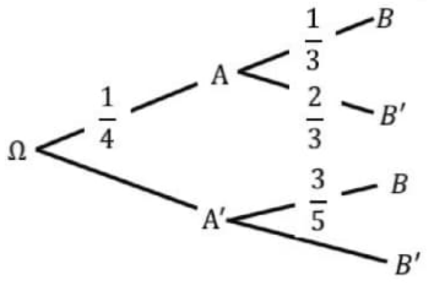
النموذج – B -	نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (2022 - 2023)	الاسم: .... المدة: ثلاث ساعات الدرجة العظمى: ستمئة

أولاً) أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: ليكن A , B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية

معروضة بالمخطط الشجري المجاور:

1) احسب $P(B'|A')\ ,P(A')$.
2) احسب $P(B)$.
3) احسب $P(A|B)$.

السؤال الثاني: نتأمل في معلم متجانس $(O;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستقيمين $\acute{d}\ ,d$ المعرفين وسيطياً وفق:

$$d':\ \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -3 + 2S \quad ; s \in R \\ z = 2 - s \end{cases} \qquad d:\ \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t - 1 \quad ; t \in R \\ z = 1 + t \end{cases}$$

أثبت أن $d\ \ ,\ \acute{d}$ متقاطعان وعين نقطة التقاطع

السؤال الثالث: يضم مصنع (3 نساء و 7 رجال) نريد تشكيل لجنة رقابة مؤلفة من 2 شخص

1) بكم طريقة يتم اختيار اللجنة
2) بكم طريقة يتم اختيار اللجنة على أن تضم رجل وامرأة
3) نعرف متغير عشوائي يدل على عدد النساء في اللجنة . اكتب مجموعة قيم X

السؤال الرابع: بفرض f تابع معرف على R وفق: $f(x) = \frac{2e^x+7}{e^x+4}$

- أوجد نهاية f عند $+\infty$ ثم عين عدد حقيقي A يحقق إذا كان $x > A$ كان $f(x) \in]1.9\ , 2.1[$

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I = \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ وفق: $f(x) = \tan x - \frac{1}{x}$

- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها وأثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}\ ,\frac{\pi}{2}\right[$

السؤال السادس: ليكن f تابعاً معرفاً على R ومن أجل كل x من R تتحقق المتراجحة الآتية: $1 \le f(x) \le 2$

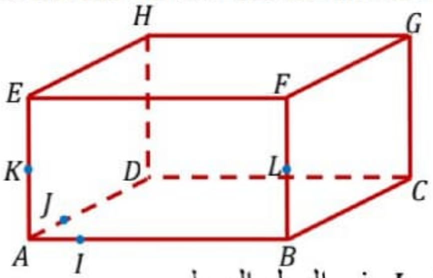
ولنعرف التابع g على المجال $]-\infty, 0[$ وفق العلاقة: $g(x) = \frac{2f(x)+1}{x}$

1) أثبت أنه أياً تكن $x \in]-\infty, 0[$ كان $\frac{5}{x} \le g(x) \le \frac{3}{x}$
2) أوجد نهاية التابع g عند $-\infty$ وعند الصفر.

ثانياً) حل التمارين الثلاثة الآتية: (60 درجة للتمرين الأول، 80 درجة للتمرين الثاني، 70 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ حسابية فيها: $u_2 = 8\ \ ,\ \ u_5 = 17$

1) اكتب u_n بدلالة n
2) أثبت أن $u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots + u_7 = 100$
3) بفرض المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق: $v_n = e^{u_n}$ أثبت أنها هندسية وأوجد حدها العام.
4) احسب المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \ \ldots\ldots . + v_n$



التمرين الثاني: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه:

$AB = 6$ ، $AD = 4$ ، $AE = 2$ والنقاط I, J, K, L

تحقق: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BL} = \frac{5}{9}\overrightarrow{BF}$

ولنختر معلماً متجانساً $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$:

1) أوجد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات النقاط: I, J, K, L في المعلم المعطى
2) أثبت أن النقاط I, J, L, G تقع في مستو واحد.
3) اكتب معادلة للمخروط الناتج عن دوران الضلع $[AH]$ المثلث القائم AHE حول (AE) دورة كاملة.

التمرين الثالث: لتكن مجموعة التوابع المعرفة على R^* وفق العلاقة $a, b \in R : f(x) = ax + \frac{b}{x^3}$

1) عين a, b لكي يقبل f قيمة محلية صغرى تساوي 4 عندما $x = 1$
2) من أجل $a = 3, b = 1$ أثبت أن $\Delta: y = 3x$ مقارب لـ C وادرس الوضع النسبي.
3) أوجد تابع أصلي للتابع f على المجال $]0, +\infty[$

ثالثاً) حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن لدينا مجموعة الأعداد العقدية كثيرة الحدود $P(Z)$ حيث:

$$P(Z) = Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 72$$

1) تحقق أن $Z = 6$ هو أحد جذور كثير الحدود $P(Z)$
2) جد العددين الحقيقين a, b بحيث تكون $P(Z) = (Z - 6)(Z^2 + aZ + b)$
3) حل في C المعادلة $P(Z) = 0$
4) بفرض A, B, C نقاط في المستوي العقدي $(O; \vec{u}, \vec{v})$ تمثل الأعداد العقدية

$$Z_A = 6 \quad , \quad Z_B = 3 + \sqrt{3}i \quad , \quad Z_C = 3 - \sqrt{3}i$$

اكتب $w = \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي ، واستنتج طبيعة المثلث ABC

5) أوجد B' صورة النقطة B وفق تحاكي مركزه C نسبته $\sqrt{3}$
6) بفرض النقطتان $Z_{A'} = 3 - \sqrt{3} + (3 - \sqrt{3})i$ ، $Z_{B'} = 3 + (6 - \sqrt{3})i$

ما العلاقات التي تربط الأعداد العقدية الممثلة للشعاعين $\overrightarrow{A'B'}$ ، $\overrightarrow{AB}$ واستنتج أن $AB \perp A'B'$ وأن $AB = A'B'$

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على $]0, e[\cup]e, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$

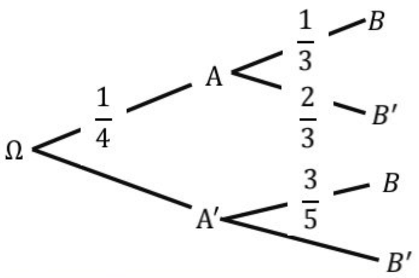
1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين وعيّن قيمته الحدية وبيّن نوعها
2) ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم ارسم C
3) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = \frac{1}{e^2}$ ، $x = \frac{1}{e}$
4) بفرض التابع $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x}\ln\sqrt{x}}$ المعرف على المجال $]1, +\infty[$ استنتج التابع المشتق للتابع g
5) استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع $f_1(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$

انتهت الأسئلة

النموذج – B –	نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (2022 - 2023)	الاسم: .... المدة: ثلاث ساعات الدرجة العظمى: ستمئة

أولاً) أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ليكن A , B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور:



1) احسب $P(A')$, $P(B'|A')$.

2) احسب $P(B)$.

3) احسب $P(A|B)$.

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$P(\grave{A}) = 1 - P(A) = \frac{3}{4}$ $P(\grave{B} \backslash \grave{A}) = \frac{2}{5}$	5 5
2	$P(B) = P(A \cap B) + P(\grave{A} \cap B)$ $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}$ $= \frac{1}{12} + \frac{9}{20} = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$	5 5 5
3	$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{32}$	15
	المجموع	**40**

....

السؤال الثاني: نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستقيمين d , $\grave{d}$ المعرفين وسيطياً وفق:

$$d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t - 1 \quad ; t \in R \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad d': \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -3 + 2S \quad ; s \in R \\ z = 2 - s \end{cases}$$

- **أثبت أن d , $\grave{d}$ متقاطعان وعين نقطة التقاطع.**

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$\vec{u}$ شعاع توجيه d : $\vec{u}(3,-1,1)$ $\vec{v}$ شعاع توجيه $\grave{d}$: $\vec{v}(1,2,-1)$ $\frac{-1}{2} \neq \frac{3}{1}$ المركبات غير متناسبة فالأشعة غير مرتبطة خطياً إذاً d , $\grave{d}$ إما متقاطعان أو متخالفان	5 5
2	بالحل المشترك: $1 + s = 2 + 3t$ ① $-3 + 2s = -t - 1$ ② $2 - s = 1 + t$ ③	10
3	③ + ② $\Rightarrow -1 + s = 0 \Rightarrow \boxed{s = 1}$ نعوض في ③: $2 - 1 = 1 + t \Rightarrow \boxed{t = 0}$ نتحقق من ①: $1 + 1 \stackrel{?}{=} 2 + 0$ محققة $2 = 2$	10
4	فالمستقيمان متقاطعان في نقطة N . نعوض $t = 0$ في d : نقطة التقاطع $N(2, -1, 1)$	5 5
	المجموع	**40**

السؤال الثالث: يضم مصنع (3 نساء و 7 رجال) نريد تشكيل لجنة رقابة مؤلفة من 2 شخص

1) **بكم طريقة يتم اختيار اللجنة**
2) **بكم طريقة يتم اختيار اللجنة على أن تضم رجل وامرأة**
3) **نعرف متغير عشوائي يدل على عدد النساء في اللجنة . اكتب مجموعة قيم X**

الدرجة	الخطوة	رقم الخطوة
15	$n(\Omega) = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$	1
15	$A = \{(\text{رجل} , \quad \text{امرأة})\}$ $n(\mathrm{A}) = \binom{7}{1} . \binom{3}{1} = 7 \times 3 = 21$	2
10	$X = \{0 , 1 , 2\}$	3
40	**المجموع**	

……………………………………………………………………

السؤال الرابع: بفرض f تابع معرف على R وفق: $f(x) = \frac{2e^x+7}{e^x+4}$

- **أوجد نهاية f عند $+\infty$ ثم عين عدد حقيقي A يحقق إذا كان $x > A$ كان $f(x) \in]1.9 , 2.1[$**

الدرجة	الخطوة	رقم الخطوة
5 5 5	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ? \quad$ عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$ $f(x) = \frac{e^x(2+7e^{-x})}{e^x(1+4e^{-x})} = \frac{2+7e^{-x}}{1+4e^{-x}}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$	1
5 5	$f(x) \in]1.9 , 2.1[\quad \Rightarrow \quad l = 2 \quad , \quad \varepsilon = 0.1 = \frac{1}{10}$ $\Rightarrow \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$	2
15	$\left\lvert \frac{2e^x+7}{e^x+4} - 2 \right\rvert < \frac{1}{10}$ $\left\lvert \frac{-1}{e^x+4} \right\rvert < \frac{1}{10}$ $\frac{1}{e^x+4} < \frac{1}{10}$ $e^x + 4 > 10$ $e^x > 6$ $x > \ln(6) \quad \Rightarrow \quad A = \ln 6$ أو أي عدد حقيقي أكبر منه	3
40	**المجموع**	

……………………………………………………………………

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق: $f(x) = \tan x - \frac{1}{x}$

- **ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها وأثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$**

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ $\boxed{x = 0}$ مقارب شاقولي $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0 - \frac{1}{0^+} = -\infty$ $\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ مقارب شاقولي $\quad \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} f(x) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$	5 5
2	$f'(x) = 1 + \tan^2 x + \frac{1}{x^2} > 0$ $\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & \alpha & \frac{\pi}{2} \\ \hline f'(x) & \| & + & \| \\ \hline f(x) & \| -\infty & \nearrow 0 \nearrow & +\infty \| \end{array}$	5 5
3	f مستمر ومتزايد تماماً على $\left\{ \begin{array}{l} I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 0 \in f(I) =]-\infty, +\infty[\end{array} \right.$ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في I هو α	10
4	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{4}{\pi} < 0$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty > 0$ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) < 0 \implies \alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$	10
	المجموع	**40**

....

السؤال السادس: ليكن f تابعاً معرفاً على R ومن أجل كل x من R تتحقق المتراجحة الآتية: $1 \leq f(x) \leq 2$

ولنعرف التابع g على المجال $]-\infty, 0[$ وفق العلاقة: $g(x) = \frac{2f(x)+1}{x}$

1) أثبت أنه أياً تكن $x \in]-\infty, 0[$ كان $\frac{5}{x} \leq g(x) \leq \frac{3}{x}$

2) أوجد نهاية التابع g عند $-\infty$ وعند الصفر.

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$1 \leq f(x) \leq 2$ $2 \leq 2f(x) \leq 4$ $3 \leq 2f(x) + 1 \leq 5$ $\frac{3}{x} \geq \frac{2f(x)+1}{x} \geq \frac{5}{x} \quad ; (\div\, x < 0 \ : \ x \in]-\infty, 0[\,)$ $\frac{3}{x} \geq g(x) \geq \frac{5}{x}$ $\frac{5}{x} \leq g(x) \leq \frac{3}{x}$	5 5 5 5

2	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0 \xRightarrow{\text{مبرهنة الاحاطة ①}} \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$	10
3	$\left.\begin{matrix} g(x)\le\frac{3}{x} \\ \lim\limits_{x\to0^-}\frac{3}{x}=-\infty\end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{مبرهنة الاحاطة ③}} \lim\limits_{x\to0^-}g(x)=-\infty$	10
	المجموع	**40**

....

ثانياً) حل التمارين الثلاثة الآتية: (60 درجة للتمرين الأول، 80 درجة للتمرين الثاني، 70 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ حسابية فيها: $u_2=8\ ,\ u_5=17$

1) اكتب u_n بدلالة n

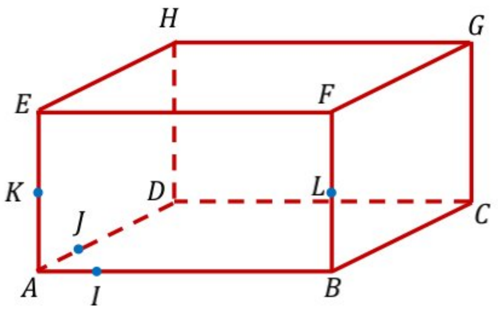
2) أثبت أن $u_0+u_1+\dots\dots\dots+u_7=100$

3) بفرض المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق: $v_n=e^{u_n}$ أثبت أنها هندسية وأوجد حدها العام.

4) احسب المجموع: $S_n=v_1+v_2+\dots\dots+v_n$ ، استنتج أن $\frac{e^5}{1-e^3}$ عنصر راجح على S_n

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$u_n=u_m+(n-m)r$ $u_5=u_2+(5-2).r$ $17=8+3r$ $9=3r\Rightarrow\boxed{r=3}$ $u_n=u_2+(n-2)(3)=8+3n-6$ $\boxed{u_n=2+3n}$	5 5 5 5
2	$L_1=u_0+u_1+\dots\dots\dots+u_7$ $=(8)\left(\frac{u_0+u_7}{2}\right)=(4)(23+2)$ $=4(25)=100=L_2$ $u_0=2$ $u_7=23$	10
3	$v_n=e^{u_n}\Rightarrow v_n=e^{2+3n}\Rightarrow\boxed{v_n=e^{3n}.e^2}$ $v_n=e^{u_n}$ $v_{n+1}=e^{u_n+1}=e^{3n+3}.e^2=e^{3n}.e^5$ $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{e^{3n}.e^5}{e^{3n}.e^2}=e^3=$ ثابت هندسية أساسها $q=e^3$.	10
4	$\left.\begin{matrix} v_n=v_0.q^n \\ v_0=e^{u_0}=e^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow v_n=e^2(e^3)^n\Rightarrow\boxed{v_n=e^2.e^{3n}}$	10
5	$S_n=v_1+v_2+\dots\dots+v_n$ $=(v_1).\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=e^5\left(\frac{1-(e^3)^n}{1-e^3}\right)=\frac{e^5}{1-e^3}[1-e^{3n}]$	5 5
6	$S_n=\frac{e^5}{1-e^3}-\underbrace{\frac{e^5}{1-e^3}\times e^{3n}}_{\text{سالب يهمل}}$ $S_n\le\frac{e^5}{1-e^3}$ إذاً $\frac{e^5}{1-e^3}$ عنصر راجح على S_n	
	المجموع	**60**

....



التمرين الثاني: $ABCDEFGH$ **متوازي مستطيلات فيه**

$AB = 6$, $AD = 4$, $AE = 2$ **والنقاط** I , J , K , L

تحقق: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{BL} = \frac{5}{9}\overrightarrow{BF}$

ولنختر معلماً متجانساً $\left(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$**:**

1) أوجد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات

وإحداثيات النقاط: I , J , K , L **في المعلم المعطى**

2) أثبت أن النقاط I , J , L , G **تقع في مستو واحد.**

3) اكتب معادلة للمخروط الناتج عن دوران الضلع $[AH]$ **المثلث القائم** AHE **حول** (AE) **دورة كاملة.**

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$A(0,0,0) , B(6,0,0) , C(6,4,0) , D(0,4,0) ,\ \ E(0,0,2) , F(6,0,2)$ $G(6,4,2) , H(0,4,2) ,\ \ I(1,0,0) ,\ \ J(0,1,0) ,\ \ K(0,0,1)$	20
2	بفرض $L(x,y,z)$ $\overrightarrow{BL} = \frac{5}{9}\overrightarrow{BF}$ $\begin{pmatrix} x-6 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{5}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x-6 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = \frac{10}{9} \end{cases} \Rightarrow L\left(6,0,\frac{10}{9}\right)$	5
3	$\overrightarrow{IG}(5,4,2)\quad , \quad \overrightarrow{IJ}(-1,1,0)\quad , \quad \overrightarrow{IL}\left(5,0,\frac{10}{9}\right)$ $\frac{5}{-1} \neq \frac{4}{1} \Rightarrow$ غير مرتبطين خطياً $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IG}$	5
4	حتى تقع النقاط I , J , G , L في مستو واحد يجب أن تكون الأشعة $\overrightarrow{IG} , \overrightarrow{IJ} , \overrightarrow{IL}$ مرتبطة خطياً لنبحث عن عددين حقيقيين α , β يحققان: $\overrightarrow{IL} = \alpha\overrightarrow{IG} + \beta\overrightarrow{IJ}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\alpha - \beta \\ 4\alpha + \beta \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 5\alpha - \beta = 5 & ① \\ 4\alpha + \beta = 0 & ② \\ 2\alpha = \frac{10}{9} & ③ \end{cases} \xrightarrow{\text{من } ③} \boxed{\alpha = \frac{5}{9}} \xrightarrow{\text{نعوض في } ②} \boxed{\beta = \frac{-20}{9}}$ نتحقق بالتعويض في ①: $\frac{45}{9} = 5$ محققة $\Rightarrow \overrightarrow{IL} = \frac{5}{9}\overrightarrow{IG} - \frac{20}{9}\overrightarrow{IJ}$ فالأشعة $\overrightarrow{IL} , \overrightarrow{IG} , \overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطياً فالنقاط I , J , G , L تقع في مستو واحد..	5 5 5 5 10

5	$x^2+y^2-\frac{r^2}{h^2}Z^2=0 \quad ;0\le Z\le 2 \ : \ \begin{matrix} r=EH=4 \\ h=AE=2 \end{matrix}$ $x^2+y^2-\frac{16}{4}Z^2=0$ $x^2+y^2-4Z^2=0 \quad ;0\le Z\le 2$	20
	المجموع	**80**

....

التمرين الثالث: لتكن مجموعة التوابع المعرفة على R^* وفق العلاقة: $a,b\in R : f(x)=ax+\frac{b}{x^3}$

1) عين b, a لكي يقبل f قيمة محلية صغرى تساوي 4 عندما $x=1$

2) من أجل $b=1, a=3$ أثبت أن $\Delta: y=3x$ مقارب لـ C وادرس الوضع النسبي.

3) أوجد تابع أصلي للتابع f على المجال $]0,+\infty[$

<table>
<tr><th>رقم الخطوة</th><th>الخطوة</th><th>الدرجة</th></tr>
<tr><td>1</td><td>f معرف واشتقاقي على R^*
$f'(x)=a-\frac{3bx^2}{x^6}$
$f'(1)=0$
$\boxed{a-3b=0}$ ①
$f(1)=4$
$\boxed{a+b=4}$ ②
$-4b=-4$ بطرح ② من ①:
$\boxed{b=1} \Rightarrow \boxed{a=3}$
$f(x)=3x+\frac{1}{x^3}$</td><td>10
10
5+5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$f(x)-y_\Delta=3x+\frac{1}{x^3}-3x=\frac{1}{x^3}$
$\left.\begin{matrix}\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0\\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\Delta: \ y=x$ مقارب مائل للخط C بجوار $\pm\infty$</td><td>15</td></tr>
<tr><td>3</td><td>الوضع النسبي: $f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x^3}$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)-y_\Delta$</td><td>$-$</td><td></td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>الوضع النسبي</td><td>C تحت Δ</td><td></td><td>C فوق Δ</td></tr>
</table></td><td>10</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$f(x)=3x+\frac{1}{x^3}=3x+x^{-3}$
$F(x)=\frac{3x^2}{2}+\frac{x^{-2}}{-2}=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}$</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>المجموع</td><td>70</td></tr>
</table>

....

ثالثاً) حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن لدينا مجموعة الأعداد العقدية كثيرة الحدود $P(Z)$ حيث:

$$P(Z) = Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 72$$

1) تحقق أن $Z = 6$ هو أحد جذور كثير الحدود $P(Z)$

2) جد العددين الحقيقين a , b بحيث تكون $P(Z) = (Z-6)(Z^2 + aZ + b)$

3) حل في C المعادلة $P(Z) = 0$

4) بفرض A , B , C نقاط في المستوي العقدي $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ تمثل الأعداد العقدية

$$Z_C = 3 - \sqrt{3}i \quad , \quad Z_B = 3 + \sqrt{3}i \quad , \quad Z_A = 6$$

اكتب $w = \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي ، واستنتج طبيعة المثلث ABC

5) أوجد B' صورة النقطة B وفق تحاكي مركزه C نسبته $\sqrt{3}$

6) بفرض النقطتان $Z_{B'} = 3 + \left(6 - \sqrt{3}\right)i$, $Z_{A'} = 3 - \sqrt{3} + \left(3 - \sqrt{3}\right)i$

ما العلاقات التي تربط الأعداد العقدية الممثلة للشعاعين $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AB}$

واستنتج أن $AB \perp A'B'$ وأن $AB = A'B'$

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$P(6) = 216 - 432 + 288 - 72 = 0$ ومنه $Z = 6$ هو أحد جذور كثير الحدود $P(Z)$	5
2	من الطلب السابق نستنتج أن $P(Z)$ يقبل القسمة على $(Z-6)$ $$\begin{array}{r\|l} Z-6 & Z^2 - 6Z + 12 \\ \hline & Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 72 \\ & \underline{Z^3 - 6Z^2} \\ & -6Z^2 + 48Z - 72 \\ & \underline{-6Z^2 + 36Z} \\ & 12Z - 72 \\ & \underline{12Z - 72} \\ & 0 \end{array}$$ $P(Z) = (Z-6)(Z^2 - 6Z + 12)$ بالمقارنة مع: $P(Z) = (Z-6)(Z^2 + aZ + b)$ نجد: $\boxed{a = -6}$, $\boxed{b = 12}$	10
3	$P(Z) = 0 \Rightarrow (Z-6)(Z^2 - 6Z + 12) = 0$ إما $Z - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{Z = 6}$ أو $Z^2 - 6Z + 12 = 0$ $\Delta = 36 - 4(1)(12) = 36 - 48 = -12 < 0$ للمعادلة جذران عقديان مترافقان: $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ $Z_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \boxed{Z = 3 + \sqrt{3}i}$ $Z_2 = \frac{6 - 2\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \boxed{Z = 3 - \sqrt{3}i}$	25

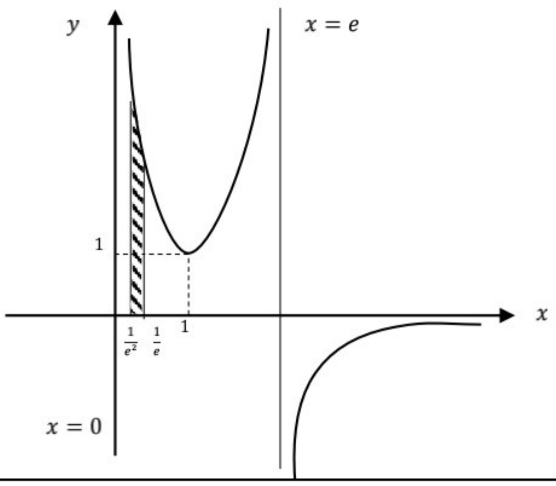
4	$Z_A = 6 \qquad Z_B = 3+\sqrt{3}i \qquad Z_C = 3-\sqrt{3}i$ $W = \dfrac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = \dfrac{6-3-\sqrt{3}i}{6-3+\sqrt{3}i} = \dfrac{3-\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}$ $= \dfrac{\left(3-\sqrt{3}i\right)^2}{9+3} = \dfrac{9-6\sqrt{3}i-3}{12} = \dfrac{6-6\sqrt{3}i}{12}$ الشكل الجبري : $\boxed{W = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i}$	5 5
5	$r = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = 1$ $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{-\pi}{3} \quad \Rightarrow \boxed{W = e^{\frac{-\pi}{3}i}}$: الشكل الأسي	5 5
6	ومنه $\dfrac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = e^{\frac{-\pi}{3}i}$ $Z_A - Z_B = e^{\frac{-\pi}{3}i}(Z_A - Z_C)$ $Z_B - Z_A = e^{\frac{-\pi}{3}i}(Z_C - Z_A)$ B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ $\Longleftarrow$ ومنه المثلث متساوي الأضلاع	10
7	قانون التحاكي: $Z_{B'} - Z_C = k(Z_B - Z_C)$ $Z_{B'} - 3 + \sqrt{3}\,i = \sqrt{3}\left(3+\sqrt{3}i-3+\sqrt{3}i\right)$ $Z_{B'} - 3 + \sqrt{3}\,i = \sqrt{3}\left(2\sqrt{3}i\right)$ $Z_{B'} = 3 - \sqrt{3}i + 6i$ $\boxed{Z_{B'} = 3 + \left(6-\sqrt{3}\right)i}$	10
8	$Z_{\overrightarrow{A'B'}} = Z_{B'} - Z_{A'} = 3+6i-\sqrt{3}i-3+\sqrt{3}-3i+\sqrt{3}i$ $\boxed{Z_{\overrightarrow{A'B'}} = \sqrt{3}+3i}$ $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = 3+\sqrt{3}i-6 = -3+\sqrt{3}i \Rightarrow \boxed{Z_{\overrightarrow{AB}} = -3+\sqrt{3}i}$	10
9	نلاحظ أن $Z_{\overrightarrow{AB}} = i\,Z_{\overrightarrow{A'B'}}$ $Z_{\overrightarrow{AB}} = i\,Z_{\overrightarrow{A'B'}} \Rightarrow \dfrac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{A'B'}}} = i$ طويلة $\left\lvert\dfrac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{A'B'}}}\right\rvert = \lvert i\rvert = 1$ $\boxed{AB = A'B'}$ زاوية $\arg\left(\dfrac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{A'B'}}}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ $AB \perp A'B'$	10
	المجموع	**100**

....

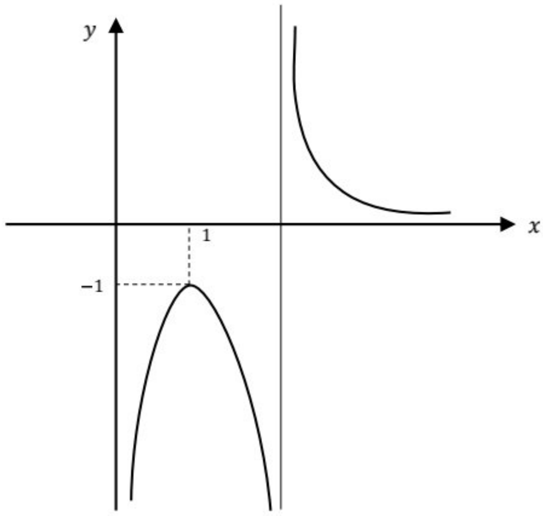
المسألة الثانية: C **الخط البياني للتابع المعرف على** $]0,e[\cup]e,+\infty[$ **وفق:**

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

1) **ادرس تغيرات** f **ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط** C **من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين وعيّن قيمته الحدية وبيّن نوعها**
2) **ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم ارسم** C
3) **احسب مساحة السطح المحصور بين** C **ومحور الفواصل والمستقيمين** $x=\frac{1}{e^2}$, $x=\frac{1}{e}$
4) **بفرض التابع** $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}$ **المعرف على المجال** $]1,+\infty[$ **استنتج التابع المشتق للتابع** g
5) **استنتج رسم الخط البياني** C_1 **للتابع** $f_1(x)=\frac{1}{x(\ln x-1)}$

<table>
<tr><th>رقم الخطوة</th><th>الخطوة</th><th>الدرجة</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
f معرف واشتقاقي على $]0,e[\cup]e,+\infty[$
$\lim\limits_{x\to0}f(x)=?$ عدم تعيين $0\,.\,\infty$
$f(x)=\dfrac{1}{x-x\ln x}$
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=+\infty$ $\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي منطبق على yy' بجوار $+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to e\\<}}f(x)=+\infty$ $\boxed{x=e}$ مقارب شاقولي يوازي yy' بجوار $+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to e\\>}}f(x)=-\infty$ $\boxed{x=e}$ مقارب شاقولي يوازي yy' بجوار $-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ $\boxed{y=0}$ مقارب أفقي منطبق على xx' بجوار $+\infty$
</td><td>5
5
5
5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
$f'(x)=\dfrac{-\left(1-\ln x-\frac{1}{x}\,.\,x\right)}{x^2(1-\ln x)^2}=\dfrac{-1+\ln x+1}{x^2(1-\ln x)^2}=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$
$f'(x)=0\Rightarrow\ln x=0$
$\boxed{x=1}\ :\ f(1)=1$
</td><td>15</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>e</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>||</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>||</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>||</td><td>$+\infty\searrow$</td><td>1</td><td>$\nearrow+\infty$</td><td>||</td><td>$-\infty\nearrow$</td><td>0</td></tr>
</table>
$f(1)=1$ قيمة صغرى محلية
</td><td>15</td></tr>
<tr><td>4</td><td>


</td><td>10</td></tr>
</table>

5	$S=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,.dx=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{-\left(-\frac{1}{x}\right)}{1-\ln x}\,dx$ $=\left[-\ln\lvert 1-\ln x\rvert\right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}=\left[-\ln(1-\ln x)\ \right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$ $=-\left[\ln\left(1-\ln\frac{1}{e}\right)-\ln\left(1-\ln\frac{1}{e^2}\right)\right]$ $S=-[\ln 2-\ln 3]=-\ln 2+\ln 3$	20
	$g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$ $g'(x)=f'\left(\sqrt{x}\right)\times\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{\ln\sqrt{x}}{x\left(1-\ln\sqrt{x}\right)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$	10
	$f_1(x)=-f(x)$ ، C_1 نظير C بالنسبة لـ xx'  	10
	المجموع	**100**

....

انتهت الأسئلة