معهد واحة النور

حلب - دير جمال

اختبار تطبيقات عقدية

الرياضيات

الثالث الثانوي العلمي

الاسم:

الدرجة: ٦٠

المدة: ساعة ونصف فقط

التاريخ: ١٣-٤-٢٠١٩

---

[1] نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A، B، C التي تمثل الأعداد العقدية:

$a=-1+i$ ، $b=3+i$ ، $c=1-i$

① مثّل هذه النقاط في ذلك المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

② أثبت أن المثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قائم في $\hat{C}$ ومتساوي الساقين.

③ أوجد a' الذي يمثل النقطة A' صورة A وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{CB}$.

④ أوجد b' الذي يمثل النقطة B' صورة B وفق تحاكٍ مركزه (C) ونسبته (-3).

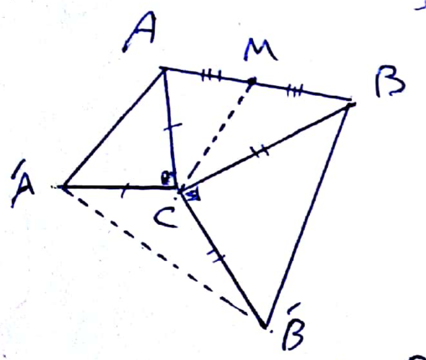
⑤ نقرن بكل نقطة $M_{(z)}$ النقطة $M'_{(z')}$ حيث: $(z'-1+i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-1+i)$

- ما التحويل الهندسي الموافق؟
- أوجد J' صورة J منتصف CB وفق هذا التحويل؟ واستنتج نوع المثلث $\overset{\triangle}{CJ'J}$ ؟

---

[2] في الشكل المجاور. $\overset{\triangle}{ABC}$ مثلث فيه CM خط متوسط

$\overset{\triangle}{AB'B}$ ، $\overset{\triangle}{ACA'}$ مثلثات قائمة ومتساوية الساقين.



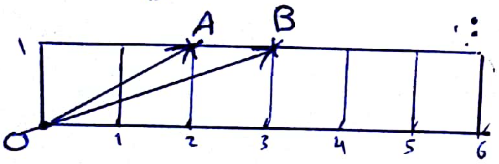
احسب: ① الزاوية $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$

② النسبة $\frac{CM}{A'B'} = ?$

---

[3] في الشكل المجاور تأمل الشكل واحسب: $\alpha+\beta$

$\alpha=(\overrightarrow{Ou},\overrightarrow{OA})$ ، $\beta=(\overrightarrow{Ou},\overrightarrow{OB})$



---

[4] في معلم متجانس بالمستوي $(O,\vec{u},\vec{v})$ نقرن بكل نقطة $M_{(z)}$ بشرط $z\neq 2i$ النقطة $M'_{(z')}$؛

$z'=\frac{z-4}{z+2i}$ والمطلوب: ① عيّن L مجموعة النقاط M التي تجعل z' حقيقي.

② عيّن Δ مجموعة النقاط M التي تجعل z' تخيلي بحت.

انتهت الأسئلة

دعائي لكم :)

مدرس المادة:

أ. عدنان كيفو

١٣-٤-٢٠١٩

أ. عدنان كبوه

الموضوع : حل اختبار تطبيقات كعقدية التاريخ ١٤/٤/٢٠١٩

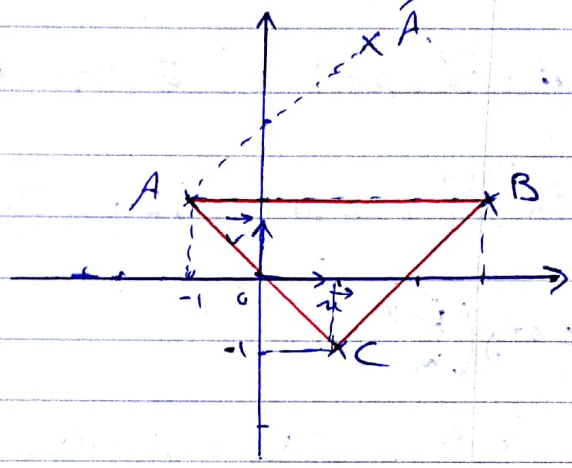
[1]

$a = -1+i$

$b = 3+i$

$c = 1-i$

① التمثيل في معلم $(o, \vec{u}, \vec{v})$



② إثبات أن المثلث $A\hat{B}C$ قائم ومتساوي الساقين

يجب أن نثبت أن

$(\widehat{\vec{CB}, \vec{CA}}) = \pm\frac{\pi}{2}$?

$(\vec{CB}, \vec{CA}) = \arg(a-c) - \arg(b-c)$

$= \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right)$

معناه نوجد العدد العقدي $\frac{a-c}{b-c}$

$a-c = -1+i-1+i = -2+2i$

$b-c = 3+i-1+i = 2+2i$

ومنه $\frac{a-c}{b-c} = \frac{-2+2i}{2+2i} = \frac{-1+i}{1+i}$

نضرب ونقسم بمرافق المقام

$\frac{a-c}{b-c} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1+i+i-i^2}{2}$

$\frac{a-c}{b-c} = \frac{-1+2i+1}{2} = \frac{2i}{2} = i$

$(\widehat{\vec{CB}, \vec{CA}}) = \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) = \arg(i) = +\frac{\pi}{2}$ ومنه

إذاً المثلث $A\hat{B}C$ قائم الزاوية في $\hat{C}$

$\left|\frac{a-c}{b-c}\right| = \frac{|a-c|}{|b-c|} = \frac{\|\vec{CA}\|}{\|\vec{CB}\|} = 1$

$\Rightarrow \frac{CA}{CB} = 1 \Rightarrow CA = CB$

إذاً المثلث $A\hat{B}C$ متساوي الساقين أيضاً.

③ A' صورة A وفق انسحاب شعاعه $\vec{CB}$

حتى تكون A' صورة A وفق هذا الانسحاب يجب أن تحقق العلاقة الشعاعية

$\vec{AA'} = \vec{CB}$

ومنه $a' - a = b - c$

$a' = b - c + a$

$a' = 3+i-1+i-1+i$

$\boxed{a' = 1+3i}$

④ حتى تكون B' صورة B وفق تحاكي مركزه C ونسبته -3 يجب أن تحقق العلاقة الشعاعية

$\vec{CB'} = -3\vec{CB}$

$b' - c = -3(b-c)$

$b' = -3b + 3c + c$

$b' = -3b + 4c$

$b' = -3(3+i) + 4(1-i) = -5-7i$

أ. عدنان كنفو

الموضوع :   التاريخ   /   / ٢٠٠

5) $(\bar z - (1-i)) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-(1-i))$

بالمقارنة مع :

$(\bar z - w) = e^{i\theta}(z - w)$

اذاً نجد أن

$(\bar z - c) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - c)$

اذاً $\bar M$ هي صورة M وفق دوران مركزه النقطة (c) وزاويته $\theta = +\frac{\pi}{3}$

صورة J وفق هذا التحويل :

$z_J = \frac{c+b}{2} = \frac{1-i+3+i}{2} = \frac{4}{2} = 2$

ومنه $(z_{\bar J} - 1 + i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_J - 1 + i)$

$(z_{\bar J} - 1 + i) = [\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin\frac{\pi}{3}](2 - 1 + i)$

$(z_{\bar J} - 1 + i) = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt3}{2}i)(1+i)$

$(z_{\bar J} - 1 + i) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt3}{2}i - \frac{\sqrt3}{2})$

$(z_{\bar J} - 1 + i) = (\frac{1-\sqrt3}{2}) + \frac{1+\sqrt3}{2}i$

$z_{\bar J} = \frac{1-\sqrt3+2}{2} + \frac{1+\sqrt3-2}{2}i$

$\boxed{z_{\bar J} = \frac{3-\sqrt3}{2} + \frac{\sqrt3-1}{2}i}$

هو العدد العقدي الذي يمثل النقطة $\bar J$

بما أن $\bar J$ هي صورة J وفق دوران مركزه O(c) وزاويته $\frac{\pi}{3}$ فإن المثلث $CJ\bar J$ متساوي الأضلاع.

2) حساب زاوية $(\vec{CM}, \vec{AB})$ نلاحظ

$(\widehat{\vec{CM}, \vec{AB}}) = \arg(z_{\vec{AB}}) - \arg(z_{\vec{CM}})$

$= \arg\left(\frac{\bar b - \bar a}{m - c}\right)$

ونهدف إلى إيجاد العدد العقدي $\frac{\bar b - \bar a}{m - c}$

في معلم متجانس $(c; \vec u, \vec v)$ فيه c مبدأ المعلم ومنه b العدد العقدي يمثل B، a العدد العقدي يمثل A.

إيجاد $\bar b - \bar a = ?$

نلاحظ أن $\bar B$ هي صورة B وفق دوران مركزه O(c) وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ومنه

$(\bar b - c) = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b - c)$

$(\bar b - 0) = -i(b - 0)$

$\Rightarrow \boxed{\bar b = -ib}$

نلاحظ أن $\bar A$ صورة A وفق دوران مركزه O مركزه O(c) وزاويته $+\frac{\pi}{2}$. اذاً

$(\bar a - c) = +i(a - c)$

$\boxed{\bar a = ia}$

$\Rightarrow \boxed{\bar b - \bar a = -ib - ia}$

إيجاد ؟ = $m-c$

بما أن M منتصف AB إذاً

$$m = \frac{a+b}{2}$$

c مبدأ المعلم ومنه $c=0$

$$m-c = \frac{a+b}{2}$$

ومنه العدد العقدي

$$\frac{\bar{b}-\bar{a}}{m-c} = \frac{-ib-ia}{\frac{a+b}{2}} = \frac{-2i(b+a)}{a+b} = -2i$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{b}-\bar{a}}{m-c} = -2i$$

ومنه $(\vec{CM}, \widehat{\vec{AB}}) = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$

ومنه $\left|\frac{\bar{b}-\bar{a}}{m-c}\right| = |-2i| = +2$

$$\Rightarrow \frac{AB}{cm} = 2 \Rightarrow \boxed{AB = 2cm}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{cm}{AB} = \frac{1}{2}}$$ مطلوب ٤

$\boxed{3}$ حساب $? = \alpha+\beta$

ملاحظات

$\alpha = \arg(Z_{\vec{OA}}) = \arg(a)$

$\beta = \arg(Z_{\vec{OB}}) = \arg(b)$

ومنه $\alpha+\beta = \arg(a) + \arg(b)$

ومنه $\alpha+\beta = \arg(a\cdot b)$

إذاً لنحسب العدد العقدي $(a\cdot b)$.

من الشكل نلاحظ :

$a = 2+i$

$b = 3+i$

ومنه

$$(a\cdot b) = (2+i)(3+i)$$
$$= 6+2i+3i+i^2 = 6+5i-1 = 5+5i$$

إذاً :

$$\arg(a\cdot b) = \arg(5+5i)$$

$$5+5i = 5(1+i) = 5\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ومنه $\alpha+\beta = \arg(5+5i) = \frac{\pi}{4}$

$\boxed{4}$ $Z' = \frac{Z-4}{Z+2i}$ طريقة ثانية

نفرض $\boxed{Z = x+yi}$; $Z \neq -2i$

نعوض

$$Z' = \frac{x+yi-4}{x+yi+2i} = \frac{(x+yi-4)(x-yi-2i)}{(x+yi+2i)(x-yi-2i)}$$

$$Z' = \frac{x^2 - xyi - 2ix + yxi + y^2 + 2y - 4x + 4yi + 8i}{(x^2+(y+2)^2)}$$

$$Z' = \frac{x^2-4x+y^2+2y+i(-2x+4y+8)}{(x^2+(y+2)^2)}$$

ومنه

$$Z' = \frac{x^2-4x+y^2+2y}{(x^2+(y+2)^2)} + i\,\frac{4y-2x+8}{(x^2+(y+2)^2)}$$

$$Z' = X + iY$$

حتى يكون ح حقيقي عندما الجزء التخيلي معدوم منه

$$\frac{-2x+4y+8}{x^2+(y+2)^2}=0$$

$$\Rightarrow -2x+4y+8=0$$

$$\Rightarrow 4y=2x-8$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x-2}$$

وهي معادلة مستقيم عدا النقطة :

$A(0,-2)$ لأن $z\neq -2i$

يكون ح تخيلي عندما الجزء الحقيقي معدوم أي:

$$x^2-4x+y^2+2y=0$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4-4+y^2+2y+1-1=0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2-5=0$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=5$$

وهي معادلة دائرة مركزها $\omega(2,-1)$

وطول نصف قطرها $r=\sqrt{5}$

ومنه مجموعة النقاط Δ : هي الدائرة السابقة

محذوف منها النقطة التي تمثل العدد العقدي $-2i$

أي محذوف منها $A(0,-2)$

لأن محذوف منها $z\neq -2i$

$$x+yi\neq 0+(-2i)$$

إذاً عدا $A(0,-2)$.

انتهى الحل ... مدرس المادة : أ. عدنان كنجو

دعائكم

حلب - ديرجمال ١٤-٤-٢٠١٩م