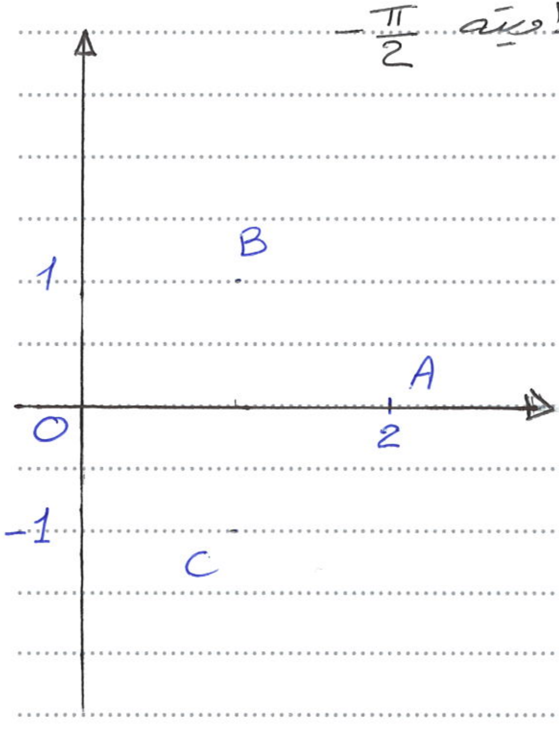
السؤال الأول

في المستوي العقدي المنسوب لمعلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ تأمل النقاط A, B, C صور الأعداد:

$z_A=2 \quad z_B=1+i \quad z_C=\overline{z_B}$

1. ضع النقاط A, B, C في المستوي واستنتج نوع الرباعي $ABOC$
2. استنتج مجموعة النقاط التي تمثل المعادلة العقدية $|z-z_B|=|z-z_C|$ واكتب المعادلة الديكارتية لها
3. أوجد $z_{B'}$ حيث B' صورة B وفق الدوران الذي مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{2}$



$b+c=2$

$a+o=2$

أقطار الرباعي متناصفة فهو متوازي أضلاع

$z_{\vec{BC}} = z_C - z_B = -2i$

$z_{\vec{OA}} = z_A - z_O = 2$

$$\frac{z_A - z_O}{z_C - z_B} = \frac{2}{-2i} = i$$

$$\left|\frac{z_A - z_O}{z_C - z_B}\right| = |i| = 1$$

أقطار الرباعي متناصفة متساوية متعامدة فهو مربع

2- مجموعة النقاط هي محور القطعة المستقيمة BC

بفرض $z = x+iy$

$|z - z_B| = |z - z_C|$

$|x+iy-1-i| = |x+iy-1+i|$

$|(x-1)+(y-1)i| = |(x-1)+(y+1)i|$

$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+1)^2$

$(y-1)^2 = (y+1)^2$

$y^2-2y+1 = y^2+2y+1$

$4y=0$

$\boxed{y=0}$

3- $z_{B'}-z_C = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_C)$

$z_{B'}-(1-i) = -i(1+i-1+i)$

$z_{B'}-1+i = -i(2i)$

$z_{B'} = 2+1-i$

$z_{B'} = 3-i$

السؤال الثاني

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$Z_C = -3 + 2\sqrt{3}i \quad Z_B = 3 + 2\sqrt{3}i$

$Z_A = -i\sqrt{3}$

1 - أوجد العدد العقدي D صورة B وفق تحاكٍ مركزه A ونسبته 2

2 - أوجد العدد العقدي G مركز ثقل المثلث ABC

3 - أوجد العدد العقدي F صورة C وفق تناظر مركزه A.

4 - أوجد العدد العقدي L صورة C وفق تناظر محوره OY

5 - أوجد العدد $\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$

ثم احسب $\left|\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right|$ واستنتج طبيعة المثلث ABC.

1- $Z_D - Z_A = 2(Z_B - Z_A)$

$Z_D + i\sqrt{3} = 2(3 + 2\sqrt{3}i + i\sqrt{3})$

$Z_D + i\sqrt{3} = 2(3 + 3\sqrt{3}i)$

$Z_D + i\sqrt{3} = 6 + 6\sqrt{3}i$

$Z_D = 6 + 5\sqrt{3}i$

2- $Z_G = \dfrac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$

$= \dfrac{-i\sqrt{3} - 3 + 2\sqrt{3}i + 3 + 2\sqrt{3}i}{3}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}i}{3} = \sqrt{3}i$

$Z_G = \sqrt{3}i$

3- $Z_F - Z_A = e^{i\pi}(Z_C - Z_A)$

$Z_F + \sqrt{3}i = -(-3 + 2\sqrt{3}i + \sqrt{3}i)$

$Z_F = 3 - 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i$

$Z_F = 3 - 4\sqrt{3}i$

4- $Z_L = 3 + 2\sqrt{3}i = Z_B$

5- $\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \dfrac{3 + 2\sqrt{3}i + \sqrt{3}i}{-3 + 2\sqrt{3}i + \sqrt{3}i}$

$= \dfrac{3 + 3\sqrt{3}i}{-3 + 3\sqrt{3}i} = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{-1 + \sqrt{3}i}$

$= \dfrac{(1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i)}{1 + 3}$

$= \dfrac{-(1 + \sqrt{3}i)^2}{4} = \dfrac{-(1 + 2\sqrt{3}i - 3)}{4}$

$= \dfrac{-(-2 + 2\sqrt{3}i)}{4} = \dfrac{2 - 2\sqrt{3}i}{4}$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$$

$$|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$$

$$AB = AC$$

مثلث متساوي الساقين

فيه $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$

فهو مثلث متساوي الأضلاع

السؤال الثالث

ABC مثلث متساوي الساقين

مباشر التوجيه، ننشئ خارجه

مربعين $ABMN$ ، $ACEF$

نفرض $(A, \vec{u}, \vec{v})$ معلماً متجانساً

ونرمز للأعداد العقدية m, n, e, f

a, b, c التي تمثل النقاط

A, B, C, M, N, E, F

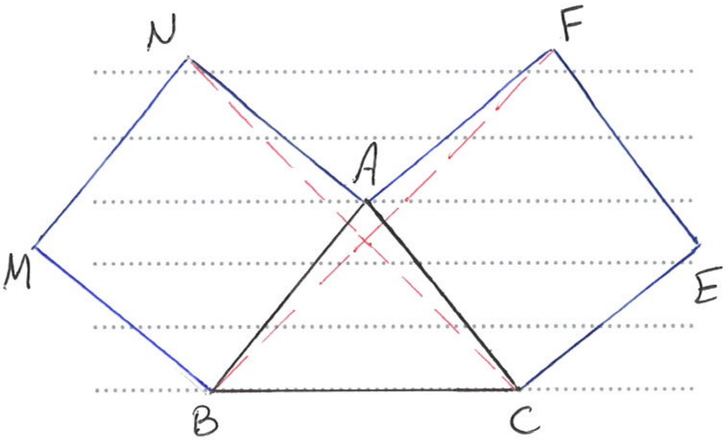
والمطلوب:

1- أثبت أن $f = ic$

$n = -ib$

2- استنتج أن المستقيمين CN و BF متعامدين وأن $BF = CN$

3- بفرض A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(N,1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(F,1)$ استنتج النسبة $\frac{c}{b}$



N صورة B وفق دوران مركزه A

وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$n - a = -i(b - a)$$

$$n = -ib$$

F صورة C وفق دوران مركزه A

وزاويته $+\frac{\pi}{2}$

$$f - a = i(c - a)$$

$$f = ic$$

2- $\dfrac{n - c}{f - b} = \dfrac{-ib - c}{ic - b}$

$$= \frac{-i(b - ic)}{-(b - ic)} = i$$

$$\arg\left(\frac{n - c}{f - b}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\left|\frac{n - c}{f - b}\right| = |i| = 1$$

$\Rightarrow CN = BF$

ومنه CN و BF متعامدان

و $CN = BF$

3 ـ بما أن A مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة

$(F,1)$ $(C,2)$ $(B,2)$ $(N,1)$

$$z_A = \frac{z_F + 2z_C + 2z_B + z_N}{6}$$

$$0 = \frac{z_F + 2z_C + 2z_B + z_N}{6}$$

$$\Rightarrow z_F + 2z_C + 2z_B + z_N = 0$$

$f + 2c + 2b + n = 0$

$ic + 2c + 2b - ib = 0$

$c(2+i) + b(2-i) = 0$

$c(2+i) = -b(2-i)$

$$\frac{c}{b} = \frac{-2+i}{2+i}$$

$$= \frac{(-2+i)(2-i)}{4+1}$$

$$= \frac{-4+2i+2i+1}{5}$$

$$= \frac{-3}{5} + \frac{4}{5}i$$

السؤال الخامس

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقطتين A, B اللتين يمثلهما على الترتيب العددان العقديان:

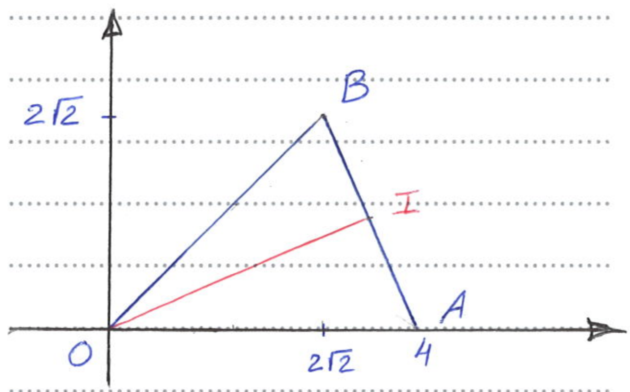
$a = 4$ $\quad b = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

ولتكن I منتصف AB، المطلوب:

1 ـ مثل النقطتين A, B في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ واكتب العدد العقدي b بالشكل الأسي

2 ـ بين طبيعة المثلث OAB وأثبت أن قياس الزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{\pi}{8}$

3 ـ اكتب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بالصيغة الجبرية والأسية واستنتج $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$



$b = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

$= 2\sqrt{2}(1+i)$

$= 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2 ـ $|z_{\overrightarrow{OB}}| = |b| = 4$

$|z_{\overrightarrow{OA}}| = |a| = 4$

المثلث متساوي الساقين

بما أن I منتصف AB فإن OI متوسط في مثلث متساوي الساقين فهو منصف للزاوية $A\hat{O}B$

$$\to (\vec{U}, \vec{OI}) = \frac{1}{2} A\hat{O}B$$

$$(\vec{U}, \vec{OI}) = \frac{\pi}{8}$$

3- $$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i}{2}$$

$$z_I = 2+\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$$

$$|z_I| = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{4+4\sqrt{2}+2+2}$$

$$= \sqrt{8+4\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{4(2+\sqrt{2})} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$$

بمقارنة الشكل الجبري والأسي

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}})}{2(2+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}{4+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$