احتمالات قيم X من خلال التعويض في قانون المسألة
* نضع جدول القانون الاحتمالي

إكمال جدول

نوجد المطلوب

إيجاد التوقع الرياضي والتباين

$$E(X) = n.p$$
$$V(X) = n.p.q$$

اللمسات الأخيرة في بحث التكامل

١. إثبات تابع أصلي:
- إثبات أنّ F تابع أصلي للتابع f
- إثبات أنّ F و G تابعان أصليان للتابع نفسهُ

٢. إيجاد التابع الأصلي.

٣. التكامل المحدد.

٤. التكامل بالتجزئة.

٥. تطبيقات التكامل:
- المساحة
- الحجم

٦. تمارين بأفكار مميزة:
- تكامل يحوي قيمة مطلقة.
- تابع الـ (min أو max)
- تمرين إيجاد $I + J$ ثم استنتاج I
- تمارين تعيين ثوابت ثم إيجاد تكامل.

مخططات داعمة:

المخطط الأول: إثبات تابع أصلي:

النمط الأول: إثبات أنّ التابع $F(x)$ تابع أصلي للتابع f على المجال I

* ثبت أنّ $F(x)$ اشتقاقي على I
* نوجد $F'(x)$
* نثبت أنّ $F'(x) = f(x)$ إذًا التابع $F(x)$ تابع أصلي للتابع f على المجال I

النمط الثاني: إثبات أنّ التابعان $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان للتابع نفسه على المجال I

* نثبت أنّ كل من $F(x)$ و $G(x)$ اشتقاقي على I
* نثبت أنّ: ثابت $= F(x) - G(x)$
* إذًا $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان للتابع نفسهُ على المجال I

المخطط الثاني: إيجاد $F(x)$ ، نص السؤال: أوجد التابع الأصلي:

أوجد التابع الأصلي

أولًا: إذا كان: $f(x) = \alpha$ فإنّ: $F(x) = \alpha x$

ثانيًا:

كيفية تحديد ثانيًا: يكون التابع f عبارة عن جداء قوة بمشتق مضمون القوة أيّ: $f(x) = g'(x).\left(g(x)\right)^n$

كيفية تطبيق ثانيًا: نهمل المشتق ونضيف للأس واحد ونقسم على الأس الجديد أيّ: $F(x) = \frac{\left(g(x)\right)^{n+1}}{n+1}$

ملاحظات:

1. تطبيق مباشر: إذا كان $f(x) = x^n$ فإنّ: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
2. احيانًا تحتاج للإصلاح "العامل المشترك-النشر-التباعد الاجتماعي-شطّب قطّب-الاستنساخ" من أجل إظهار $g'(x)$
3. عند وجود جذر فإننا نحوله إلى قوة.

ثالثًا:

كيفية تحديد ثالثًا: يكون كسر فيه البسط مشتق المقام

كيفية تطبيق ثالثًا: يكون التابع الأصلي هو لوغاريتم القيمة المطلقة للمقام

ملاحظة: أحيانًا نحتاج للإصلاح من أجل إظهار المشتق في البسط

رابعًا: إذا كان التابع كسري وفشل ثانيًا وثالثًا فالأمر متروك لـ رابعًا ونميز:

- درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام
  فإننا نصلح باستخدام القسمة الإقليدية ثم نتابع كما سبق
- درجة البسط أصغر من درجة المقام
  فإننا نصلح باستخدام تفريق الكسور ثم نتابع كما سبق

خامسًا:

كيفية تحديد خامسًا: يكون لدينا التابع f من الشكل: $f(x) = g'(x).e^{g(x)}$

كيفية تطبيق خامسًا: نهمل المشتق ونضع $e^{g(x)}$ كما هو.

ملاحظات:

1. أحيانًا نحتاج للإصلاح من أجل إظهار $g'(x)$
2. تطبيق مباشر: إذا كان $f(x) = e^{\alpha x}$ فإنّ: $F(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$

سادسًا: تكاملات التوابع المثلثية

قوانين

* $f(x) = \cos x \to F(x) = \sin x$
* $f(x) = \sin x \to F(x) = -\cos x$
* $f(x) = 1 + \tan^2 x \to F(x) = \tan x$
* $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \to F(x) = \tan x$
* $f(x) = 1 + \cot^2 x \to F(x) = -\cot x$
* $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \to F(x) = -\cot x$

تطبيق مباشر

* $f(x) = \cos(\alpha x) \to F(x) = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)$
* $f(x) = \sin(\alpha x) \to F(x) = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$

ملاحظة:

نحتاج للإصلاحات ودساتير مثلثية للوصول إلى القوانين أو تطبيق مباشر

مهارات:

- $\cos^2$ أو $\sin^2$ لحالة "نص ونص"
- $\sin^3$ أو $\cos^3$ لحالة "نفرط ثم ليتني وليتها"
- $\sin^4$ أو $\cos^4$ نصلح وفق: $(\cos^2 \quad)^2$ ثم نص ونص.
- $\tan$ أو $\cot$ "قانون ثم ثالثًا"
- $\tan^2$ أو $\cot^2$ "نضيف ونطرح ثم قانون"

المخطط الثالث: التكامل المحدد "الناتج عدد حقيقي":

قانون:

$$I = \int_a^b f(x)\,.\,dx$$
$$= [F(x)]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

أيَّ: التكامل المحدد: إيجاد $F(x)$ ثم نعوض.

ملاحظة:

الرمز $\int dx$ سوا سوا

خواص:

* $I = \int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$
* $I = \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
* $I = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

$$= \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx$$

شرط التطبيق: أن تكون حدود التكامل نفسها وتطبق بشكل عكسي.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx$$

شرط التطبيق: أن يكون التابع $f(x)$ نفسه وتطبق بشكل عكسي

عند وجود قيمة مطلقة أو تابع ⬚ min أو تابع الـ ⬚ max يجب التخلص منها قبل المكاملة وفق:

وجود قيمة مطلقة

* ندرس إشارة مضمون القيمة المطلقة.
* نتخلص من القيمة المطلقة
* نستخدم علاقة شال "الزرع" عند اللزوم

تابع الـ ⬚ min

* ندرس إشارة
* نختار التابع الأصغر

ملاحظة: في حال كان تابع الـ ⬚ max فإننا نختار الأكبر

التكامل بالتجزئة

عند فشل القواعد من أولاً إلى سادساً وكان التابع عبارة عن جداء تابعين فإننا نلجأ إلى استخدام التكامل بالتجزئة حيث التكامل بالتجزئة هو: فرضية مناسبة وقانون.

ملاحظة:

* أحيانًا نحتاج للتكامل بالتجزئة مرات متتالية.
* أحيانًا يكون التكامل بالتجزئة دوري

المخطط الرابع: تطبيقات التكامل بالتجزئة:

حساب مساحة

نص السؤال: احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني والمستقيم Δ "أفقي-مائل" والمستقيمان $x = a$ و $x = b$

فكرة الحل:

* نرسم الخط البياني ونحدد النقطة المطلوبة
* نضع قانون المساحة: $S = \int_a^b (\text{فوق} - \text{تحت})\,dx$

حيث: "فوق وتحت هما c_f و Δ " وحيث" a و b حدود التكامل"

* نتابع كما سبق.

ملاحظات:

* ناتج المساحة موجب تمامًا
* عندما يكون Δ هو محور الفواصل إذًا $y_\Delta = 0$
* أحيانًا نستخدم علاقة شال عند اللزوم

حساب حجم

نص السؤال: احسب حجم المجسم الناتج عن دوران الخط البياني حول محور الفواصل دورة كاملة على المجال $[a, b]$

فكرة الحل: نطبق القانون: $V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx$