المدة : ساعتان	اختبار في بحث النهايات (2)	الاسم :

السؤال الأول : ليكن التابع f المعرف على $]-5,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{2x+1}{x+5}$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

2) جد عدداً حقيقيا A يحقق الشرط : اذا كان $x>A$ ، كان $f(x)$ في المجال $]1.99,2.01[$.

السؤال الثاني : ادرس في كل حالة نهاية التابع f :

1) $f(x)=\frac{x\sin x}{1-\cos x}$ $\quad a=0$ $\qquad$ 2) $f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$ $\quad a=0$

3) $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ $\quad a=0,+\infty$ $\qquad$ 4) $f(x)=\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ $\quad a=2$

السؤال الثالث : ليكن f التابع المعين بالعلاقة : $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$

1) عين D_f مجموعة تعريف f .

2) أوجد الأعداد a,b,c التي تحقق : $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$ أياً كان x من D_f .

السؤال الرابع : ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x} & ;x\neq 0 \\ 0 & ;x=0 \end{cases}$

احسب نهاية f عند الصفر ، هل f مستمر عند الصفر .

السؤال الخامس : ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ و المطلوب :

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 2) اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية .

3) استنتج وجود مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$.

السؤال السادس : f هو التابع المعرف على $[0.+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{2x^2+1}{x+3}$

1) أوجد الأعداد $a.b,c$ إذا علمت أن: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}$

2) استنتج معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$. 3) ادرس الوضع النسبي ل c و مقاربه .

انتهت الأسئلة

#مع تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح

أ . محمد أحمد

0964848890

Mohammed Ahmed Math Teacher 0964848890

Scanned by CamScanner

مكثفة النهايات والاشتقاق

"حل اختبار النهايات (١)"

السؤال الأول:

① $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = \lim_{t \to 2} f(t) = \frac{5}{7}$

② $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.99 + 2.01}{2} = 2$

$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.01 - 1.99}{2} = 0.01$

$f(x) \in]1.99, 2.01[$

$\Leftrightarrow |f(x) - c| < r$

$\Leftrightarrow \left|\frac{2x+1}{x+5} - 2\right| < \frac{1}{100}$

$\Rightarrow \left|\frac{-9}{x+5}\right| < \frac{1}{100}$

$\Rightarrow \frac{9}{|x+5|} < \frac{1}{100}$

$|x+5| = x+5 \in x \to +\infty$

$\frac{9}{x+5} < \frac{1}{100}$

$\frac{x+5}{9} > 100$

$\Rightarrow x+5 > 900$

$\Rightarrow x > 895$

منزهان $A = 895$ هي المطلوبة.

السؤال الثاني:

① $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$; $a = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ ، ع. ، ~

$f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}$

$= \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$

$\lim_{x \to 0} \tan \frac{x}{2} = 0$

② $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ $a = 0, +\infty$

$\forall x \in R$ عند $+\infty$

$\Rightarrow -1 \le \sin x \le +1$ $\Rightarrow \div \sqrt{x} > 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

حسب مبرهنة الدالة المحاصرة:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$

Mohammed Ahmed Math Teacher 0964848890

Scanned by CamScanner

مكثفة النهايات والاشتقاق

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \times 1 \times 2 = 2$

(4) $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5} - 3}$ $\quad a = 2$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \dfrac{2-\sqrt{4}}{3-3} = \dfrac{0}{0}$ ∴ عدم تعيين

$f(x) = \dfrac{(2 - \sqrt{3x-2})(2+\sqrt{3x-2})}{(\sqrt{2x+5} - 3)(2+\sqrt{3x-2})}$

$= \dfrac{4 - (3x-2)}{(\sqrt{2x+5} - 3)(2+\sqrt{3x-2})}$

$f(x) = \dfrac{4 - 3x + 2}{(\sqrt{2x+5} - 3)(2+\sqrt{3x-2})} = \dfrac{6-3x}{(\sqrt{2x+5} - 3)(2+\sqrt{3x-2})} \times \dfrac{(\sqrt{2x+5}-3)(2+\sqrt{3x-2})}{(\sqrt{2x+5}-3)(2+\sqrt{3x-2})}$

$= \dfrac{(6-3x)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5} - 3)(2+\sqrt{3x-2})(\sqrt{2x+5}+3)}$

$= \dfrac{(6-3x)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)(2+\sqrt{3x-2})}$

$f(x) = \dfrac{-3(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(2+\sqrt{3x-2})}$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \dfrac{-3 \times 6}{2 \times 4} = \dfrac{-18}{8} = -\dfrac{9}{4}$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ عند الصفر

$\lim_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{0}$ ∴ عدم تعيين

$f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \times \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}\sqrt{x}}$

$= \sqrt{x} \cdot \dfrac{\sin x}{x}$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \times 1 = 0$

(3) $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$ $\quad a = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ ∴ عدم تعيين

$f(x) = \dfrac{x \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$

$= \dfrac{x \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \dfrac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \times \cos \dfrac{x}{2} \times 2$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 1$

Mohammed Ahmed Math Teacher 0964 848 890

Scanned by CamScanner

السؤال الثالث :

① $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}=\frac{3x^2+6x}{(x-2)(x+1)}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{2,-1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,2[\cup]2,+\infty[$

②

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-2 & 3x^2+6x \\ \hline -3x^2+3x+6 & 3 \\ \hline 9x+6 & \end{array}$$

$f(x)=3+\frac{9x+6}{x^2-x-2}$

$f(x)=3+\frac{9x+6}{(x-2)(x+1)}$

ويكون : $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$

بالمقارنة نستنتج أن : $a=3$

$\frac{9x+6}{(x-2)(x+1)}=\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x-2)}$

$(x-2)$ $(x+1)$

$\Rightarrow \frac{9x+6}{(x-2)(x+1)}=\frac{bx-2b}{(x+1)(x-2)}+\frac{cx+c}{(x+1)(x-2)}$

$\Rightarrow \frac{9x+6}{(x-2)(x+1)}=\frac{bx-2b+cx+c}{(x+1)(x-2)}$

$\Rightarrow 9x+6=bx-2b+cx+c$

$9x+6=bx+cx-2b+c$

$9x+6=(b+c)x-2b+c$

بالمطابقة نجد :

$b+c=9 \quad \ldots (1)$

$-2b+c=6 \quad \ldots (2)$

بطرح (2) من (1) نجد :

$3b=3 \Rightarrow b=1$

$(1) \Rightarrow 1+c=9 \Rightarrow c=8$

$f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}=3+\frac{1}{(x+1)}+\frac{8}{(x-2)}$

السؤال الرابع :

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2\cdot\cos\frac{1}{x})$

$\forall x\in\mathbb{R}^* \Rightarrow -1\le\cos\frac{1}{x}\le+1$

نضرب بـ $x^2>0$ نجد :

$-x^2\le x^2\cos\frac{1}{x}\le x^2$

$\lim_{x\to 0}(-x^2)=\lim_{x\to 0}(x^2)=0$

حسب برهنة الإحاطة نجد أن :

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$

$f(0)=0$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\end{array}\right\}$ f مستمر عند الصفر

Mohammed Ahmed Math Teacher 0964848890

Scanned by CamScanner

مكثفة النهايات والاشتقاق

السؤال الخامس :

① $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

② $x^2 + 4x + 5$

$= x^2 + 4x + 4 - 4 + 5 = (x+2)^2 + 1$

③ $f(x) = \sqrt{x^2+4x+5} = \sqrt{(x+2)^2+1}$

في جوار الـ $+\infty$ يكون :

$f(x) \approx \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = x+2$

إذن نحن نبرهن أن $\Delta : y = x+2$ هو مقارب مائل في جوار $+\infty$ ولإثبات ذلك :

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta]$

$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{(x+2)^2+1} - (x+2)\right] = +\infty - \infty$ ح.ع.ت

$f(x) - y_\Delta = \dfrac{\left(\sqrt{(x+2)^2+1} - (x+2)\right)\left(\sqrt{(x+2)^2+1} + (x+2)\right)}{\sqrt{(x+2)^2+1} + (x+2)}$

$f(x) - y_\Delta = \dfrac{(x+2)^2 + 1 - (x+2)^2}{\sqrt{(x+2)^2+1} + (x+2)}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1} + (x+2)}$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

Δ هو مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

ملاحظة هامة

في جوار $-\infty$:

$f(x) \approx \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = -x-2$

$y = -x-2$ مقارب مائل هو

السؤال السادس :

① الكسر = البقية / المقسوم عليه + الناتج

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + 1 & x+3 \\ \hline -2x^2 - 6x & 2x-6 \\ \hline -6x + 1 & \\ +6x + 18 & \\ \hline +19 & \end{array}$$

$f(x) = 2x - 6 + \dfrac{19}{x+3}$

بالمقارنة مع : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+3}$

نستنتج أن : $a = 2 \; , \; b = -6 \; , \; c = 19$

② نفرض أن $\Delta : y = 2x - 6$ مقارب مائل :

$f(x) - y_\Delta = \dfrac{19}{x+3}$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$

Mohammed Ahmed Math Teacher 0964848890

Scanned by CamScanner

ه مقارب مائل لـ c في جوار ∞+
ولدراسة الوضع النسبي :

$$f(x) - y_0 = \frac{19}{x+3}$$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x+3$		−	0	+	
$f(x)-y_0$		−	‖	+	
الوضع النسبي	c تحت ه			c فوق ه	

انتهى حل الاختبار
"بالتوفيق والنجاح الدائم"
الأستاذ : محمد أحمد

Mohammed Ahmed
Math Teacher
0964848890

Scanned by CamScanner