معهد واحة النور المدرس: عدنان كنجو	مذاكرة عقدية الثالث الثانوي العلمي الرياضيات ٢٠١٨ - ٢٠١٩	الاسم: الدرجة: ٦٠ المدة: ساعة ونصف التاريخ: 3/2/2019

[1] اكتب الأعداد العقدية بالأشكال (الأسي - المثلثي - الجبري):

(5)

① $z_1 = (1+i)^2$

② $z_2 = \dfrac{3i}{\left(3\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

③ $z_3 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right)^2$

④ $z_4 = \left(\dfrac{(1+i\sqrt{3})}{-\sqrt{3}+i}\right)^2$

---

[2] حل المعادلات التالية في $\mathbb{C}$:

(5)

① $2z + i\bar{z} = 5+4i$

② $z^2 + 6z + 13 = 0$

③ $iz^2 + z + 3 + i = 0$

---

[3] أوجد الجذور التربيعية للأعداد العقدية:

(4)

① $w = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\sqrt{3}\,i$

② $u = 8\sqrt{3} - 8i$

---

[4] لتكن u ، w عددان عقديان يحققان $|u| = |w| = 1$ أثبت أن:

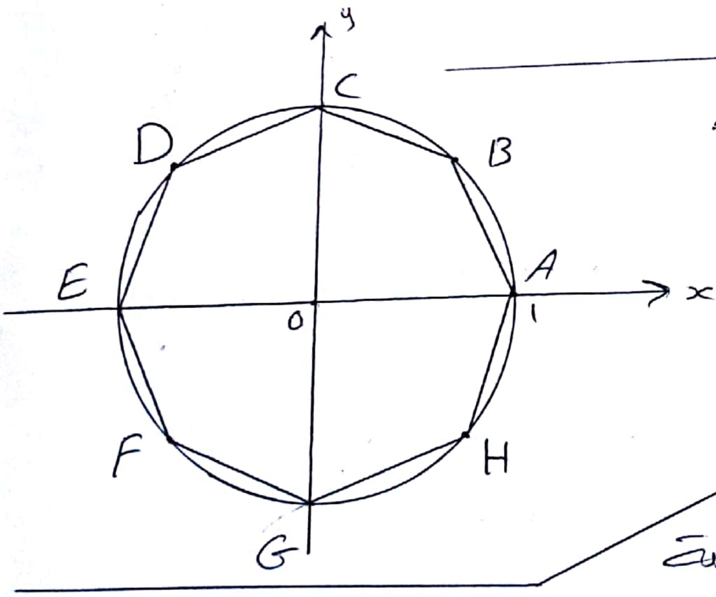
$z = \dfrac{w-u}{w.u+1}$ هو تخيلي بحت:

---

(5) لتكن لدينا المثمن المنتظم ABCDEFGH مرسوم في دائرة نصف قطرها 1 cm .

اكتب رؤوسه بالشكل الجبري للأعداد العقدية التي تمثلها.

(10)



انتهت الأسئلة

مدرس المادة:
أ. عدنان كنجو

دعائي لكم....

3/2/2019

[illegible]

أ. عدنان كريو

3/2/2019

الموضوع : حل إختبار الأعداد العقدية — التاريخ / / ٢٠٠

[1] أشكال مختلفة للعدد العقدي

[1] $(1+i)^2$

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow (1+i)^2 = (\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

الشكل الأسي $\Rightarrow z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

المثلثي $z_1 = 2[\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin\frac{\pi}{2}]$

الجبري $z_1 = 2[0+i] = 2$

② $z_2 = \dfrac{3i}{3(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})}$

$z_2 = \dfrac{3e^{i\frac{\pi}{2}}}{3(e^{i\frac{\pi}{4}})} = e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

أسي $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

مثلثي $z_2 = 1[\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})]$

جبري $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

[3] $z_3 = [-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i]^2$

$w = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$

$M(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}) \in Q_2$

$|w| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3+1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + \pi k$

مقبول $k=1 \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in Q_2$

ومنه $w = 1\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$

& $z_3 = w^2$

أسي $\Rightarrow z_3 = (e^{i\frac{5\pi}{6}})^2 = e^{i\frac{10\pi}{6}}$

$z_3 = 1[\cos(\frac{10\pi}{6}) + i\sin(\frac{10\pi}{6})]$

$= \cos(\frac{12\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}) + i\sin(\frac{12\pi}{6} - \frac{2\pi}{6})]$

مثلثي $= \cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3})$

جبري $= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_4 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i}\right)^2$

$w_1 = 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$|w_1| = \sqrt{1+3} = 2$

$\tan\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \in Q_1$

$\Rightarrow \boxed{w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

نفرض $w_2 = -\sqrt{3} + i$

$|w_2| = \sqrt{3+1} = 2$

$\tan\theta_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta_2 = \frac{-\pi}{6} + \pi k$

لكن $N(-\sqrt{3}, +1) \in Q_2$

$\Rightarrow k=1 \Rightarrow \theta_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

ومنه $\boxed{w_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

وعليه $Z_4 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2$

$$Z_4 = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}\right)^2 = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)}\right)^2$$

$$Z_4 = \left[e^{i\left(\frac{-3\pi}{6}\right)}\right]^2 = \left[e^{\frac{-i\pi}{2}}\right]^2 = e^{-\pi i}$$

مثلثي $Z_4 = 1\left[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right]$

جبري $Z_4 = 1\left[-1 + i(0)\right] = -1$

2) حل المعادلات التالية في C

(1) $2z + i\bar{z} = 5+4i$

نأخذ مرافق الطرفين

$2\bar{z} - iz = 5-4i$

$2\bar{z} = 5-4i+iz$

$\Rightarrow \boxed{\bar{z} = \frac{5-4i+iz}{2}}$

نعوض في المعادلة الأصلية.

$2z + i\left(\frac{5-4i+iz}{2}\right) = 5+4i$

$4z + i(5-4i+iz) = 10+8i$

$4z + 5i - 4i^2 + zi^2 = 10+8i$

$4z - z = 10+8i-5i-4$

$3z = 6+3i$

$\boxed{z = 2+i}$

[2] $iz^2 + z + 3 + i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (1)^2 - 4(i)(3+i)$

$\Delta = 1 - 12i - 4i^2$

$\Delta = 5 - 12i$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5-12i} = x + yi = u$

بتربيع الطرفين

$5 - 12i = (x+yi)^2$

وعليه

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (1) \\ 2xy = -12 & (2) \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = \sqrt{25+144} = 13$ (3) $\Leftarrow |5-12i| = |u|^2$ لكن

بجمع (3) + (1)

$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = +3$

أو $x = -3$

وعليه من (2)

$y = \frac{-12}{2x} = \frac{-6}{x}$

لما $x = 3 \Rightarrow y = \frac{-6}{3} = -2$

$u_1 = 3 - 2i = \sqrt{\Delta}$

$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3-2i}{2i} = \frac{+2-2i}{2i}$

$z_1 = \frac{i(2-2i)}{2i^2} = \frac{2i-2i^2}{-2} = \frac{2+2i}{-2}$

$\boxed{z_1 = -1+i}$

أو

$$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3+2i}{2i} = \frac{-4+2i}{2i}$$

$$z_2 = \frac{-4i-2}{2i^2} = \frac{-2}{-2} - \frac{4i}{-2} = +1+2i$$

ومنه الحلول $\{-1+i \,,\, 1+2i\}$

(3) أوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي:

$$w = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\sqrt{3}\,i$$

$$w = \frac{9}{2}\left[1+\sqrt{3}\,i\right]$$

$$w = \frac{9}{2}\left[2e^{i\frac{\pi}{3}}\right] = 9e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه $\sqrt{w} = \sqrt{9e^{i\frac{\pi}{3}}} = \left[9e^{i\frac{\pi}{3}+2\pi k}\right]^{\frac{1}{2}}$

$$= 3e^{i\frac{\pi}{6}+\pi k}$$

$k=0 \Rightarrow w_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$

$k=1 \Rightarrow w_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$

إذاً الجذران هما $\{3e^{i\frac{\pi}{6}} \,,\, -3e^{i\frac{\pi}{6}}\}$

$$u = 8\left[\sqrt{3}-i\right] = 8\left[2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right] = 16e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$(\sqrt{3}, -1) \in Q_4$

$\tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{6}$

ومنه $\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} = \left[16e^{-i\frac{\pi}{6}}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}\, e^{i(-\frac{\pi}{12}+\pi k)}$

$k=0 \Rightarrow u_1 = 4e^{i(-\frac{\pi}{12})} = 4e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$k=1 \Rightarrow u_2 = 4e^{i\frac{11\pi}{12}} = 4e^{i\frac{11\pi}{12}}$

ومنه الجذران $\{4e^{-i\frac{\pi}{12}} \,,\, -4e^{-i\frac{\pi}{12}}\}$

---

[4] $|u|=|w|=1$

$$z = \frac{w-u}{w\cdot u+1}$$

بما أن $|u|=|w|=1$

$u\cdot\bar{u} = |u|^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{u}$

$w\cdot\bar{w} = |w|^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow \bar{w} = \frac{1}{w}$

نوجد مرافق الطرفين

$$\bar{z} = \frac{\bar{w}-\bar{u}}{\bar{w}\cdot\bar{u}+1}$$

نوحد المقامات ونوزع.

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{w}-\frac{1}{u}}{\frac{1}{w\cdot u}+1} = \frac{u-w}{1+wu}$$

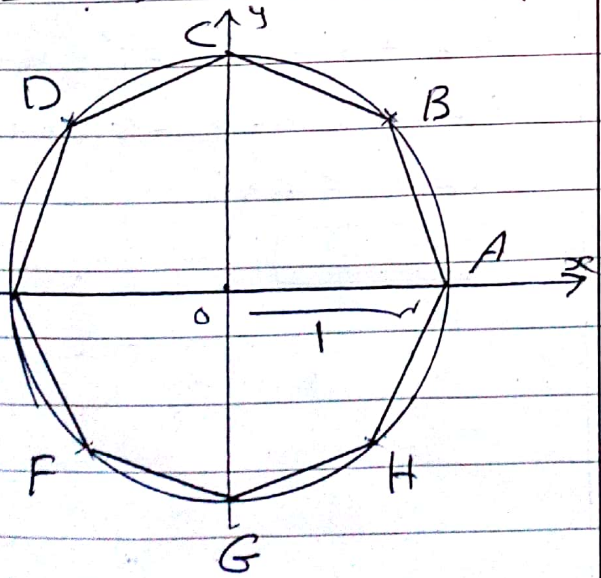
$$= -\left(\frac{w-u}{wu+1}\right) = -z$$

إذاً $\bar{z} = -z$ إذاً z تخيلي بحت

---

[5] لتكن لدينا المضلع المنتظم طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه 1cm

عبر عن رؤوسه بأعداد عقدية بالشكل الجبري:



5) بما أن المضلع منتظم فإن قياس الزاوية المركزية المقابلة لكل ضلع من أضلاعه

$$A\hat{O}B = \frac{360}{8} = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$$

ومنه

$$Z_A = 1[\cos(0) + i\sin(0)] = 1$$

$$Z_B = 1\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Z_C = 1\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$
$$Z_C = i$$

$$Z_D = 1\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= -\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Z_E = -1$$

$$Z_F = 1\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= -\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$Z_G = -i$$

$$Z_H = 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

انتهى الحل

دعائي لكم

أ. عدنان كنو - 3/2/2019