المدة : ساعة ونصف | **اختبـار الأعـداد العقديـة** | **الدرجة : 300**
للثالث الثانوي العلمي - دورة عام 2019

السؤال الأول :

1) أعط الشكل الجبري للعدد العقدي : $z=\left(\dfrac{2+3i}{2-i}\right)\left(\dfrac{2-4i}{4+6i}\right)$

2) اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي : $z=\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sin\dfrac{3\pi}{5}+i\cos\dfrac{3\pi}{5}\right)$

3) أعط الشكل الأسي للعدد العقدي : $z=1-e^{2i\alpha}$ ، حيث α عدداً من المجال $]0,\pi[$.

4) حل في C المعادلة الآتية : $z^2-4(\sin\alpha)z+4=0\ ;(\alpha\in R)$

5) حل في C المعادلة الآتية : $z^3-2(1+i)z^2+2(1+2i)z-4i=0$

علماً أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً .

السؤال الثاني :

نتأمل عددين عقديين z و w يحققان $|z|=|w|=1$ و $z\neq w$. أثبت أن $u=\dfrac{1-zw}{z-w}$ عدد حقيقي

السؤال الثالث :

ليكن العدد العقدي $z=e^{i\frac{2\pi}{7}}$ ، أثبت أن : $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=-1$

السؤال الرابع :

نعطى العددين العقديين $z_1=\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i$ و $z_2=2-2i$

1) اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد : z_1 و z_2 و $\dfrac{z_1}{z_2}$.

2) اكتب بالشكل الجبري $\dfrac{z_1}{z_2}$.

3) استنتج أن : $\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

السؤال الخامس :

1) اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة : $\left(z^2+2\sqrt{2}z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{2}z+4\right)=0$

2) أثبت أن النقاط A و B و C و D التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مربع .

انتهت الأسئلة

أ : عبـد الحميـد السيـد

1 حلول اختبار الأعداد العقدية

السؤال الأول :

1) أعط الشكل الجبري للعدد العقدي : $z = \left(\frac{2+3i}{2-i}\right)\left(\frac{2-4i}{4+6i}\right)$

$$z = \left(\frac{2+3i}{2-i}\right)\left(\frac{1-2i}{2+3i}\right) = \frac{1-2i}{2-i}$$

$$z = \frac{(1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i-4i-2i^2}{4+1} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$$

---

2) اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي : $z = \left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sin\frac{3\pi}{5} + i\cos\frac{3\pi}{5}\right)$

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right)\right)$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right)$$

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}\right)\right)$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$

---

3) أعط الشكل الأسي للعدد العقدي : $z = 1 - e^{2i\alpha}$ ، حيث α عدداً من المجال $]0,\pi[$

$$z = 1 - e^{2i\alpha} = e^{i\alpha}\left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}\right)$$

$$z = e^{i\alpha} \times -2i\sin\alpha$$

$$\alpha \in]0,\pi[\Rightarrow \sin\alpha > 0$$

$$z = e^{i\alpha} \times 2e^{-i\frac{\pi}{2}}\sin\alpha$$

الشكل الأسي المطلوب : $z = (2\sin\alpha)\,e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$

أ : عبـد الحميـد السيـد

(طريقة ثانية)

$$z = 1 - \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha$$
$$= 2 \sin^2 \alpha - i\,(2 \sin\alpha \cos\alpha)$$
$$= 2 \sin\alpha\,(\sin\alpha - i \cos\alpha)$$
$$= 2 \sin\alpha \left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

في حالة α من $]0, \pi[$ يكون $\sin\alpha > 0$

الشكل الأسي المطلوب : $z = (2 \sin\alpha)\, e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$

---

4) حل في C المعادلة الآتية : $z^2 - 4(\sin\alpha)z + 4 = 0 \;; (\alpha \in R)$

$$z^2 - 4(\sin\alpha)z + 4\sin^2\alpha - 4\sin^2\alpha + 4 = 0$$
$$(z - 2\sin\alpha)^2 = -4\cos^2\alpha = (2i\cos\alpha)^2$$
$$\begin{cases} z_1 - 2\sin\alpha = -2i\cos\alpha \Rightarrow z_1 = 2(\sin\alpha - i\cos\alpha) \\ z_2 - 2\sin\alpha = 2i\cos\alpha \Rightarrow z_2 = 2(\sin\alpha + i\cos\alpha) \end{cases}$$

(يمكن الحل بطريقة المميز)

---

5) حل في C المعادلة : $z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = 0$

إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً .

بفرض $z_1 = b\,i \;; b \in R^*$ حلاً تخيلياً بحتاً للمعادلة وبالتالي :

$$-b^3 i + 2b^2(1+i) + 2b\,i\,(1+2i) - 4i = 0$$
$$\begin{cases} 2b^2 - 4b = 0 \Rightarrow b = 2 \quad \ldots(1) \\ b^3 - 2b^2 - 2b + 4 = 0 \quad \ldots(2) \end{cases}$$

نعوض (1) في (2) فنجد : $8 - 8 - 4 + 4 = 0$ محققة

إذن : $z_1 = 2i$

وبالتالي تكتب المعادلة $P(z)=0$ بالشكل : $(z-2i)\left(z^2+az+2\right)=0$

بالضرب الذهني ومساواة أمثال z أو أمثال z^2 مع أمثالها في المعادلة المفروضة

$a-2i=-2-2i$ ومنه $a=-2$

وبالتالي : $z^2-2z+2=0 \Rightarrow z^2-2z+1-1+2=0$

$$(z-1)^2=-1=i^2$$

إذن : $z_2=1-i$ و $z_3=1+i$

يمكن إجراء القسمة الاقليدية

طريقة خاصة (لا تصلح بشكل عام ويمكن تجريبها) :

نفصل الحدود الخالية من i عن الحدود التي تحوي i على منوال التجميع في فئات

$$\left(z^3-2z^2+2z\right)+i\left(-2z^2+4z-4\right)=0$$

$$z\left(z^2-2z+2\right)-2i\left(z^2-2z+2\right)=0$$

$$(z-2i)\left(z^2-2z+2\right)=0$$

ونتابع كما سبق

السؤال الثاني :

نتأمل عددين عقديين z و w يحققان $|z|=|w|=1$ و $z\neq w$. أثبت أن $u=\dfrac{1-zw}{z-w}$ عدد حقيقي

يكون u عدداً حقيقياً إذا كان $\overline{u}=u$ حيث $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ و $\overline{w}=\dfrac{1}{w}$ لأن $|z|=|w|=1$

وبالتالي : $\overline{u}=\dfrac{1-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{w}}{\frac{1}{z}-\frac{1}{w}}=\dfrac{zw-1}{w-z}=\dfrac{1-zw}{z-w}$

إذن : $\overline{u}=u$ ومنه u عدد حقيقي .

السؤال الثالث :

ليكن العدد العقدي $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ ، أثبت أن : $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = -1$

نعلم في المتتالية الهندسية التي أساسها $q \neq 1$ أن : $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$

بما أن $z = e^{i\frac{2\pi}{7}} \neq 1$ فإن : $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \dfrac{1-z^7}{1-z}$

ولكن : $z^7 = e^{2\pi i} = 1$ أي $1 - z^7 = 0$

إذن : $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$

ومنه : $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = -1$

(طريقة ثانية)

الطرف الأيسر مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = z = e^{i\frac{2\pi}{7}} \neq 1$

الحد الأول $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ وعدد الحدود 6

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = z \cdot \frac{1-z^6}{1-z} = \frac{z - z^7}{1-z}$$

ولكن : $z^7 = e^{2\pi i} = 1$ أي $z - z^7 = z - 1$

إذن : $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \dfrac{z-1}{1-z} = -1$

السؤال الرابع :

نعطى العددين العقديين $z_1 = \sqrt{6} + \sqrt{2}\, i$ و $z_2 = 2 - 2i$

1) اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد : z_1 و z_2 و $\dfrac{z_1}{z_2}$.

2) اكتب بالشكل الجبري $\dfrac{z_1}{z_2}$.

3) استنتج أن : $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

أ : عبـد الحميـد السيـد

5 حلول اختبار الأعداد العقدية

1) الشكل المثلثي بطريقة مباشرة :

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} \quad \text{و} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12} \quad \ldots(1)$$

2) الشكل الجبري :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i}{2(1-i)} = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i\right)(1+i)}{2(1-i)(1+i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{6}\,i+\sqrt{2}\,i+\sqrt{2}\,i^2}{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \ldots(2)$$

3) بمساواة (1) و (2) نستنتج أن :

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

<u>السؤال الخامس</u> :

1) اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة : $\left(z^2+2\sqrt{2}\,z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{2}\,z+4\right)=0$

2) أثبت أن النقاط A و B و C و D التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مربع .

1) الأولى : $z^2+2\sqrt{2}\,z+4=0$

$$\Delta = 8-16 = -8 < 0 \quad ; \sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$z_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{2}i = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

إذن : $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$

و $z_2 = \overline{z_1} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

الثانية : $z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$

$$\Delta = 8 - 16 = -8 < 0 \quad ; \sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$z_3 = \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}i = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

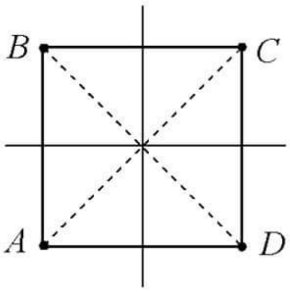
إذن : $z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

و $z_4 = \overline{z_3} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) النقاط A و B و C و D ليست على استقامة واحدة

وهي صور الجذور z_1 و z_2 و z_3 و z_4 بالترتيب .

حيث : $A\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ و $B\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ و $C\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ و $D\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$



لدينا : $\overrightarrow{AB}\left(0, 2\sqrt{2}\right)$ و $\overrightarrow{BC}\left(2\sqrt{2}, 0\right)$ و $\overrightarrow{AD}\left(2\sqrt{2}, 0\right)$

وبالتالي $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ومنه $ABCD$ متوازي أضلاع

ولدينا : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 + 0 = 0$ وبالتالي : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

أيضاً : $AB = AD$. إذن : $ABCD$ مربع .

<u>طريقة ثانية</u>

لدينا : $z_3 = -z_1$ و $z_4 = -z_2$

وبالتالي قطري الرباعي $ABCD$ متناصفان فهو متوازي أضلاع

بما أن : $[AC] = r_1 + r_3 = 4$ و $[BD] = r_2 + r_4 = 4$

وبالتالي قطري متوازي الأضلاع متناصفان ومتساويان فهو مربع .

انتهت حلول اختبار الأعداد العقدية لدورة عام 2019

أ : عبـد الحميـد السيـد