البحث الأول

المتتاليات

تعريف:

هي تابع مجموعة تعريفه الأعداد الطبيعية

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

نرمز للمتتالية $u_n \; ; n \geq n_0$

ندعو $[u_n]$ حد ، دليل الحد

نعبر عن المتتالية بثلاث طرق:

1) إعطاء الحد العام:

مثال: $u_n = \frac{n+2}{n+3}$

2) بعلاقة تدريجية:

مثال: $u_0 = 3 \,, u_{n+1} = 2u_n + 4$

3) على شكل سلسلة:

مثال: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

دراسة اطراد متتالية:

ما معنى اطراد متتالية (التزايد او التناقص للمتتالية)

1) الطريقة الأولى: (العامة)

نشكل الفرق $u_{n+1} - u_n$

وينتج لدينا:

- المتتالية متزايدة تماماً $u_{n+1} - u_n > 0$
- المتتالية متزايدة $u_{n+1} - u_n \geq 0$
- المتتالية متناقصة تماماً $u_{n+1} - u_n < 0$
- المتتالية متناقصة $u_{n+1} - u_n \leq 0$
- المتتالية ثابتة $u_{n+1} - u_n = 0$

تستعمل الطريقة العامة في جميع الحالات

2) الطريقة الثانية:

بشرط أن تكون حدودها موجبة فقط

- المتتالية متزايدة $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$
- المتتالية متناقصة $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
- المتتالية ثابتة $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

تستعمل هذه الطريقة عند وجود $\left(\text{عدد}\right)^n$ أو أعاملي

3) الطريقة الثالثة:

نفرض $u_n = f(x)$ ثم نشتق المتتالية ونلاحظ:

- المتتالية متزايدة $f'(x) > 0$
- المتتالية متناقصة $f'(x) < 0$
- المتتالية ثابتة $f'(x) = 0$

تستعمل عندما يكون الحد العام للمتتالية على شكل تابع

ادرس اطراد كل من المتتاليات:

1. $u_n = 3n + 2$

نفرض $u_n = f(n)$

$$f(x) = 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3 > 0$$

فالمتتالية متزايدة

2. $u_n = (-1)^n$

ندرس سلوك المتتالية:

$$n = 0 \Rightarrow u_0 = (-1)^0 = 1$$
$$n = 1 \Rightarrow u_1 = (-1)^1 = -1$$
$$n = 2 \Rightarrow u_2 = (-1)^2 = 1$$

حدود المتتالية متناوبة فهي ليست مطردة.

3. $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ندرس سلوك المتتالية لنتأكد من أن حدودها موجبة:

$$n = 0 \Rightarrow u_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow u_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$$

$$n = 2 \Rightarrow u_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1$$

فالمتتالية متناقصة

المتتالية الحسابية

كل حد ينتج عن سابقه بإضافة r وندعو r أساس المتتالية

لإثبات أن المتتالية حسابية:

نستخدم $\boxed{u_{n+1} - u_n = r}$

- إذا كان الفرق يحوي n فإن المتتالية ليست حسابية.
- إذا كان الفرق لا يحوي n فإن المتتالية حسابية.

خواص المتتالية الحسابية:

- إذا كان a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن:

$$\boxed{b = \frac{a + c}{2}}$$

- من أجل العددان n, m فإن:

$$\boxed{u_n = u_m + (n - m)r}$$

يستخدم لإيجاد الحد العام u_n أو حد من الحدود

- مجموع n حد من متتالية حسابية (إيجاد مجموع في المتتالية الحسابية) يعطى بالعلاقة:

$$\boxed{S = \frac{n(a + b)}{2}}$$

a : الحد الأول

b : الحد الأخير

n : عدد الحدود من المتتالية المراد جمع حدودها:

$n =$ دليل الحد الأخير $-$ دليل الحد الأول $+ 1$

المتتالية الهندسية

كل حد ينتج عن سابقه بضربه ب q وندعو q أساس المتتالية.

إثبات أن المتتالية هندسية:

نستخدم $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = q}$

- إذا كانت خالية من n فإن المتتالية هندسية.

خواص المتتالية الهندسية:

- إذا كان a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن:

$$\boxed{b^2 = a.c}$$

- من أجل العددان m, n فإن:

$$\boxed{u_n = u_m . q^{n-m}}$$

يستخدم لإيجاد الحد العام u_n أو حد من الحدود.

- مجموع n حد متعاقب من متتالية هندسية (إيجاد مجموع في المتتالية الهندسية):

$$\boxed{S = a\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right)}$$

a : أول حد

n : عدد الحدود

q : أساس المتتالية

$n =$ دليل الحد الأخير $-$ دليل الحد الأول $+ 1$

18/1: لتكن المتتالية

$$u_n = \frac{(2)^n}{(3)^{n+1}}$$

أثبت أن المتتالية هندسية وعين أساسها.

يجب أن نبرهن أن

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

$$u_{n+1} = \frac{(2)^{n+1}}{(3)^{n+2}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(2)^{n+1}}{(3)^{n+2}}}{\frac{(2)^n}{(3)^{n+1}}}$$

$$= \frac{2^{n+1}.3^{n+1}}{2^n.3^{n+2}}$$

تكرورية هامة

$$a^{m+n} = a^m.a^n$$

$$= \frac{2^1.2.3^{n+1}}{2^n.3.3^{n+1}} = \frac{2}{3} = q$$

المتتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

18/2: الأسئلة الآتية تتعلق بمتتاليات حسابية او هندسية:

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية فيها $u_5 = -13$ ،

$u_2 = 41$ ، احسب u_{20}.

نبحث أولاً عن r

من أجل العددان n, m فإن:

$$u_n = u_m + (n-m)r$$
$$u_5 = u_2 + (5-2)r$$
$$-13 = 41 + 3r$$
$$\Rightarrow -54 = 3r \Rightarrow r = -18$$

$$u_{20} = u_5 + (20-5)(-18)$$
$$u_{20} = -13 + (15)(-18)$$
$$\Rightarrow u_{20} = -283$$

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية فيها

$u_{10} = \frac{25}{2197} u_7 = \frac{1}{1080}$ احسب u_{30}.

$$u_n = u_m.q^{n-m} \Rightarrow \frac{u_n}{u_m} = q^{n-m}$$

$$\frac{u_{10}}{u_7} = q^{10-7} \Rightarrow \frac{25}{2197}.\frac{1080}{1} = q^3$$

$$\Rightarrow q = \frac{30}{13}$$

$$\frac{u_{30}}{u_{10}} = q^{30-10} \Rightarrow u_{30} = \frac{25}{2197}.\left(\frac{30}{13}\right)^{20}$$

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$.

احسب u_n بدلالة n واستنتج قيمة المجموعين:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$$
$$u_{30} + u_{31} + u_{32}$$

من أجل العددان n, m فإن:

$$u_n = u_m + (n-m)r$$
$$u_n = u_1 + (n-1)3$$
$$u_n = -2n + 3n - 3$$
$$u_n = 3n - 5$$

$$S_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$$

$$S_1 = \frac{n(a+b)}{2}$$
$$n = 20 + 1 - 1 = 20$$
$$a = u_1 = -2$$
$$b = u_{20} = 3 \times 20 - 5 = 55$$
$$S_1 = \frac{20(-2+55)}{2} = 530$$

$$S_2 = u_{31} + u_{32} + u_{33}$$

$$S_2 = \frac{n(a+b)}{2}$$
$$n = 33 - 31 + 1 = 3$$
$$a = u_{30} = 90 - 5 = 85$$
$$b = u_{32} = 91 \quad S_2 = \frac{3(85+91)}{2} = 264$$

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $u_1=-2$

احسب u_n بدلالة n واستنتج قيمة المجموعين:

$u_1+u_2+\cdots+u_7$

$u_2+u_4+\cdots+u_{2n}$

من أجل العددان n, m

$$u_n = u_m \cdot q^{n-m}$$

$$u_n = u_{-1}.3^{n-1} \Rightarrow u_n = -\frac{2}{3}(3)^n$$

$$S_1 = u_1+u_2+\cdots+u_7$$

$$S_1 = a.\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$a = u_1 = -2$$

$$n = 7-1+1 = 7$$

$$q = 3$$

$$S_1 = (-2).\frac{1-3^7}{1-3}$$

$$S_1 = (-2).\frac{1-3^7}{-2}$$

$$S_1 = 1-2187 = -2186$$

$$S_2 = u_2+u_4+\cdots+u_{2n}$$

متتالية هندسية أساسها $q=(3)(3)=9$ وفيها:

$$a = u_2 = (-2)(3) = -6$$

$$S_2 = a.\frac{1-q^n}{1-q}$$

$n = \frac{2n-2}{2}+1$

$n = \frac{2n}{2}-\frac{2}{2}+1 = n$

$$S_2 = (-6).\frac{1-9^n}{1-9}$$

$$S_2 = -6.\frac{1-9^n}{-8} = \frac{3}{4}[1-9^n]$$

$= -\frac{6}{8}$

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية أساسها -2 وفيها $u_0=-3$.

احسب

$u_{25}+u_{26}+\cdots+u_{125}$

من أجل العددان n, m فإن:

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

$$u_n = u_0 + (-2n) = -3-2n$$

$$S = \frac{n(a+b)}{2}$$

$$n = 125-25+1 = 101$$

$$a = u_{25} = -53$$

$$b = u_{125} = -253$$

$$S = \frac{101(-53-253)}{2} = \frac{101(-306)}{2}$$

$$S = 101(-153) = -15453$$

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $u_0=1$.

احسب $u_3+u_4+\cdots+u_{10}$

نوجد الحد العام من أجل العددان n, m

$$u_n = u_m \cdot q^{n-m}$$

$$u_n = u_0 \cdot q^n = 2^n$$

$$S = a.\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$a = u_3 = 2^3 = 8$$

$$n = 10-3+1 = 8$$

$$q = 2$$

$$S = 8.\frac{1-2^8}{1-2}$$

$$S = -8[1-2^8] = 2040$$

احسب المجموع:

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \cdots + 10$$

نكشة التمرين:

$$S = \frac{1}{2}[1 + 2 + 3 + \cdots 20]$$

المتتالية حسابية أساسها $r = 1$ وحدها الأول

$$u_0 = 1 \text{ و } n = 20$$

$$S' = \frac{n(a+b)}{2} = \frac{20(1+20)}{2} = 210$$

$$S = \frac{1}{2}S' = \frac{210}{2} = 105$$

a, b, c حدود متعاقبة من متتالية هندسية، عينها علماً أن:

$$a.b.c = 343$$
$$a + b + c = 36.75$$

$$b^2 = a.c \Rightarrow b^3 = 343 \Rightarrow b = 7$$

$$a.7.c = 343 \Rightarrow a.c = 49$$

$$a + b + c = 36.75$$
$$\Rightarrow a + 7 + c = 36.75$$
$$\Rightarrow a + c = 29.75$$
$$\Rightarrow a = 29.75 - c$$
$$\Rightarrow (29.75 - c).c = 49$$
$$-c^2 + 29.75.c - 49 = 0$$
$$\Delta = 29.75^2 - 4(-1)(-49)$$
$$\Delta = 689.0625 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 26.25$$

إما:
$$c_1 = \frac{-29.75+26.25}{-2} = 1.75$$
$$\Rightarrow a_1 = 28$$

أو:
$$c_2 = \frac{-29.75-26.25}{-2} = 28$$
$$\Rightarrow a_2 = 1.75$$

14/4: ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية:

1. $u_n = \frac{3}{n^2}$

الطريقة الأولى:

بما أن حدود المتتالية u_n موجبة تماماً نستخدم

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{(n+1)^2} . \frac{n^2}{3} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$$

فالمتتالية متناقصة تماماً.

الطريقة الثانية:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{(n+1)^2} - \frac{3}{n^2}$$
$$= \frac{3n^2 - 3n^2 - 6n - 3}{n^2(n+1)^2} < 0$$

فالمتتالية متناقصة تماماً.

2. $u_n = \sqrt{3n+1}$

$$u_{n+1} = \sqrt{3n+4}$$
$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1}$$

نضرب بالمرافق

$$= \frac{(\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1})(\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1})}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}}$$
$$= \frac{3n+4-3n-1}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}} > 0$$

فالمتتالية متزايدة تماماً

احمد تكروري رياضيات @Ahmad_Tkrory احمد تكروري 099 444 60 57

3) $u_n = \frac{2n-1}{n+4}$

$$u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1+4} = \frac{2n+1}{n+5}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{n+5} - \frac{2n-1}{n+4}$$

$$= \frac{2n^2+9n+4-2n^2-9n+5}{(n+5)(n+4)}$$

$$= \frac{9}{(n+4)(n+5)} > 0$$

فالمتتالية متزايدة تماماً

4) $u_n = \frac{1}{n^2+1}$

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{1}$$

$$= \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} < 1$$

المتتالية متناقصة تماماً لأن المقام أكبر من البسط

5) $u_n = \frac{3n+1}{n-2}$

$$u_{n+1} = \frac{3(n+1)+1}{n+1-2} = \frac{3n+4}{n-1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n+4}{n-1} - \frac{3n+1}{n-2}$$

$$= \frac{(3n^2-6n+4n-8)-(3n^2-3n+n-1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{(3n^2-2n-8-3n^2+2n+1)}{(n-1)(n+2)}$$

$$= \frac{-7}{(n-1)(n-2)} < 0$$

فالمتتالية متناقصة تماماً.

6) $u_n = \frac{n}{10^n}$

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{10^{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{10^{n+1}} - \frac{n}{10^n}$$

$$= \frac{n+1-10n}{10^{n+1}} = \frac{-9n+1}{10^{n+1}} < 0$$

فالمتتالية متناقصة تماماً

7) $u_0 = 2 \,, u_{n+1} = u_n - 3$

$u_{n+1} - u_n = -3 < 0$ متناقصة تماماً

8) $u_0 = 1 \;, u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ متناقصة تماماً

9) $u_0 = 1 \;, u_{n+1} = 2u_n$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$ متزايدة تماماً.

الاستقراء الرياضي: (البرهان بالتدريج)

يستخدم لبرهان علاقات تحوي n خطواته:

1) نرمز للقضية $E(n)$

2) نبرهن صحة القضية من أجل $n = n_0$ أو $E(n_0)$

3) نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$ (فرضية البرهان). ونرمز له ب *

4) نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$ مع الاستفادة من *

20/1: برهن صحة القضية:

مهما كان العدد الطبيعي $n \geq 1$ فإن:

$$S_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نرمز للقضية $E(n)$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 1$ أو $E(1)$

$$\ell_1 = 1^3 = 1$$

$$\ell_2 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

القضية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$

$$S_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$

$$S_{n+1} = \underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3}_{\ell_1} = \underbrace{\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}}_{\ell_2}$$

نبرهن من ℓ_1 إلى الوصول إلى ℓ_2

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + \frac{4(n+1)}{4}\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \ell_2$$

القضية صحيحة من أجل $n+1$

21/1: نعرف في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

1. احسب S_1, S_2, S_3 ثم عبر عن S_{n+1} بدلالة n, S_n
2. أثبت بالتدريج أنه في حالة أية عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

$$S_1 = 1^2 = 1$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

نرمز للقضية $E(n)$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 1$

$$\ell_1 = S_1 = 1$$

$$\ell_2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$S_n = 1^2 + 2^3 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$\ell_1 = S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\ell_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

نوحد مقامات ℓ_2

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\ell_1 = \ell_2$$

القضية صحيحة من أجل $n+1$

18/3: متتالية معرفة تدريجياً وفق $(v_n)_{n\geq 0}$

$v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$ ، $v_0 = 1$

1. أثبت أن $v_n > 0$ مهما كان $n \in \mathbb{N}$
2. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = \frac{1}{v_n}$ متتالية حسابية.
3. استنتج عبارة v_n بدلالة n

من أجل $n = 0$: $v_0 = 1$ محققة

بفرض العلاقة صحيحة من أجل n أي أن:

$$v_n > 0 \ldots (*)$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$v_{n+1} > 0$$

من العلاقة $(*)$: $v_n > 0$ نضيف 1:

$$1 + v_n > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+v_n} < 1$$

نضرب بـ -1:

$$0 > \frac{-1}{1+v_n} > -1$$

نضيف 1

$$1 > 1 - \frac{1}{1+v_n} > 0$$

$$1 > \frac{1+v_n-1}{1+v_n} > 0$$

$$\frac{v_n}{1+v_n} > 0 \Rightarrow v_{n+1} > 0$$

العلاقة صحيحة من أجل $n+1$

$$u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1+v_n}{v_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n}{v_n} = 1$$

المتتالية حسابية أساسها $r = 1$

$$u_n = u_0 + n.r \; ; u_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$u_n = n+1 \Rightarrow v_n = \frac{1}{u_n} = \frac{1}{n+1}$$

تمارين ومسائل الوحدة

1 / 22: ادرس اطراد المتتاليات الآتية:

1. $u_n = -3n+1$

$$u_{n+1} = -3(n+1)+1 = -3n-2$$

$$u_{n+1} - u_n = (-3n-2) - (-3n+1)$$

$$= -3n - 2 + 3n - 1 = -3 < 0$$

متناقصة تماماً فهي مطردة.

2. $u_n = \frac{n+1}{n+2}$

نفرض $u_n = f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

$$f'(x) = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$$

متزايدة تماماً فهي مطردة.

3. $u_n = 2^n$

$$u_{n+1} = 2^{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n.2}{2^n} = 2 > 1$$

متزايدة تماماً فهي مطردة.

4. $u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

ندرس سلوك المتتالية:

$n = 1 \Rightarrow u_1 = -1$

$n = 2 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{4}$

$n = 3 \Rightarrow u_3 = -\frac{1}{27}$

المتتالية متناوبة الإشارة فهي غير مطردة.

5. $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

نفرض $u_n = f(x)$ ثم نشتق:

$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{x^4} < 0$

المتتالية متناقصة تماماً فهي مطردة

6. $u_n = \frac{n^2}{n!}$

تكرورية اليوم بتنفعك بكرا :

$0! = 1$

$2! = 2.1$

$n! = n(n-1)!$

$(n+1)! = (n+1)n!$

$u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1).n!} . \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} < 1$

المتتالية متناقصة تماماً بدءاً من $n = 2$ فهي مطردة.

7. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

المتتالية متزايدة تماماً فهي مطردة.

8. $u_0 = 8,\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$

$n = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

$n = 1 \Rightarrow u_2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

لنثبت أن المتتالية ثابتة الحدود وفق الحد 8

عند $n = 0$ لنثبت من أجل $n = 0$

$u_0 = 8$ محقق

نفرض صحة القضية من أجل n أي $u_n = 8$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

أي لنثبت أن: $u_{n+1} = 8$

$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$ فالمتتالية ثابتة فهي مطردة.

9. $u_0 = 2 ; u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$

$n = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{3}{4}(2) + 2 = \frac{7}{2}$

$n = 2 \Rightarrow u_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right) + 2 = \frac{27}{8}$

نلاحظ أن المتتالية متزايدة تماماً من أجل $n = 0, 1$

لنثبت ان المتتالية متزايدة أي لنثبت أن:

$u_{n+1} - u_n > 0$

من أجل $n = 0$

$u_1 - u_0 = \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2} > 0$

نفرض القضية صحيحة من أجل n

$u_{n+1} - u_n > 0$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} + 2$

$u_{n+2} - u_{n+1} =$

$= \frac{3}{4}u_{n+1} + 2 - \frac{3}{4}u_n - 2$

$= \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n) > 0$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$ وتكون متزايدة تماماً فهي مطردة.

22/2: المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق:

$u_{n+1} = 2u_n - 3$ و $u_0 = 2$

1. احسب u_5, u_4, u_3, u_2, u_1
2. استنتج عبارة u_n بدلالة n (استفد من حساب المقدار $u_n - 3$)

$n = 0 \Rightarrow u_1 = 2u_0 - 3 = 1$
$n = 1 \Rightarrow u_2 = 2u_1 - 3 \Rightarrow u_2 = -1$
$n = 2 \Rightarrow u_3 = 2(-1) - 3 = -5$
$n = 3 \Rightarrow u_4 = 2(-5) - 3 = -13$
$n = 4 \Rightarrow u_5 = 2(-13) - 3 = -29$

$u_1 - 3 = -2 \Rightarrow u_1 = -(2)^1 + 3$
$u_2 - 3 = -4 \Rightarrow u_2 = (-2)^2 + 3$
$u_3 - 3 = -8 \Rightarrow u_3 = -(2)^3 + 3$
$u_4 - 3 = -16 \Rightarrow u_4 = -(2)^4 + 3$

وهكذا فإن $u_n = -(2)^n + 3$

$u_{n+1} = a.u_n + b$
$u_n = c(a)^n + d$

حيث $c, d \in \mathbb{R}$ يجب حسابه

نلاحظ من نص السؤال $a = 2 , b = -3$

$u_0 = c(2)^0 + d \Rightarrow 2 = c + d$
$u_1 = c(2)^1 + d \Rightarrow 1 = 2c + d$

بالطرح: $-1 = c$

$\Rightarrow 2 = -1 + d \Rightarrow d = 3$

وبالتالي:

$$u_n = -(2)^n + 3$$

22/3: متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة بالشكل:

$u_0 = 3 , u_{n+1} = -u_n + 4$

عين u_5, u_4, u_3, u_2, u_1 ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

$n = 0 \Rightarrow u_1 = -3 + 4 = 1$
$n = 1 \Rightarrow u_2 = -1 + 4 = 3$
$n = 2 \Rightarrow u_3 = -3 + 4 = 1$
$n = 3 \Rightarrow u_4 = -1 + 4 = 3$
$n = 4 \Rightarrow u_5 = -3 + 4 = 1$

إذاً: $u_n = (-1)^n + 2$

22/4: أثبت بالتدريج صحة الخاصيتين الآتيتين:

1. $1 + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 1$

$\ell_1 = 1$
$\ell_2 = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$

القضية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$1 + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1 \quad (*)$

نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$

$1 + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)!$
$= (n+2)! - 1$

$(n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)! =$
$(n+2)! - 1$

نعمل على ℓ_1 حتى نصل إلى ℓ_2

نسحب من $(n+1)!$ عامل مشترك

$\ell_1 = (n+1)!\,[1 + n + 1] - 1 =$
$(n+1)!\,(n+2) - 1 = (n+2)! - 1 = \ell_2$

القضية صحيحة من أجل $n + 1$

$n! \geq 2^{n-1}$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 1$

$$\ell_1 = 1! = 1$$
$$\ell_2 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$$
$$\ell_1 = \ell_2$$

القضية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$n! \geq 2^{n-1} \ldots (*)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$

$$(n+1)! \geq 2^n$$

نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(n+1)$

$$(n+1)n! \geq 2^{n-1}(n+1)$$

من أجل $n = 1$:

$$(n+1) = 2$$

$$\Rightarrow (n+1)! \geq 2^{n-1}.2$$
$$\Rightarrow (n+1)! \geq 2^n$$

والقضية صحيحة من أجل $n + 1$

22/5: في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ ليكن:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

و $v_n = u_{2n} - u_n$

أثبت أن المتتالية v_n متزايدة تماماً.

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$u_{2n} = u_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$v_{n+1} =$$
$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2}$$
$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

والمتتالية متزايدة تماماً

22/6: c, b, a حدود متعاقبة من متتالية هندسية،

$c, 2b, 3a$ حدود متعاقبة من متتالية حسابية.

عين q أساس المتتالية الهندسية حيث $a \neq 0$

حسب تعريف المتتالية الهندسية $b = a.q$

$$c = b.q = a.q.q = a.q^2$$

وحسب خواص المتتالية الحسابية

$$2b = \frac{c+3a}{2}$$
$$\Rightarrow 2a.q = \frac{a.q^2+3a}{2}$$

$$4q = q^2 + 3 \Rightarrow q^2 - 4q + 3 = 0$$
$$\Rightarrow (q-1).(q-3) = 0$$
$$q = 1 \quad , \quad q = 3$$

23/7: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق:

$$u_0 = 7 , u_{n+1} = 10u_n - 18$$

عبر عن u_n بدلالة n ثم تحقق من صحة هذه العبارة مهما كانت $n \in \mathbb{N}$

$$n = 0 \Rightarrow u_1 = 10u_0 - 18 = 52$$
$$u_1 = 5(10)^1 + 2$$
$$n = 1 \Rightarrow u_2 = 520 - 18 = 502$$
$$u_2 = 5(100)^2 + 2$$
$$n = 2 \Rightarrow u_3 = 5020 - 18 = 5002$$
$$u_3 = 5(10)^3 + 2$$
$$u_n = 5(10)^n + 2$$

لنثبت صحة العلاقة بالاستقراء الرياضي

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = 0$

$$u_0 = 5(10)^0 + 2 = 7$$

والقضية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$u_n = 5(10)^n + 2 \ ...(*)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$

$$u_{n+1} = 5(10)^{n+1} + 2$$

نضرب طرفي $(*)$ بـ10

$$10u_n = 5(10)^{n+1} + 20$$

نطرح 18 من الطرفين

$$10\, u_n - 18 = 5(10)^{n+1} + 2$$
$$u_{n+1} = 5(10)^{n+1} + 2$$

القضية صحيحة من أجل $n + 1$

24/10: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتدريج

وفق: $u_0 = 1 , u_1 = 4$

$$u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \ ; n \geq 1$$

1. عين عددين حقيقيين b, a يحققان

$$a.b = 6 , a + b = 5$$

إما $a = 2 , b = 3$ أو $a = 3 , b = 2$

2. لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل:

$$v_n = u_{n+1} - au_n$$

أثبت أن المتتالية v_n متتالية هندسية أساسها b

الحالة الأولى: $a = 2 , b = 3$

$$v_n = u_{n+1} - 2u_n$$
$$v_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1}$$
$$v_{n+1} = 5u_{n+1} - 6u_n - 2u_{n+1}$$
$$= 3u_{n+1} - 6u_n = 3(u_{n+1} - 2u_n)$$
$$v_{n+1} = 3v_n$$
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 3$$

فالمتتالية هندسية أساسها $b = 3$

3. لتكن $(w_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة

$$w_n = u_{n+1} - bu_n$$

أثبت أن المتتالية w_n هندسية أساسها a.

$$w_n = u_{n+1} - b.u_n \ ; b = 3$$
$$w_n = u_{n+1} - 3u_n$$
$$w_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1}$$
$$w_{n+1} = 5u_{n+1} - 6u_n - 3u_{n+1}$$
$$w_{n+1} = 2u_{n+1} - 6u_n$$
$$= 2\left(u_{(n+1)} - 3u_n\right) = 2w_n$$
$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = 2$$

فالمتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $a = 2$

④ عبر عن v_n، w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

$$v_n = u_{n+1} - 2u_n$$
$$v_0 = u_1 - 2u_0$$
$$v_0 = 4 - 2(1) = 2$$
$$v_n = v_0 . q^n \ ; q = b = 3$$
$$v_n = (2)(3)^n$$

$$w_n = u_{n+1} - 3u_n$$
$$w_0 = 4 - 3(1) = 1$$
$$w_n = w_0 . q^n \ ; q = a = 2$$
$$w_n = (2)^n$$

$$v_n = u_{n+1} - 2u_n$$
$$\Rightarrow (2)(3)^n = u_{n+1} - 2u_n \ ... (1)$$
$$w_n = u_{n+1} - 3u_n$$
$$\Rightarrow (2)^n = u_{n+1} - 3u_n \ ... (2)$$

بطرح (1) من (2)

$$(2)(3)^n - (2)^n = u_n$$
$$u_n = (2)(3)^n - (2)^n$$

:25/11

① أثبت أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 2$ أن:

$$3n^2 \geq (n+1)^2$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 2$

$$12 \geq 9$$

محققة فالقضية صحيحة من أجل $n = 2$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$3n^2 \geq (n+1)^2 \ ... (*)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$$
$$3n^2 + 6n + 3 \geq n^2 + 4n + 4$$

نضيف للعلاقة $(*)$ المقدار $6n + 3$

$$3n^2 + 6n + 3 \geq (n+1)^2 + 6n + 3$$
$$3(n^2 + 2n + 1) \geq n^2 + 2n + 1 + 6n + 3$$
$$3(n+1)^2 \geq n^2 + 4n + 4 + 4n$$
$$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2 + 4n \ ; 4n > 0$$
$$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

فالعلاقة صحيحة أياً كان $n \geq 2$

② لتكن العلاقة: $E(n) : 3^n \geq 2^n + 5n^2$

A) ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم تكون $E(n)$ صحيحة عنده؟

$n = 1 \Rightarrow 3 \geq 2 + 5 \Rightarrow 3 \geq 7$ خاطئة

$n = 2 \Rightarrow (3)^2 \geq 2^2 + 5(2)^2 \Rightarrow 9 \geq 24$ خاطئة

$n = 3 \Rightarrow (3)^3 \geq 2^3 + 5(2)^3 \Rightarrow 27 \geq 53$ خاطئة

$n = 4 \Rightarrow 3^4 \geq 2^4 + 5(4)^4 \Rightarrow$

$81 \geq 91$ خاطئة

$n = 5 \Rightarrow 243 \geq 157$ صحيحة

B) اثبت أن $E(n)$ صحيحة أياً يكن العدد الطبيعي $n \geq 5$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 5$

$$243 \geq 157$$

القضية صحيحة من أجل $n = 5$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$3^n \geq 2^n + 5n^2 \ ... (*)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2$$

نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $3 > 0$

$$3.(3)^n \geq 3[(2)^n + 5n^2]$$

$$3^{n+1} \geq 3(2)^n + 3(5n^2)$$
$$3^{n+1} \geq (2)^n + 2(2)^n + 5(3n^2)$$
وبما أن $3n^2 \geq (n+1)^2$ نعوض:
$$3^{n+1} \geq (2)^n + (2)^{n+1} + 5(n+1)^2$$
$$(3)^{n+1} \geq (2)^{n+1} + 5(n+1)^2; 2^n > 0$$
والقضية صحيحة من أجل $n+1$

25/14: نرمز للقضية "يقسم العدد 9 العدد $10^n + 1$" بالرمز $E(n)$ في حالة $n \in \mathbb{N}$

1. أثبت أنه إذا كانت القضية $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد n كانت عندئذٍ $E(n+1)$ ضص

القضية: يقسم العدد 9 العدد $E(n): 10^n + 1$

بفرض أنه صحيحة من أجل $n+1$

يقسم العدد 9 العدد $E(n+1): 10^{n+1} + 1$

$$(10)^{n+1} + 1 = (10)(10)^n + 1$$
$$= 10(10^n + 1 - 1) + 1$$
$$= 10(10^n + 1) - 10 + 1$$
$$= 10(10^n + 1) - 9$$

يقسم العدد 9 من الفرض يقسم العدد 9

فالقضية صحيحة من أجل $n+1$

2. أتكون $E(n)$ صحيحة على $\mathbb{N}$؟ علل إجابتك.

$$E(0) = (10)^0 + 1 = 2$$
$$E(1) = 10^1 + 1 = 11$$
$$E(2) = (10)^2 + 1 = 101$$
$$E(3) = (10)^3 + 1 = 1001$$

كل منها غير صحيحة فالعدد 9 لا يقسم أياً من هذه الأعداد $2, 11, 101, 1001$ فالخاصة $E(n)$ غير صحيحة على $\mathbb{N}$ كما أن $E(n)$ كلها خاطئة لأن

مجموع خانات العدد $10^{n+1} = 100\ldots001$ يساوي 2 وهو ليس من مضاعفات العدد 9.

25/15: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:
$$u_0 = 1,\quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}\,; n \geq 1$$

1. أثبت أن $0 \leq u_n \leq 2$ أياً يكن العدد الطبيعي n

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$
$$0 \leq 1 \leq 2$$
القضية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض صحة القضية من أجل n
$$0 \leq u_n \leq 2$$
نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$
$$0 \leq u_{n+1} \leq 2$$
$$0 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2 + u_n \leq 4$$
$$\Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$$
$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 2$$
والقضية صحيحة من أجل $n+1$

2. أثبت أن المتتالية u_n متزايدة تماماً.

لكي تكون $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً يجب أن يكون
$$u_{n+1} > u_n$$
الخاصة: $E(n): u_{n+1} > u_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$
$$u_1 > u_0 \Rightarrow \sqrt{3} > 1$$
والقضية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض صحة القضية من أجل n: $u_{n+1} > u_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$:
$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

$u_{n+1} > u_n \Rightarrow 2 + u_{n+1} > 2 + u_n$

$\sqrt{2+u_{n+1}} > \sqrt{2+u_n} \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$ و u_n متزايدة تماماً.

25/12: نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية:

$$3^n \geq (n+2)^2$$

1. هل $E(4), E(3), E(2), E(1), E(0)$ صحيحة؟

$E(n): (3)^n \geq (n+2)^2$

$E(0): 3^0 \geq (0+2)^2 \Rightarrow 1 \geq 4$ خاطئة

$E(1): 3^1 \geq (1+2)^2 \Rightarrow 3 \geq 9$ خاطئة

$E(2): 3^2 \geq (2+2)^2 \Rightarrow 9 \geq 16$ خاطئة

$E(3): 3^3 \geq (3+2)^2 \Rightarrow 27 \geq 25$ صحيحة

$E(4): 3^4 \geq (4+2)^2 \Rightarrow 81 \geq 36$ صحيحة

2. أثبت بالتدريج صحة العلاقة $E(n)$ عند كل عدد طبيعي $n \geq 3$.

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 3$

$27 \geq 25$

والقضية صحيحة من أجل $n = 3$

نفرض صحة القضية من أجل n

$(3)^n \geq (n+2)^2$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$(3)^{n+1} \geq (n+3)^2$

نضرب طرفي القضية بـ $3 > 0$

$(3)(3)^n \geq 3(n+2)^2$

$3^{n+1} \geq 3n^2 + 12n + 12$

$3^{n+1} \geq n^2 + 6n + 9 + 2n^2 + 6n + 3$

$3^{n+1} \geq (n+3)^2 + 2n^2 + 6n + 3$

$3^{n+1} \geq (n+3)^2 \ ; 2n^2 + 6n + 3 > 0$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

25/13: أثبت بالتدريج صحة كل من الخواص الآتية أياً كان العدد الطبيعي n:

1. $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$4^0 + 5 = 6$

والقضية صحيحة من أجل $n = 0$

لأن 6 من مضاعفات 3

نفرض صحة القضية من أجل n

$(4)^n + 5 \ldots (*)$ مضاعف للعدد 3

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$4^{n+1} + 5$

$4^{n+1} + 5 = 4(4)^n + 5$

$= 4(4^n + 5 - 5) + 5$

$= 4(4^n + 5) - 20 + 5$

$= 4(4^n + 5) - 15$

وحسب $(*)$ $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3 ولدينا -15 أيضاً مضاعف للعدد 3 فالقضية صحيحة من أجل $n+1$

وحسب الاستقراء الرياضي تكون العلاقة صحيحة مهما كان $n \in \mathbb{N}$

2) $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$$2^0-1=0$$

والقضية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$2^{3(n+1)}-1=2^3(2^{3n})-1$$
$$=8(2^{3n}-1+1)-1$$
$$=8(2^{3n}-1)+8-1$$
$$=8(2^{3n}-1)+7$$

وبما أن $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 فإن

$8(2^{3n}-1)$ مضاعف للعدد 7

والعدد 7+ من مضاعفات العدد 7

بالتالي $8(2^{3n}-1)+7$ مضاعف للعدد 7

فالقضية صحيحة من أجل $n+1$

3) n^3+2n مضاعف للعدد 3

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$$0^3+2(0)=0$$

القضية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة القضية من أجل n

n^2+2n مضاعف للعدد 3

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$(n+1)^3+2(n+1)$$
$$=n^3+3n^2+3n+1+2n+2$$
$$=(n^3+2n)+3n^2+3n+3$$
$$=(n^3+2n)+3(n^2+n+1)$$

n^3+2n مضاعف من الفرض

$3(n^2+n+1)$ عدد مضروب بالعدد 3 فهو من مضاعفات ال 3

فالقضية صحيحة من أجل $n+1$

4) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$$3+4=7$$

القضية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$2^{2n+3}+2^{n+3}$ مضاعف للعدد 7

$$3^{2n+3}+2^{n+3}=3^{2n+1+2}+2^{n+2+1}$$
$$=3^{2n+1}.3^2+2^{n+2}.2$$
$$=3^{2n+1}.(7+2)+2^{n+2}.2$$
$$=7(3)^{2n+1}+2(3)^{2n+1}+2(2)^{n+2}$$
$$=7(3)^{2n+1}+2[(3)^{2n+1}+(2)^{n+2}]$$

$(3)^{2n+1}+(2)^{n+2}$ مضاعف لـ 7 من الفرض

$7(3)^{2n+1}$ عدد × 7 فهو مضاعف للعدد 7

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

25/16: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$$u_0 = 1 \ , u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$$

① أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً

$$f'(x) = \frac{3(2x+6)-2(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$= \frac{6x+18-6x-4}{(2x+6)^2} = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

$\Leftarrow f$ متزايد تماماً على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ فهو متزايد تماماً على $]0,+\infty[$

② استنتج أن $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$ أياً كان العدد الطبيعي

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$\frac{1}{2} \le 1 \le 1$$

والقضية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$\frac{1}{2} \le u_n \le 1 \ ...(*)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$$

لدينا فرضياً $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$ نستفيد من تزايد f

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(u_n) < f(1) \Leftarrow$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}+2}{1+6} = \frac{\frac{7}{2}}{7} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{3+2}{2+6} = \frac{5}{8}$$

وبما أن $f(u_n) = u_{n+1}$ إذاً:

$$\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

③ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً.

u_n متناقصة $\Leftarrow u_{n+1} < u_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$u_1 = \frac{3u_0+2}{2u_0+6} = \frac{3+2}{2+6} = \frac{5}{8} < 1$$

والقضية صحيحة $\Rightarrow u_1 < u_0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$u_{n+1} < u_n$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

$$u_{n+1} < u_n$$
$$f(u_{n+1}) < f(u_n)$$
$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

فالمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً.

26/17: ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$.

ثم نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$$
$$u_0=2.\cos\theta$$

❶ احسب u_2, u_1

$$u_1=\sqrt{2+u_0}=\sqrt{2+2\cos\theta}$$
$$=\sqrt{2(1+\cos\theta)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}$$
$$=2\cos\frac{\theta}{2}$$

تكرورية:

$$\boxed{1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$u_2=\sqrt{2+u_1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}$$
$$=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}}$$
$$=2\cos\frac{\theta}{4}=2\cos\frac{\theta}{2^2}$$

❷ أثبت بالتدريج أن $u_n=2.\cos\left[\frac{\theta}{2^n}\right]$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$$u_1=2\cos\frac{\theta}{2}$$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$u_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$$

نفرض صحة القضية من أجل $n+1$

$$u_{n+1}=2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

$$u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^n}}$$
$$=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^n}\right)}$$
$$=\sqrt{4\cos^2\frac{\frac{\theta}{2^n}}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

انتهاء بحث المتتاليات

الأستاذ: أحمد تكروري 0994446057

انضم الى قناتي التلغرام (بكالوريا رياضيات مع الأستاذ احمد تكروري)

و يتم العمل ع مكثفة تحتوي ع 1500 سؤال مؤتمت ستصدر اول الشهر الثاني

سيتم تحويل كامل النماذج الوزارية و أسئلة الدورات الى نماذج أتمتة

نسالكم صالح الدعاء لي ولوالدي وجميع معلمي

البحث الرابع

نهاية المتتالية $\lim_{n\to\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n =$$

عدد — المتتالية متقاربة

∞ — المتتالية متباعدة

يوجد حالتين في نهاية المتتالية:

1) المتتالية المرجعية:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

أمثلة:

$$u_n = \frac{1}{n} \ , \ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ , \ u_n = \frac{1}{n^2}$$

$$u_n = n \ , \ u_n = \sqrt{n} \ , \ u_n = n^2$$

2) نهاية متتالية هندسية:

ليكن u_n متتالية هندسية أساسها q

- $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0 \Leftarrow -1 < q < 1$
- $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty \Leftarrow q > 1$
- ليس للمتتالية نهاية $\Leftarrow q < -1$

تدريب: ادرس نهاية كل من المتتاليات:

1) $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

$$-1 < q = \frac{4}{5} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

2) $u_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$

$$q = \frac{5}{4} > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

3) $v_n = \frac{3^n}{2^n}$

$$v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$q = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

4) $y_n = \left(\frac{10}{10.1}\right)^n$

$$-1 < q = \frac{10}{10.1} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

119/1: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل:

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

ونعلم أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

أوجد عدداً طبيعياً n_0 يحقق:

$$n \geq n_0 ; u_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$$

مركز المجال: $\ell = \frac{-10^{-3}+10^{-3}}{2} = 0$

نصف القطر: $\varepsilon = \frac{10^{-3}+10^{-3}}{2} = 10^{-3}$

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n\sqrt{n}} - 0\right| < 10^{-3}$$

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow n\sqrt{n} > 10^3$$

نربع

$$n^3 > 10^6$$

$$\Rightarrow n > 10^2$$

$$\Rightarrow n_0 > 100$$

119/2: متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معطاة بالشكل:

$$u_n = \frac{3n+1}{n-1}$$

حيث $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

أوجد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n > n_0$ كان

$u_n \in]2.98, 3.02[$

مركز المجال: $\ell = \frac{3.02+2.98}{2} = 3$

نصف القطر: $\varepsilon = \frac{3.02-2.98}{2} = 0.02$

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3n+1}{n-1} - 3\right| < 0.02$$

$$\left|\frac{3n+1-3n+3}{n-1}\right| < \frac{2}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{n-1} < \frac{2}{100} \Rightarrow \frac{n-1}{4} > \frac{100}{2}$$

$$\Rightarrow n-1 > \frac{400}{2} \Rightarrow n > 201$$

$$n_0 = 201$$

ليكن $-1 < q < 1$ ولنعرف المتتالية الهندسية $u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$

1. أعط صيغة أخرى تفيد في حساب u_n.
2. استنتج قيمة $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

$a = 1$

$n = n - 0 + 1 = n + 1$

$$S = u_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

119/6: نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$, $(y_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق:

$$x_0 = 3\ ,\ x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$$

$$y_0 = x_0 + 3\ ,\ y_n = x_n + 3$$

1. أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ هندسية.
2. احسب y_n بدلالة n ثم x_n بدلالة n.
3. ليكن $S_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$ و $S'_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ احسب S_n , S'_n ثم استنتج نهايتيهما.

يجب أن نبرهن أن $\frac{y_{n+1}}{y_n} = q$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}+3}{x_n+3} = \frac{\frac{1}{3}x_n+1}{x_n+3}$$

$$= \frac{\frac{x_n+3}{3}}{\frac{x_n+3}{1}} = \frac{x_n+3}{3(x_n+3)} = \frac{1}{3} = q$$

المتتالية y_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$$y_n = y_m . q^{n-m}$$

$$y_0 = x_0 + 3 = 6$$

$$y_n = y_0 . q^n \Rightarrow y_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$y_n = x_n + 3 \Rightarrow x_n = y_n - 3$$

$$\Rightarrow x_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

$$S_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$$

$$S_n = a.\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$a = y_0 = 6\ ,\ q = \frac{1}{3}\ ,\ n = n+1$$

$$S_n = 6 . \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 6 \times \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$= 9\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$S'_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

$$S'_n = y_0 - 3 + y_1 - 3 + \cdots + y_n - 3$$

$$S'_n = [y_0 + y_1 + \cdots + y_n] - 3(n+1)$$

$$S'_n = S_n - 3(n+1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 9\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= 9(1-0) = 9$$

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \lim_{n\to+\infty} [S_n - 3(n+1)]$$

$$= 9 - 3(\infty) = -\infty$$

123/1: المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق:

$$u_n = \frac{\cos 2n}{\sqrt{n}}$$

تحقق أن $-\frac{1}{\sqrt{n}} < u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ وذلك أياً يكن $n \geq 1$

ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq1}$

نعلم أن $-1 \leq \cos 2n \leq 1$

نقسم على $\sqrt{n}$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos 2n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

وبما أن نهاية الطرفين يساوي الصفر حسب الإحاطة(1)

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

123/2: المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة بالصيغة $u_n = n + 1 + \cos n$،

تحقق أن: $n \leq u_n \leq n+2$ وذلك أياً يكن $n \geq 1$ ثم استنتج نهاية u_n.

نعلم أن $-1 \leq \cos n \leq 1$

نضيف للأطراف $n+1$

$$n \leq n + 1 + \cos n \leq n + 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty} (n+2) = +\infty$$

حسب الإحاطة (3): $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

123/3: فيما يأتي، احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$:

1. $u_n = \frac{2n+3}{3n-1}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{2}{3}$$

2. $u_n = \frac{5n-3}{3n-5}$

$$\lim_{\to+\infty} u_n = \frac{5}{3}$$

3. $u_n = \frac{5n^2-3n+7}{n^2+n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{5n^2}{n^2} = 5$$

4. $u_n = n - \frac{1}{n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty - 0 = +\infty$$

5. $u_n = \frac{-3n^2+2n+4}{n^2+n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{3n^2}{n^2} = -3$$

6. $u_n = \frac{n}{4} + \frac{2n}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty + 0 = +\infty$$

المتتالية المحدودة:

نقول عن المتتالية أنها محدودة إذا كانت:

$$N \le u_n \le B$$

B: حد راجع ⇐ تكون محدودة من الأعلى

N حد قاصر ⇐ تكون محدودة من الأدنى

تكون المتتالية محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى والأسفل.

مثال: دورة 2018

أثبت أن المتتالية $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ محدودة من الأعلى ومن الأسفل وعين حديها القاصر والراجع.

نعلم أن $\sqrt{n+1} \ge \sqrt{n}$

$$\Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \ge 0$$

$$\Rightarrow u_n \ge 0$$

0 حد قاصر و المتتالية محدودة من الأدنى.

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 0$$

$$n = 0 \Rightarrow u_0 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$n = 2 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

واضح أن المتتالية متناقصة حدها الأكبر هو حدها الأول هو 1 ⇐ $u_n \le 1$

⇐ المتتالية محدودة من الأعلى وحدها الراجع هو 1

⇐ $0 \le u_n \le 1$ والمتتالية محدودة

28/3: $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معطاة وفق:

$$u_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

أثبت أن $1 \le u_n \le 3$

$$u_n - 1 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 1 = \frac{2n}{n^2-n+1} \ge 0$$

$$u_n - 1 \ge 0 \Rightarrow u_n \ge 1$$

حيث أن المقدار $n^2 - n + 1$ هو موجب تماماً لأن معادلته وفق Δ مستحيلة الحل.

$$u_n - 3 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 3$$

$$= \frac{n^2+n+1-3n^2+3n-3}{n^2-n+1}$$

$$= \frac{-2n^2+4n-2}{n^2-n+1}$$

$$= -\frac{2(n^2-2n+1)}{n^2-n+1} \le 0$$

$$u_n - 3 \le 0 \Rightarrow 1 \le u_n \le 3$$

المتتاليتان المتجاورتان:

نقول عن متتاليتان أنهما متجاورتان إذا:

1) إحداهما متناقصة والثانية متزايدة (ندرس اطراد المتتالية)

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\text{الثانية} - \text{الأولى}\right] = 0$

مثال:

أثبت أن المتتاليتان متجاورتان:

$$t_n = \frac{n}{n+1}\ ,\ s_n = \frac{n+1}{n}$$

نفرض $s_n = g(x)\ ,\ t_n = f(x)$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

المتتالية t_n متزايدة

$$g(x) = \frac{x+1}{x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

المتتالية s_n متناقصة

$$\lim_{n\to+\infty}(t_n - s_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}\right) =$$
$$1 - 1 = 0$$

بالتالي المتتاليتان t_n ،s_n متجاورتان.

لتكن المتتاليتان $(t_n)_{n\geq0}\ ,\ (s_n)_{n\geq0}$

المعرفتان وفق:

$$t_n = -\frac{1}{2n+4}\ ,\ s_n = \frac{1}{n+1}$$

أثبت أنهما متجاورتان وعين نهايتهما المشتركة.

نفرض $t_n = f(x)$

$$f(x) = -\frac{1}{2x+4}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(2x+4)^2} > 0$$

بالتالي t_n متزايدة

نفرض $s_n = g(x)$

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$
$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

s_n متناقصة

$$\lim_{n\to+\infty}[t_n - s_n]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2n+4} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 0 - 0 = 0$$

بالتالي المتتاليتان t_n ، s_n متجاورتان

133/2: لتكن المتتاليتان $(t_n)_{n\geq0}, (s_n)_{n\geq0}$

المعرفتان وفق:

$$t_n = \frac{n-1}{n}\ ,\ s_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$

أثبت أنهما متجاورتان وعين نهايتهما المشتركة.

نفرض $t_n = f(n)$

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x-(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$$

المتتالية t_n متزايدة

نفرض $s_n = g(x)$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$
$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} < 0$$

المتتالية s_n متناقصة

$$\lim_{n\to+\infty}[t_n - s_n]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n} - 1 - \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

المتتاليتان متجاورتان.

131/3: في الحالات الآتية أثبت أن المتتاليتان $(x_n)_{n\geq1}$ ، $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتان.

❶ $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

$y_n = x_n + \frac{1}{n}$

$x_{n+1} =$

$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{2}{2(n+1)}$

$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}$

$= \frac{2n+2-2n-1}{2(n+1)(2n+1)}$

$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$

$\Leftarrow x_n$ متتالية متزايدة

$y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{n+1}$

$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{n+1} - x_n - \frac{1}{n}$

$= x_{n+1} - x_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{n-n-1}{n(n+1)}$

$= \frac{n-4n-2}{2n(n+1)(2n+1)}$

$= \frac{-(3n+2)}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$

y_n متتالية متناقصة.

$\lim_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

$\Leftarrow x_n, y_n$ متتاليتان متجاورتان.

❷ $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$

$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

$x_{n+1} =$

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$

$= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$

$= \frac{-2n-1+2n}{2n(2n+1)}$

$= -\frac{1}{2n(2n+1)} < 0$

x_n متناقصة

$y_{n+1} =$

$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$

$= \frac{(2n+2-2n-1)}{(2n+1)(2n+2)}$

$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

y_n متزايدة

$\lim_{n\to+\infty}[y_n - x_n]$

$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right) = 0$

$\Leftarrow x_n, y_n$ متجاورتان.

3) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

$y_n = x_n + \frac{1}{n}$

$x_{n+1} =$

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

x_n متتالية متزايدة

$y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{n+1}$

$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - x_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n-n-1}{n(n+1)}$

$= \frac{n}{n(n+1)^2} - \frac{n+1}{n(n+1)^2}$

$= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$

y_n متناقصة

$\lim\limits_{n\to+\infty} [y_n - x_n] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Leftarrow x_n, y_n$ متجاورتان

4) $x_n = 2 - \frac{1}{n}$

$y_n = 2 + \frac{1}{n^2}$

نفرض $f(x) = x_n$

$f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

x_n متتالية متزايدة

نفرض $g(x) = y_n$

$g(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$

$g'(x) = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} < 0$

y_n متتالية متناقصة تماماً

$\lim\limits_{n\to+\infty} [y_n - x_n] =$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n}\right) = 0$

$\Leftarrow x_n, y_n$ متتاليتان متجاورتان

تمارين ومسائل الوحدة

137/1: $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_n=\frac{1}{n!}$$

1. احسب الحدود الستة الأولى للمتتالية.

$$u_1=\frac{1}{1!}=1 \qquad u_2=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$$

$$u_3=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6} \qquad u_4=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$$

$$u_5=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120} \qquad u_6=\frac{1}{6!}=\frac{1}{720}$$

2. تيقن أن $0\leq u_n\leq \frac{1}{n}$ ثم استنتج نهاية u_n

المتتالية ذات حدود موجبة تماماً $\Leftarrow u_n>0$

$$u_n-\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n(n-1)!}-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{(n-1)!}-1\right)\leq 0$$

$$\Rightarrow u_n-\frac{1}{n}\leq 0\Rightarrow u_n\leq\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 0<u_n\leq\frac{1}{n}$$

حسب الإحاطة (1):

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

137/2: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق

$$u_n=\left(\frac{n}{10}-1\right)^n$$

1. عين حدود المتتالية الاحدى عشر الأولى.

$$u_1=\left(\frac{1}{10}-1\right)^1=-\frac{9}{10}$$

$$u_2=\left(\frac{2}{10}-1\right)^2=\frac{64}{10^2}$$

$$u_3=\left(\frac{3}{10}-1\right)^3=\frac{-343}{10^3}$$

$$u_4=\left(\frac{4}{10}-1\right)^4=\frac{1296}{10^4}$$

$$u_5=\left(\frac{5}{10}-1\right)^5=\frac{-3125}{10^5}$$

$$u_6=\left(\frac{6}{10}-1\right)^6=\frac{4096}{10^6}$$

$$u_7=\left(\frac{7}{10}-1\right)^7=\frac{-2187}{10^7}$$

$$u_8=\left(\frac{8}{10}-1\right)^8=\frac{256}{10^8}$$

$$u_9=\left(\frac{9}{10}-1\right)^9=\frac{-1}{10^9}$$

$$u_{10}=\left(\frac{10}{10}-1\right)^{10}=0$$

$$u_{11}=\left(\frac{11}{10}-1\right)^{11}=\frac{1}{10^{11}}$$

2. أثبت أن جميع حدودها بدءاً من u_{31} تحقق:

$$u_n\geq 2^n$$

من أجل $n=31$:

$$u_{31}=\left(\frac{31}{10}-1\right)^{31}=\left(\frac{21}{10}\right)^{31}$$
$$=2.1^{31}>2^{31}$$

محققة من أجل $n=31$

بفرض صحة القضية من أجل n

$$u_n\geq 2^n \ldots (*)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$u_{n+1}\geq 2^{n+1}$$

نضرب $(*)$ بـ2:

$$2u_n\geq 2(2)^n\Rightarrow 2u_n\geq 2^{n+1}$$

$$u_{n+1}=\left(\frac{n+1}{10}-1\right)^{n+1}$$

$$=\left(\frac{n+1}{10}-1\right).\left(\frac{n+1}{10}-1\right)^n$$

$$2u_n=2\left(\frac{n}{10}-1\right)^n$$

الرياضيات . الجزء الأول

$$\Rightarrow u_{n+1} > 2u_n$$
$$u_{n+1} > (2)^{n+1}$$

مما سبق وبالاعتماد على الاستقراء الرياضي تكون العلاقة محققة مهما كان $n \in \mathbb{N}$

3 استنتج نهاية u_n

$$u_n \geq 2^n$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$ حسب الإحاطة (3)

37/3: متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_n = \frac{n^3}{n!}$$

1 أثبت أن $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$ مهما كان $n \geq 4$

من أجل $n = 4$

$$4! \geq 4(4-1)(4-2)(4-3)$$
$$24 \geq 4(3)(2)(1)$$
$$24 \geq 24$$

محققة

نفرض صحة القضية من أجل n

$$n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)\ \dots(*)$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$(n+1)! \geq (n+1)(n)(n-1)(n-2)$$

نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(n+1) > 0$

$$(n+1)n! \geq (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)$$

تكرورية:

$$\boxed{(n+1)! = (n+1)n!}$$

$$(n+1)! \geq (n+1)(n)(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$\Rightarrow (n+1)! \geq (n+1)(n)(n-1)(n-2)$$

والعلاقة صحيحة ومما سبق وبالاعتماد على الاستقراء الرياضي تكون العلاقة صحيحة من أجل $n \geq 4$

2 استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$

$$u_n = \frac{n^3}{n!}$$
$$0 \leq u_n \leq \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 0$$

حسب الإحاطة (1)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

138/8: $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ متتاليتان وفق:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\ ,\ y_n = \frac{1}{n}$$

1 أثبت أن العدد 1 راجح على المتتالية x_n

$$n^2 + 1 > 1$$
$$\sqrt{n^2+1} > 1$$

نقلب:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < 1$$
$$x_n < 1$$

العدد 1 راجح على المتتالية x_n

2 أثبت ان $x_n < y_n$

$$n^2 + 1 > n^2$$
$$\sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2} = n$$

نقلب:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow x_n < y_n$$

138/9: لتكن المتتاليتان $(y_n)_{(n\geq1)}$ ، $(x_n)_{n\geq1}$ معرفتان وفق:

$$y_n = 5n \ , x_n = \frac{2n^2+5n+3}{2n+1}$$

1 أثبت أن $x_n < y_n$ مهما كان $n \geq 1$

$$x_n - y_n = \frac{2n^2+5n+3}{2n+1} - 5n$$

$$= \frac{2n^2+5n+3-10n^2-5n}{2n+1}$$

$$= \frac{-8n+3}{2n+1} < 0$$

$$\Rightarrow x_n - y_n < 0$$

$$\Rightarrow x_n < y_n$$

2 أثبت أن $x_n > \frac{1}{5}y_n$ مهما كان $n \geq 1$

$$x_n - \frac{1}{5}y_n = \frac{2n^2+5n+3}{2n+1} - n$$

$$= \frac{2n^2+5n+3-2n^2-n}{2n+1}$$

$$= \frac{4n+3}{2n+1} > 0$$

$$\Rightarrow x_n - \frac{1}{5}y_n > 0$$

$$\Rightarrow x_n > \frac{1}{5}y_n$$

138/10: $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة بالشكل:

$$u_n = \frac{1}{n^2-5n+6}$$

أثبت أنها محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$.

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{n^2-5n+6} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2-n^2+5n-6}{2(n^2-5n+6)}$$

$$= \frac{-n^2+5n-4}{2(n^2-5n+6)}$$

$$= -\frac{n^2-5n+4}{2(n^2-5n+6)} \leq 0$$

$$\Rightarrow u_n - \frac{1}{2} = -\frac{(n-1)(n-4)}{2(n-2)(n-3)} \leq 0$$

$$\Rightarrow u_n - \frac{1}{2} \leq 0 \Rightarrow u_n \leq \frac{1}{2}$$

المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$.

138/11: ليكن a, b عددان يحققان $a > b > 0$ ولتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة بالشكل $u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$

ادرس تقارب هذه المتتالية.

$$u_n = \frac{a^n\left(1-\frac{b^n}{a^n}\right)}{a^n\left(1+\frac{b^n}{a^n}\right)} = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

حيث $1 > \frac{b}{a}$ وهو أساس المتتالية الهندسية المتقاربة من الصفر.

140/13: لتكن $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

متتالية حيث n عدد طبيعي غير معدوم،

ولتكن: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

ادرس المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$

$$u_1 = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2(2+1)} = \frac{1}{6}$$

$$u_3 = \frac{1}{3(3+1)} = \frac{1}{12}$$

$$u_4 = \frac{1}{4(4+1)} = \frac{1}{20}$$

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

وهكذا نلاحظ في حدود S_n المقام يزيد على البسط بـ 1

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

لنثبت أن S_n تعطى بالصيغة السابقة مهما $n \geq 1$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 1$.

$S_1 = u_1 = \frac{1}{2}$, $S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ محققة

نفرض صحة القضية من أجل n.

$$S_n = \frac{n}{n+1} \ldots (*)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$.

$$S_{n+1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1}$$

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$$

نضيف لطرفي $(*)$ المقدار u_{n+1}.

$$S_n + u_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$S_n + u_{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$S_n + u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

مما سبق وبالاعتماد على الاستقراء الرياضي تكون

العلاقة صحيحة مهما كان $n \in \mathbb{N}$ أي أن:

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$$

والمتتالية S_n متقاربة.

الرياضيات - الجزء الأول

142/16: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \; ; u_0 = \frac{3}{2}$

1. أثبت بالتدريج أن $1 \leq u_n \leq 2$
2. أثبت أن: $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$
3. استنتج أن u_n متناقصة
4. هل $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة؟

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$1 \leq u_0 = \frac{3}{2} \leq 2$$

محققة

نفرض صحة القضية من أجل n.

$$1 \leq u_n \leq 2 \dots (*)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$.

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

نعلم أن:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$
$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 1 + 1$$
$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$

من *:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

نضيف -1.

$$0 \leq u_n - 1 \leq 1$$

نربع:

$$0 \leq (u_n - 1)^2 \leq 1$$

نضيف $+1$.

$$1 \leq (u_n - 1)^2 + 1 \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

محققة

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$
$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$$
$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$
$$1 \leq u_n \leq 2$$
$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1) \leq 0$$

$\Leftarrow u_n$ متتالية متناقصة.

تكرورية:

كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بـ 1 فهي متقاربة.

143/17: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة عند كل $n \geq 1$ بالشكل:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

1 أثبت بالتدريج أن $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$:

$\frac{1}{0!} \leq \frac{1}{2^{0-1}} \Rightarrow 1 \leq 2$ محققة

نفرض صحة القضية من أجل n:

$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \dots (*)$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $\frac{1}{n+1} > 0$

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$

حيث $\frac{1}{(n+1)} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

مما سبق وبالاعتماد على الاستقراء الرياضي تكون العلاقة صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$

2 استنتج أن العدد 3 راجح على المتتالية.

من أجل كل $n \geq 1$ المتتالية هي:

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

يمثل الطرف الأيمن مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $\frac{1}{2}$

$$u_n \leq a.\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$u_n \leq 1.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$u_n \leq 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2[1-0] = 2$$

$$\Rightarrow u_n \leq 2$$

2 عنصر راجح على المتتالية

$2 < 3 \Leftarrow 3$ عنصر راجح على المتتالية u_n

3 أثبت أن u_n متقاربة.

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

المتتالية متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة.

احمد تكروري رياضيات @Ahmad_Tkrory احمد تكروري 099 444 60 57

144/22: ليكن عند كل عدد طبيعي n

المتتالية $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

❶ أوجد عددين b, a يحققان

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

من أجل $n = 0$:

$$\frac{1}{(-1)(1)} = \frac{a}{-1} + \frac{b}{1}$$

$$-1 = -a + b \quad ...(1)$$

من أجل $n = 1$:

$$\frac{1}{(2-1)(2+1)} = \frac{a}{2-1} + \frac{b}{2+1}$$

$$\frac{1}{3} = a + \frac{b}{3} \Rightarrow 1 = 3a + b \quad ...(2)$$

من (1) نجد: $b = a - 1$ نعوض في (2)

$$1 = 3a + a - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

نعوض في (1):

$$b = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$u_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

في حالة $n \in \mathbb{N}$ لدينا

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية $(S_n)_{n\geq 0}$

$$S_n = \left[\frac{1}{2(-1)} - \frac{1}{2(1)}\right] + \left[\frac{1}{2(1)} - \frac{1}{2(3)}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}\right]$$

$$S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}$$

144/25: $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة بالشكل

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

❶ أثبت أن $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

أكبر حد في المتتالية $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

أصغر حد في المتتالية $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

عدد الحدود $k = n$

$$n\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \leq u_n \leq n\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$$

❷ استنتج تقارب المتتالية وما نهايتها؟

نلاحظ أن $u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فالمتتالية متقاربة

نهايتها

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

وحسب مبرهنة الإحاطة (1)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

145/27: متتالية معرفة وفق: $(u_n)_{n\geq0}$

$$u_0 = 3 \ , u_{n+1} = \frac{2}{u_n+1}$$

❶ أثبت أن $u_n > 0$ أياً يكن n

نبرهن صحة العلاقة بالاستقراء الرياضي:

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = 0$

$$u_0 = 3 > 0$$

القضية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$u_n > 0$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$u_{n+1} > 0$$

نعلم أن:

$$2 > 0$$

نقسم على $(1+u_n)$ علماً أن $u_n > 0$

$$\frac{2}{(1+u_n)} > 0$$

$$u_{n+1} > 0$$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

❷ لتكن $(t_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة وفق:

$$t_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$$

أثبت أن t_n هندسية واحسب نهايتها.

لبرهان أن المتتالية هندسية يجب أن نبرهن أن:

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = q$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-2}}{\frac{u_n-1}{u_n+2}} = \frac{\frac{\frac{2}{u_n+1}-1}{\frac{2}{u_n+1}+2}}{\frac{u_n-1}{u_n+2}}$$

$$= \frac{\frac{\frac{2-u_n-1}{u_n+1}}{\frac{2+2u_n+2}{u_n+1}}}{\frac{u_n-1}{u_n+2}} = \frac{-\frac{u_n-1}{2(u_n+2)}}{\frac{u_n-1}{u_n+2}}$$

$$= -\frac{1}{2} = q$$

فالمتتالية هندسية

لنوجد حدها العام:

$$t_n = t_m . q^{n-m}$$

$$\Rightarrow t_n = t_0 . q^n$$

$$t_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow t_n = \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{2}{5}(0) = 0$$

❸ استنتج أن u_n متقاربة واحسب نهايتها.

$$t_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$$

$$\Rightarrow u_n - 1 = t_n(u_n+2)$$

$$\Rightarrow u_n - 1 = t_n . u_n + 2t_n$$

$$\Rightarrow u_n - t_n . u_n = 2t_n + 1$$

$$\Rightarrow u_n(1-t_n) = 2t_n + 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2t_n+1}{1-t_n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2(0)+1}{1-0} = 1$$

المتتالية متقاربة ونهايتها 1

احمد تكروري رياضيات @Ahmad_Tkrory احمد تكروري 099 444 60 57

انتهاء بحث نهاية المتتالية

ما ستفعله اليوم سيقال عنك إذا قرر أن تترك اثرا او ذكرا حسنا

الأستاذ: أحمد تكروري 0994446057

انضم الى قناتي التلغرام (بكالوريا رياضيات مع الأستاذ احمد تكروري)

و يتم العمل ع مكثفة تحتوي ع 1500 سؤال مؤتمت ستصدر اول الشهر الثاني

سيتم تحويل كامل النماذج الوزارية و أسئلة الدورات الى نماذج أتمتة

نسالكم صالح الدعاء لي ولوالدي وجميع معلمي