السؤال الأول:

1- اكتب العدد

$$Z = \frac{3-6i}{5-i} + \frac{6}{5+i}$$

بالشكل الجبري

2- أوجد $Z = (1-i)^8$

بالشكل الجبري

$$1-\ Z = \frac{(3-6i)(5+i)+6(5-i)}{(5-i)(5+i)}$$

$$= \frac{15+3i-30i+6+30-6i}{25+1}$$

$$= \frac{51-33i}{26} = \frac{51}{26} - \frac{33}{26}i$$

$$2-\ Z = (1-i)^8 = ((1-i)^2)^4$$

$$= (1-2i-1)^4$$

$$= (-2i)^4 = ((-2i)^2)^2$$

$$= (-4)^2 = 16$$

السؤال الثاني

حل المعادلة

$$Z^2 + 2Z + 5 = 0$$

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(5) = 4-20$$

$$= -16 = 16i^2$$

$$Z_1 = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$$

$$Z_2 = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i$$

السؤال الثالث

1- ليكن $z = a+ib$ ، حل المعادلة:

$$3iz - \bar{z} = 5+i$$

2- عين العددين المركبين Z_1 و Z_2

حيث:

$$\begin{cases} 2Z_1 - Z_2 = -3 \\ 2\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = -3+2\sqrt{3}i \end{cases}$$

1- نعوض $z = a+ib$ في المعادلة

$$3i(a+ib) - (a-ib) = 5+i$$

$$3ai - 3b - a + ib = 5+i$$

$$-3b - a + (3a+b)i = 5+i$$

بالمطابقة:

$$-3b - a = 5 \quad \dots ①$$

$$3a + b = 1 \quad \dots ②$$

من ①

$$a = -3b-5$$

نعوض في ②

$$3(-3b-5) + b = 1$$

$$-9b - 15 + b = 1$$

$$-8b = 16$$

$$\boxed{b = -2}$$

$$a = 6-5 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$Z = 1-2i$$

2- نأخذ مرافق المعادلة الأولى

$2\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = -3 \rightarrow \bar{z}_2 = 2\bar{z}_1 + 3$

نعوض في المعادلة الثانية

$2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3 + 2\sqrt{3}i$

$2\bar{z}_1 + 2\bar{z}_1 + 3 = -3 + 2\sqrt{3}i$

$4\bar{z}_1 = -6 + 2\sqrt{3}i$

$\bar{z}_1 = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

نعوض في المعادلة الأولى

$2z_1 - z_2 = -3$

$2(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) - z_2 = -3$

$-3 - \sqrt{3}i - z_2 = -3$

$z_2 = -\sqrt{3}i$

السؤال الرابع

التمرين الأول

ليكن لدينا العدد العقدي

$w = 5 + 12i$

1- حل المعادلة $z^2 = w$

2- استنتج حلول المعادلة:

$z^2 + (1+4i)z - 5 - i = 0$

1- $x^2 + y^2 = \sqrt{25+144} = 13$ ...1

$x^2 - y^2 = 5$ ...2

$2xy = 12 \rightarrow xy = 6$ ...3

بجمع 1 و 2

$2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$

نعوض في 3

$x_1 = 3 \rightarrow y_1 = 2 \rightarrow z_1 = 3 + 2i$

$x_2 = -3 \rightarrow y_2 = -2 \rightarrow z_2 = -3 - 2i$

2- $\Delta = (1+4i)^2 - 4(1)(-5-i)$

$= 1 + 8i - 16 + 20 + 4i$

$= 5 + 12i$

$\sqrt{\Delta_1} = 3 + 2i$

$\sqrt{\Delta_2} = -3 - 2i$

ومنه حلول المعادلة:

$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_1}}{2a} = \frac{-1 - 4i + 3 + 2i}{2}$

$= \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$

$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_2}}{2a} = \frac{-1 - 4i - 3 - 2i}{2}$

$= \frac{-4 - 6i}{2} = -2 - 3i$

التمرين الثاني

ليكن كثير الحدود

$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

1- احسب $P(-i)$

2- علل وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يحقق:

$z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = (z+1)Q(z)$

عيّن Q ثم حل المعادلة $Q(z)=0$

3- لتكن A ، B ، C نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة تمثل النقاط في المستوي المركب .

4- أثبت أن ABC مثلث متساوي الأضلاع

(حيث $\sqrt{2} \simeq 1.4$ $\quad \sqrt{3} \simeq 1.7$)

1- $P(-i) = (-i)^3 - 3(-i)^2 + 3(-i) + 7$

$= +i + 3 - 3i + 7 = 10 - 2i$

2- إن $P(-1) = 0$ وبالتالي

$P(z) = (z+1)\,Q(z)$

وبما أن $P(z)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة فإن $Q(z)$ كثير حدود من الدرجة الثانية

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^2 - 4z + 7 \\
\hline
z+1 & z^3 - 3z^2 + 3z + 7 \\
 & \underline{z^3 + z^2} \\
 & -4z^2 + 3z + 7 \\
 & \underline{-4z^2 - 4z} \\
 & 7z + 7 \\
 & \underline{7z + 7} \\
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

$P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$

$Q(z) = z^2 - 4z + 7$

$Q(z) = 0$

$z^2 - 4z + 7 = 0$

$\Delta = 16 - 4(1)(7) = 16 - 28 = -12$

$= 12i^2$

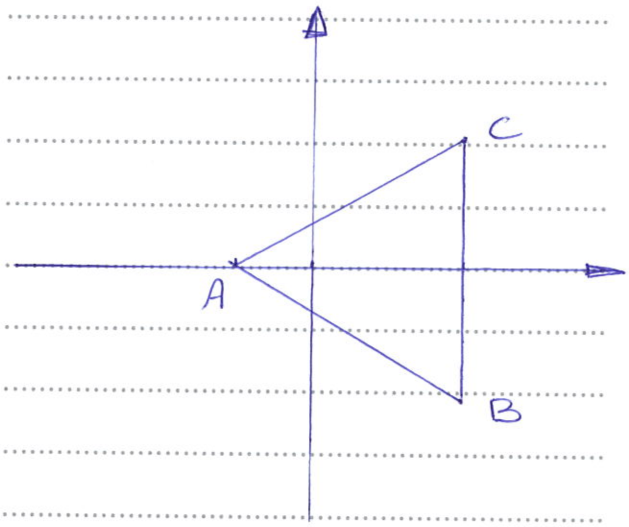
$z_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}i}{2} = 2 + \sqrt{3}i$

$z_2 = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}i}{2} = 2 - \sqrt{3}i$

3- $z_A = -1 \qquad A(-1, 0)$

$z_B = 2 - \sqrt{3}i \qquad B(2, -\sqrt{3})$

$z_C = 2 + \sqrt{3}i \qquad C(2, \sqrt{3})$



$AB = \sqrt{(3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{(3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

$BC = \sqrt{(0)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

$AB = AC = BC$

المثلث متساوي الأضلاع

السؤال الخامس

ليكن العدد المعقدي $z_A = -1+i$

وليكن

$P(z) = z^2 + (1+2i)z + 3 + 3i$

أثبت أن z_A حل للمعادلة $P(z) = 0$

واستنتج الحل الآخر

$P(z_A) = (-1+i)^2 + (1+2i)(-1+i) + 3 + 3i$

$= 1 - 2i - 1 + (-1 + i - 2i - 2) + 3 + 3i$

$= -2i - 3 - i + 3 + 3i$

$= 0$

ومنه z_A حل للمعادلة $P(z) = 0$

بفرض الحل الآخر z_B:

$z_A + z_B = -\frac{b}{a}$

$-1 + i + z_B = \frac{-1-2i}{1}$

$\Rightarrow z_B = -3i$

طريقة ثانية

$$
\begin{array}{r|l}
 & z + 3i \\
\hline
z + 1 - i & z^2 + z + 2iz + 3 + 3i \\
 & \underline{z^2 + z - iz} \\
 & 3iz + 3 + 3i \\
 & \underline{3iz + 3 + 3i} \\
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

ومنه الحل الثاني

$z = -3i$

ملاحظة

يمكن الحل بطريقة الدلتا