☆◕‿◕☆

☆ انقر هنا للوصول إلى المكتبة التعليمية الشاملة على تيليغرام – التجمع التعليمي || بوت

تـم التحمـيل بواسـطـة : T.me/Science_2022bot

Telegram : @Science_2022bot ☆

Aiyham Alshaer Math

الرياضيات مع أيهم الشاعر

مجموعة

مسائل شاملة

في الرياضيات

الثالث الثانوي العلمي

إعداد : أيهم الشاعر

المسألة الأولى:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقطتين A و B التي تمثل العددين العقديين $a=3+3i$ و $b=3-3i$ بالترتيب ، والمطلوب:

1) بيّن أن a و b هما حلي المعادلة $z^2-6z+18=0$ في $\mathbb{C}$.

2) اكتب a و b بالشكل المثلثي ثم استنتج أن : $a^4+b^4+648=0$.

3) استنتج الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية : $-a$ و $\frac{a^3}{b^5}$ و $a.b$.

4) أثبت أن $\frac{a}{b}=i$ عين طبيعة المثلث ABC.

5) a) اعطِ الصيغة العقدية للانسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{OA}$.

b) بيّن أن العدد العقدي الذي يمثل B' صورة B وفق الانسحاب T هو $b'=6$.

6) مثّل النقاط A و B و B' في المستوي العقدي.

7) بيّن أن $\frac{b-b'}{a-b'}=-i$ ، ثم استنتج أن المثلث $AB'B$ متساوي الساقين وقائم في B'.

8) استنتج أن الرباعي $OAB'B$ مربع.

المسألة الثانية:

ليكن لدينا المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق $u_0=\frac{1}{4}$: $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$ والمطلوب:

1) a) أثبت أن التابع $f(x)=3-\frac{10}{x+4}$ متزايد تماماً.

b) أثبت أنه $-2\leq f(x)\leq 1$ أياً كان $-2\leq x\leq 1$.

2) a) أثبت بالتدريج أن $0<u_n<1$ أياً كان العدد الطبيعي n.

b) أثبت أن المتتالية u_n متزايدة تماماً ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) a) أثبت أن المتتالية v_n هندسية اساسها $\frac{5}{2}$ ، عيّن حدها الأول.

b) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

c) استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

4) أثبت أن المتتاليتين $x_n=3-\frac{10}{n+4}$ و $y_n=\frac{3n+4}{n+1}$ متجاورتين ، احسب نهايتهما المشتركة.

الرياضيات مع أيهم الشاعر

المسألة الثالثة:

I) ليكن لدينا التابع g المعرّف على $]0,+\infty[$ بالعلاقة $g(x)=2x^2+1-\ln x$ والمطلوب:

1) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بيّن أن $g'(x)=\dfrac{4x^2-1}{x}$ ثم استنتج جدول تغيرات التابع g.

3) استنتج أن $g(x)>0$ أياً كانت $x>0$.

II) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ بالعلاقة $f(x)=2x-2+\dfrac{\ln x}{x}$ والمطلوب:

1) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، واستنتج مقاربات C.

2) أثبت أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج جدول تغيرات التابع f.

3) a) أثبت وجود عددين حقيقيين a و b بحيث $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ و $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$.

b) استنتج معادلة المقارب المائل Δ للخط C في جوار $+\infty$ وادرس وضعه النسبي.

4) أوجد معادلة d المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها (1).

5) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم d و ارسم C.

6) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيم $x=2$.

المسألة الرابعة:

نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية $A(2,1,0)$ و $B(1,2,2)$ و $C(3,3,1)$ و $D(1,1,4)$

1) تحقق أن النقاط A و B و C تعيّن مستوياً ، أوجد معادلته.

2) أثبت أن المثلث ABC متساوي الأضلاع ، احسب مساحته.

3) عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) و يمر بالنقطة D.

4) a) أوجد إحداثيات E المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC).

b) استنتج بعد النقطة D عن المستوي (ABC).

5) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

6) عين الأعداد الحقيقية α و β و γ لتكون E مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$.

7) اكتب معادلة الكرة التي مركزها D وتمس المستوي (ABC).

الرياضيات مع أيهم الشاعر

المسألة الخامسة:

نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية :

$$A(2,2,0) \text{ و } B(0,-2,2) \text{ و } C(1,1,3)$$

1) اكتب معادلة المستوي P الذي يعامد المستقيم (BC) ويمر بالنقطة A .

2) اكتب معادلة Q المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

3) أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان ، اكتب المعادلة الوسيطية للمستقيم (Δ) الفصل المشترك لتقاطع المستويين.

4) أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالشكل $5x-2y+z=6$.

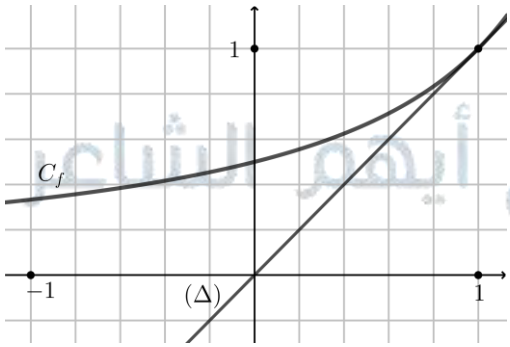
5) عيّن إحداثيات G نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي (ABC).

6) أثبت أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,1),(C,-12)$.

7) عيّن مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}-12\overrightarrow{MC}||=10||\overrightarrow{OA}||$.

المسألة السادسة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $]-\infty,1]$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ ، وليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=x$. (u_n) المتتالية المعرّفة بالعلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث $u_0=-1$ والمطلوب:



1) أعد رسم الشكل المجاور ثم مثل هندسياً الحدود الأولى للمتتالية u_n .

2) برهن بالتدريج أن $u_n<1$ أياً كان العدد الطبيعي n.

3) ادرس اطراد المتتالية u_n ثم استنتج أنها متقاربة.

4) نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقة $v_n=\dfrac{2}{1-u_n}$:

a) أثبت أن المتتالية v_n حسابية ، عيّن حدها الأول وأساسها ، اكتب عبارة v_n بدلالة n .

b) استنتج عبارة u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

5) نضع المتتالية S_n المعرفة وفق $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ ، أثبت أن $S_n=n^2$ واستنتج نهاية المتتالية S_n.

6) أي من المتتاليات u_n و v_n و S_n محدودة وأي منها غير محدودة ، برر إجابتك.

الرياضيات مع أيهم الشاعر

المسألة السابعة:

I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$.

II) في المستوي العقدي $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقاط A و B و C التي تمثل الأعداد العقدية $a=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ و $b=\bar{a}$ و $c=2(1-i)$ بالترتيب والمطلوب:

1) اكتب a و b و c بالشكل الأسي ثم استنتج أن النقاط A و B و C تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2) a) ليكن R الدوران المباشر الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ، أوجد العدد العقدي c' الذي يمثل النقطة C' صورة النقطة C وفق الدوران R.

b) اكتب بالشكل الأسي العدد العقدي $\frac{a-c'}{b-c'}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC'.

3) a) ليكن H التحاكي الذي مركزه B ونسبته $\frac{2}{3}$ ، أوجد العدد العقدي a' الذي يمثل النقطة A' صورة النقطة A وفق التحاكي H.

b) اكتب بالشكل الجبري العدد العقدي $\frac{a'-c'}{b-c'}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $A'BC'$.

المسألة الثامنة:

I) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $\left[-\frac{8}{3},+\infty\right[$ بالعلاقة $f(x)=\sqrt{6x+16}$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

2) عيّن نقطة تقاطع C مع المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ ، ثم عيّن تقاطع C مع محوري الإحداثيات.

3) ارسم Δ ثم ارسم C.

II) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0=0$ والمطلوب:

1) مثّل هندسياً الحدود الأولى للمتتالية u_n ، ثم خمّن جهة اطرادها وتقاربها.

2) أثبت أن $u_n<u_{n+1}<8$ ثم استنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها.

III) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $v_{n+1}=f(v_n)$ و $v_0>8$ والمطلوب:

1) أثبت بالتدريج أن $v_n>8$ أياً كان العدد الطبيعي n.

2) أثبت أن المتتالية v_n متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

3) أثبت أن المتتاليتين u_n و v_n متجاورتين.

الرياضيات مع أيهم الشاعر

المسألة التاسعة:

I) ليكن لدينا التابع g المعرّف على المجال $]0,+\infty[$ بالعلاقة $g(x)=x^2+\ln x-1$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات g ونظّم جدولاً بها.

2) أثبت أن $\alpha=1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $]0,+\infty[$ بالعلاقة $f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$ والمطلوب:

1) أوجد $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، فسّر النتيجة هندسياً.

2) a) أثبت أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج جدول تغيرات التابع $f(x)$.

b) عيّن القيمة الحدية للتابع f ، استنتج معادلة المماس الأفقي للخط C.

3) a) أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط C.

b) ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة للمقارب (Δ).

4) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C.

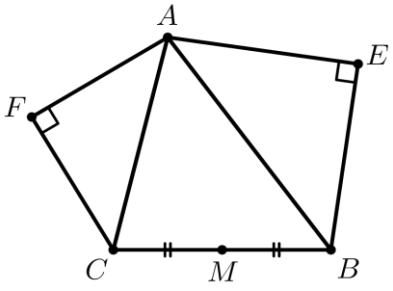
5) ليكن S مساحة السطح المحصور بين C و المستقيم Δ والمستقيم $x=2$ ، احسب S.

6) أثبت أن التابع $G:x\mapsto -\dfrac{1}{x}\left((\ln x)^2+2\ln x+2\right)$ تابع أصلي للتابع $x\mapsto\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$ على المجال $]0,+\infty[$.

7) عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنه يولد مجسماً دورانياً حجمه V ، احسب V.

المسألة العاشرة:

ABC مثلث و النقطتين E و F تجعلان المثلثين ABE و ACF قائمين ومتساويي الساقين و B' نظيرة B بالنسبة إلى E و C' نظيرة C بالنسبة إلى F و النقطة M منتصف $[BC]$ ، ولنفرض في المعلم المتجانس $(A,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A و B و C و E و F و M التي تمثل الأعداد العقدية a و b و c و e و f و m والمطلوب:



1) أثبت أن $e=\dfrac{1}{2}(b+ib)$ و $f=\dfrac{1}{2}(c-ic)$.

2) أثبت أن $b'=2e-b$ و $c'=2f-c$.

3) اكتب بالشكل الجبري والأسي العدد العقدي $\dfrac{b-c'}{c-b'}$ ثم استنتج أن $BC'\perp CB'$ وأن $BC'=CB'$.

4) اكتب بالشكل الجبري والأسي العدد العقدي $\dfrac{f-m}{e-m}$ ثم استنتج طبيعة المثلث EFM.

المسألة الحادية عشر:

ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_{n+1}=\frac{1}{16}u_n+\frac{15}{16}$ و $u_0=2$ والمطلوب:

1) a) أثبت بالتدريج أن $u_n>1$ أياً كان العدد الطبيعي n.

b) تحقق أن $u_{n+1}-u_n=-\frac{15}{16}(u_n-1)$ ، ثم استنتج أن المتتالية u_n متناقصة.

c) استنتج أن المتتالية u_n متقاربة.

2) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $v_n=u_n-1$:

a) أثبت أن v_n متتالية هندسية ، عيّن حدها الأول وأساسها.

b) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم أثبت أن $u_n=1+\left(\frac{1}{16}\right)^n$ ، استنتج نهاية المتتالية u_n.

3) نضع $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$:

a) احسب كلاً من S_n و S'_n بدلالة n.

b) استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$.

المسألة الثانية عشر:

I) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2-8z+41=0$.

II) نعتبر في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A و B و C و D التي تمثل الأعداد العقدية $a=4+5i$ و $b=3+4i$ و $c=6+7i$ و $d=4+7i$ والمطلوب:

1) احسب $\frac{c-b}{a-b}$ واستنتج أن النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.

2) لتكن $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ وفق دوران R مركزه D وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، أثبت أن $z'=-iz-3+11i$.

3) حدد صورة النقطة C بالدوران R ، ما طبيعة المثلث ACD.

4) ليكن T الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DC}$ ولتكن B' صورة B وفق T و A صورة A' وفق T والمطلوب:

a) اكتب الصيغة العقدية للانسحاب ثم استنتج a' و b'.

b) اكتب بالشكل الجبري و الأسي العدد العقدي $\frac{d-b}{a'-b'}$.

c) استنتج أن المستقيمين $(DB),(A'B')$ متعامدين وأن $DB=A'B'$.

5) ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E منتصف $[AD]$ ، أثبت أن النقاط C و B و B' و A' تقع على دائرة واحدة مركزها E.

الرياضيات مع أيهم الشاعر

المسألة الثالثة عشر:

نتأمل في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(2,3,1)$ و $B(1,2,-2)$

وليكن d المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $t\in\mathbb{R}$: $d:\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=3+2t\end{cases}$ والمطلوب:

1) a) عيّن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة A ويقبل $\vec{u}(1,2,-2)$ شعاع توجيه له.

b) عيّن إحداثيات النقطة C نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (d).

2) ليكن P المستوي المعيّن بالمستقيمين (Δ) و (d) ، أثبت أن $\vec{n}(2,-2,-1)$ ناظم المستوي P ثم اكتب معادلته.

3) a) اكتب معادلة المستوي Q المار بالنقطة B و يعامد المستقيم (Δ).

b) عيّن إحداثيات النقطة E المسقط القائم للنقطة B على المستقيم (Δ).

c) احسب بعد النقطة B عن المستقيم (Δ).

4) a) تأكد أن المستويين P و Q متعامدين.

b) احسب بعد النقطة $M(1,4,5)$ عن المستويين P و Q.

c) استنتج بعد M عن الفصل المشترك لتقاطع المستويين P و Q.

المسألة الرابعة عشر:

I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$.

II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A و B و C و D التي تمثل الأعداد العقدية

$a=\sqrt{3}+i$ و $b=\overline{a}$ و $c=-2i$ و $d=\overline{c}$ والمطلوب:

1) ارسم شكلاً يمثل النقاط A و B و C و D.

2) أثبت أن $d-c=2(a-b)$ ، ما طبيعة الرباعي $ABCD$.

3) بيّن أن النقاط A و B و C و D تقع على دائرة Ω يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

4) ليكن e هو العدد العقدي الممثل للنقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى المبدأ O ، أثبت أن $e=-\sqrt{3}+i$.

5) أثبت أن $a-c=e^{-\frac{\pi}{3}i}(e-c)$ ، واستنتج طبيعة المثلث AEC .

6) أثبت أن $b+e=c+d$ ثم استنتج أن الرباعي $DBCE$ مستطيل.

المسألة الخامسة عشر:

I) ليكن لدينا المعادلة $z^2-4(\sin\theta)z+4=0\ldots(1)$ حيث θ وسيط حقيقي والمطلوب:

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1).

2) من أجل $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة (1) بـ z_1 و z_2 ، اكتب z_1 و z_2 بالشكل الأسي.

II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A و B و C التي تمثل الأعداد العقدية

$a=\sqrt{3}+i$ و $b=\sqrt{3}-i$ و $c=3\sqrt{3}+i$ والمطلوب:

1) اكتب العدد العقدي $\dfrac{c-a}{b-a}$ بالشكل الجبري وبالشكل الأسي ، واستنتج طبيعة المثلث ABC .

2) عيّن العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة B وفق الانسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$

ثم حدد طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) في حالة عدد عقدي $z\neq b$ نضع $Z=\dfrac{z-a}{z-b}$ ونفترض أن $z=x+iy$ و $Z=X+iY$

حيث x و y و X و Y هي أعداد حقيقية

a) احسب X و Y بدلالة x و y.

b) أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z حقيقي هي مستقيم محذوف منه نقطة.

c) أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z تخيلي بحت هي دائرة محذوف منها نقطة.

المسألة السادسة عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}_+^*$ بالعلاقة $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

2) دل على القيمة الحدية وبين نوعها ، اكتب معادلة المقارب الشاقولي.

3) حل المتراجحة $f(x)\leq 0$.

4) ارسم C.

5) أثبت أن التابع $F(x)=x(\ln x)^2-4x\ln x+4x$ تابع أصلي للتابع f على المجال $I=]0,+\infty[$.

6) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل.

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

المسألة السابعة عشر:

I) ليكن لدينا كثير الحدود $P(x)=x^3-3x^2-16$ ، احسب $P(4)$ ثم ادرس إشارة $P(x)$.

II) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة الآتية : $\ln(4x^2-16)\hat{E}2\ln x-\ln(7-x)\geq 0$

III) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x^3+8}{(x-1)^2}$ والمطلوب:

1) أوجد النهايات عند أطراف المجالات المفتوحة لمجموعة التعريف ، حدد معادلة المقارب الشاقولي للخط C.

2) a) أثبت أن $f'(x)=\dfrac{P(x)}{(x-1)^3}$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

b) نظّم جدولاً بتغيرات التابع f.

3) a) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+2$ مقارب مائل للخط البياني C.

b) ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة لمقاربه المائل Δ.

4) أوجد معادلة d المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها -2.

5) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C.

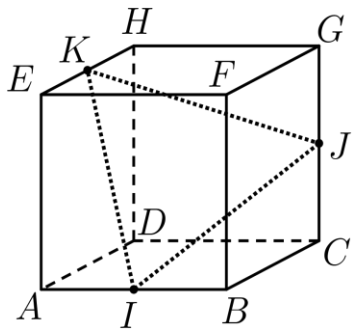
6) ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $x^3-mx^2+2mx+8-m=0$.

7) a) عيّن عددين حقيقيين a و b بحيث يحققان $\dfrac{3x+6}{(x-1)^2}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}$.

b) احسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيم Δ والمستقيمين $x=-1$ و $x=0$.

المسألة الثامنة عشر:

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 2 فيه I و J و K منتصفات الأضلاع $[AB]$ و $[CG]$ و $[EH]$ بالترتيب ، والمطلوب:



1) a) أثبت أن المستقيم DF عمودي على المستوي IJK.

b) اكتب معادلة المستوي IJK.

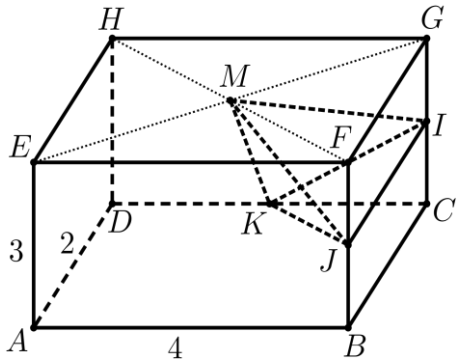
2) أثبت ان المثلث IJK متساوي الأضلاع ، احسب مساحته.

3) a) احسب بعد F عن المستوي IJK.

b) احسب حجم رباعي الوجوه $FIJK$.

المسألة التاسعة عشر:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=4$ و $AD=2$ و $AE=3$ والنقاط I و J و K



هي منتصفات الأضلاع $[CG]$ و $[BF]$ و $[CD]$ بالترتيب

و M مركز الوجه $EFGH$ ، نفرض $\left(A,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

معلم متجانس ، والمطلوب:

1) أوجد إحداثيات النقاط I و J و K و M .

2) a) احسب $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}$ ثم استنتج طبيعة المثلث IJK .

b) احسب طول IJ و IK ثم احسب مساحة المثلث IJK .

3) أثبت أن $\vec{n}(3,0,-4)$ ناظم المستوي IJK ثم اكتب معادلته.

4) a) اعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ العمودي على المستوي IJK والمار بالنقطة M .

b) استنتج إحداثيات M' المسقط القائم للنقطة M على المستوي IJK .

c) احسب بعد M عن المستوي IJK .

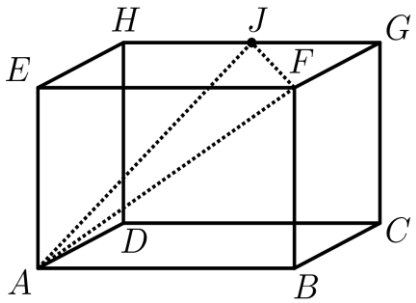
5) احسب حجم رباعي الوجوه $MIJK$.

6) أثبت أن M' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,\alpha),(J,\beta),(K,\gamma)$ حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

المسألة العشرون:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=4$ و $AE=AD=2$ ولتكن J منتصف $[HG]$

ونتأمل معلماً متجانساً $(A,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$ والمطلوب:



1) أوجد إحداثيات النقاط A و F و C و J .

2) a) احسب المسافتين $[AJ]$ و $[JF]$.

b) أثبت أن المثلث AFJ قائم في J ، واحسب مساحته.

3) a) أثبت أن $\vec{n}(1,1,-2)$ ناظم المستوي AFJ ثم اكتب معادلته.

b) احسب بعد C عن المستوي AFJ .

4) استنتج حجم رباعي الوجوه $AFJC$.

الرياضيات مع أيهم الشاعر

المسألة الحادية والعشرون:

I) ليكن لدينا التابع $g(x)=ax-\sqrt{x^2+b}$ حيث a و b عددين حقيقيين ، والمطلوب:

عيّن قيمة a و b كي يقبل الخط البياني للتابع g مماساً في النقطة $A(0,-1)$ يوازي المستقيم $\Delta: y=2x$

II) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$ والمطلوب:

1) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) a) أوجد $f'(x)$ واستنتج أن التابع f متزايد تماماً أياً كانت x من $\mathbb{R}$.

b) نظم جدولاً بتغيرات التابع f .

3) a) أثبت وجود عددين حقيقيين a و b بحيث $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ و $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$.

b) استنتج معادلة d_1 المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$ ، وادرس وضع C بالنسبة لمقاربه المائل d_1.

4) أثبت أن المستقيم d_2 الذي معادلته $y=3x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

5) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]0,1[$.

6) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C.

المسألة الثانية والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{2}{e^x+1}$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

2) اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C وادرس وضعه النسبي.

3) اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها صفر .

4) أثبت أن النقطة $I(0,1)$ مركز تناظر للخط C.

5) ارسم مقاربات C و T ثم ارسم C .

6) a) أثبت ان التابع f يكتب بالشكل $f(x)=2-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ أياً كان x من $\mathbb{R}$.

b) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=0$.

7) أثبت أن التابع f حل للمعادلة التفاضلية $(e^x+1)^2.(y+y')=2$.

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

المسألة الثالثة والعشرون:

I) ليكن لدينا التابع g المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $g(x)=x-x\sqrt{x^2+1}$ ويحقق $g'(x)\le 0$

1) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع g.

2) أثبت أن للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد ثم استنتج أن $\alpha=0$ هو الحل.

3) استنتج إشارة $g(x)$ أياً كان x من $\mathbb{R}$.

II) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ والمطلوب:

1) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) a) أوجد $f'(x)$ ثم استنتج جهة اطراد التابع f.

b) نظّم جدولاً بتغيرات التابع f.

3) a) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)$ ثم استنتج معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$.

b) ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة للمقارب المائل.

4) أثبت أن المستقيم $y=x-1$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

5) a) اكتب معادلة d المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها صفر.

b) أثبت أن $f(x)-y_d=\dfrac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ ثم استنتج الوضع النسبي للخط C بالنسبة للمماس d.

6) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم d والخط C.

7) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=-1$.

الرياضيات مع أيهم الشاعر

المسألة الرابعة والعشرون:

ينتج معمل أسلاك الحديدية بعضها معيب ، فإذا كانت نسبة الأسلاك المعيبة من انتاج المعمل 6% ، يشارك في انتاج الأسلاك آلتين A و B ، تنتج الآلة A : 60% من الأسلاك وتنتج الآلة B : 40% من الأسلاك من بينها 5% معيب ، نختار سلكاً عشوائياً من الأسلاك وليكن E " حدث أن السلك معيب " و المطلوب:

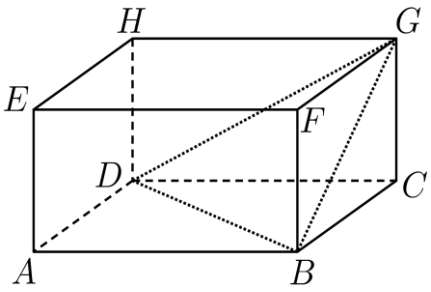
1) ما احتمال أن يكون السلك معيب وتنتجه الآلة A.

2) ما احتمال أن يكون السلك معيب.

3) إذا علمت أن السلك معيب ، ما احتمال أن يكون من انتاج الآلة A.

المسألة الخامسة والعشرون:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=BC=2$ و $AE=1$ ونتأمل معلماً متجانساً $(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$



1) a) أوجد إحداثيات النقاط B و D و G.

b) اكتب معادلة المستوي GDB.

2) a) اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (EC).

b) عيّن إحداثيات M نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي GDB.

c) أثبت أن M هي مركز ثقل المثلث GDB.

3) لتكن I منتصف $[EM]$ ، عيّن α و β و γ و δ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

(E,α) و (B,β) و (D,γ) و (G,δ)

المسألة السادسة والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$ والمطلوب:

1) أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f .

2) ادرس النهايات عند أطراف مجموعة التعريف ، اكتب معادلة كل مقارب شاقولي وأفقي للخط C.

3) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ، دل على القيمة الحدية وبين نوعها.

4) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C.

5) استنتج رسم الخط البياني للتابع $f_1(x)=\dfrac{1}{x\ln x-x}$.

6) ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $mx(1-\ln x)=1$.

7) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين $x=1$ و $x=2$.

8) نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية $u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0=2$ والمطلوب:

a) أثبت بالتدريج صحة العلاقة $1\leq u_{n+1}<u_n$ وذلك أياً العدد الطبيعي n .

b) استنتج أن المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

الرياضيات مع أيهم الشاعر

المسألة السابعة والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=x^2e^x$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ، دل على كل قيمة حدية وبين نوعها.

2) ارسم C.

3) ليكن C_1 الجزء من الخط البياني C المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$ وليكن S السطح المحصور بين C_1 ومحور الفواصل ، احسب مساحة S.

4) عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنه يولد مجسماً دورانياً حجمه V.

a) عيّن الأعداد a و b و c و d و f حتى يكون التابع $G:x\mapsto(ax^4+bx^3+cx^2+dx+f)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x\mapsto\big(f(x)\big)^2$.

b) استنتج قيمة V.

5) لتكن المعادلة التفاضلية $E:y'-y=2xe^x$.

a) أثبت ان التابع f حل للمعادلة التفاضلية E.

b) ليكن g تابعاً اشتقاقياً على $\mathbb{R}$ ، أثبت أن g حل للمعادلة التفاضلية E إذا وفقط إذا كان $g-f$ حل للمعادلة التفاضلية $E':y'-y=0$

c) حل المعادلة التفاضلية E' ثم استنتج جميع حلول المعادلة التفاضلية E.

المسألة الثامنة والعشرون:

الرياضيات مع أيهم الشاعر

ليكن لدينا صندوقين ، الأول يحوي كرتين حمراء وكرتين بيضاء ، والثاني يحوي كرتين حمراء وثلاث كرات بيضاء نسحب كرة من الصندوق الأول ثم كرة من الصندوق الثاني ، ولنعرّف الحدثين : A سحب كرتين من اللون نفسه ، B سحب كرة حمراء واحدة على الأقل ، والمطلوب: 1) ارسم مخططاً شجرياً يمثل جميع نتائج هذه التجربة.

2) احسب احتمال كل من الأحداث A و B و $A\bigcap B$.

3) هل الحدثين A و B مستقلين احتمالياً.

4) ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة والمطلوب:

a) اكتب مجموعة قيم X واكتب قانونه الاحتمالي.

b) احسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

المسألة التاسعة والعشرون:

يمارس أحد الأشخاص الرياضة ، احتمال أن يمارس الشخص الرياضة في اليوم الأول $\frac{1}{2}$ ، إذا مارس الشخص الرياضة في اليوم n فإن احتمال أن يمارسها في اليوم التالي $\frac{3}{4}$ ، وإذا لم يمارس الشخص الرياضة في اليوم n فإن احتمال ألا يمارسها في اليوم التالي $\frac{1}{2}$ ،

نعرف $p_n = P(S_n)$ احتمال أن يمارس الشخص الرياضة في اليوم n ، والمطلوب:

1) عين p_1 ثم أثبت أن $p_2 = \frac{5}{8}$.

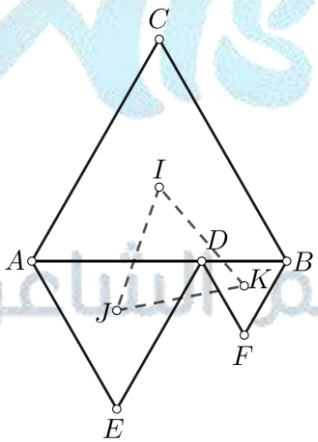
2) أثبت أن $p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.

3) نعرف المتتالية $u_n = p_n - \frac{2}{3}$ هندسية ، عين حدها الأول وأساسها.

4) اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج عبارة p_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

المسألة الثلاثون:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B التي تمثل العددين العقديين $a=-2-2i$ و $b=4+i$ والنقطة D تحقق العلاقة $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ والنقاط F و E و C التي تجعل المثلثات DBF و ADE و ABC متساوية الأضلاع ، و المطلوب:



1) أثبت أن العدد العقدي الممثل للنقطة D هو $d=2$.

2) أوجد الأعداد العقدية f و e و c التي تمثل النقاط F و E و C.

3) لتكن النقاط K و J و I مراكز ثقل المثلثات DBF و ADE و ABC بالترتيب

أوجد الأعداد العقدية z_K و z_J و z_I.

4) أثبت أن $z_I - z_J = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_K - z_J)$ ، استنتج طبيعة المثلث IJK .

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

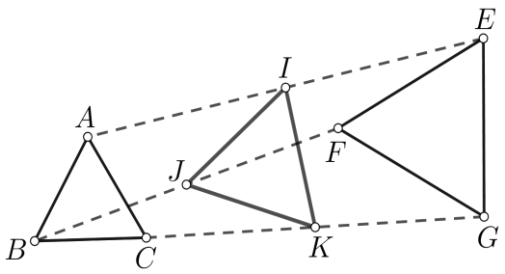
المسألة الحادية والثلاثون:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط F و E و B و A التي تمثل الأعداد العقدية:

$a=-1+i$ و $b=-2-2i$ و $e=3+4i$ و $f=1+2i$

والنقطتين G و C التي تجعل المثلثين EFG و ABC مثلثات متساوية الأضلاع والمطلوب:

1) أوجد العددين العقديين g و c التي تمثل النقطتين G و C.



2) لتكن النقاط K و J و I منتصفات الأضلاع $[CG]$ و $[BF]$ و $[AE]$

بالترتيب أوجد الأعداد العقدية z_K و z_J و z_I.

3) أثبت أن $z_I-z_J=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_K-z_J)$.

4) استنتج طبيعة المثلث IJK.

المسألة الثانية والثلاثون:

يحوي صندوق 8 كرات ثلاث منها حمراء مرقمة $0,1,1$ وثلاث خضراء مرقمة $0,1,2$ وكرتين بيضاء مرقمة $0,1$ ،

نسحب عشوائياً ثلاث كرات معاً من الصندوق ونعرّف الحدثين: A : سحب كرة من كل لون

B : الكرات المسحوبة تحمل الرقم ذاته

والمطلوب: 1) احسب احتمال كل من الأحداث: A و B و $A\cap B$.

2) إذا علمت أن الكرات المسحوبة تحمل الرقم ذاته ، ما احتمال أن تكوون كل منها من لون مختلف.

3) ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات التي تحمل الرقم واحد ،

اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X وتوقعه الرياضي $E(X)$.

4) ليكن Y المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الألوان المختلفة عند كل سحب ،

اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y وتوقعه الرياضي $E(Y)$.

5) هل المتحولان العشوائيان X و Y مستقلان؟ برر إجابتك.

انتهت المسائل

بالتوفيق للجميع

إعداد: أيهم الشاعر

Aiyham Alshaer Math /AiyhamAlshaerMath

الحلول

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة الأولى:

1) نعوض العدد العقدي $a=3+3i$ في المعادلة $z^2-6z+18=0$ فنجد:

$$(3+3i)^2-6(3+3i)+18=9+18i-9-18-18i+18=0$$

وبالتالي العدد العقدي $a=3+3i$ هو حل للمعادلة $z^2-6z+18=0$

و بما أن المعادلة بأمثال حقيقة فيكون الحل الآخر هو $b=\bar{a}=3-3i$

2) لدينا $r_a=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ و $\cos\theta_a=\frac{x}{r}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\theta_a=\frac{y}{r}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

وبالتالي تكون $\theta_a=\frac{\pi}{4}$ ومنه الشكل المثلثي: $a=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

و $b=\bar{a}=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

لدينا $a^4=\left(3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^4=324\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-324$

و $b^4=\left(3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^4=324\left(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\right)=-324$

وبالتالي $a^4+b^4+648=-324-324+648=0$ محققة

3) $-a=-3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$-a=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

لدينا $\arg\left(\frac{a^3}{b^5}\right)=\arg\left(a^3\right)-\arg\left(b^5\right)=3\arg a-5\arg b=\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}=2\pi$

و $\left|\frac{a^3}{b^5}\right|=\frac{\left|a^3\right|}{\left|b^5\right|}=\frac{|a|^3}{|b|^5}=\frac{(3\sqrt{2})^3}{(3\sqrt{2})^5}=\frac{1}{(3\sqrt{2})^2}=\frac{1}{18}$

وبالتالي يكون $\frac{a^3}{b^5}=\frac{1}{18}\left(\cos2\pi+i\sin2\pi\right)$

لدينا $\arg(a.b)=\arg a+\arg b=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0$

و $|a.b|=|a|.|b|=(3\sqrt{2})(3\sqrt{2})=18$

وبالتالي يكون $a.b=18(\cos0+i\sin0)$

4) $\frac{a}{b}=\frac{3+3i}{3-3i}=\frac{(3+3i)(3+3i)}{(3-3i)(3+3i)}=\frac{9+9i+9i-9}{9+9}=\frac{18i}{18}=i$

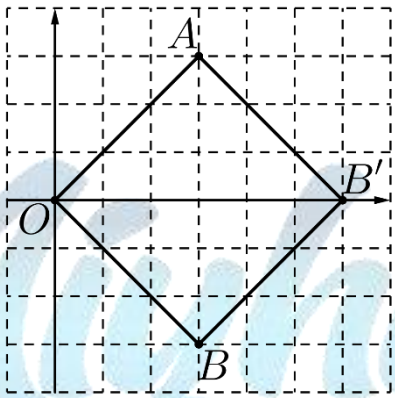
بما أن $\arg\frac{a}{b}=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ فإن $OA\perp OB$ و $\left|\frac{a}{b}\right|=|i|=1$ فإن $OA=OB$

وبالتالي المثلث ABO قائم ومتساوي الساقين

5) a) الصيغة العقدية للانسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{OA}$ هي $z'=z+a$.

b) العدد العقدي الذي يمثل B' صورة B وفق الانسحاب T هو $b'=b+a=3-3i+3+3i=6$.

6)



7) $\frac{b-b'}{a-b'}=\frac{3-3i-6}{3+3i-6}=\frac{-3-3i}{-3+3i}=\frac{(-3-3i)(-3-3i)}{(-3+3i)(-3-3i)}=\frac{9+9i+9i-9}{9+9}=\frac{18i}{18}=i$

بما أن $\arg\frac{b-b'}{a-b'}=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ فإن $BB'\perp AB'$ و $\left|\frac{b-b'}{a-b'}\right|=|i|=1$ فإن $BB'=AB'$

وبالتالي المثلث ABB' متساوي الساقين وقائم في B'.

8) بما أن B' صورة B وفق الانسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{OA}$ فإن الرباعي $OAB'B$ متوازي أضلاع

وفيه زاوية قائمة فهو مربع.

انتهى حل المسألة الأولى

حل المسألة الثانية:

1) a) التابع $f(x)=3-\dfrac{10}{x+4}$ متزايد تماماً لأن: $f'(x)=\dfrac{10}{(x+4)^2}>0$

b) لدينا $-2\le x\le 1$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن $f(-2)\le f(x)\le f(1)$

وبالتالي $-2\le f(x)\le 1$ ، محققة.

2) a) نرمز القضية $E(n):0<u_n<1$.

نثبت صحة القضية $E(0):0<u_0<1:0<u_0=\dfrac{1}{4}<1$ محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$ ونثبت صحة القضية $E(n+1):0<u_{n+1}<1$ ؟

من الفرض $0<u_n<1$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن:

$$0<\frac{1}{2}<u_{n+1}<1 \quad \text{وبالتالي} \quad f(0)<f(u_n)<f(1)$$

وبالتالي القضية $E(n)$ محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

b) نرمز القضية $E(n):u_n<u_{n+1}$.

نثبت صحة القضية $E(0):u_0<u_1:u_0=\dfrac{1}{4}<u_1=\dfrac{11}{17}$ محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$ ونثبت صحة القضية $E(n+1):u_{n+1}<u_{n+2}$ ؟

من الفرض $u_n<u_{n+1}$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن:

$$f(u_n)<f(u_{n+1}) \quad \text{وبالتالي} \quad u_{n+1}<u_{n+2}$$

وبالتالي القضية $E(n)$ محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n والمتتالية u_n متزايدة تماماً.

بما أن المتتالية u_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) a)
$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}}=\frac{3-\dfrac{10}{u_n+4}+2}{1-3+\dfrac{10}{u_n+4}}=\frac{5-\dfrac{10}{u_n+4}}{\dfrac{10}{u_n+4}-2}=\frac{\dfrac{5u_n+20-10}{u_n+4}}{\dfrac{10-2u_n-8}{u_n+4}}=\frac{5u_n+10}{2-2u_n}$$

$$v_{n+1}=\frac{5(u_n+2)}{2(1-u_n)}=\frac{5}{2}.\left(\frac{u_n+2}{1-u_n}\right)=\frac{5}{2}v_n$$

وبالتالي المتتالية v_n هندسية اساسها $q=\dfrac{5}{2}$ ، حدها الأول: $v_0=\dfrac{u_0+2}{1-u_0}=\dfrac{\frac{1}{4}+2}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{4}}=3$

$(b$ الحد العام للمتتالية v_n هو: $v_n = v_0.q^n = 3.\left(\frac{5}{2}\right)^n$

من جهة أخرى: لدينا $v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$ ومنه $v_n(1-u_n) = u_n+2$ و $v_n - v_n u_n = u_n + 2$

و $v_n - 2 = u_n + v_n u_n$ و $v_n - 2 = u_n(1+v_n)$ أي أن $u_n = \frac{v_n - 2}{1+v_n}$

وبالتالي تعطى عبارة u_n بدلالة n بالشكل: $u_n = \frac{3.\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2}{1+3.\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \frac{\frac{3.(5^n)-2.(2^n)}{2^n}}{\frac{2^n+3.(5^n)}{2^n}} = \frac{3.(5)^n - 2.(2^n)}{2^n+3.(5^n)}$

$(c$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3.(5)^n-2.(2^n)}{2^n+3.(5^n)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n\left(3-2.\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{5^n.\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+3\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-2.\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+3}$

بما أن المتتالية $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ هندسية أساسها $-1 < q = \frac{2}{5} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-0}{0+3} = 1$

$(4$ المتتالية $x_n = 3 - \frac{10}{n+4}$ متزايدة تماماً لأن التابع $f(x) = 3 - \frac{10}{x+4}$ متزايد تماماً (الطلب الأول)

المتتالية $y_n = \frac{3n+4}{n+1}$ متناقصة تماماً لأن التابع $g(x) = \frac{3x+4}{x+1}$ متناقص تماماً (لأن $g'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$)

و $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \frac{10}{n+4} - \frac{3n+4}{n+1}\right) = 3 - 0 - 3 = 0$

وبالتالي المتتاليتين x_n و y_n متجاورتين ونهايتهما المشتركة $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 3$

انتهى حل المسألة الثانية

حل المسألة الثالثة:

I) 1) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

أما $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ فهي حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$ يجب إزالتها:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2x + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

2) $g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$

إذا كان $g'(x) = 0$ فإن $4x^2 - 1 = 0$ ومنه $x^2 = \frac{1}{4}$ وبالتالي: $x = \frac{1}{2}$ مقبول و $x = -\frac{1}{2} \notin D_g =]0, +\infty[$ مرفوض

حيث $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \ln 2$

ومنه يكون جدول تغيرات التابع g معطى بالشكل:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{2}+\ln 2$	↗	$+\infty$

3) من جدول تغيرات التابع g نجد: $g(x) \geq \frac{3}{2} + \ln 2 > 0$ أياً كانت $x > 0$.

II) $f(x) = 2x - 2 + \frac{\ln x}{x}$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي عند $-\infty$.

2) $f'(x) = 2 + \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{2x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$

وبالتالي يكون التابع f متزايد تماماً وجدول تغيراته معطى بالشكل:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

3) a

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2+\dfrac{\ln x}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x^2}\right)=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{\ln x}{x}\right)=-2.$$

b) وبالتالي الخط البياني C يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ من الشكل $y=ax+b$ معادلته $\Delta: y=2x-2$

لدراسة الوضع النسبي ، ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y_\Delta=\dfrac{\ln x}{x}$

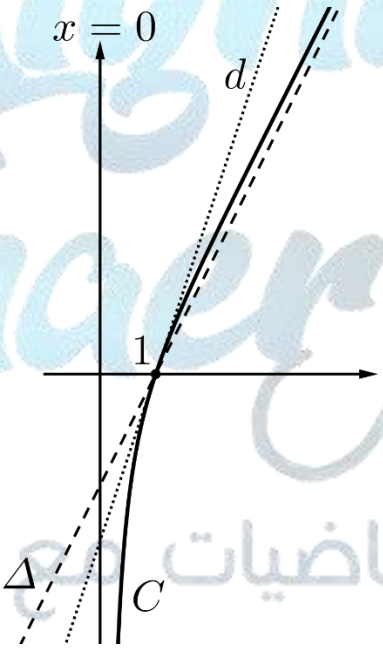
بما أن $x>0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ حيث:

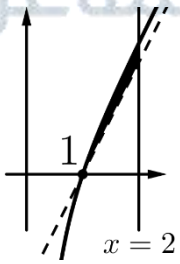
إذا كانت $x>1$ فإن $\ln x>0$ و $f(x)-y_\Delta>0$ وبالتالي C فوق المقارب Δ

أما إذا كانت $x<1$ فإن $\ln x<0$ و $f(x)-y_\Delta<0$ وبالتالي C تحت المقارب Δ

4) $d: y=f'(1)(x-1)+f(1)=3(x-1)+0=3x-3$

5)





6) $S=\int_1^2 (f(x)-y_\Delta)\,dx=\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx=\int_1^2 \frac{1}{x}\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

انتهى حل المسألة الثالثة

حل المسألة الرابعة:

$A(2,1,0)$ و $B(1,2,2)$ و $C(3,3,1)$ و $D(1,1,4)$

1) الشعاعين $\overrightarrow{AB}(-1,1,2)$ و $\overrightarrow{AC}(1,2,1)$ غير مرتبطين خطياً لأن $\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}$ المركبات غير متناسبة

وبالتالي النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة فهي تعيّن مستوياً ABC

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي ABC فهو يحقق:

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ ومنه $(a,b,c).(-1,1,2)=0$ وبالتالي $(1)...\quad -a+b+2c=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ ومنه $(a,b,c).(1,2,1)=0$ وبالتالي $(2)...\quad a+2b+c=0$

نفرض $b=1$ ، نعوّض في (1) و (2) فنجد $(3)...\quad -a+2c=-1$ و $(4)...\quad a+c=-2$

بجمع (3) و (4) نجد $3c=-3$ وبالتالي $c=-1$

نعوض في (4) فنجد $a-1=-2$ وبالتالي $a=-1$

ومنه يكون $\vec{n}(-1,1,-1)$ ناظم المستوي ABC

معادلة المستوي ABC من الشكل $-x+y-z+d=0$

نعوض النقطة A فنجد $-2+1-0+d=0$ و منه $d=1$

وبالتالي تكون معادلة المستوي ABC : $-x+y-z+1=0$

2) لدينا $\overrightarrow{AB}(-1,1,2)$ وبالتالي $AB=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

و $\overrightarrow{AC}(1,2,1)$ وبالتالي $AC=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

و $\overrightarrow{BC}(2,1,-1)$ وبالتالي $BC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

ومنه يكون المثلث ABC متساوي الأضلاع ، مساحته $S(ABC)=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{6\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3) نعلم أن $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_{ABC}}(-1,1,-1)$ وبالتالي $\Delta:\begin{cases}x=-t+1\\y=t+1\\z=-t+4\end{cases}:t\in\mathbb{R}$

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

4) a) لإيجاد إحداثيات النقطة E نعوّض المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ في معادلة المستوي ABC فنجد:

$$-(-t+1)+(t+1)-(-t+4)+1=0$$

$$t-1+t+1+t-4+1=0$$

$$3t-3=0$$

$$t=1$$

نعوّض قيمة t في المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ فنجد $\begin{matrix} x=-t+1=-1+1=0 \\ y=t+1=1+1=2 \\ z=-t+4=-1+4=3 \end{matrix}$ ومنه $E(0,2,3)$

b) بعد النقطة D عن المستوي (ABC) يمكن إيجاده بطريقتين:

الطريقة الأولى: لدينا $\overrightarrow{ED}(-1,1,-1)$ وبالتالي $ED=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

الطريقة الثانية: $dist(D,ABC)=\dfrac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|-1+1-4+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

5) $V(ABCD)=\dfrac{1}{3}S(ABC).h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{3}{2}$

6) E نقطة من المستوي ABC وبالتالي النقاط A و B و C و E تقع في مستوٍ واحد

وبما أن الشعاعين $\overrightarrow{EB}(1,0,-1)$ و $\overrightarrow{EC}(3,1,-2)$ غير مرتبطين خطياً لأن $\dfrac{1}{3}\neq\dfrac{0}{1}\neq\dfrac{-1}{-2}$ المركبات غير متناسبة

فإنه يوجد عددين a و b بحيث $\overrightarrow{EA}=a\overrightarrow{EB}+b\overrightarrow{EC}$

$$(2,-1,-3)=a(1,0,-1)+b(3,1,-2)$$

$$(2,-1,-3)=(a,0,-a)+(3b,b,-2b)$$

$$(2,-1,-3)=(a+3b,b,-a-2b)$$

$$(1)\ldots\quad a+3b=2$$

بالمطابقة نجد $(2)\ldots\quad b=-1$

$$(3)\ldots\quad -a-2b=-3$$

ومنه $b=-1$, نعوض (2) في (1) فنجد $a-3=2$ ومنه $a=5$

للتأكد نعوض في (3) فنجد $-5-2(-1)=-5+2=-3$ محققة

ومنه يكون $\overrightarrow{EA}=5\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}$ أي أن $\overrightarrow{EA}-5\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

و بالتالي E مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-5)$ و $(C,1)$

7) نصف قطر الكرة هو $R = dist(D, ABC) = \sqrt{3}$

وبالتالي معادلة الكرة التي مركزها D وتمس المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^4 = 3$$

انتهى حل المسألة الرابعة

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة الخامسة:

$A(2,2,0)$ و $B(0,-2,2)$ و $C(1,1,3)$

1) بما أن المستوي P الذي يعامد المستقيم (BC) فإن $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{BC}(1,3,1)$

وبالتالي معادلة المستوي P تعطى بالشكل $x+3y+z+d=0$

و بما أن A نقطة من المستوي P فهي تحقق معادلته: $2+6+0+d=0$ ومنه $d=-8$

وبالتالي تكون معادلة المستوي P : $x+3y+z-8=0$

2) يمكن إيجاد معادلة Q المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ بطريقتين:

الطريقة الأولى: بما أن Q المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ فإن: $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{AB}(-2,-4,2)$

وبالتالي معادلة المستوي من الشكل $-2x-4y+2z+d=0$

المستوي المحوري يمر من النقطة I منتصف $[AB]$ حيث $I(1,0,1)$ وبالتالي $-2+2+d=0$ ومنه $d=0$

ومنه تصبح المعادلة من الشكل $-2x-4y+2z=0$

وتكافئ $Q: x+2y-z=0$

الطريقة الثانية: نفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري فهي تحقق $AM=BM$ ومنه:

$$\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2+(z_M-z_A)^2}=\sqrt{(x_M-x_B)^2+(y_M-y_B)^2+(z_M-z_B)^2}$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y+2)^2+(z-2)^2}$$

$$\sqrt{x^2-4x+4+y^2-4y+4+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+4y+4+z^2-4z+4}$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2-4x-4y+8}=\sqrt{x^2+y^2+z^2+4y-4z+8}$$

$$x^2+y^2+z^2-4x-4y+8=x^2+y^2+z^2+4y-4z+8$$

$$-4x-8y+4z=0$$

وبالتالي تكون معادلة المستوي المحوري: $Q: x+2y-z=0$

الرياضيات مع أيهم الشاعر

3) الشعاعين $\overrightarrow{n_P}(1,3,1)$ و $\overrightarrow{n_Q}(1,2,-1)$ غير مرتبطين خطياً لأن $\frac{1}{1}\neq\frac{3}{2}\neq\frac{1}{-1}$ المركبات غير متناسبة

وبالتالي المستويين P و Q متقاطعان بفصل مشترك (Δ)

نفرض $x=t$ ونعوض في معادلتي المستويين فنجد $\begin{matrix}(1)... & 3y+z=-t+8\\ (2)... & 2y-z=-t\end{matrix}$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد $5y=-2t+8$ وبالتالي $y=-\frac{2}{5}t+\frac{8}{5}$

نعوّض في (2) فنجد: $z=2y+t=2\left(-\frac{2}{5}t+\frac{8}{5}\right)+t=-\frac{4}{5}t+t+\frac{16}{5}=\frac{1}{5}t+\frac{16}{5}$

وبالتالي تكون المعادلات الوسيطية للفصل المشترك لتقاطع المستويين P و Q هي: $\Delta:\begin{cases}x=t\\ y=-\frac{2}{5}t+\frac{8}{5}:t\in\mathbb{R}\\ z=\frac{1}{5}t+\frac{16}{5}\end{cases}$

4) يمكن إثبات أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالشكل $5x-2y+z=6$ بطريقتين:

الطريقة الأولى: نعوض النقطة A في المعادلة فنجد $10-4+0=6$ محققة

نعوض النقطة B في المعادلة فنجد $0+4+2=6$ محققة

نعوض النقطة C في المعادلة فنجد $5-2+3=6$ محققة

وبالتالي فإن المعادلة $5x-2y+z=6$ تمثل المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC).

الطريقة الثانية: نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (ABC) فهو يحقق:

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ ومنه $(a,b,c).(-2,-4,2)=0$ وبالتالي $-2a-4b+2c=0$ وتكافئ $(1)...\quad a+2b-c=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ ومنه $(a,b,c).(-1,-1,3)=0$ وبالتالي $(2)...\quad -a-b+3c=0$

نفرض $c=1$ ونعوّض في (1) و (2) فنجد $\begin{matrix}(3)... & a+2b=1\\ (4)... & -a-b=-3\end{matrix}$

بجمع العلاقتين (3) و (4) نجد $b=-2$

نعوّض في (3) فنجد $a-4=1$ ومنه $a=5$

وبالتالي يكون $\vec{n}(5,-2,1)$ ناظم المستوي (ABC) ومعادلته تعطى بالشكل $5x-2y+z+d=0$

نعوّض النقطة A فنجد $10-4+d=0$ ومنه $d=-6$

وبالتالي تكون معادلة المستوي (ABC): $5x-2y+z-6=0$,

5) لإيجاد إحداثيات G نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي (ABC)

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم (Δ) في معادلة المستوي (ABC) فنجد:

$$5(t)-2\left(-\frac{2}{5}t+\frac{8}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}t+\frac{16}{5}\right)-6=0$$

$$5t+\frac{4}{5}t-\frac{16}{5}+\frac{1}{5}t+\frac{16}{5}-6=0$$

$$6t-6=0 \text{ وبالتالي } t=1$$

$$x=1$$

نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ فنجد $y=-\frac{2}{5}+\frac{8}{5}=\frac{6}{5}$

$$z=\frac{1}{5}+\frac{16}{5}=\frac{17}{5}$$

ومنه $G\left(1,\frac{6}{5},\frac{17}{5}\right)$

6) يمكن إثبات أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,1),(C,-12)$ بطريقتين:

الطريقة الأولى: $\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{(1)(2)+(1)(0)+(-12)(1)}{1+1-12}=\frac{-10}{-10}=1=x_G$

$$\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{(1)(2)+(1)(-2)+(-12)(1)}{1+1-12}=\frac{-12}{-10}=\frac{6}{5}=y_G$$

$$\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{(1)(0)+(1)(2)+(-12)(3)}{1+1-12}=\frac{-34}{-10}=\frac{17}{5}=z_G$$

الطريقة الثانية: G نقطة من المستوي ABC وبالتالي النقاط A و B و C و G تقع في مستوٍ واحد

وبما أن الشعاعين $\overrightarrow{GB}\left(-1,-\frac{16}{5},-\frac{7}{5}\right)$ و $\overrightarrow{GC}\left(0,-\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$ غير مرتبطين خطياً لأن المركبات غير متناسبة

فإنه يوجد عددين a و b بحيث $\overrightarrow{GA}=a\overrightarrow{GB}+b\overrightarrow{GC}$

$$\left(1,\frac{4}{5},-\frac{17}{5}\right)=a\left(-1,-\frac{16}{5},-\frac{7}{5}\right)+b\left(0,-\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$$

$$\left(1,\frac{4}{5},-\frac{17}{5}\right)=\left(-a,-\frac{16}{5}a-\frac{1}{5}b,-\frac{7}{5}a-\frac{2}{5}b\right)$$

$$(1)\ldots \quad -a=1$$

$$(2)\ldots \quad -\frac{16}{5}a-\frac{1}{5}b=\frac{4}{5}$$ بالمطابقة نجد

$$(3)\ldots \quad -\frac{7}{5}a-\frac{2}{5}b=-\frac{17}{5}$$

ومنه $a=-1$, نعوض (1) في (2) فنجد $\frac{16}{5}-\frac{1}{5}b=\frac{4}{5}$ ومنه $\frac{1}{5}b=\frac{16}{5}-\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$ وبالتالي $b=12$

للتأكد نعوض في (3) فنجد $-\frac{7}{5}(-1)-\frac{2}{5}(12)=\frac{7}{5}-\frac{24}{5}=-\frac{17}{5}$ محققة

ومنه يكون $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}+12\overrightarrow{GC}$ أي أن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-12\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

و بالتالي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,-12)$

7) بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,-12)$ فإن:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-12\overrightarrow{MC}=-10\overrightarrow{MG}$$

وبالتالي العلاقة $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}-12\overrightarrow{MC}\right\|=10\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$ تكافئ $\left\|-10\overrightarrow{MG}\right\|=10\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$

$$|-10|.\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=10\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$$

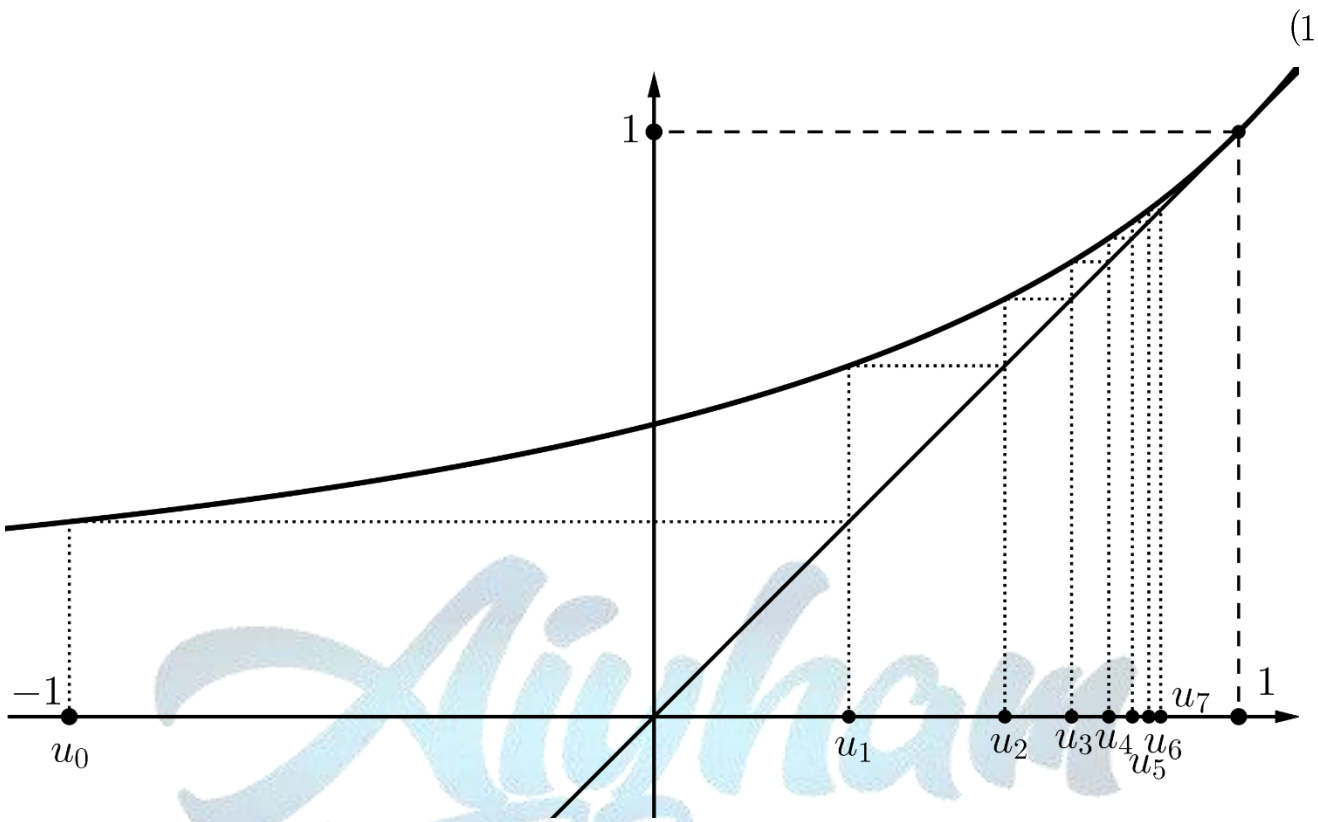
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$$

بعد M عن G يساوي OA (طول ثابت)

وبالتالي مجموعة نقاط الفراغ M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها OA.

انتهى حل المسألة الخامسة

حل المسألة السادسة:



2) نفرض القضية $E(n): u_n < 1$

نثبت صحة القضية $E(0): u_0 < 1$: $u_0 = -1 < 1$ محققة

نفرض صحة القضية $E(n): u_n < 1$ ونثبت صحة القضية $E(n+1): u_{n+1} < 1$ ؟

التابع $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ متزايد تماماً لأن $f'(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2} > 0$

من الفرض $u_n < 1$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن $f(u_n) < f(1)$ وبالتالي $u_{n+1} < 1$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

3) نخمن أن المتتالية u_n متزايدة تماماً ونفرض القضية $E(n): u_n < u_{n+1}$

نثبت صحة القضية $E(0): u_0 < u_1$: $u_0 = -1 < u_1 = \dfrac{1}{3}$ محققة

نفرض صحة القضية $E(n): u_n < u_{n+1}$ ونثبت صحة القضية $E(n+1): u_{n+1} < u_{n+2}$ ؟

من الفرض $u_n < u_{n+1}$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن $f(u_n) < f(u_{n+1})$ وبالتالي $u_{n+1} < u_{n+2}$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

وبالتالي المتتالية u_n متزايدة تماماً

وبما أن المتتالية u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

Aiyham Alshaer Math
/AiyhamAlshaerMath
الرياضيات مع أيهم الشاعر

4) $v_n = \dfrac{2}{1-u_n}$

a) $v_{n+1} = \dfrac{2}{1-u_{n+1}} = \dfrac{2}{1-\dfrac{1}{2-u_n}} = \dfrac{2}{\dfrac{2-u_n-1}{2-u_n}} = \dfrac{2}{\dfrac{1-u_n}{2-u_n}} = \dfrac{4-2u_n}{1-u_n}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{4-2u_n}{1-u_n} - \frac{2}{1-u_n} = \frac{2-2u_n}{1-u_n} = \frac{2(1-u_n)}{1-u_n} = 2$$

وبالتالي المتتالية v_n حسابية ، أساسها $r=2$ وحدها الأول $v_0 = \dfrac{2}{1-u_0} = \dfrac{2}{1-(-1)} = \dfrac{2}{2} = 1$

وحدها العام $v_n = v_0 + nr = 1+2n$

b) من العلاقة $v_n = \dfrac{2}{1-u_n}$ نجد $1-u_n = \dfrac{2}{v_n}$ ومنه $u_n = 1 - \dfrac{2}{v_n}$

وبالتالي $u_n = 1 - \dfrac{2}{1+2n} = \dfrac{1+2n-2}{1+2n} = \dfrac{2n-1}{1+2n}$

وبالتالي تكون $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{1+2n} = 1$.

5) المتتالية S_n هي مجموع حدود متتالية حسابية ومنه يكون:

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = \frac{a+\ell}{2}.n = \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}.n = \frac{1+1+2(n-1)}{2}.n = \frac{2+2n-2}{2}.n = n.n = n^2$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$$

6) المتتالية $u_n = \dfrac{2n-1}{1+2n}$ محدودة لأن:

$u_n = \dfrac{2n-1}{1+2n} < 1$ لأن البسط أصغر من المقام أياً كان العدد الطبيعي n

$u_n = \dfrac{2n-1}{1+2n} > 0$ بدءاً من الحد $n=1$

وبالتالي $0 < u_n < 1$ بدءاً من الحد $n=1$

أما المتتالية $v_n = 1+2n$ محدودة من الأدنى لأن:

$$n \geq 0 \quad و \quad 2n \geq 0$$

$$1+2n \geq 1$$

$$v_n \geq 1$$

من جهة أخرى لدينا المتتالية v_n ليست محدودة من الأعلى لأن $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$

الرياضيات مع أيهم الشاعر

أما المتتالية $S_n = n^2$ محدودة من الأدنى لأن:

$$n \geq 0$$

$$n^2 \geq 0$$

$$S_n \geq 0$$

من جهة أخرى لدينا المتتالية S_n ليست محدودة من الأعلى لأن $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$

انتهى حل المسألة السادسة

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة السابعة:

$(I$

$$(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$$

إما $z-2+2i=0$ وبالتالي $z_0=2-2i$

أو $z^2-2\sqrt{2}z+8=0$ وبالتالي:

$$\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4(1)(8)=8-32=-24$$

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+i\sqrt{24}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$$

وبما أن الأمثال حقيقية فإن الحل الآخر هو $z_2=\overline{z_1}=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$

وبالتالي حلول المعادلة هي: $\left\{2-2i\,,\sqrt{2}+i\sqrt{6}\,,\sqrt{2}-i\sqrt{6}\right\}$

$(II$

$a=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ و $b=\bar{a}=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$ و $c=2(1-i)$

$(1$

لدينا: $r_a=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2+6}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

و $\cos\theta_a=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ و $\sin\theta_a=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ومنه $\theta_a=\frac{\pi}{3}$

وبالتالي يكون $a=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

وبما أن $b=\bar{a}$ فإن $b=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

من جهة أخرى لدينا $r_a=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

و $\cos\theta_c=\frac{x}{r}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\theta_c=\frac{y}{r}=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه $\theta_c=-\frac{\pi}{4}$

وبالتالي يكون $c=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

بما أن $r_a=r_b=r_c$ فإن $OA=OB=OC$ وبالتالي النقاط A و B و C تنتمي إلى دائرة واحدة

مركزها O ونصف قطرها $R=2\sqrt{2}$

$(a$ $(2$

الصيغة العقدية للدوران $c'=e^{i\frac{\pi}{4}}c$ وبالتالي:

$$c'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2-2i)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

$$\frac{a-c'}{b-c'}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}-2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{6}}=\frac{(-\sqrt{2}+i\sqrt{6}).(-\sqrt{2}+i\sqrt{6})}{(-\sqrt{2}-i\sqrt{6}).(-\sqrt{2}+i\sqrt{6})} \quad (b$$

$$\frac{a-c'}{b-c'}=\frac{2-i\sqrt{12}-i\sqrt{12}-6}{2+6}=\frac{-4-2i\sqrt{12}}{8}=\frac{-4-4i\sqrt{3}}{8}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1 \text{ لدينا}$$

$$\theta=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3} \text{ ومنه } \sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{1}{2} \text{ و}$$

$$\frac{a-c'}{b-c'}=e^{i\frac{4\pi}{3}} \text{ وبالتالي يكون}$$

لدينا $\left|\frac{a-c'}{b-c'}\right|=1$ ومنه $AC'=BC'$ وبالتالي المثلث ABC' متساوي الساقين

$(a$ (3 الصيغة العقدية للتحاكي $a'-b=\frac{2}{3}(a-b)$ وبالتالي:

$$a'=b+\frac{2}{3}(a-b)=\sqrt{2}-i\sqrt{6}+\frac{2}{3}(\sqrt{2}+i\sqrt{6}-\sqrt{2}+i\sqrt{6})=\sqrt{2}-i\sqrt{6}+\frac{4i\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}+i\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{a'-c'}{b-c'}=\frac{\sqrt{2}+i\frac{\sqrt{6}}{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}-2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}+i\frac{\sqrt{6}}{3}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{6}}=\frac{-3\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{-3\sqrt{2}-2i\sqrt{6}} \quad (b$$

$$\frac{a'-c'}{b-c'}=\frac{(-3\sqrt{2}+i\sqrt{6}).(-3\sqrt{2}+2i\sqrt{6})}{(-3\sqrt{2}-2i\sqrt{6}).(-3\sqrt{2}+2i\sqrt{6})}=\frac{18-9i\sqrt{12}-3i\sqrt{12}-18}{18+54}=\frac{-12i\sqrt{12}}{72}$$

$$\frac{a'-c'}{b-c'}=\frac{-i\sqrt{12}}{6}=\frac{-2i\sqrt{3}}{6}=-i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\arg\left(\frac{a'-c'}{b-c'}\right)=\arg\left(-i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{2} \text{ بما أن}$$

وبالتالي فإن المثلث $A'BC'$ قائم الزاوية في C'

انتهى حل المسألة السابعة

حل المسألة الثامنة:

I) 1) التابع $f(x)=\sqrt{6x+16}$ متزايد تماماً لأن $f'(x)=\dfrac{6}{2\sqrt{6x+16}}=\dfrac{3}{\sqrt{6x+16}}>0$

2) نقطة تقاطع C مع المستقيم Δ تحقق $f(x)=y_{\Delta}$ أي أن $\sqrt{6x+16}=x$ بالتربيع نجد $6x+16=x^2$

وتكافئ $x^2-6x-16=0$ وبالتالي: $(x-8)(x+2)=0$

إما: $x=8$ وتكون $y=8$ وعندها نقطة التقاطع هي $(8,8)$

أو: $x=-2$ مرفوض لأنها لا تنتمي إلى مجموعة تعريف التابع f.

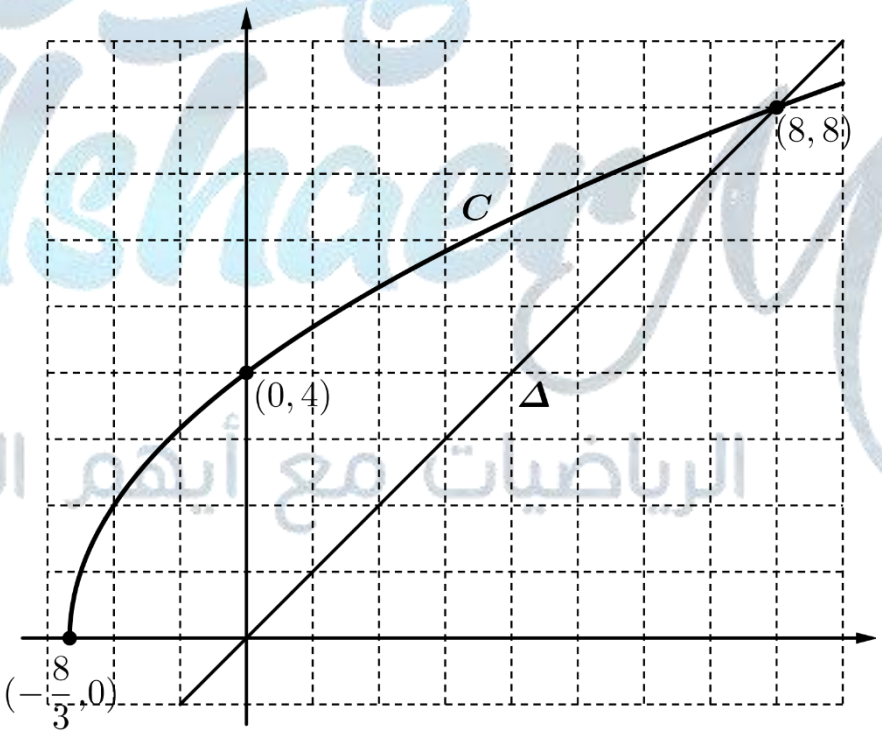
نقطة تقاطع C مع محور الفواصل نضع $f(x)=0$ وبالتالي $\sqrt{6x+16}=0$ ومنه $6x+16=0$ وتكافئ $x=-\dfrac{8}{3}$

ومنه نقطة التقاطع مع محور الفواصل هي $\left(-\dfrac{8}{3},0\right)$

نقطة تقاطع C مع محور التراتيب نضع $x=0$ وبالتالي $f(0)=\sqrt{16}=4$

ومنه نقطة التقاطع مع محور التراتيب هي $(0,4)$

3)

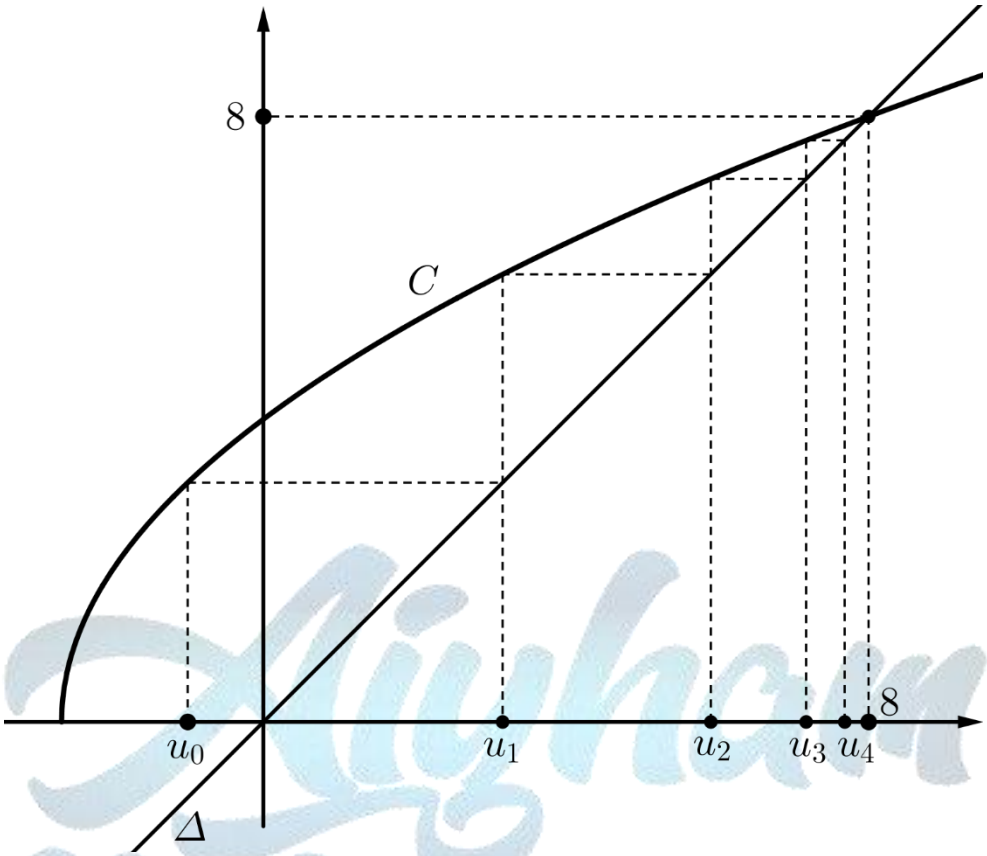


Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

(II

$u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{6u_n + 16}$

(1



نخمن أن المتتالية u_n متزايدة تماماً متقاربة من العدد 8

2) نفرض القضية $E(n): u_n < u_{n+1} < 8$

نثبت صحة القضية $E(0): u_0 < u_1 < 8$: $u_0 = -1 < u_1 = \sqrt{10} < 8$ محققة

نفرض صحة القضية $E(n): u_n < u_{n+1} < 8$ ونثبت صحة القضية $E(n+1): u_{n+1} < u_{n+2} < 8$ ؟

من الفرض $u_n < u_{n+1} < 8$

$$6u_n < 6u_{n+1} < 48$$

$$6u_n + 16 < 6u_{n+1} + 16 < 48 + 16$$

$$\sqrt{6u_n + 16} < \sqrt{6u_{n+1} + 16} < \sqrt{64}$$

$$u_{n+1} < u_{n+2} < 8$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

وجدنا أن $u_n < u_{n+1}$ وبالتالي المتتالية u_n متزايدة تماماً

ولدينا أن $u_n < 8$ وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأعلى

وبالتالي المتتالية متقاربة و نهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$ وبالتالي $\lim_{n\to\infty} u_n = 8$

الرياضيات مع أيهم الشاعر

(III $v_0 > 8$ و $v_{n+1} = f(v_n) = \sqrt{6v_n + 16}$

1) نفرض القضية $E(n): v_n > 8$

نثبت صحة القضية $E(0): v_0 > 8$: $v_0 > 8$ محققة

نفرض صحة القضية $E(n): v_n > 8$ ونثبت صحة القضية $E(n+1): v_{n+1} > 8$ ؟

من الفرض $v_n > 8$

$$6v_n > 48$$

$$6v_n + 16 > 48 + 16$$

$$\sqrt{6v_n + 16} > \sqrt{64}$$

$$v_{n+1} > 8$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

2) نفرض القضية $E(n): v_n > v_{n+1}$

نثبت صحة القضية $E(0): v_0 > v_1$: $v_0 > \sqrt{6v_0 + 16}$

$$v_0^2 > 6v_0 + 16$$

$$v_0^2 - 6v_0 - 16 > 0$$

$$(v_0 - 8)(v_0 + 2) > 0$$

بما أن $v_0 > 8$ فإن $v_0 - 8 > 0$ ولدينا $v_0 + 2 > 10 > 0$

وبالتالي $(v_0 - 8)(v_0 + 2) > 0$ محققة

ومنه العلاقة $E(0)$ محققة

نفرض صحة القضية $E(n): v_n > v_{n+1}$ ونثبت صحة القضية $E(n+1): v_{n+1} > v_{n+2}$ ؟

من الفرض $v_n > v_{n+1}$

$$6v_n > 6v_{n+1}$$

$$6v_n + 16 > 6v_{n+1} + 16$$

$$\sqrt{6v_n + 16} > \sqrt{6v_{n+1} + 16}$$

$$v_{n+1} > v_{n+2}$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

وبما أن المتتالية v_n متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$ وبالتالي $\lim_{n \to \infty} v_n = 8$

Aiyham Alshaer Math الرياضيات مع أيهم الشاعر

3) بما أن المتتالية u_n متزايدة تماماً والمتتالية v_n متناقصة تماماً و $\lim_{n\to\infty}\left(u_n - v_n\right) = 8 - 8 = 0$

فإن المتتاليتين u_n و v_n متجاورتين

انتهى حل المسألة الثامنة

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة التاسعة:

I) $g(x)=x^2+\ln x-1$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+1}{x}>0$ وبالتالي التابع g متزايد تماماً

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) التابع g متزايد تماماً على مجموعة تعريفه $D_g=]0,+\infty[$ و $0\in g(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

وبالتالي للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد أياً كانت x من D_g

وبما أن $g(1)=1+\ln 1-1=0$ فإن $\alpha=1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$

يكون جدول إشارة $g(x)$ معطى بالشكل:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

II) $f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

2) a) $f'(x)=1-\dfrac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$

وبالتالي إشارة f' من إشارة g وبالتالي يكون جدول تغيرات التابع f معطى بالشكل:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

b) $f(1)=1+1-\dfrac{\ln 1}{1}=2$ قيمة حدية صغرى و $y=2$ مماس أفقي للخط C.

3) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$

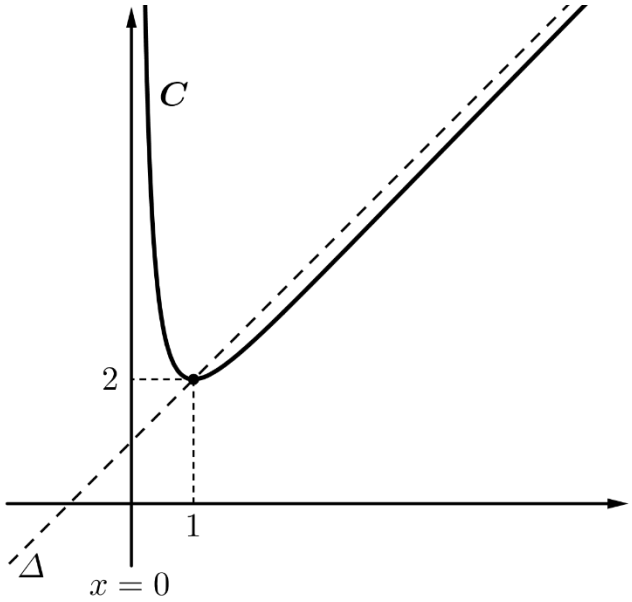
وبالتالي المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

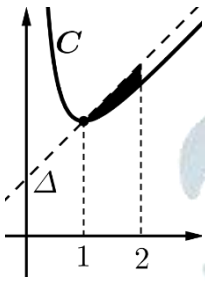
b) إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta$ عكس إشارة $\ln x$ وبالتالي:

عندما $x>1$ فإن $\ln x>0$ و $f(x)-y_\Delta<0$ ومنه C تحت المقارب Δ

عندما $x<1$ فإن $\ln x<0$ و $f(x)-y_\Delta>0$ ومنه C فوق المقارب Δ

4)





5) $S=\int_1^2 \left|f(x)-y_\Delta\right|dx=\int_1^2 \left|-\frac{\ln x}{x}\right|dx=\int_1^2 \frac{1}{x}\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2=\frac{1}{2}\ln 2$

6) التابع $G(x)$ اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ و يحقق:

$$G'(x)=\frac{1}{x^2}\left((\ln x)^2+2\ln x+2\right)+\left(2\frac{1}{x}\ln x+\frac{2}{x}\right).\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{(\ln x)^2}{x^2}+\frac{2\ln x}{x^2}+\frac{2}{x^2}-\frac{2\ln x}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

وبالتالي التابع $G:x\mapsto -\frac{1}{x}\left((\ln x)^2+2\ln x+2\right)$ تابع أصلي للتابع $x\mapsto\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$ على المجال $]0,+\infty[$.

7) $V=\int_1^2 \pi\left(A(x)\right)^2\,dx=\pi\int_1^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\,dx=\pi\left[-\frac{1}{x}\left((\ln x)^2+2\ln x+2\right)\right]_1^2$

$$=\pi\left[-\frac{1}{2}\left((\ln 2)^2+2\ln 2+2\right)+\left((\ln 1)^2+2\ln 1+2\right)\right]=\pi\left(-\frac{1}{2}(\ln 2)^2-\ln 2+1\right)$$

انتهى حل المسألة التاسعة

حل المسألة العاشرة:

1) B صورة A وفق دوران مركزه E وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه تكون الصيغة العقدية للدوران $b-e=e^{i\frac{\pi}{2}}(a-e)$

$$b-e=-ie$$ وبالتالي

$$b=e-ie=e(1-i)$$

$$e=\frac{b}{1-i}=\frac{b(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{b+ib}{2}=\frac{1}{2}(b+ib)$$

A صورة C وفق دوران مركزه F وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه تكون الصيغة العقدية للدوران $a-f=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-f)$

$$-f=i(c-f)$$ وبالتالي

$$-f=ic-if$$

$$-ic=f-if=f(1-i)$$

$$f=\frac{-ic}{1-i}=\frac{-ic(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-ic+c}{2}=\frac{1}{2}(c-ic)$$

2) B' نظيرة B بالنسبة إلى E أي أن E منتصف $[BB']$ وبالتالي :

$$e=\frac{b+b'}{2}$$

$$2e=b+b'$$

$$b'=2e-b$$

C' نظيرة C بالنسبة إلى F أي أن F منتصف $[CC']$ وبالتالي :

$$f=\frac{c+c'}{2}$$

$$2f=c+c'$$

$$c'=2f-c$$

3)
$$\frac{b-c'}{c-b'}=\frac{b-2f+c}{c-2e+b}=\frac{b-c+ic+c}{c-b-ib+b}=\frac{b+ic}{c-ib}$$

$$\frac{b-c'}{c-b'}=\frac{(b+ic)(c+ib)}{(c-ib)(c+ib)}=\frac{bc+ib^2+ic^2-bc}{c^2+b^2}=\frac{i(b^2+c^2)}{b^2+c^2}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $\arg\left(\frac{b-c'}{c-b'}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ ومنه $BC'\perp CB'$ ولدينا أيضاً $\left|\frac{b-c'}{c-b'}\right|=1$ وأن $BC'=CB'$

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

4) لدينا M منتصف $[BC]$ وبالتالي $m=\dfrac{b+c}{2}$

$$\frac{f-m}{e-m}=\frac{\frac{1}{2}(b+ib)-\frac{1}{2}(b+c)}{\frac{1}{2}(c-ic)-\frac{1}{2}(b+c)}=\frac{b+ib-b-c}{c-ic-b-c}=\frac{ib-b}{-ic-b}$$

$$\frac{f-m}{e-m}=\frac{(ib-c)(ic-b)}{(-ic-b)(ic-b)}=\frac{-bc-ib^2-ic^2+bc}{b^2+c^2}=\frac{-i(b^2+c^2)}{b^2+c^2}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $\arg\left(\dfrac{f-m}{e-m}\right)=\arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}$ ومنه $MF\perp ME$ ولدينا أيضاً $\left|\dfrac{f-m}{e-m}\right|=1$ وأن $MF=ME$

وبالتالي المثلث EFM قائم ومتساوي الساقين

انتهى حل المسألة العاشرة

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة الحادية عشر:

$$u_0 = 2 \text{ و } u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$$

1) a) نفرض القضية $E(n): u_n > 1$

نثبت صحة القضية $E(0): u_0 > 1$: $u_0 = 2 > 1$ محققة.

نفرض صحة القضية $E(n): u_n > 1$ ونثبت صحة القضية $E(n+1): u_{n+1} > 1$ ؟

من الفرض $u_n > 1$ نجد $\frac{1}{16}u_n > \frac{1}{16}$ و $\frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{1}{16} + \frac{15}{16}$

$$u_{n+1} > 1$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

b) $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - u_n = -\frac{15}{16}u_n + \frac{15}{16} = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$$

بما أن $u_n > 1$ فإن $u_n - 1 > 0$ ومنه $-\frac{15}{16}(u_n - 1) < 0$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n < 0$

أي أن المتتالية u_n متناقصة تماماً

c) بما أن المتتالية u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

2) $$v_n = u_n - 1$$

a) $$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - 1 = \frac{1}{16}u_n - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}(u_n - 1) = \frac{1}{16}v_n$$

وبالتالي المتتالية v_n هندسية ، أساسها $q = \frac{1}{16}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

b) عبارة v_n بدلالة n هي $v_n = v_0.q^n = \left(\frac{1}{16}\right)^n$

وبالتالي $u_n = 1 + v_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$

بما أن $\left(\frac{1}{16}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $-1 < q = \frac{1}{16} < 1$ وبالتالي $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^n = 0$

ومنه يكون $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

الرياضيات مع أيهم الشاعر

3) $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

a) المتتالية S_n هي مجموع حدود متتالية هندسية حيث:

$$S_n = a.\frac{1-q^n}{1-q} = v_0.\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{1-\frac{1}{16^{n+1}}}{\frac{15}{16}} = \frac{16}{15}\left(1-\frac{1}{16^{n+1}}\right) = \frac{1}{15}\left(16-\frac{1}{16^n}\right)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = v_0 + 1 + v_1 + 1 + ... + v_n + 1 = S_n + n + 1 = \frac{1}{15}\left(16-\frac{1}{16^n}\right) + n + 1$$

b) وجدنا سابقاً أن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{16^n} = 0$ وبالتالي تكون:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{15}(15-0) = \frac{15}{16} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} S'_n = +\infty$$

انتهى حل المسألة الحادية عشر

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة الثانية عشر:

I) $z^2-8z+41=0$

$$\Delta=b^2-4ac=64-4(41)=64-164=-100$$

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{4+10i}{2}=2+5i$$

وبما أن الأمثال حقيقية فإن الحل الآخر هو $z_2=\overline{z_1}=2-5i$

II) $a=4+5i$ و $b=3+4i$ و $c=6+7i$ و $d=4+7i$

1) $$\frac{c-b}{a-b}=\frac{6+7i-3-4i}{4+5i-3-4i}=\frac{3+3i}{1+i}=\frac{3(1+i)}{1+i}=3$$

لدينا $\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)=\arg(3)=0$ وبالتالي الشعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ مرتبطين خطياً

ومنه النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.

2) الصيغة العقدية للدوران $z'-d=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-d)$

$$z'-4-7i=-i(z-4-7i)$$

$$z'-4-7i=-iz+4i-7$$

$$z'=-iz+4i-7+4+7i$$

$$z'=-iz-3+11i$$

3) $$c'=-ic-3+11i=-i(6+7i)-3+11i=-6i+7-3+11i=4+5i=a$$

أي أن A صورة C بالدوران R الذي مركزه D وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

وبالتالي المثلث ACD قائم في D

4) a) لدينا $z_{\overrightarrow{DC}}=c-d=6+7i-4-7i=2$ وبالتالي الصيغة العقدية للانسحاب $z'=z+w=z+2$

ومنه $a=a'+2$ وبالتالي $a'=a-2=4+5i-2=2+5i$

و $b'=b+2=3+4i+2=5+4i$.

b) $$\frac{d-b}{a'-b'}=\frac{4+7i-3-4i}{2+5i-5-4i}=\frac{1+3i}{-3+i}=\frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=\frac{-3-i-9i+3}{9+1}=\frac{-10i}{10}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

c) بما أن $\arg\left(\frac{d-b}{a'-b'}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$ فإن المستقيمين $(DB),(A'B')$ متعامدين

وبما أن $\left|\frac{d-b}{a'-b'}\right|=|-i|=1$ فإن $DB=A'B'$.

5) لدينا $e=\dfrac{a+d}{2}=\dfrac{4+5i+4+7i}{2}=\dfrac{8+12i}{2}=4+6i$

$$\left|z_{\overrightarrow{EC}}\right|=|c-e|=|6+7i-4-6i|=|2+i|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

$$\left|z_{\overrightarrow{EB}}\right|=|b-e|=|3+4i-4-6i|=|-1-2i|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

$$\left|z_{\overrightarrow{EB'}}\right|=|b'-e|=|5+4i-4-6i|=|1-2i|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

$$\left|z_{\overrightarrow{EA'}}\right|=|a'-e|=|2+5i-4-6i|=|-2-i|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

وبالتالي النقاط C و B و B' و A' تقع على دائرة واحدة مركزها E.

انتهى حل المسألة الثانية عشر

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة الثالثة عشر:

1) $(a$

$$\Delta:\begin{cases}x=t+2\\y=2t+3\\z=-2t+1\end{cases}:t\in\mathbb{R}$$

$(b$ الشعاعين $\overrightarrow{u_d}(0,-1,2)$ $\overrightarrow{u_\Delta}(1,2,-2)$ غير مرتبطين خطياً لأن $\frac{0}{1}\neq\frac{-1}{2}\neq\frac{2}{-2}$ المركبات غير متناسبة

وبالتالي المستقيمين (Δ) و (d) متقاطعين أو متخالفين ، بالحل المشترك للمعادلات الوسيطية للمستقيمين:

$$1=s+2 \quad (1)$$
$$1-t=2s+3 \quad (2)$$
$$3+2t=-2s+1 \quad (3)$$

من (1) نجد $s=-1$

نعوّض في (2): $1-t=-2+3$ وبالتالي $t=0$

للتأكد نعوض قيمتي $s=-1$ و $t=0$ في (3) فنجد $3+0=2+1$ محققة

وبالتالي المستقيمين (Δ) و (d) متقاطعين ، ولإيجاد نقطة التقاطع نعوّض $t=0$ في المعادلات الوسيطية للمستقيم (d)

$$x=1$$
$$y=1-0=1$$
$$z=3+0=3$$

وبالتالي تكون إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (d) هي $C(1,1,3)$

ويمكن تعويض $s=-1$ في المعادلات الوسيطية للمستقيم (Δ) لإيجاد نقطة التقاطع.

2)

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_\Delta}=(2,-2,-1).(1,2,-2)=2-4+2=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_d}=(2,-2,-1).(0,-1,2)=0+2-2=0$$

وبالتالي $\vec{n}(2,-2,-1)$ ناظم المستوي P

ومنه تكون معادلة المستوي P من الشكل: $2x-2y-z+d=0$

A نقطة من المستقيم Δ فهي نقطة من المستوي P وتحقق معادلته: $4-6-1+d=0$ ومنه $d=3$

وبالتالي تكون معادلة المستوي P: $2x-2y-z+3=0$

3) $(a$

بما أن Q يعامد المستقيم Δ فإن $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{u_\Delta}(1,2,-2)$

ومنه تكون معادلة المستوي Q من الشكل: $x+2y-2z+d=0$

B نقطة من المستوي Q فهي تحقق معادلته: $1+4+4+d=0$ ومنه $d=-9$

وبالتالي تكون معادلة المستوي Q: $x+2y-2z-9=0$

b) بما أن Δ عمودي على المستوي Q و B نقطة من المستوي Q فإن E المسقط القائم للنقطة B على المستقيم Δ هي نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي Q لذلك نعوّض المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ في معادلة المستوي Q:

$$t+2+2(2t+3)-2(-2t+1)-9=0$$

$$t+2+4t+6+4t-2-9=0$$

$$9t-3=0$$

$$t=\frac{1}{3}$$ وبالتالي

$$x=t+2=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$$

نعوّض قيمة t في المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ فنجد: $y=2t+3=\frac{2}{3}+3=\frac{11}{3}$ ومنه $E\left(\frac{7}{3},\frac{11}{3},\frac{1}{3}\right)$

$$z=-2t+1=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$$

c) بعد النقطة B عن المستقيم (Δ) هو طول القطعة المستقيمة EB:

$$dist(B,\Delta)=EB=\sqrt{(x_B-x_E)^2+(y_B-y_E)^2+(z_B-z_E)^2}$$

$$dist(B,\Delta)=EB=\sqrt{\left(1-\frac{7}{3}\right)^2+\left(2-\frac{11}{3}\right)^2+\left(-2-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(-\frac{7}{3}\right)^2}$$

$$dist(B,\Delta)=EB=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{25}{9}+\frac{49}{9}}=\sqrt{\frac{90}{9}}=\sqrt{10}$$

4) a) $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=(2,-2,-1).(1,2,-2)=2-4+2=0$ وبالتالي المستويين P و Q متعامدين.

b)
$$dist(M,P)=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2-8-5+3|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{8}{3}$$

$$dist(M,Q)=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1+8-10-9|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{10}{3}$$

c) حسب فيثاغورث نجد بعد M عن d' الفصل المشترك لتقاطع المستويين P و Q.

$$\left(dist(M,d')\right)^2=\left(dist(M,P)\right)^2+\left(dist(M,Q)\right)^2=\frac{64}{9}+\frac{100}{9}=\frac{164}{9}$$

$$dist(M,d')=\sqrt{\frac{164}{9}}=\frac{2\sqrt{41}}{3}$$ وبالتالي

انتهى حل المسألة الثالثة عشر

حل المسألة الرابعة عشر:

I) $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

إما $z^2+4=0$ وبالتالي $z^2=-4$ ومنه $z=\pm 2i$

أو $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4(1)(4)=12-16=-4$$

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$$

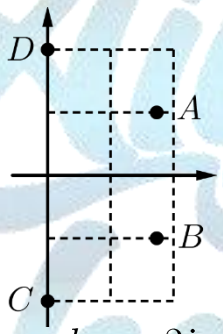
وبما أن الأمثال حقيقية فإن الحل الآخر هو $z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}-i$

وبالتالي حلول المعادلة هي: $\{-2i\,,2i\,,\sqrt{3}+i\,,\sqrt{3}-i\}$

II) $a=\sqrt{3}+i$ و $b=\overline{a}=\sqrt{3}-i$

و $c=-2i$ و $d=\overline{c}=2i$

1)



2) $d-c=2i-(-2i)=2i+2i=4i$

و $2(a-b)=2\left(\sqrt{3}+i-(\sqrt{3}-i)\right)=2\left(\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i\right)=2(2i)=4i$

وبالتالي $d-c=2(a-b)$

لدينا $\frac{d-c}{a-b}=2$ ومنه $\arg\left(\frac{d-c}{a-b}\right)=\arg(2)=0$

وبالتالي الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BA}$ مرتبطين خطياً والمستقيمين (CD) و (BA) متوازيين

وعندها يكون الرباعي $ABCD$ شبه منحرف.

3) لدينا $|a|=|b|=|c|=|d|=2$

وبالتالي النقاط A و B و C و D تقع على دائرة Ω مركزها O ونصف قطرها $R=2$

4) بما أن E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى المبدأ O فإن $e=-b=-(\sqrt{3}-i)=-\sqrt{3}+i$

الرياضيات مع أيهم الشاعر

5) $a-c=\sqrt{3}+i-(-2i)=\sqrt{3}+i+2i=\sqrt{3}+3i$

$$e^{-\frac{\pi}{3}i}(e-c)=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).(-\sqrt{3}+i-(-2i))=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).(-\sqrt{3}+3i)$$

$$e^{-\frac{\pi}{3}i}(e-c)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}i+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}+\frac{6}{2}i=\sqrt{3}+3i$$

وبالتالي $a-c=e^{-\frac{\pi}{3}i}(e-c)$ محققة

ومنه A صورة E وفق دوران مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ وبالتالي المثلث AEC متساوي الأضلاع.

6) لدينا $b+e=\sqrt{3}-i-\sqrt{3}+i=0$ و $c+d=-2i+2i=0$

وبالتالي $b+e=c+d$ ومنه $b-c=d-e$ أي أن $z_{\overrightarrow{CB}}=z_{\overrightarrow{ED}}$ ويكون $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{ED}$

ومنه الرباعي $DBCE$ متوازي أضلاع وفيه زاوية قائمة $D\hat{B}C=90°$

(لأن OB متوسط في المثلث DBC يساوي نصف طول الضلع $[DC]$ فإن المثلث قائم في B)

وبالتالي يكون الرباعي $DBCE$ مستطيل.

انتهى حل المسألة الرابعة عشر

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة الخامسة عشر:

$(I$

$$z^2-4(\sin\theta)z+4=0\ldots(1)$$

(1

$$\Delta=b^2-4ac=(-4\sin\theta)^2-4(1)(4)=16\sin^2\theta-16=16(\sin^2\theta-1)=-16\cos^2\theta$$

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{4\sin\theta+4i\cos\theta}{2}=2\sin\theta+2i\cos\theta$$

$z_2=\overline{z_1}=2\sin\theta-2i\cos\theta$ بما أن الأمثال حقيقية فإن الحل الآخر هو

2) من أجل $\theta=\frac{\pi}{3}$ يكون:

$$z_1=2\sin\frac{\pi}{3}+2i\cos\frac{\pi}{3}=2\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1=2\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

و

$$z_2=\overline{z_1}=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$(II$

$$a=\sqrt{3}+i \text{ و } b=\sqrt{3}-i \text{ و } c=3\sqrt{3}+i$$

(1

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{3\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i}=\frac{2\sqrt{3}}{-2i}=\frac{\sqrt{3}}{-i}=\frac{i\sqrt{3}}{(-i)(i)}=i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

وبالتالي المثلث ABC قائم الزاوية

(2 لدينا $z_{\overrightarrow{AC}}=c-a=2\sqrt{3}$ وبالتالي الصيغة العقدية للانسحاب $z'=z+w=z+2\sqrt{3}$

وبالتالي $d=b+2\sqrt{3}=\sqrt{3}-i+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}-i$

ومنه الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع وفيه زاوية قائمة فهو مستطيل.

(a (3

$$Z=\frac{z-a}{z-b}$$

$$X+iY=\frac{x+iy-\sqrt{3}-i}{x+iy-\sqrt{3}+i}=\frac{(x-\sqrt{3})+i(y-1)}{(x-\sqrt{3})+i(y+1)}$$

$$X+iY=\frac{\left((x-\sqrt{3})+i(y-1)\right).\left((x-\sqrt{3})-i(y+1)\right)}{\left((x-\sqrt{3})+i(y+1)\right).\left((x-\sqrt{3})-i(y+1)\right)}$$

$$X+iY=\frac{(x-\sqrt{3})^2-i(x-\sqrt{3})(y+1)+i(x-\sqrt{3})(y-1)+(y+1)(y-1)}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$$

$$X+iY=\frac{(x-\sqrt{3})^2+i(x-\sqrt{3})\left((y-1)-(y+1)\right)+y^2-1}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$$

$$X+iY=\frac{(x-\sqrt{3})^2+i(x-\sqrt{3})(y-1-y-1)+y^2-1}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$$

$$X+iY=\frac{(x-\sqrt{3})^2+y^2-1}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}+i\frac{-2(x-\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$$

ومنه $X=\frac{(x-\sqrt{3})^2+y^2-1}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$ و $Y=\frac{-2(x-\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$

$b)$ يكون Z حقيقي إذا كان $Y=0$ وبالتالي :

$$\frac{-2(x-\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}=0$$

$$-2(x-\sqrt{3})=0$$

$$x-\sqrt{3}=0$$

وهي معادلة مستقيم شاقولي محذوف منه النقطة $(\sqrt{3},-1)$

لأن: $z\neq b$ و $x+iy\neq\sqrt{3}-i$ و $(x,y)\neq(\sqrt{3},-1)$

$c)$ يكون Z تخيلي بحت إذا كان $X=0$ وبالتالي :

$$\frac{(x-\sqrt{3})^2+y^2-1}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}=0$$

$$(x-\sqrt{3})^2+y^2-1=0$$

$$(x-\sqrt{3})^2+y^2=1$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(\sqrt{3},0)$ ونصف قطرها $R=1$ محذوف منها النقطة $(\sqrt{3},-1)$

لأن: $z\neq b$ و $x+iy\neq\sqrt{3}-i$ و $(x,y)\neq(\sqrt{3},-1)$

انتهى حل المسألة الخامسة عشر

حل المسألة السادسة عشر:

$$f(x)=(\ln x)^2-2\ln x$$

1)

$$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty \quad \text{حالة عدم تعيين}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x.(\ln x-2)\right)=+\infty$$

$$f'(x)=\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}=\frac{2}{x}(\ln x-1)$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \ln x-1=0 \;\Rightarrow\; \ln x=1 \;\Rightarrow\; x=e : f(e)=-1$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

2) $f(e)=-1$ قيمة حدية صغرى

$x=0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

3)

$$f(x)\le 0$$

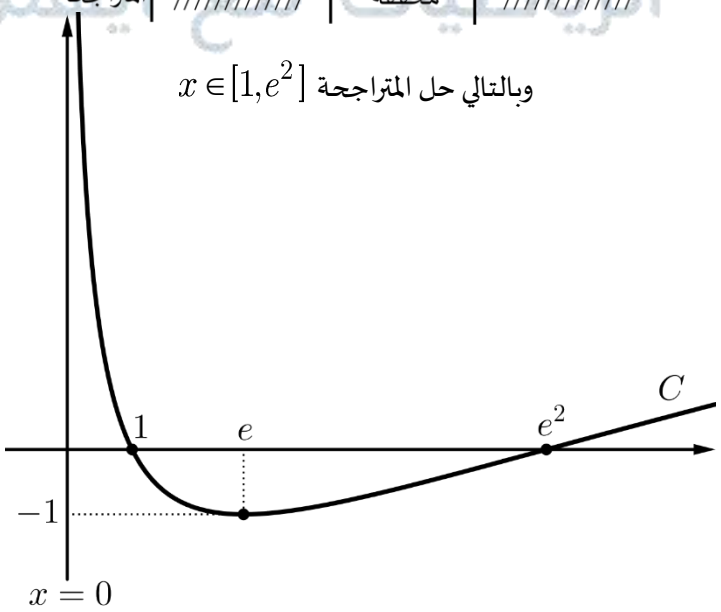
$$(\ln x)^2-2\ln x\le 0$$

$$\ln x.(\ln x-2)\le 0$$

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$\ln x-2$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
الجداء	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
المتراجحة	‖	//////////	‖	محققة	‖	//////////	

وبالتالي حل المتراجحة $x\in[1,e^2]$

4)



5) F اشتقاقي على المجال $I=]0,+\infty[$ و

$$F'(x)=(\ln x)^2+2(\ln x)\frac{1}{x}.x-4\ln x-\frac{1}{x}.4x+4=(\ln x)^2-2\ln x=f(x)$$

وبالتالي F تابع أصلي للتابع f على المجال $I=]0,+\infty[$

6) $$S=-\int_1^{e^2} f(x)dx=-[F(x)]_1^{e^2}=-\left[x(\ln x)^2-4x\ln x+4x\right]$$

$$S=-\left[(e^2(\ln e^2)^2-4e^2\ln e^2+4e^2)-(0-0+4)\right]=-\left[4e^2-8e^2+4e^2-4\right]=4$$

انتهى حل المسألة السادسة عشر

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة السابعة عشر:

$$P(x)=x^3-3x^2-16 \qquad (I$$

$P(4)=(4)^3-3(4)^2-16=64-48-16=0$ وبالتالي $x=4$ جذر لكثير الحدود $P(x)$

نقسم إقليدياً على $x-4$ فنجد:

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2-16 & x-4 \\ \hline -x^3+4x^2 & x^2+x+4 \\ \hline x^2-16 & \\ -x^2+4x & \\ \hline 4x-16 & \\ -4x+16 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

وبالتالي $P(x)$ يكتب بالشكل $P(x)=(x-4)(x^2+x+4)$

بما أن $\Delta=-15<0$ وبالتالي $x^2+x+4>0$ ومنه إشارة $P(x)$ من إشارة $x-4$

عندما $x>4$ فإن $x-4>0$ فإن $P(x)>0$

عندما $x<4$ فإن $x-4<0$ فإن $P(x)<0$

$$\ln(4x^2-16)\le 2\ln x-\ln(7-x)\ge 0 \qquad (II$$

شرط الحل

$$\underbrace{\underbrace{4x^2-16>0}_{x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[}\quad \underbrace{x>0}_{x\in]0,+\infty[}\quad \underbrace{7-x>0}_{x\in]-\infty,7[}}_{x\in]2,7[}$$

من جهة أخرى $\ln(4x^2-16)\le \ln x^2-\ln(7-x)\ge 0$

$$\ln(4x^2-16)\le \left(\ln x^2+\ln(7-x)\right)\ge 0$$

$$\ln(4x^2-16)\le \ln x^2(7-x)\ge 0$$

$$\ln(4x^2-16)\le \ln(7x^2-x^3)\ge 0$$

$$\ln\left(\frac{4x^2-16}{7x^2-x^3}\right)\ge 0$$

$$\ln\left(\frac{4x^2-16}{7x^2-x^3}\right)\ge \ln(1)$$

$$\frac{4x^2-16}{7x^2-x^3}\ge 1$$

$$4x^2-16\ge 7x^2-x^3$$

$$4x^2-16-7x^2+x^3\ge 0$$

$$x^3-3x^2-16\ge 0$$

$$P(x)\ge 0$$

ومنه $x\in[4,+\infty[$

وبالتالي قيم x التي تنتمي إلى الشرط هي $x\in[4,7[$ وهو حل المتراجحة

الرياضيات مع أيهم الشاعر

$$f(x)=\frac{x^3+8}{(x-1)^2} \qquad (III$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty \qquad (1$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{9}{0^+}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{9}{0^+}=+\infty$$

ومنه $x=1$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-2(x-1)(x^3+8)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\left(3x^2(x-1)-2(x^3+8)\right)}{(x-1)^4} \qquad (a\ (2$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-2x^3-16}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2-16}{(x-1)^3}=\frac{P(x)}{(x-1)^3}$$

ومنه تكون إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$P(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

وبالتالي يكون جدول تغيرات التابع f : $(b$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x^3+8}{(x-1)^2}-(x+2)=\frac{x^3+8-(x+2)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^3+8-x^3+2x^2-x-2x^2+4x-2}{(x-1)^2} \qquad (a\ (3$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x+6}{(x-1)^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}=0 \quad \text{ومنه} \quad f(x)-y_\Delta=\frac{3x+6}{(x-1)^2}$$

وبالتالي المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+2$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $\pm\infty$

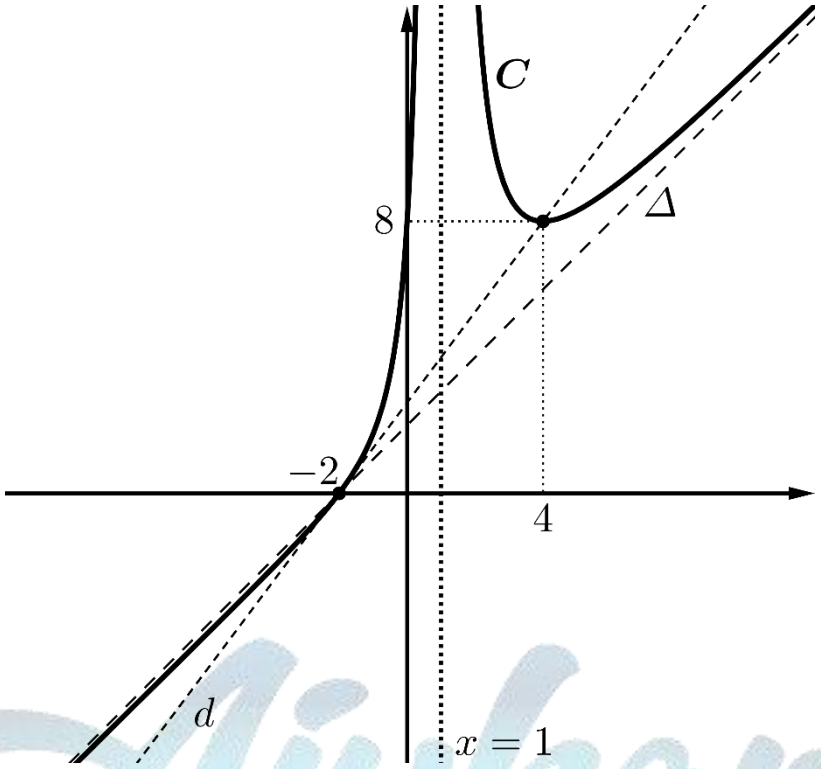
بما أن $(x-1)^2>0$ فإن إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta$ من إشارة $3x+6$ ومنه: $(b$

عندما $x>-2$ فإن $3x+6>0$ فإن $f(x)-y_\Delta>0$ ومنه C فوق المقارب Δ

عندما $x<-2$ فإن $3x+6<0$ فإن $f(x)-y_\Delta<0$ ومنه C تحت المقارب Δ

$$d: y=f'(-2)(x+2)+f(-2)=\frac{4}{3}(x+2)+0=\frac{4}{3}(x+2) \qquad (4$$

5)



6) المعادلة $x^3-mx^2+2mx+8-m=0$ تكافئ

$$x^3+8=mx^2-2mx+m=m(x^2-2x+1)=m(x-1)^2$$

ومنه يكون: $m=\dfrac{x^3+8}{(x-1)^2}=f(x)$

عندما $m\in]-\infty,8[$ للمعادلة حل وحيد

عندما $m=8$ للمعادلة حلين مختلفين

عندما $m\in]8,+\infty[$ للمعادلة ثلاث حلول مختلفة

7) a)

$$\frac{3x+6}{(x-1)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)+b}{(x-1)^2}=\frac{ax-a+b}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد $\begin{matrix}a=3\\-a+b=6\end{matrix}$ ومنه $a=3$ و $b=9$

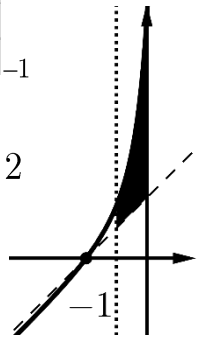
وبالتالي $\dfrac{3x+6}{(x-1)^2}=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{9}{(x-1)^2}$

الرياضيات مع أيهم الشاعر

$$S=\int_{-1}^{0}\left|f(x)-y_{\Delta}\right|dx=\int_{-1}^{0}\frac{3x+6}{(x-1)^2}\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{3}{x-1}\,dx+\int_{-1}^{0}\frac{9}{(x-1)^2}\,dx \qquad (b$$

$$S=\int_{-1}^{0}\frac{3}{x-1}\,dx+\int_{-1}^{0}9(x-1)^{-2}\,dx=\Big[3\ln(1-x)\Big]_{-1}^{0}+\left[9\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{0}$$

$$S=\Big[3\ln(1-x)\Big]_{-1}^{0}+\left[\frac{-9}{x-1}\right]_{-1}^{0}=\Big[0-3\ln 2\Big]+\left[9-\frac{9}{2}\right]=\frac{9}{2}-3\ln 2$$



انتهى حل المسألة السابعة عشر

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة الثامنة عشر:

نفرض $\left(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ معلم متجانس

ومنه تكون إحداثيات النقاط

$A(0,0,0)$ و $B(2,0,0)$ و $C(2,2,0)$ و $D(0,2,0)$

$E(0,0,2)$ و $F(2,0,2)$ و $G(2,2,2)$ و $H(0,2,2)$

$I(1,0,0)$ و $J(2,2,1)$ و $K(0,1,2)$

1) $(a$ لدينا $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{IJ}=(2,-2,2).(1,2,1)=2-4+2=0$ ومنه $DF\perp IJ$

لدينا $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{IK}=(2,-2,2).(-1,1,2)=-2-2+4=0$ ومنه $DF\perp IK$

ومنه المستقيم DF عمودي على المستوي IJK فهو ناظم عليه

$(b$ وبالتالي معادلة المستوي IJK تعطى بالشكل $2x-2y+2z+d=0$

I نقطة من المستوي IJK فهي تحقق معادلته: $2-0+0+d=0$ ومنه $d=-2$

وبالتالي تكون معادلة المستوي IJK : $2x-2y+2z-2=0$ وتكافئ $x-y+z-1=0$

2) لدينا $\overrightarrow{IJ}(1,2,1)$ وبالتالي $IJ=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

و $\overrightarrow{IK}(-1,1,2)$ وبالتالي $IK=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

و $\overrightarrow{JK}(-2,-1,1)$ وبالتالي $JK=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

وبالتالي المثلث IJK متساوي الأضلاع ، مساحته $S(IJK)=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{6\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3) $(a$ $dist(F,IJK)=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2-0+2-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

$(b$ $V(FIJK)=\frac{1}{3}S(IJK).h=\frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\frac{3}{2}$

انتهى حل المسألة الثامنة عشر

حل المسألة التاسعة عشر:

في المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ لدينا إحداثيات النقاط

$A(0,0,0)$ و $B(4,0,0)$ و $C(4,2,0)$ و $D(0,2,0)$

$E(0,0,3)$ و $F(4,0,3)$ و $G(4,2,3)$ و $H(0,2,3)$

1) $I\left(4,2,\frac{3}{2}\right)$ و $J\left(4,0,\frac{3}{2}\right)$ و $K(2,2,0)$ و $M(2,1,3)$

2) a) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}=(0,-2,0).\left(-2,0,-\frac{3}{2}\right)=0$ و منه $IJ\perp IK$ و المثلث IJK قائم في I.

b) لدينا $IJ=\sqrt{0+4+0}=2$ و $IK=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ ومنه $S(IJK)=\frac{IJ\times IK}{2}=\frac{\frac{5}{2}\times 2}{2}=\frac{5}{2}$.

3) لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{IJ}=(3,0,-4).(0,-2,0)=0$ ومنه $\vec{n}\perp\overrightarrow{IJ}$

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{IK}=(3,0,-4).\left(-2,0,-\frac{3}{2}\right)=-6+0+6=0$ ومنه $\vec{n}\perp\overrightarrow{IK}$

وبالتالي $\vec{n}(3,0,-4)$ ناظم المستوي IJK ومعادلته تعطى بالشكل: $3x-4z+d=0$

K نقطة من المستوي IJK فهي تحقق معادلته: $6-0+d=0$ ومنه $d=-6$

ومعادلة المستوي IJK تعطى بالعلاقة: $3x-4z-6=0$

4) a) لدينا $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_{IJK}}(3,0,-4)$ وبالتالي $\Delta:\begin{cases}x=3t+2\\y=1\\z=-4t+3\end{cases}:t\in\mathbb{R}$

b) لإيجاد إحداثيات M' المسقط القائم للنقطة M على المستوي IJK نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ

في معادلة المستوي IJK:

$$3(3t+2)-4(-4t+3)-6=0$$

$$9t+6+16t-12-6=0$$

$$25t-12=0 \text{ ومنه } t=\frac{12}{25}$$

نعوض في المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ فنجد

$$x=3\left(\frac{12}{25}\right)+2=\frac{36}{25}+2=\frac{86}{25}$$

$$y=1$$

$$z=-4\left(\frac{12}{25}\right)+3=-\frac{48}{25}+3=\frac{27}{25}$$

ومنه $M\left(\frac{86}{25},1,\frac{27}{25}\right)$

الرياضيات مع أيهم الشاعر

c) يمكن حساب بعد M عن المستوي IJK بطريقتين:

الطريقة الأولى: $$dist(M,IJK)=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|6-12-6|}{\sqrt{9+0+16}}=\frac{12}{5}$$

الطريقة الثانية: $$MM'=\sqrt{(x_{M'}-x_M)^2+(y_{M'}-y_M)^2+(z_{M'}-z_M)^2}$$

$$MM'=\sqrt{\left(\frac{86}{25}-2\right)^2+(1-1)^2+\left(\frac{27}{25}-3\right)^2}$$

$$MM'=\sqrt{\left(\frac{36}{25}\right)^2+(0)^2+\left(-\frac{48}{25}\right)^2}=\sqrt{\frac{1296}{625}+\frac{2304}{625}}=\sqrt{\frac{3600}{625}}=\frac{60}{25}=\frac{12}{5}$$

5) $$V(MIJK)=\frac{1}{3}S(IJK).h=\frac{1}{3}.\frac{5}{2}.\frac{12}{5}=2$$

6) M' نقطة من المستوي IJK وبالتالي فإن النقاط I و J و K و M' تقع في مستوٍ واحد

وبما أن الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ غير مرتبطين خطياً فإنه يوجد عددين حقيقيين a و b يحققان العلاقة:

$$\overrightarrow{IM'}=a\overrightarrow{IJ}+b\overrightarrow{IK}$$

$$\left(-\frac{14}{25},-1,-\frac{21}{50}\right)=a(0,-2,0)+b\left(-2,0,-\frac{3}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{14}{25},-1,-\frac{21}{50}\right)=(0,-2a,0)+\left(-2b,0,-\frac{3}{2}b\right)$$

$$\left(-\frac{14}{25},-1,-\frac{21}{50}\right)=\left(-2b,-2a,-\frac{3}{2}b\right)$$

الرياضيات مع أيهم الشاعر

$$-2b=-\frac{14}{25}\quad(1)$$

بالمطابقة نجد $$-2a=-1\quad(2)$$

$$-\frac{3}{2}b=-\frac{21}{50}\quad(3)$$

من (1) نجد $b=\frac{7}{25}$ و من (2) نجد $a=\frac{1}{2}$ ، نعوض في (3) نجدها محققة

وبالتالي تصبح العلاقة $\overrightarrow{IM'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}+\frac{7}{25}\overrightarrow{IK}$ وتكافئ $50\overrightarrow{IM'}=25\overrightarrow{IJ}+14\overrightarrow{IK}$

$$50\overrightarrow{IM'}=25\left(\overrightarrow{IM'}+\overrightarrow{M'J}\right)+14\left(\overrightarrow{IM'}+\overrightarrow{M'K}\right)$$

$$50\overrightarrow{IM'}=25\overrightarrow{IM'}+25\overrightarrow{M'J}+14\overrightarrow{IM'}+14\overrightarrow{M'K}$$

$$11\overrightarrow{IM'}-25\overrightarrow{M'J}-14\overrightarrow{M'K}=\vec{0}$$

$$11\overrightarrow{IM'}+25\overrightarrow{JM'}+14\overrightarrow{KM'}=\vec{0}$$

بما أن $11+25+14\neq 0$ فإن M' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,11)$ و $(J,25)$ و $(K,14)$

انتهى حل المسألة التاسعة عشر

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة العشرون:

في المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ لدينا إحداثيات النقاط

$A(0,0,0)$ و $B(4,0,0)$ و $C(4,2,0)$ و $D(0,2,0)$

$E(0,0,2)$ و $F(4,0,2)$ و $G(4,2,2)$ و $H(0,2,2)$

$J(2,2,2)$ (1

(2 (a لدينا $\overrightarrow{AJ}(2,2,2)$ ومنه $[AJ]=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

لدينا $\overrightarrow{JF}(2,-2,0)$ ومنه $[JF]=\sqrt{4+4+0}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

(b $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{JF}=(2,2,2).(2,-2,0)=4-4+0=0$

وبالتالي المثلث AFJ قائم في J

ومساحته $S(AFJ)=\frac{AJ\times FJ}{2}=\frac{2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}{2}=\frac{4\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{6}$

(3 (a لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AJ}=(1,1,-2).(2,2,2)=2+2-4=0$ ومنه $\vec{n}\perp\overrightarrow{AJ}$

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{JF}=(1,1,-2).(2,-2,0)=2-2+0=0$ ومنه $\vec{n}\perp\overrightarrow{JF}$

وبالتالي $\vec{n}(1,1,-2)$ ناظم المستوي AFJ

ومعادلته تعطى بالشكل: $x+y-2z+d=0$

A نقطة من المستوي AFJ فهي تحقق معادلته $0+0-0+d=0$ ومنه $d=0$

وبالتالي تعطى معادلة المستوي AFJ بالشكل: $x+y-2z=0$

(b $dist(C,AFJ)=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|4+2-0|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

(4 $V(AFJC)=\frac{1}{3}S(AFJ).h=\frac{1}{3}.2\sqrt{6}.\sqrt{6}=4$

انتهى حل المسألة العشرون

حل المسألة الحادية والعشرون:

$$g(x)=ax-\sqrt{x^2+b} \qquad (I$$

المماس في النقطة $A(0,-1)$ يحقق $g(0)=-1$ ومنه $g(0)=-\sqrt{b}=-1$ وبالتالي $b=1$

المماس في النقطة $A(0,-1)$ يوازي المستقيم $\Delta: y=2x$ فهو يحقق $g'(0)=2$

لدينا $g'(x)=a-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+b}}=a-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+b}}$ ومنه $g'(0)=a-0=2$ وبالتالي $a=2$

$$f(x)=2x-\sqrt{x^2+1} \qquad (II$$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$$f(x)=2x-\left|x^2\right|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=2x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(2-1)=+\infty$

2) a) $f'(x)=2-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=2-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=2-\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}>0$ التابع متزايد تماماً

b)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) a) $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\left|x^2\right|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$

$$a=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=2-1=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right).\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=0.$$

b) وبالتالي C يقبل مقارب مائل من الشكل $y=ax+b$ معادلته $d_1: y=x$ جوار $+\infty$

الوضع النسبي: $f(x)-y_{d_1}=2x-\sqrt{x^2+1}-x=x-\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2+1}<0$ ومنه C تحت d_1

Aiyham Alshaer Math /AiyhamAlshaerMath

4) $f(x)-y_{d_2}=2x-\sqrt{x^2+1}-3x=-x-\sqrt{x^2+1}=\dfrac{\left(-x-\sqrt{x^2+1}\right).\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)}$

$$f(x)-y_{d_2}=\frac{x^2-x^2-1}{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{-1}{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-y_{d_2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-x+\sqrt{x^2+1}}=0$$

وبالتالي المستقيم d_2 الذي معادلته $y=3x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

5) التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0,1[$ و $0\in f(]0,1[)=]-1,2-\sqrt{2}[$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]0,1[$.

6)

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

انتهى حل المسألة الحادية العشرون

حل المسألة الثانية والعشرون:

$$f(x)=\frac{2}{e^x+1}$$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

$f'(x)=\dfrac{-2e^x}{(e^x+1)^2}<0$ التابع متناقص تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	↘	0

2) $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$ ، الوضع النسبي: $f(x)-0=\dfrac{2}{e^x+1}>0$ ومنه C فوق المقارب

و $y=2$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$ ، الوضع النسبي: $f(x)-2=\dfrac{2}{e^x+1}-2=\dfrac{-2e^x}{e^x+1}<0$ ومنه C تحت المقارب

3) $T: y=f'(0)(x-0)+f(0)=-\dfrac{1}{2}x+1$

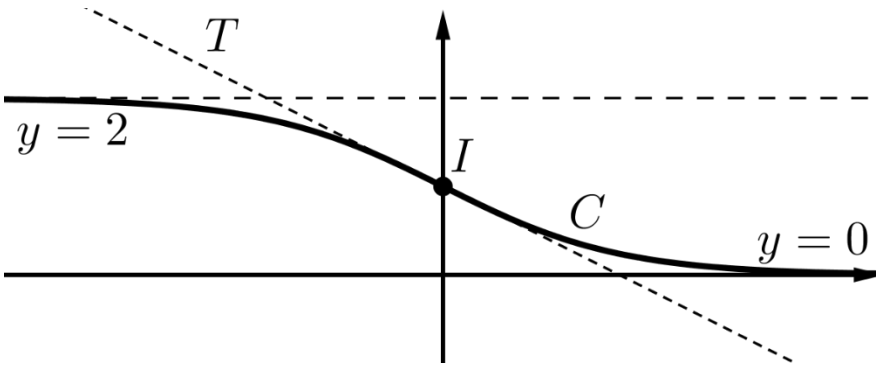
4) الشرط: $h\in D_f=\mathbb{R}$ و $-h\in D_f=\mathbb{R}$

$$\frac{f(h)+f(-h)}{2}=\frac{\frac{2}{e^h+1}+\frac{2}{e^{-h}+1}}{2}=\frac{\frac{2}{e^h+1}+\frac{2}{\frac{1}{e^h}+1}}{2}=\frac{\frac{2}{e^h+1}+\frac{2}{\frac{1+e^h}{e^h}}}{2}=\frac{\frac{2}{e^h+1}+\frac{2e^h}{1+e^h}}{2}$$

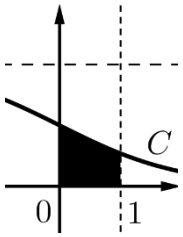
$$\frac{f(h)+f(-h)}{2}=\frac{\frac{2+2e^h}{e^h+1}}{2}=\frac{\frac{2(1+e^h)}{e^h+1}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

وبالتالي النقطة $I(0,1)$ مركز تناظر للخط C.

5)



الرياضيات مع أيهم الشاعر



6) a) $f(x)=2-\dfrac{2e^x}{e^x+1}=\dfrac{2(e^x+1)-2e^2}{e^x+1}=\dfrac{2e^x+2-2e^2}{e^x+1}=\dfrac{2}{e^x+1}$ محققة

b) $S=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(2-\dfrac{2e^x}{e^x+1}\right)dx=\Big[2x-2\ln(e^x+1)\Big]_0^1$

$$S=\Big[2-2\ln(e+1)\Big]-\Big[0-2\ln 2\Big]=2-2\ln(e+1)+2\ln 2=2+2\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$$

7) لدينا $y=f(x)=\dfrac{2}{e^x+1}$ و $y'=f'(x)=\dfrac{-2e^x}{(e^x+1)^2}$ وبالتالي:

$$(e^x+1)^2.(y+y')=(e^x+1)^2.\left(\frac{2}{e^x+1}-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}\right)=(e^x+1)^2.\left(\frac{2(e^x+1)-2e^x}{(e^x+1)^2}\right)$$

$$(e^x+1)^2.(y+y')=(e^x+1)^2.\left(\frac{2e^x+2-2e^x}{(e^x+1)^2}\right)=(e^x+1)^2.\frac{2}{(e^x+1)^2}=2$$

وبالتالي التابع f حل للمعادلة التفاضلية $(e^x+1)^2.(y+y')=2$.

انتهى حل المسألة الثانية والعشرون

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة الثالثة والعشرون:

$$g(x)=x-x\sqrt{x^2+1} \qquad (I$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)=-\infty \qquad (1$$

ولدينا $g'(x)\le 0$ وبالتالي التابع g متناقص تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

$D_f=\mathbb{R}$ التابع مستمر ومتناقص تماماً على مجموعة تعريف و $0\in g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ (2

وبالتالي للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد

وبما أن $g(0)=0$ فإن $\alpha=0$ هو الحل.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

(3

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (II$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad (1$$

$$f'(x)=1+\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}x}{x^2+1}=1+\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=1+\frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \qquad (a\ (2$$

$$f'(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$$ وبالتالي التابع متزايد تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

(b

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right) \qquad (a\ (3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{|x^2|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1\right)=1-1=0$$

وبالتالي $y=x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

الرياضيات مع أيهم الشاعر

$$\left(f(x)-(x+1)\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}-1 \qquad (b$$

بما أن $\frac{x^2}{x^2+1}<1$ فإن $\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}<1$ ومنه $\left(f(x)-(x+1)\right)=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}-1<0$ و C تحت المقارب

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right) \qquad (4$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{\left|x^2\right|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+1\right)=-1-1=0$$

وبالتالي $y=x-1$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

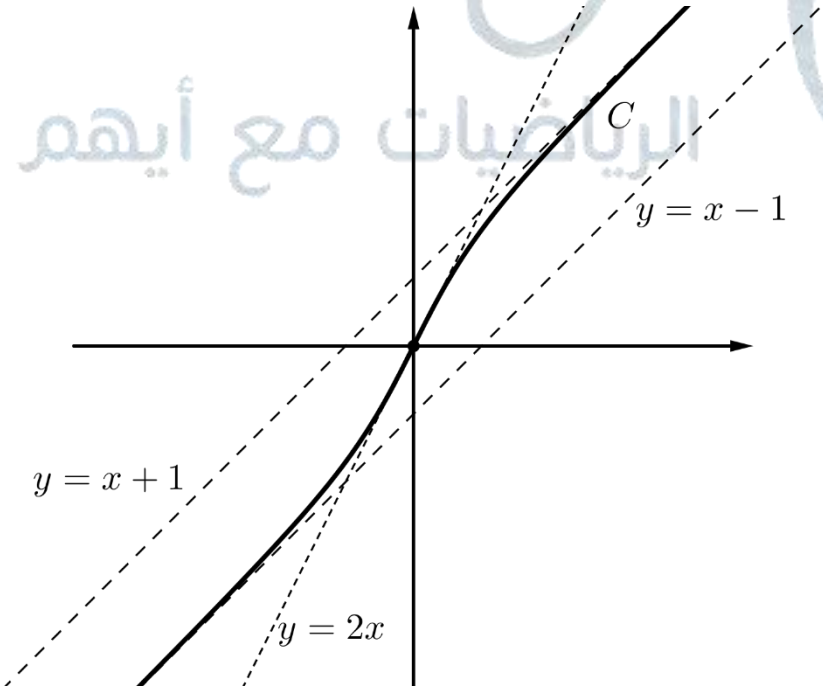
$$d: y=f'(0)(x-0)+f(0)=2x \qquad (a\ (5$$

$$f(x)-y_d=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x=\frac{x-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (b$$

بما أن $\sqrt{x^2+1}>0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $g(x)$ وبالتالي:

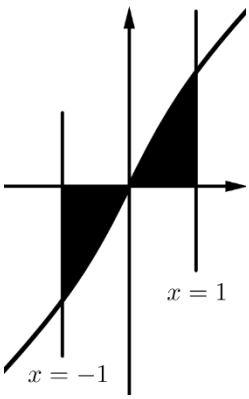
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y_d=g(x)$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	C فوق المماس			C تحت المماس	

(6



الرياضيات مع أيهم الشاعر

(7



$$S=\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|dx=-\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx$$

$$S=-\int_{-1}^{0}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$S=-\int_{-1}^{0}\left(x+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$S=-\left[\frac{1}{2}x^2+\sqrt{x^2+1}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2+\sqrt{x^2+1}\right]_{0}^{1}$$

$$S=-\left[(1)-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)-(1)\right]$$

$$S=-1+\frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}-1$$

$$S=2\sqrt{2}-1$$

انتهى حل المسألة الثالثة والعشرون

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة الرابعة والعشرون:

1) لدينا $P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$

من جهة أخرى لدينا $P(E)=\frac{6}{100}$ و $P(B\cap E)=P(E\mid B)\times P(E)=\frac{5}{100}\times\frac{40}{100}=\frac{200}{10000}=\frac{2}{100}$

وبالتالي $\frac{5}{100}=P(A\cap E)+\frac{2}{100}$ ومنه $P(A\cap E)=\frac{3}{100}$

2) $P(E)=\frac{6}{100}$

3) $P(A\mid E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{2}{100}}{\frac{5}{100}}=\frac{2}{5}$

انتهى حل المسألة الرابعة والعشرون

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة الخامسة والعشرون:

1) $(a$ في المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ لدينا إحداثيات النقاط

$A(0,0,0)$ و $B(2,0,0)$ و $C(2,2,0)$ و $D(0,2,0)$

$E(0,0,1)$ و $F(2,0,1)$ و $G(2,2,1)$ و $H(0,2,1)$

$(b$ نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي GDB فهو يحقق:

$\vec{n}.\overrightarrow{GD}=(a,b,c).(-2,0,-1)=0$ ومنه $-2a-c=0$ ...(1)

$\vec{n}.\overrightarrow{GB}=(a,b,c).(0,-2,-1)=0$ ومنه $-2b-c=0$ ...(2)

نعوّض $c=1$ ، نعوّض في (1) فنجد $-2a-1=0$ ومنه $a=-\frac{1}{2}$

نعوّض في (2) فنجد $-2b-1=0$ ومنه $b=-\frac{1}{2}$

وبالتالي يكون ناظم المستوي $\vec{n}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$ ويكافئ $\vec{n}(1,1,-2)$

وبالتالي تعطى معادلة المستوي GDB بالشكل: $x+y-2z+d=0$

B نقطة من المستوي GDB فهي تحقق معادلته: $2+0-0+d=0$ ومنه $d=-2$

وبالتالي تكون معادلة المستوي GDB: $x+y-2z-2=0$

2) $(a$ لدينا $\overrightarrow{u_{EC}}=\overrightarrow{EC}(2,2,-1)$ ومنه $(EC):\begin{cases}x=2t\\y=2t\\z=-t+1\end{cases}:t\in\mathbb{R}$

$(b$ لتعيين إحداثيات M نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي GDB

نعوّض المعادلات الوسيطية للمستقيم (EC) في معادلة المستوي GDB

$$2t+2t-2(-t+1)-2=0$$

$$2t+2t+2t-2-2=0$$

$$6t-4=0 \text{ ومنه } t=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$x=2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

بالتعويض في المعادلات الوسيطية نجد $y=2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$ وبالتالي $M\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$

$$z=-\left(\frac{2}{3}\right)+1=\frac{1}{3}$$

c) $\frac{x_G+x_D+x_B}{3}=\frac{2+0+2}{3}=\frac{4}{3}=x_M$

$\frac{y_G+y_D+y_B}{3}=\frac{2+2+0}{3}=\frac{4}{3}=y_M$

$\frac{z_G+z_D+z_B}{3}=\frac{1+0+0}{3}=\frac{1}{3}=z_M$

وبالتالي M هي مركز ثقل المثلث GDB.

3) لدينا I منتصف $[EM]$ وبالتالي I مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(E,3)$ و $(M,3)$

وبما أن M هي مركز ثقل المثلث GDB فإن M مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(G,1)$ و $(D,1)$ و $(B,1)$

وحسب الخاصة التجميعية نجد أن I مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(G,1)$ و $(D,1)$ و $(B,1)$ و $(E,3)$

انتهى حل المسألة الخامسة والعشرون

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة السادسة والعشرون:

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

1) f معرف بتحقق الشرطين: الشرط الأول: $x(1-\ln x)=0$ ومنه يكون $\begin{matrix} x\neq 0 \\ 1-\ln x\neq 0 \end{matrix}$ وهذا يكافئ $\begin{matrix} x\neq 0 \\ x\neq e \end{matrix}$

الشرط الثاني: $x>0$ وهذا يكافئ $x\in]0,+\infty[$

وبالتالي تكون مجموعة تعريف التابع f هي $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x-x\ln x}=+\infty$ ومنه $x=0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=-\infty$ ومنه $x=e$ مقارب شاقولي عند $\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ومنه $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

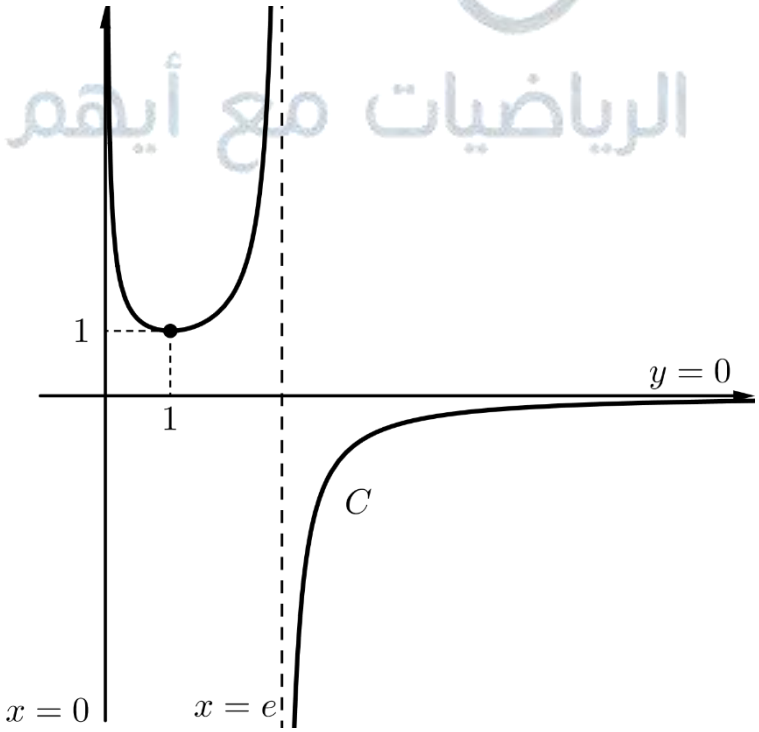
3) $$f'(x)=\frac{0-\left(x(1-\ln x)\right)'}{\left(x(1-\ln x)\right)^2}=\frac{1-\ln x-\frac{1}{x}.x}{\left(x(1-\ln x)\right)^2}=\frac{1-\ln x-1}{\left(x(1-\ln x)\right)^2}=\frac{-\ln x}{\left(x(1-\ln x)\right)^2}$$

إذا كان $f'(x)=0$ فإن $-\ln x=0$ وبالتالي $x=1$ حيث $f(1)$ و بالتالي يعطى جدول تغيرات التابع f بالشكل:

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

ومنه $f(1)=1$ قيمة حدية صغرى

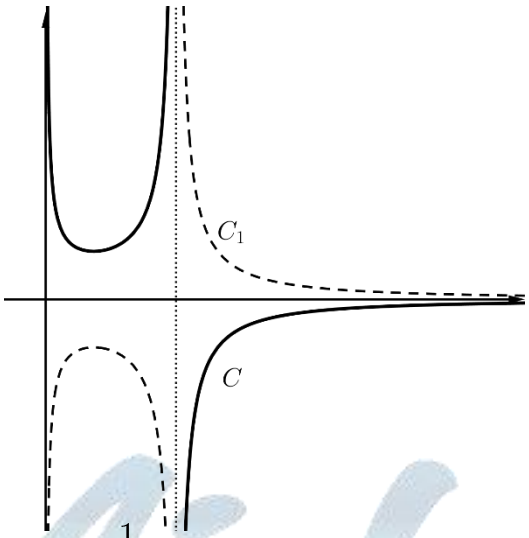
4)



الرياضيات مع أيهم الشاعر

5) لدينا $f_1(x)=\dfrac{1}{x\ln x-x}=\dfrac{1}{x(\ln x-1)}=-\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=-f(x)$

وبالتالي الخط البياني للتابع f_1 هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة إلى محور الفواصل



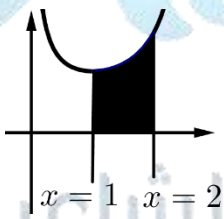
6) المعادلة $mx(1-\ln x)=1$ تكافئ $m=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=f(x)$ ومنه يكون:

عندما $m\in]-\infty,0[$ للمعادلة حل وحيد

عندما $m\in]0,1[$ ليس للمعادلة حل

عندما $m=1$ للمعادلة حل وحيد

عندما $m\in]1,+\infty[$ للمعادلة حلين مختلفين



7) $S=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 \dfrac{1}{x(1-\ln x)}\,dx=\int_1^2 \dfrac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx=-\int_1^2 \dfrac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx$

$S=-\left[\ln(1-\ln x)\right]_1^2=-\left[\ln(1-\ln 2)-\ln 1\right]=-\ln(1-\ln 2)$

8) $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)=\dfrac{1}{u_n(1-\ln u_n)}$

a) نفرض القضية $E(n):1\le u_{n+1}<u_n$

نثبت صحة القضية $E(0):1\le u_1<u_0$: $1\le\dfrac{1}{2(1-\ln 2)}\approx 1.63<2$ محققة

نفرض صحة القضية $E(n):1\le u_{n+1}<u_n$ ونثبت صحة القضية $E(n+1):1\le u_{n+2}<u_{n+1}$ ؟

من الفرض $1\le u_{n+1}<u_n$ وبما أن التابع f متزايد عندما $x\ge 1$ فإن:

$f(1)\le f(u_{n+1})<f(u_n)$ و $1\le u_{n+2}<u_{n+1}$

وبالتالي العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً العدد الطبيعي n.

$(b$

لدينا $u_{n+1} < u_n$ وبالتالي المتتالية u_n متناقصة تماماً

و $u_n > 1$ وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأعلى

وبالتالي المتتالية u_n متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$ أي أن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

انتهى حل المسألة السادسة والعشرون

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة السابعة والعشرون:

$$f(x)=x^2e^x$$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ وبالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$$

إذا كان $f'(x)=0$ فإن $2x+x^2=0$ وتكافئ $x(2+x)=0$ ومنه:

إما $x=0$ حيث $f(0)=0$

أو $x=-2$ حيث $f(-2)=\frac{4}{e^2}$

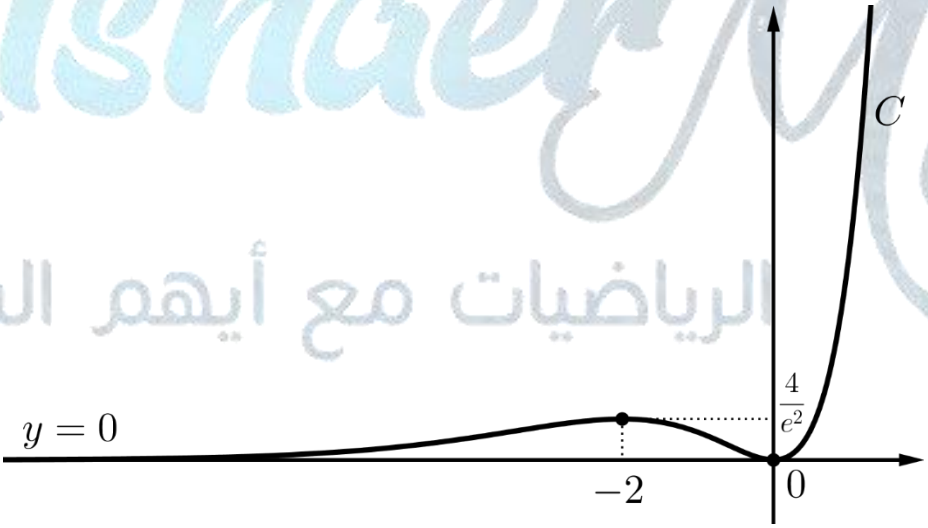
وبالتالي يكون جدول تغيرات التابع f بالشكل:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗	$+\infty$

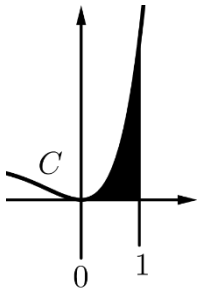
ومنه $f(0)=0$ قيمة حدية صغرى

و $f(-2)=\frac{4}{e^2}$ قيمة حدية كبرى

2)



الرياضيات مع أيهم الشاعر



3) $S=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2e^x\,dx$

$u=x^2$	$u'=2x$
$v'=e^x$	$v=e^x$

$$S=\left[x^2e^x\right]_0^1-\int_0^1 2xe^x\,dx=e-I \quad ...(1)$$

$u=2x$	$u'=2$
$v'=e^x$	$v=e^x$

$$I=\left[2xe^x\right]_0^1-\int_0^1 2e^x\,dx=\left[2xe^x\right]_0^1-\left[2e^x\right]_0^1=2e-(2e-2)=2 \quad ...(2)$$

نعوّض (2) في (1) فنجد $S=e-2$

4) a) التابع $G(x)=(ax^4+bx^3+cx^2+dx+f)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x\mapsto\left(f(x)\right)^2$ وبالتالي:

$$G'(x)=\left(f(x)\right)^2$$

$$(4ax^3+3bx^2+2cx+d)e^{2x}+2(ax^4+bx^3+cx^2+dx+f)e^{2x}=x^4e^{2x}$$

$$4ax^3+3bx^2+2cx+d+2ax^4+2bx^3+2cx^2+2dx+2f=x^4$$

$$2ax^4+(4a+2b)x^3+(3b+2c)x^2+(2c+2d)x+(d+2f)=x^4$$

بالمطابقة نجد وبالتالي:

$$2a=1 \quad (1)$$
$$4a+2b=0 \quad (2)$$
$$3b+2c=0 \quad (3)$$
$$2c+2d=0 \quad (4)$$
$$d+2f=0 \quad (5)$$

من (1) نجد $a=\frac{1}{2}$

نعوض في (2) نجد $2+2b=0$ ومنه $b=-1$

نعوض في (3) نجد $-3+2c=0$ ومنه $c=\frac{3}{2}$

نعوض في (4) نجد $3+2d=0$ ومنه $d=-\frac{3}{2}$

نعوض في (5) نجد $-\frac{3}{2}+2f=0$ ومنه $f=\frac{3}{4}$

وبالتالي يكون $G(x)=\left(\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\right)e^{2x}$

Aiyham Alshaer Math
/AiyhamAlshaerMath
الرياضيات مع أيهم الشاعر

$$V=\int_0^1 \pi\big(f(x)\big)^2dx=\pi\big[G(x)\big]_0^1=\pi\left[\left(\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\right)e^{2x}\right]_0^1 \qquad (b$$

$$V=\pi\left[\left(\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)e^2-\frac{3}{4}\right]=\pi\left[\frac{e^2-3}{4}\right]$$

$$E: y'-y=2xe^x \qquad (5$$

$(a$ لدينا $y=f(x)=x^2e^x$ و $y'=f'(x)=2xe^x+x^2e^x$ وبالتالي:

$$f'-f=2xe^x+x^2e^x-x^2e^x=2xe^x$$

وبالتالي التابع f حل للمعادلة التفاضلية E.

$b)$ نفرض g حل للمعادلة التفاضلية E ونثبت أن $g-f$ حل للمعادلة التفاضلية $E': y'-y=0$ ؟

بما أن g حل للمعادلة التفاضلية E فإن $g'-g=2xe^x$ ...(1)

ووجدنا سابقاً أن f حل للمعادلة التفاضلية E فإن $f'-f=2xe^x$ ...(2)

بطرح العلاقتين (1) و (2) نجد $g'-g-f'+f=0$ وهذا يكافئ $(g-f)'-(g-f)=0$

وبالتالي $g-f$ حل للمعادلة التفاضلية $E': y'-y=0$.

من جهة أخرى: نفرض $g-f$ حل للمعادلة التفاضلية $E': y'-y=0$ ونثبت أن g حل للمعادلة التفاضلية E ؟

بما أن $g-f$ حل للمعادلة التفاضلية $E': y'-y=0$ فإن $(g-f)'-(g-f)=0$

وهذا يكافئ $g'-f'-g+f=0$ أي أن $g'-g=f'-f$ ...(3)

ووجدنا سابقاً أن f حل للمعادلة التفاضلية E فإن $f'-f=2xe^x$ ...(2)

نعوض (2) في (3) فنجد $g'-g=2xe^x$

وبالتالي g حل للمعادلة التفاضلية E

$c)$ يمكن كتابة المعادلة التفاضلية E' بالشكل $E': y'=y$ وبالتالي فهي تقبل حلاً من الشكل $y=ke^x$

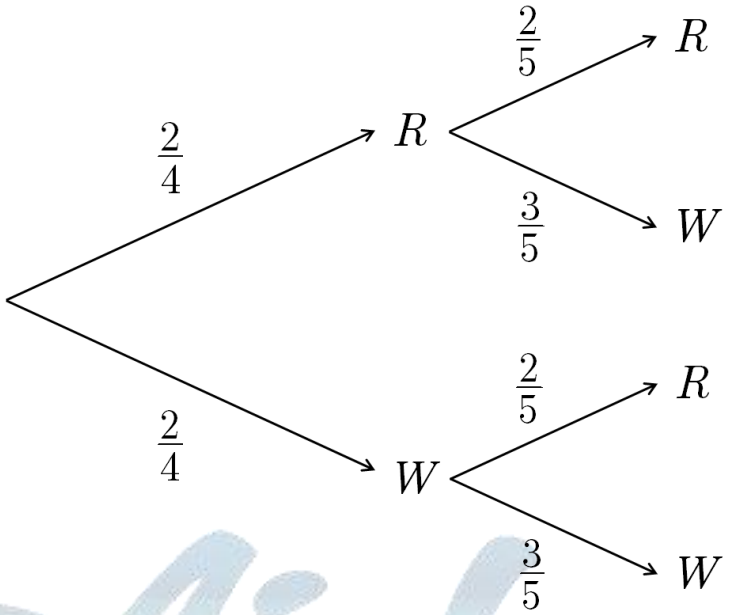
بما أن $g-f$ حل للمعادلة التفاضلية E' فهو من الشكل $g-f=ke^x$

ومنه $g=ke^x+f=ke^x+x^2e^x$ وهي جميع حلول المعادلة التفاضلية E.

انتهى حل المسألة السابعة والعشرون

حل المسألة الثامنة والعشرون:

1)



2) A سحب كرتين من اللون نفسه:

$$P(A)=P(R\cap R)+P(W\cap W)$$

$$P(A)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{4}{20}+\frac{6}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

B سحب كرة حمراء واحدة على الأقل:

$$P(B)=P(R\cap R)+P(R\cap W)+P(W\cap R)$$

$$P(B)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{20}+\frac{6}{20}+\frac{4}{20}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$$

$A\cap B$ سحب كرتين من اللون نفسه و إحدى الكرتين على الأقل حمراء:

$$P(A\cap B)=P(R\cap R)$$

$$P(A\cap B)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

3) بما أن $P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{20}\neq P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

فإن الحدثين A و B غير مستقلين احتمالياً.

الرياضيات مع أيهم الشاعر

4) a) $X=\{0,1,2\}$

$$P(X=0)=P(W\cap W)=\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=1)=P(R\cap W)+P(W\cap R)=\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{10}{20}=\frac{5}{10}$$

$$P(X=2)=P(R\cap R)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{20}=\frac{2}{10}$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$

b) التوقع الرياضي :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i.p_i=\frac{0+5+4}{10}=\frac{9}{10}$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2.p_i=\frac{0+5+8}{10}=\frac{13}{10}$$

التباين:

$$V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=\frac{13}{10}-\frac{81}{100}=\frac{130}{100}-\frac{81}{100}=\frac{49}{100}$$

الانحراف المعياري:

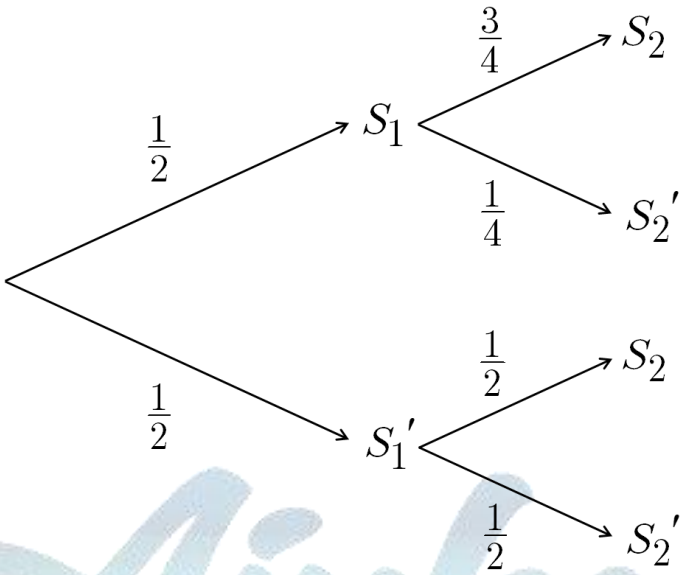
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{49}{100}}=\frac{7}{10}$$

انتهى حل المسألة الثامنة والعشرون

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

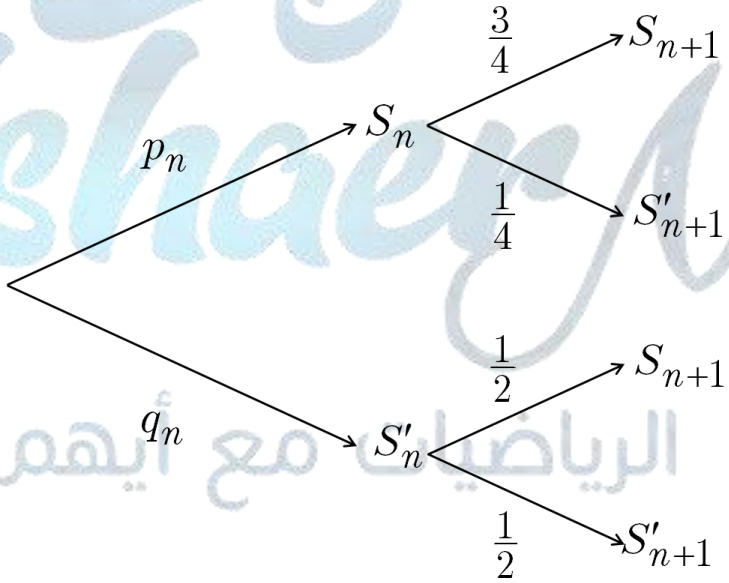
حل المسألة التاسعة والعشرون:

1) $p_1 = \frac{1}{2}$



$$p_2 = P(S_2) = P(S_1 \cap S_2) + P(S_1' \cap S_2) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

2)



$$p_{n+1} = P(S_{n+1}) = P(S_n \cap S_{n+1}) + P(S'_n \cap S_{n+1})$$

$$p_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2}(1-p_n) = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

الرياضيات مع أيهم الشاعر

3) $u_n = p_n - \frac{2}{3}$

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}u_n$$

وبالتالي المتتالية u_n هندسية ، أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$

4) عبارة u_n بدلالة n هي: $u_n = u_1.q^n = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

عبارة p_n بدلالة n هي: $p_n = u_n + \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$

بما أن $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ هندسية أساسها $-1 \le q = \frac{1}{4} \le 1$ فإن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{2}{3}$

انتهى حل المسألة التاسعة والعشرون

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

المسألة الثلاثون:

1) لدينا $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ وبالتالي $z_{\overrightarrow{AD}}=\frac{2}{3}z_{\overrightarrow{AB}}$

$$d-a=\frac{2}{3}(b-a)$$

$$d=\frac{2}{3}(b-a)+a=\frac{2}{3}(4+i+2+2i)-2-2i=\frac{2}{3}(6+3i)+2+2i=4+2i-2-2i=2$$

2) C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ومنه الصيغة العقدية للدوران $c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

$$c=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)+a=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(6+3i)-2-2i$$

$$c=3+\frac{3}{2}i+3i\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}-2-2i=\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(3\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$$

E صورة D وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ ومنه الصيغة العقدية للدوران $e-a=e^{-i\frac{\pi}{3}}(d-a)$

$$e=e^{-i\frac{\pi}{3}}(d-a)+a=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+2+2i)-2-2i=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4+2i)-2-2i$$

$$e=2+i-2i\sqrt{3}+\sqrt{3}-2-2i=\sqrt{3}+i(-2\sqrt{3}-1)$$

F صورة B وفق دوران مركزه D وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ ومنه الصيغة العقدية للدوران $f-d=e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-d)$

$$f=e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-d)+d=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4+i-2)+2=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+i)+2$$

$$f=1+\frac{1}{2}i-i\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+2=\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)$$

3) I مركز ثقل المثلث ABC ومنه $z_I=\frac{a+b+c}{3}$ وبالتالي:

$$z_I=\frac{-2-2i+4+i+1-\frac{3\sqrt{3}}{2}+3i\sqrt{3}-\frac{1}{2}i}{3}=\frac{3-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i+3i\sqrt{3}}{3}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+i\sqrt{3}$$

J مركز ثقل المثلث ADE ومنه $z_J=\frac{a+d+e}{3}$ وبالتالي:

$$z_J=\frac{-2-2i+2+\sqrt{3}-2i\sqrt{3}-i}{3}=\frac{\sqrt{3}-3i-2i\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}-i-\frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

K مركز ثقل المثلث DBF ومنه $z_K=\dfrac{d+b+f}{3}$ وبالتالي:

$$z_K=\frac{2+4+i+3+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-i\sqrt{3}}{3}=\frac{9+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i-i\sqrt{3}}{3}=3+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$z_I-z_J=1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+i\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}+i+\frac{2\sqrt{3}}{3}i=1-\frac{5\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i+\frac{5\sqrt{3}}{3}i \qquad (4$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(z_K-z_J)=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(3+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{3}i-\frac{\sqrt{3}}{3}+i+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(z_K-z_J)=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(3-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{3}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(z_K-z_J)=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{3}{4}i+\frac{\sqrt{3}}{6}i+\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}i-\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}=1-\frac{5\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i+\frac{5\sqrt{3}}{3}i$$

أي أن $z_I-z_J=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_K-z_J)$ صحيحة

ومنه I صورة K وفق دوران مركزه J وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$ وبالتالي المثلث IJK متساوي الأضلاع.

انتهى حل المسألة الثلاثون

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

حل المسألة الحادية والثلاثون:

1) C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ومنه الصيغة العقدية للدوران $c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

$$c=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)+a=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2-2i+1-i)-1+i=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1-3i)-1+i$$

$$c=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3\sqrt{3}}{2}-1+i=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

G صورة F وفق دوران مركزه E وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ومنه الصيغة العقدية للدوران $g-e=e^{i\frac{\pi}{3}}(f-e)$

$$g=e^{i\frac{\pi}{3}}(f-e)+e=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+2i-3-4i)+3+4i=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2-2i)+3+4i$$

$$g=-1-i-i\sqrt{3}+\sqrt{3}+3+4i=2+\sqrt{3}+3i-i\sqrt{3}$$

2) لدينا I منتصف $[AE]$ وبالتالي $z_I=\frac{a+e}{2}=\frac{-1+i+3+4i}{2}=\frac{2+5i}{2}=1+\frac{5}{2}i$

لدينا J منتصف $[BF]$ وبالتالي $z_J=\frac{b+f}{2}=\frac{-2-2i+1+2i}{2}=-\frac{1}{2}$

لدينا K منتصف $[CG]$ وبالتالي

$$z_K=\frac{c+g}{2}=\frac{-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i+2+\sqrt{3}+3i-i\sqrt{3}}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i-\frac{3\sqrt{3}}{2}i}{2}=\frac{1}{4}+\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{4}i-\frac{3\sqrt{3}}{4}i$$

3) $$z_I-z_J=1+\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(z_K-z_J)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{4}i-\frac{3\sqrt{3}}{4}i+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{4}i-\frac{3\sqrt{3}}{4}i\right)$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(z_K-z_J)=\frac{3}{8}+\frac{5\sqrt{3}}{8}+\frac{5}{8}i-\frac{3\sqrt{3}}{8}i+\frac{3\sqrt{3}}{8}i+\frac{15}{8}i-\frac{5\sqrt{3}}{8}+\frac{9}{8}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$$

أي أن العلاقة $z_I-z_J=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_K-z_J)$ صحيحة

4) وبالتالي تكون I صورة K وفق دوران مركزه J وزاويته $\frac{\pi}{3}$

وبالتالي المثلث IJK متساوي الأضلاع.

انتهى حل المسألة الحادية والثلاثون

حل المسالة الثانية والثلاثون:

1) $P(A)=\dfrac{\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}}=\dfrac{18}{56}$ و $P(B)=\dfrac{\binom{3}{3}+\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}=\dfrac{5}{56}$

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}+\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{3}{56}$$

2) $$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{56}}{\frac{5}{56}}=\frac{3}{5}$$

3) $$X=\{0,1,2,3\}$$

$P(X=0)=\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}=\dfrac{4}{56}$ و $P(X=1)=\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}}=\dfrac{24}{56}$

$P(X=2)=\dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{8}{3}}=\dfrac{24}{56}$ و $P(X=3)=\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}=\dfrac{4}{56}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

التوقع الرياضي: $E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i.p_i=\dfrac{0+24+48+12}{56}=\dfrac{84}{56}=\dfrac{5}{4}$

Aiyham Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

(4

$$Y=\{1,2,3\}$$

$$P(Y=3)=\frac{\binom{3}{1}.\binom{3}{1}.\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{18}{56} \quad \text{و} \quad P(Y=1)=\frac{\binom{3}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{2}{56}$$

$$P(Y=2)=1-\big(P(Y=1)+P(Y=3)\big)=1-\left(\frac{2}{56}+\frac{18}{56}\right)=1-\frac{20}{56}=\frac{36}{56}$$

y_i	1	2	3
$P(Y=y_i)$	$\frac{2}{56}$	$\frac{18}{56}$	$\frac{36}{56}$

التوقع الرياضي: $E(Y)=\sum_{i=1}^{4} y_i.p_i=\frac{2+36+108}{56}=\frac{146}{56}=\frac{73}{28}$

(5

$$P\big((X=3)\cap(Y=1)\big)=0\neq P(X=3).P(Y=1)=\frac{4}{56}.\frac{2}{56}=\frac{8}{3136}$$

وبالتالي المتحولان العشوائيان X و Y غير مستقلين احتمالياً

انتهى حل المسألة الثانية والثلاثون

هذا المسائل هي إضافة تدريبية لتمارين الكتاب ولا تغني عنهم ولا تكفي للدراسة

يجب دراسة تمارين ومسائل الكتاب ومن ثم الاستئناس بهذه المسائل ..

هذا العمل مهدى لجميع طلابنا الأعزاء .. موفقين في امتحاناتكم ..

في حال وجود أي ملاحظة أو خطأ يرجى التنبيه للتصحيح على الحساب:

Facebook: Aiyham Alshaer

أيهم الشاعر

الرياضيات مع أيهم الشاعر

☆◕‿◕☆

☆ انقر هنا للوصول إلى المكتبة التعليمية الشاملة على تيليغرام – التجمع التعليمي || بوت

تـم التحمـيل بواسـطـة : T.me/Science_2022bot

Telegram : @Science_2022bot ☆