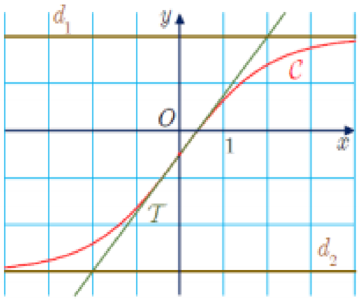
الجمهورية العربية السورية

وزارة التربية — الدرجة العظمى: ستمئة

مكتب التوجيه الأول للرياضيات — المدة: ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات للصف الثالث ثانوي علمي (٢٠١٩)

أولا) أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (٤٠ درجة لكل سؤال)



السؤال الأول : إذا كان C الخط البياني للتابع f والمستقيمين d_1, d_2 مقاربين للخط C والمستقيم T مماس للخط C المطلوب:

١- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

٢- اكتب معادلة كل مقارب من المقاربين d_1, d_2.

٣- إذا علمت أن المستقيم المائل المرسوم في الشكل يمس المنحني في النقطة $(0,\frac{-1}{2})$ احسب $f'(\frac{-1}{2})$ ثم اكتب معادلته.

السؤال الثاني: نتأمل النقاط $A(3,5,2), B(2,-1,3), C(0,-2,2)$

١) احسب احداثيات منتصف القطعة $[AC]$

٢) احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$

٣) عين إحداثيات K بحيث يكون الرباعي ABCK متوازي أضلاع.

السؤال الثالث:

١) عين حل المعادلة التفاضلية $3y + 2\acute{y} = 1$ الذي يحقق الشرط $f(0) = 1$.

٢) احسب النهاية $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$

السؤال الرابع: لتكن المجموعة $s = \{1,2,3,4,5,6\}$

١) كم عددا زوجيا مؤلفا من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر s

٢) كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من s

ثانيا) حل التمارين الأربعة الآتية: (٦٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الخامس: التمرين الأول: ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{3\}$ وفق $f(x) = \frac{2x^2-7x-3}{x-3}$ المطلوب:

١) احسب $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم احسب $b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - a\,x)$

٢) استنتج معادلة المقارب المائل Δ في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ و الخط البياني c

السؤال السادس: التمرين الثاني: لتكن النقطتان A و B اللتان يمثلهما العددان العقديان : $Z_B =$ $-2i$ و $Z_A = -\sqrt{3} + i$.

١- اكتب Z_A بالشكل الاسي ثُمَّ جد العدد العقدي Z_C المُمثّل للنقطة C التي تجعل المبدأ مركز ثقل المثلث ABC.

٢- أثبت أن $Z_C - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_B - Z_A)$ ثُمَّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

السؤال السابع: التمرين الثالث: المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق

$$: U_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n!}$$

١) أثبت أن $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

٢) أثبت أن $U_n < 2$ و استنتج أن U_n متقاربة.

السؤال الثامن: التمرين الرابع: نملأ عشوائيا كل خانة من | | | | | الخانات الأربع الآتية بأحد العددين $0, 3$ والمطلوب :

١) ليكن A الحدث: «مجموع الأعداد التي كتبت في الخانات يساوي٦ » وليكن B الحدث : « عدم ظهور العدد ذاته في خانتين متجاورتين » احسب $P(A)$ ثُمَّ $P(B|A)$

٢) نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد الخانات التي كتب فيها العدد ٣ اكتب القانون الاحتمالي و احسب التوقع الرياضي و التباين.

ثالثا) حل المسألتين الآتيتين : (١٠٠ درجة لكل مسألة)

السؤال التاسع: المسألة الأولى : نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(1,-1,2)$, $B(2,0,4)$ و المستوي P الذي معادلته $x - y + 3z - 4 = 0$ و المطلوب:

١) جد معادلة المستوي Q العمودي على المستوي P و يمر بالنقطتين B, A

٢) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة A و يعامد المستوي P

٣) عين إحداثيات المسقط القائم $\acute{A}$ للنقطة A على المستوي P

٤) اعط معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ و ما طبيعة المجموعة ε

السؤال العاشر : المسألة الثانية: ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق: $f(x) = ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$ و ليكن ć الخط البياني للتابع g مقصور التابع f على المجال $]1,+\infty[$ المطلوب:

١) أثبت أن f تابع فردي و استنتج الصفة التناظرية للخط c.

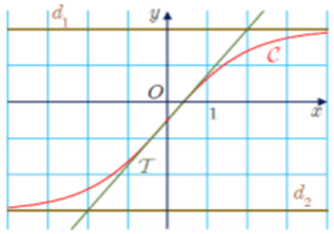
٢) ادرس تغيرات التابع g و نظم جدولا بها و اكتب معادلة كل مقارب للخط ć .

٣) ارسم كل مقارب و جدته و ارسم ć ثُمَّ استنتج رسم c.

٤) احسب مساحة السطح المحصور بين ć ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 2$ و $x = 3$.

انتهت الأسئلة

أولا) أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (٤٠ درجة لكل سؤال)



السؤال الأول : إذا كان C الخط البياني للتابع f والمستقيمين d_1 , d_2 مقاربين للخط C والمستقيم T مماس للخط C المطلوب:

١– احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

٢– اكتب معادلة كل مقارب من المقاربين d_1 , d_2.

٣– إذا علمت أن المستقيم المائل المرسوم في الشكل يمس المنحني في النقطة $(0,\frac{-1}{2})$ احسب $f'(0)$ ثم اكتب معادلته.

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$

2) $d: y = 2$ مقارب أفقي لـ C بجوار $+\infty$ ، $d': y = -3$ مقارب أفقي لـ C بجوار $-\infty$

3) المماس T يمر بالنقطتين $A\left(0,-\frac{1}{2}\right), B(2,2)$ ومنه $m_T = f'(0) = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{5}{4}$

4) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ومنه $T : y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

السؤال الثاني: نتأمل النقاط $A(3,5,2), B(2,-1,3), C(0,-2,2)$

المدرس سام علي حمدان

0994 168 878

١) احسب احداثيات منتصف القطعة $[AC]$

٢) احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

٣) عين إحداثيات K بحيث يكون الرباعي ABCK متوازي أضلاع.

1) $I\left(\frac{x_A+x_C}{2} , \frac{y_A+y_C}{2} . \frac{z_A+z_C}{2}\right)$ يعطي $I\left(\frac{3}{2} , \frac{3}{2} . 2\right)$

2) $\overrightarrow{AB} = (-1,-6,1)$ ، $\overrightarrow{AC} = (-3,-7,0)$

3) حتى يكون الرباعي $ABCK$ متوازي اضلاع يجب تحقيق العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$

بفرض $K(x,y,z)$ ومنه $(-1,-6,1) = (0-x,-2-y,2-z)$

ومنه : $-x = -1$ ، $-2-y = -6$ ، $2-z = 1$ يعطي : $K(1,4,1)$

السؤال الثالث:

١) عين حل المعادلة التفاضلية $3y + 2\acute{y} = 1$ الذي يحقق الشرط $f(0) = 1$.

٢) احسب النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$

المعادلة من الشكل $y' = ay + b$ ، $3y + 2y' = 1 \Rightarrow y' = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}$

حلها من الشكل : $y = ke^{ax} - \frac{b}{a} \; ; k \in R$ ، حيث $a = -\frac{3}{2} \; , b = \frac{1}{2}$

$y = ke^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{3}$ وباعتبار $f(0) = 1$ ، نجد $ke^0 + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow k + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

ومنه : $y = \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{3}$

٢) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x}{x} \times \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \right]$$

منه : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = 1 \times 1 = 1$

المدرس سام علي حمدان

0994 168 878

السؤال الرابع: لتكن المجموعة $s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

١) كم عددا زوجيا مؤلفا من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر s

٢) كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من s

١)

مئات	عشرات	احاد
6	6	3

يكون العدد زوجي إذا كان أحاده عدداً زوجياً ولدينا ثلاثة أرقام زوجية هي : $\{2,4,6\}$

مع تكرار الرقم : $3 \times 6 \times 6 = 108$

٢) $\binom{6}{2} = \frac{6\times 5}{2\times 1} = 15$

السؤال الخامس: التمرين الأول: ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{3\}$ وفق $f(x) = \frac{2x^2-7x-3}{x-3}$

المطلوب:

١) احسب $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم احسب $b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - a\,x)$

٢) استنتج معادلة المقارب المائل Δ في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ و الخط البياني c

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2-7x-3}{x-3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-7x-3}{x^2-3x} = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2x^2-7x-3}{x-3} - 2x \right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-7x-3-2x^2+6x}{x-3}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x-3}{x-3}\right]=-1$$

$$b=-1\,,a=2\Rightarrow \Delta: y=2x-1$$

$$g(x)=f(x)-y_{\Delta}\Rightarrow g(x)=-\frac{6}{x-3}$$

x		3	
-6	$-$		$-$
$x-3$	$-$		$+$
$g(x)$	$+$		$-$
الوضع النسبي	C فوق Δ		C تحت Δ

<u>السؤال السادس: التمرين الثاني</u>: لتكن النقطتان A و B اللتان يمثلهما العددان العقديان : $Z_B=-2i$ و $Z_A=-\sqrt{3}+i$.

١- اكتب Z_A بالشكل الاسي ثُمَّ جد العدد العقدي Z_C المُمثّل للنقطة C التي تجعل المبدأ مركز ثقل المثلث ABC.

٢- أثبت أن $Z_C-Z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_B-Z_A)$ ثُمَّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

$Z_A=-\sqrt{3}+i$ ، $r=\sqrt{3+1}=2$

بفرض φ زاوية تقع في الربع الأول ، $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\sin\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}$

باعتبار أن $a<0\,,b>0$ فإن θ تقع في الربع الثاني ، $\theta=\pi-\varphi\Rightarrow\theta=\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\theta=\frac{5\pi}{6}$

$$Z_A=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\Rightarrow Z_A=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

$$Z_O=\frac{Z_A+Z_B+Z_C}{3}\Rightarrow Z_A+Z_B+Z_C=0$$

يعطي: $-\sqrt{3}+i-2i+Z_C=0\Rightarrow Z_C=\sqrt{3}+i$

٢) $l_1=Z_C-Z_A=\sqrt{3}+i+\sqrt{3}-i=2\sqrt{3}$

$$l_2=e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_B-Z_A)=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(-2i+\sqrt{3}-i)=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}-3i)$$

$$l_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}i+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

$l_2=l_1$ يعطي : $Z_C-Z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_B-Z_A)$

أي أن النقطة C هي صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

وبالتالي المثلث ABC مثلث متساوي الأضلاع

السؤال السابع: التمرين الثالث: المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق

$: U_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \dots \dots + \frac{1}{n!}$

المدرس سام علي حمدان

0994 168 878

١) أثبت أن $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

٢) أثبت أن $U_n < 2$ و استنتج أن U_n متقاربة.

$E(1): \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ يعطي $E(1)$ صحيحة

نفرض $E(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $E(n+1)$

باعتبار أن $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$ صحيحة يعطي أن $(n+1)! \geq 2^n$

$$(n+2)(n+1)! \geq (n+2) \times 2^n$$

$$(n+2)! \geq (n+2) \times 2^n \geq 2 \times 2^n \; ; n \geq 1$$

$(n+2)! \geq 2 \times 2^n$ يعطي $(n+2)! \geq 2^{n+1}$

$E(n+1) : \frac{1}{(n+2)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ فالقضية صحيحة

٢) من الطلب السابق نجد : $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, ... , $\frac{1}{3!} \leq \frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$, $\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$

نأخذ المتتالية : $t_n = (\frac{1}{2})^0 + (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2 + \dots + (\frac{1}{2})^{n-1}$

نلاحظ أن : $u_n \leq t_n$ حيث t_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ عدد حدودها n

ومجموع حدودها يعطى بالعلاقة : $t_n = a \times \frac{1-q^n}{1-q} = (\frac{1}{2})^0 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}$

$$t_n = 1 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 2[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n]$$

$-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$ يعطي : $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$ يعطي : $2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 2$ منه : $t_n < 2$

$u_n \leq t_n < 2$ وبالتالي : $u_n < 2$ ومنه : $u_n < 2$ فالمتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد 2

$u_{n+1} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$ يعطي : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

فالمتتالية متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 وبالتالي المتتالية متقاربة من العدد 2

السؤال الثامن: التمرين الرابع: نملأ عشوائيا كل خانة من الخانات الأربع الآتية $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ بأحد العددين 0, 3 والمطلوب :

١) ليكن A الحدث: «مجموع الأعداد التي كتبت في الخانات يساوي ٦ » وليكن B الحدث : « عدم ظهور العدد ذاته في خانتين متجاورتين » احسب $P(A)$ ثُمَّ $P(B|A)$

٢) نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد الخانات التي كتب فيها العدد ٣ اكتب القانون الاحتمالي و احسب التوقع الرياضي و التباين.

عدد عناصر فضاء العينة : $n(\Omega) = 2^4 = 16$

نحصل على الحدث A اذا وجد العدد 3 مرتان من أصل أربع خانات بغض النظر عن الترتيب

$n\,(A) = \binom{4}{2} = 6$ يعطي : $P(A) = \frac{n\,(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8}$

الحدث A : $A = \{\,0033\,,0303\,,0330,\ 3003\,,3030\,,3300\,\}$

الحدث B : $B = \{\,0303, 3030\,\}$ يعطي $A \cap B = \{\,0303, 3030\,\}$ ومنه : $n\,(A \cap B) = 2$

يعطي : $P(A \cap B\,) = \frac{n\,(A\cap B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ وبالتالي : $P(\,A|B) = \frac{P(A\cap B\,)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$

الطلب الثاني : نموذج تجربة برنولية $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$

حيث $0 \le k \le 4$, $n = 4\,, p = \frac{1}{2}\,, q = \frac{1}{2}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^{4-0} = 1 \times 1 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^{4-1} = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{4}{16}$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^{4-2} = 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{16}$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^{4-3} = 4 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{16}$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^{4-4} = 1 \times \frac{1}{16} \times 1 = \frac{1}{16}$$

التوقع الرياضي : $E\,(X) = n.p = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

التباين : $V\,(X) = n.p.q = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1$

المدرس سام علي حمدان

0994 168 878

ثالثا) حل المسألتين الآتيتين : (١٠٠ درجة لكل مسألة)

السؤال التاسع: المسألة الأولى : نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $B(2,0,4), A(1,-1,2)$ و المستوي P الذي معادلته $x-y+3z-4=0$ و المطلوب:

١) جد معادلة المستوي Q العمودي على المستوي P و يمر بالنقطتين B, A

٢) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة A و يعامد المستوي P

٣) عين إحداثيات المسقط القائم $\acute{A}$ للنقطة A على المستوي P

٤) اعط معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ و ما طبيعة المجموعة ε

نوجد الشعاع الناظم $\overrightarrow{n_Q}$ حيث $\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_p}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}=(1,1,2)$, $\overrightarrow{n_p}=(1,-1,3)$

$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow (a,b,c).(1,1,2)=0 \Rightarrow a+b+2c=0 \quad (1)$

$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_p}=0 \Rightarrow (a,b,c).(1,-1,3)=0 \Rightarrow a-b+3c=0 \quad (2)$

بجمع المعادلتين (2) و (1) نجد أن : $2a+5c=0$ ومنه : $a=-\frac{5}{2}c$ ومن أجل $c=2$ نجد
$a=-5, b=1$ ومنه : $\overrightarrow{n_Q}=(-5,1,2)$

يعطي معادلة Q : $Q: -5x+y+2z+d=0$ ، نعوض احداثيات B

فنجد : $-5(2)+0+2(4)+d=0 \Rightarrow d=2$ وبالتالي : $Q: -5x+y+2z+2=0$

الطلب الثاني : $\vec{u}=\overrightarrow{n_p}=(1,-1,3)$ منه : $(d): \begin{cases} x=t+1 \\ y=-t-1 \\ z=3t+2 \end{cases} ; t\in R$

الطلب الثالث : (d) يعامد المستوي P ويمر بالنقطة A فنقطة تقاطع (d) مع المستوي P هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي P ، نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) في معادلة P

$t+1+t+1+9t+6-4=0 \Rightarrow 11t=-4$ ومنه : $t=\frac{-4}{11}$

$$A': \begin{cases} x=t+1 \Rightarrow x=\frac{-4}{11}+1 \\ y=-t-1 \Rightarrow y=\frac{4}{11}-1 \\ z=3t+2 \Rightarrow z=3\times\frac{-4}{11}+2 \end{cases} \Rightarrow A'(\frac{7}{11},\frac{-7}{11},\frac{10}{11})$$

الطلب الرابع : لدينا $\overrightarrow{AM}=(x-1,y+1,z-2)$ ، $\overrightarrow{BM}=(x-2,y,z-4)$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0 \Rightarrow (x-1,y+1,z-2).(x-2,y,z-4)=0$

$$(x-1)(x-2)+y(y+1)+(z-2)(z-4)=0$$

$$x^2-3x+2+\ y^2+y+z^2-6z+8=0$$

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\ y^2+y+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ z^2-6z+(3)^2-(3)^2+10=0$$

$$(x-\tfrac{3}{2})^2+(y+\tfrac{1}{2})^2+(z-3)^2-\frac{10}{4}+1=0$$

$$(x-\tfrac{3}{2})^2+(y+\tfrac{1}{2})^2+(z-3)^2=\frac{6}{4}$$

مجموعة النقط ع هي كرة مركزها $\Omega(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 3)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{\frac{3}{2}}$

السؤال العاشر : المسألة الثانية: ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق: $f(x)=ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$ و ليكن ć الخط البياني للتابع g مقصور التابع f على المجال $]1,+\infty[$ المطلوب:

المدرس سام علي حمدان

0994 168 878

١) أثبت أن f تابع فردي و استنتج الصفة التناظرية للخط c.

٢) ادرس تغيرات التابع g و نظم جدولا بها و اكتب معادلة كل مقارب للخط ć .

٣) ارسم كل مقارب و جدته و ارسم ć ثم استنتج رسم c.

٤) احسب مساحة السطح المحصور بين ć ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=2$ و $x=3$.

عندما $x\in]-\infty,-1[\ \Leftrightarrow\ -x\in\ ]1,+\infty[$ وعندما $x\in\ ]1,+\infty[\ \Leftrightarrow\ -x\in]-\infty,-1[$

$x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ منه $-x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

وبالتالي $x\in D_f$ كانت $-x\in D_f$ فالشرط الأول محقق

طريقة ثانية

$f(-x)=ln\left(\frac{1-x}{-x-1}\right)$ حيث $f(-x)$ معرف عندما $\frac{1-x}{-x-1}>0$

x		-1		1	
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$ $-$
$-x-1$	$+$	0	$-$		$-$
$\frac{1-x}{-x-1}$	$+$		$-$		$+$

من خلال جدول الاشارة نجد أن مجموعة تعريف $f(-x)$ هي $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

وهي ذاتها مجموعة تعريف التابع $f(x)$ ، وبالتالي $x\in D_f$ كانت $-x\in D_f$ فالشرط الأول محقق.

يكتب $f(x)$ بالشكل : $f(x)=ln(1+x)-ln(x-1)$

يعطي : $-f(x) = ln(x-1) - ln(x+1)$

$$f(-x) = ln\left(\frac{1-x}{-x-1}\right) = ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right) = ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \Rightarrow f(-x) = ln(x-1) - ln(x+1)$$

$f(-x) = -f(x)$ فالشرط الثاني محقق ومنه $f(x)$ تابع فردي

حيث خطه البياني C متناظر بالنسبة لمبدأ الاحداثيات .

$g(x) = ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$ حيث $x > 1$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C' بجوار $+\infty$

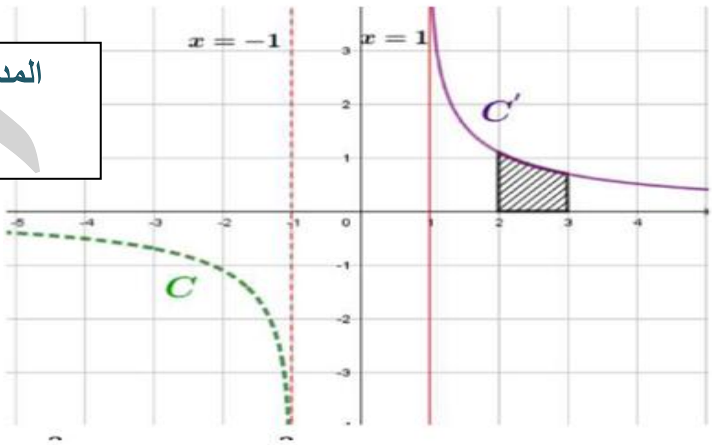
$\lim_{\substack{> \\ x\to1}}\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = +\infty \Rightarrow \lim_{\substack{> \\ x\to1}} g(x) = +\infty$ ، منه : $x = 1$ مقارب شاقولي للخط C' بجوار $+\infty$

$g(x) = ln(1+x) - ln(x-1)$ ، يعطي : $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x-1}{x^2-1} = \frac{-2}{x^2-1} < 0$

منه التابع $g(x)$ متناقص تماماً عندما $x > 1$

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0

الرسم : الخط البياني C هو اجتماع الخط C' مع نظيره بالنسبة لمبدأ الاحداثيات باعتبار $f(x)$ تابع فردي



حساب المساحة : $g(x) > 0$ على المجال $[2,3]$

نكامل بالتجزئة : $S = \int_2^3 g(x)dx = \int_2^3 ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) dx$

$u(x) = ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$	$v'(x) = 1$
$u'(x) = \frac{-2}{x^2-1}$	$v(x) = x$

$$S=\int_a^b (u.v') = [u.v]_a^b - \int_a^b u'.v \quad \Rightarrow S = [\,x.ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\,]_2^3 - \int_2^3 \frac{-2x}{x^2-1}dx$$

$$S = [\,x.ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\,]_2^3 + \int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx \quad \Rightarrow S = [\,x.ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\,]_2^3 + [\,ln(x^2-1)\,]_2^3$$

$$S = [3ln2 - 2ln3] + [ln8 - ln3] = \quad 3ln2 - 2ln3 + 3ln2 - ln3 = 6ln2 - 3ln3$$

$$S = ln64 - ln27 = ln(\frac{64}{27})$$

نـهـايـة حـلـول الـنـمـوذج الـوزاري الـسـابـع ـ عـام ٢٠١٩

مـع تـحـيـات الـمـدرس سـام عـلـي حـمـدان

دورات تعليمية لطلاب الشهادات وطلبة الجامعات

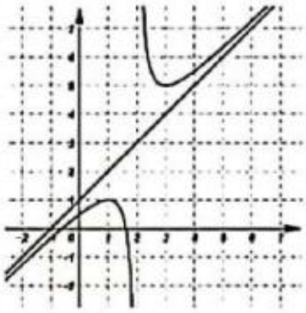
طرطوس - الدريكيش

0994 168 878

الجمهورية العربية السورية | الاسم:
وزارة التربية | الرقم:
نموذج لمادة الرياضيات لشهادة الدراسة الثانوية العامة دورة 2020 | المدة: ثلاث ساعات
الدرجة: ستمئة فقط

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية. (45° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: في الشكل المرسوم جانباً، ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$، والمطلوب:



1- جدْ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2- دلّ على القيم الحديّة للتابع وبيّن نوعها.

3- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

4- اكتب معادلة المقارب المائل.

5- اذكر احداثيات النقطة I مركز تناظر الخط البياني C_f.

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\cos x$

1- جدْ $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $f'(x)$ و $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

2- استنتج قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$.

السؤال الثالث: حلّ المتراجحة $e^x-1\le 6e^{-x}$.

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية. (45° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ادرس وضع المستقيمين d و d' المعرّفين كما يأتي:

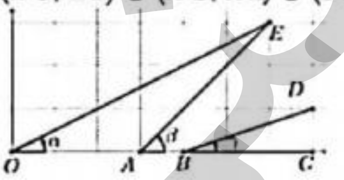
$$d:\begin{cases}x=2t-5\\ y=t-2\\ z=-\frac{1}{2}t+3\end{cases};t\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad d':\begin{cases}x=s+5\\ y=2\\ z=2s+5\end{cases};s\in\mathbb{R}$$

السؤال الثاني: جدْ الجذرين التربيعين للعدد العقدي $\omega=8-6i$.

السؤال الثالث: عيّن قيمة n في المعادلة الآتية: $P^5_{n+2}=45P^3_{n+1}$.

ثالثاً: حلّ التمارين الثلاثة الآتية (80° درجة للأول - 70° درجة للثاني - 70° درجة للثالث).

التمرين الأول: في الشكل المجاور α و β و γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجّهة $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OE})$ و $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ بالترتيب، والمطلوب:



1- اكتبْ كلاً من الأعداد العقديّة الآتية بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسي: $z_{\overline{OE}}$ و $z_{\overline{AE}}$ و $z_{\overline{BD}}$.

2- اكتب العدد العقدي $z_{\overline{OE}}.z_{\overline{AE}}.z_{\overline{BD}}$ بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسي.

3- استنتج المجموع $\alpha+\beta+\gamma$.

التمرين الثاني: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-2,2[$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)$، والمطلوب:

1- أثبت أنّ التابع f هو تابعٌ فرديّ، ثمّ ادرس تغيرات التابع على المجال $[0,2[$.

2- اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

3- ادرس الوضع النسبي بين C_f و T.

التمرين الثالث: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x-\sqrt{x^2+5}$، والمطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

2- أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α يقع في المجال $]1,2[$، ثمّ جد هذا الحل جبرياً.

3- استنتج مشتق التابع g المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=2\sin x-\sqrt{\sin^2 x+5}$.

<u>**رابعاً: حلّ المسألتين الآتيتين**</u> (100° درجة لكل مسألة).

المسألة الأولى: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)$، والمطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

2- أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط C_f، ثمّ ادرس الوضع النسبي.

3- حلّ المعادلة $f(x)=x$.

4- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة تدريجياً بالشكل $u_0=4$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ عند كل $n\in\mathbb{N}$، والمطلوب:

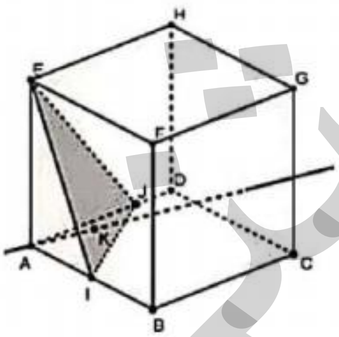
a- احسب u_1 و u_2.

b- استنتج من تزايد التابع f على المجال $[2,+\infty[$ صحة الخاصة $E(n): 2<u_{n+1}<u_n$ وذلك من أجل $n\in\mathbb{N}$.

c- استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة، واحسب نهايتها.

d- ارسم مقاربات C_f وارسم المستقيم $\Delta: y=x$، ثمّ ارسم C_f ومثّل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ على الرسم نفسه.

المسألة الثانية: ليكن $ABCDEFGH$ مُكعباً طول حرفه يساوي 4، ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$ والنقطة J تحقق العلاقة $4\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AD}$. نتأمل المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$، والمطلوب:



1- جدْ احداثيات رؤوس المكعب والنقطتين I و J.

2- أثبت أنّ معادلة المستوي (EIJ) هي $6x+4y+3z-12=0$.

3- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A وعمودياً على المستوي (EIJ)، ثمّ جدْ احداثيات النقطة K نقطة تقاطع d مع (EIJ).

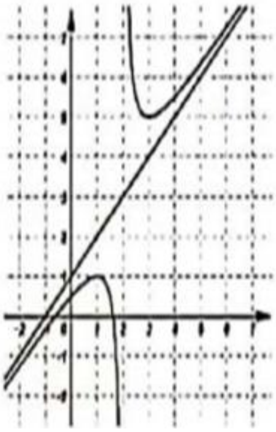
4- احسب مساحة المثلث AEJ ثمّ استنتج حجم رباعي الوجوه $I-AEJ$

5- احسب بُعد A عن المستوي (EIJ) واستنتج مساحة المثلث EIJ.

انتهت الأسئلة

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية.(45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: في الشكل المرسوم جانباً، ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$، والمطلوب:



1- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2- دل على القيم الحدية للتابع وبيّن نوعها.

3- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

4- اكتب معادلة المقارب المائل.

5- اذكر احداثيات النقطة I مركز تناظر الخط البياني C_f.

الطلب الأول : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

الطلب الثاني : $f(1) = 1$ قيمة كبرى محلياً ، $f(3) = 5$ قيمة صغرى محلياً

الطلب الثالث : حلان

الطلب الرابع : المقارب المائل يمر بالنقطتين $A(-1,0), B(0,1)$ ، معادلة المقارب $\Delta: y = mx + p$

نعوض احداثيات B فنجد : $p = 1$ ، ثم نعوض احداثيات A فنجد : $m = 1$ ومنه : $\Delta: y = x + 1$

الطلب الخامس : مركز التناظر هو نقطة تلاقي المقارب المائل Δ مع المقارب الشاقولي $x = 2$ ومنه : $I(2,3)$

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\cos x$

1- جد $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $f'(x)$ و $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

2- استنتج قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$.

الطلب الأول : $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ، $f'(x) = -\sin x$ ، $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

الطلب الثاني : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين ،

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$ حسب تعريف المشتق

السؤال الثالث: حل المتراجحة $e^x - 1 \le 6e^{-x}$.

$e^x - 1 \le 6e^{-x}$ ، شرط الحل $x \in R$ ، $e^x > 0$ أياً كانت $x \in R$

نضرب طرفي المتراجحة بـ e^x منه : $e^{2x} - e^x \le 6$ يعطي : $e^{2x} - e^x - 6 \le 0$

$(e^x - 3)(e^x + 2) \le 0$ ، باعتبار $e^x + 2 > 0$ فإن حلول المتراجحة تؤول إلى $e^x - 3 \le 0$

منه : $e^x \le 3$ يعطي : $e^x \le e^{ln3}$ ومنه : $x \le ln3$ ، $x \in]-\infty, ln3]$

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية (45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ادرس وضع المستقيمين d و d' المعرفين كما يأتي:

$$d : \begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = t - 2 \\ z = -\frac{1}{2}t + 3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad d' : \begin{cases} x = s + 5 \\ y = 2 \\ z = 2s + 5 \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$$

شعاع توجيه (d) هو $\vec{u} = (2,1,-\frac{1}{2})$ ، شعاع توجيه (d') هو $\vec{v} = (1,0,2)$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقلان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستقيمان (d) و (d') غير متوازيان

ندرس تقاطع المستقيمان بالحل المشترك لمعادلات d و d' :

$$\begin{cases} s + 5 = 2t - 5 & \dots(1) \\ 2 = t - 2 & \dots(2) \\ 2s + 5 = -\frac{1}{2}t + 3 & \dots(3) \end{cases}$$

من (2) $t = 4$ ، نعوض في (3) $2s + 5 = -2 + 3$ ومنه : $s = -2$

نعوض $t = 4, s = -2$ في (1) فنجد : $-2 + 5 = 2(4) - 5$ فالجملة محققة ، منه المستقيمان متقاطعان

نعوض قيمة s في المعادلات الوسيطية لـ (d') فنجد : $x = 3, y = 2, z = 1$ ومنه نقطة التقاطع $N(3,2,1)$

السؤال الثاني : جد الجذرين التربيعيين للعدد $\omega = 8 - 6i$

نفرض $z = x + iy$ هو الجذر التربيعي لـ ω

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 & \dots(1) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{36 + 64} = 10 & \dots(2) \\ 2xy = -6 & \dots(3) \end{cases}$$

بجمع (1) مع (2) نجد : $2x^2 = 18$ منه : $x^2 = 9$ يعطي : $x_1 = 3, x_2 = -3$

نعوض في (3) فنجد : $y_1 = -1, y_2 = 1$ ومنه : $z_1 = 3 - i, z_2 = -3 + i$

السؤال الثالث : عين قيمة n في المعادلة التالية : $P_{n+2}^{5} = 45\, P_{n+1}^{3}$

شرط الحل $n+2 \geq 5 \Rightarrow n \geq 3$ و $n+1 \geq 3 \Rightarrow n \geq 2$ ، منه شرط الحل $n \geq 3$

$$(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2) = 45(n+1)(n)(n-1)$$

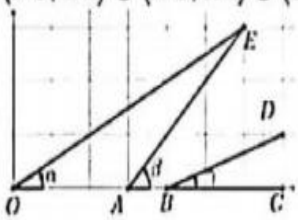
باعتبار $(n+1)(n)(n-1) \neq 0$ ، نقسم طرفي المعادلة على $(n+1)(n)(n-1)$

تؤول المعادلة إلى الشكل : $(n+2)(n-2) = 45$ منه : $n^2 - 4 = 45$

يعطي: $n^2 = 49$ ، إما $n = -7$ مرفوض أو $n = +7$ مقبول

ثالثاً: حل التمارين الثلاثة الآتية (80° درجة للأول - 70° درجة للثاني - 70° درجة للثالث).

التمرين الأول: في الشكل المجاور α و β و γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OE})$ و $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ بالترتيب، والمطلوب:



1- اكتب كلاً من الأعداد العقدية الآتية بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي: $z_{\overrightarrow{OE}}$ و $z_{\overrightarrow{AE}}$ و $z_{\overrightarrow{BD}}$.

2- اكتب العدد العقدي $z_{\overrightarrow{OE}}.z_{\overrightarrow{AE}}.z_{\overrightarrow{BD}}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي.

3- استنتج المجموع $\alpha+\beta+\gamma$.

نفرض معلماً متجانساً مباشراً $(o, \vec{u}, \vec{v})$ ، يصبح لدينا الاعداد العقدية التالية :

$$o = 0, a = 3, b = 4, c = 7, d = 7+i, e = 6+3i$$

بالشكل الجبري : $Z_{\overrightarrow{OE}} = e - o = 6+3i$, $Z_{\overrightarrow{AE}} = e - a = 3+3i$, $Z_{\overrightarrow{BD}} = d - b = 3+i$

$$|Z_{\overrightarrow{OE}}| = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}\ ,\ |Z_{\overrightarrow{AE}}| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}\ ,\ |Z_{\overrightarrow{BD}}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

بالشكل الأسي : $Z_{\overrightarrow{OE}} = 3\sqrt{5}e^{i\alpha}$ ، $Z_{\overrightarrow{AE}} = 3\sqrt{2}e^{i\beta}$ ، $Z_{\overrightarrow{BD}} = \sqrt{10}e^{i\gamma}$

بالشكل الأسي $Z = Z_{\overrightarrow{OE}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{BD}}$: $Z = 3\sqrt{5}e^{i\alpha}.3\sqrt{2}e^{i\beta}.\sqrt{10}e^{i\gamma}$ يعطي : $Z = 90e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$

بالشكل الجبري : $Z_{\overrightarrow{OE}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{BD}} = (6+3i)(3+3i)(3+i) = 3(2+i)\times 3(1+i)(3+i)$

$$Z = 9(2+i)(1+i)(3+i) = 9[2+2i+i-1](3+i) = 9[1+3i](3+i)$$

$Z = 9[3+i+9i-3]$ ، يعطي $Z = 90i = 90e^{\frac{\pi i}{2}}$

منه : $90e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = 90e^{\frac{\pi i}{2}}$ ومنه : $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$

التمرين الثاني: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-2,2[$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)$، والمطلوب:

المدرس سام علي حمدان
0994 168 878

1- أثبت أن التابع f هو تابع فردي، ثم ادرس تغيرات التابع على المجال $[0,2[$.

2- اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

3- ادرس الوضع النسبي بين C_f و T.

$f(x) = ln(\frac{x+2}{-x+2})$ ، $D_f =]-2,2[$ ، أياً كانت $x \in D_f$ كانت $-x \in D_f$

$f(x) = ln(x+2) - ln(-x+2)$ ، $-f(x) = -ln(x+2) + ln(-x+2)$

$f(-x) = ln(-x+2) - ln(x+2)$ ، منه : $f(-x) = -f(x)$

فالشرطان محققان وبالتالي $f(x)$ تابع فردي ، الخط البياني للتابع متناظر بالنسبة لمبدأ الاحداثيات

دراسة تغيرات $f(x)$ على المجال $I = [0,2[$ ، $f(0) = 0$ ، $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{-x+2} > 0$ ، $f'(x) > 0$ ، أياً كانت $x \in I$ ، فالتابع $f(x)$ متزايد تماماً

x	0		2
$f'(x)$	1	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

معادلة المماس : $T: y - f(0) = f'(0)(x-0)$ يعطي : $T: y = x$ ، حيث $f(0) = 0, f'(0) = 1$

الوضع النسبي : $g(x) = f(x) - y_T$ ، منه : : $g(x) = ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right) - x$ حيث $D_f = D_g$

$\lim_{x\to 2^-} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to -2^+} g(x) = -\infty$

$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{-x+2} - 1$ ، يعطي : $g'(x) = \frac{-x+2+x+2-4+x^2}{(x+2)(-x+2)}$

$g'(x) = \frac{x^2}{(x+2)(-x+2)} > 0$ أياً كانت $x \in D_g$ ، فالتابع $g(x)$ متزايد تماماً

x	-2		0		$+2$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
الوضع النسبي		C تحت T		C فوق T	

التمرين الثالث: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x-\sqrt{x^2+5}$، والمطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.
2- أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α يقع في المجال $]1,2[$، ثم جد هذا الحل جبرياً.
3- استنتج مشتق التابع g المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=2\sin x-\sqrt{\sin^2 x+5}$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$ عدم تعيين

$f(x)=\frac{(2x-\sqrt{x^2+5})(2x+\sqrt{x^2+5})}{2x+\sqrt{x^2+5}}=\frac{4x^2-x^2-5}{2x+\sqrt{x^2+5}}=\frac{3x^2-5}{2x+\sqrt{x^2+5}}$ ، منه : $f(x)=\frac{x\,(3x-\frac{5}{x})}{2x+|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}}}$

في جوار $+\infty$ تكون $|x|=+x$ منه : $f(x)=\frac{x\,(3x-\frac{5}{x})}{x(2+\sqrt{1+\frac{5}{x}})}=\frac{3x-\frac{5}{x}}{2+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=(3x-\frac{5}{x})\times\frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}$

منه : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=2-\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}>0$ لأن $\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}<1$ أياً كانت $x\in R$ ومنه $f(x)$ متزايد تماماً

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

المدرس سام علي حمدان

0994 168 878

$f(x)$ مستمر ومتزايد تماماً على R ومنه مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]1,2[$

$f(1)=2-\sqrt{6}<0$ ، $f(2)=1>0$ ، $f(1)\times f(2)<0$

منه $f(x)=0$ له حل وحيد على المجال $]1,2[$

تؤول المعادلة $f(x)=0$ إلى $2x=\sqrt{x^2+5}$ لحلها جبرياً نوجد شرط الحل

$x^2+5\geq 0$ أياً كانت $x\in R$ ، $2x\geq 0$ أياً كانت $x\in[0,+\infty[$ ومنه شرط الحل $x\in[0,+\infty[$

بتربيع طرفي المعادلة نجد : $4x^2=x^2+5$ ومنه : $3x^2=5$ يعطي : $x^2=\frac{5}{3}$

$x=-\sqrt{\frac{5}{3}}$ مرفوض ، $x=+\sqrt{\frac{5}{3}}$ مقبول ومنه : $a=+\sqrt{\frac{5}{3}}$

$g(x)=2sinx-\sqrt{sin^2x+5}$ ، منه : $g(x)=f\,(sinx)$

$g'(x)=(sinx)'.f'(sinx)\ \Rightarrow\ g'(x)=cosx\ (2-\frac{sinx}{\sqrt{sin^2x+5}})$

رابعاً: **حل المسألتين الآتيتين** (100° درجة لكل مسألة).

المسألة الأولى: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)$، والمطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

2- أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط C_f، ثمّ ادرس الوضع النسبي.

3- حلّ المعادلة $f(x)=x$.

4- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة تدريجياً بالشكل $u_0=4$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ عند كل $n\in\mathbb{N}$، والمطلوب:

a- احسب u_1 و u_2.

b- استنتج من تزايد التابع f على المجال $[2,+\infty[$ صحة الخاصة $E(n): 2<u_{n+1}<u_n$ وذلك من أجل $n\in\mathbb{N}$.

c- استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة، واحسب نهايتها.

d- ارسم مقاربات C_f وارسم المستقيم $\Delta: y=x$، ثمّ ارسم C_f ومثّل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ على الرسم نفسه.

الطلب الأول : $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

محور التراتيب مقارب لـ C عند $+\infty$

$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}$ ، $f'(x)=0$ عندما $x=-2$ مرفوض ، $x=+2$ مقبول

$f(2)=2$ قيمة صغرى محلياً

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-\infty \searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني : $g(x)=f(x)-y_\Delta$ يعطي : $g(x)=\frac{2}{x}$ حيث : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$

إذا Δ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

$g(x)=\frac{2}{x}>0$ أياً كانت $x\in[0,+\infty[$ وبالتالي C فوق Δ

الطلب الثالث : حلول المعادلة $f(x)=x$ تؤول إلى $x=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ يعطي : $x=\frac{x^2+4}{2x}$

يعطي : $2x^2=x^2+4$ منه : $x^2=4$ منه : $x=2$ مقبول لأن $f(x)$ معرف ومستمر عند 2

أو $x=-2$ مرفوض لأن $f(x)$ غير معرف -2

الطلب الرابع : a) $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+\frac{2}{u_n}$ ، $u_0=4$ ، منه : $u_1=\frac{5}{2}$ و $u_2=\frac{41}{20}$

b) نبرهن بالاستقراء الرياضي : $E(n): 2<u_{n+1}<u_n$

من أجل $n=0$ نجد : $E(0):\ 2<u_1=\frac{5}{2}<u_0=4$ ، فالقضية $E(0)$ صحيحة

نفترض صحة القضية من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

بالاستفادة من تزايد $f(x)$ على المجال $]2,+\infty[$

نجد : $f(2) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$ منه : $2 < u_{n+2} < u_{n+1}$ فالقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي : $E(n): 2 < u_{n+1} < u_n$ صحيحة أياً كانت n

C) وجدنا : $2 < u_{n+1} < u_n$ فالمتتالية متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى بالعدد 2 فهي متقاربة من 2

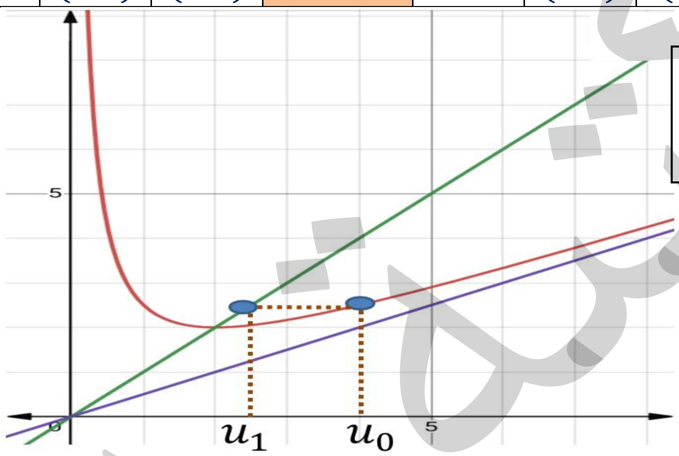
فنهاية المتتالية تمثل حلول المعادلة $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $f(x) = x$ منه : $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$

المستقيم Δ		
x	0	1
y	0	1
النقطة	(0,0)	(1,1)

المستقيم d		
x	0	2
y	0	1
النقطة	(0,0)	(2,1)

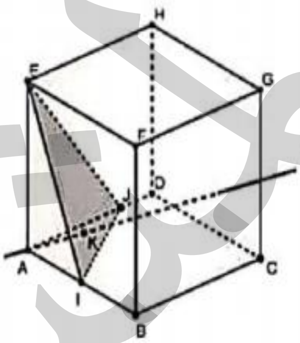
المدرس سام علي حمدان

0994 168 878



المسألة الثانية: ليكن $ABCDEFGH$ مُكعباً طول حرفه يساوي 4، ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$ والنقطة J تحقق العلاقة $4\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$

. نتأمل المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$، والمطلوب:



1- جذ احداثيات رؤوس المكعب والنقطتين I و J.

2- أثبت أنّ معادلة المستوي (EIJ) هي $6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

3- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A وعمودياً على المستوي (EIJ)، ثمّ جذ احداثيات النقطة K نقطة تقاطع d مع (EIJ).

4- احسب مساحة المثلث AEJ ثمّ استنتج حجم رباعي الوجوه $I-AEJ$

5- احسب بُعد A عن المستوي (EIJ) واستنتج مساحة المثلث EIJ.

انتهت الأسئلة

الطلب الأول : $A(0,0,0), B(4,0,0), D(0,4,0), E(0,0,4), C(4,4,0)$

$F(4,0,4), G(4,4,4), H(0,4,4), I(2,0,0), J(0,3,0)$

الطلب الثاني : $\overrightarrow{EJ} = (0,3,-4)$, $\overrightarrow{EI} = (2,0,-4)$ ، $\overrightarrow{EI}, \overrightarrow{EJ}$ مستقلان خطياً لعدم تناسب المركبات بينهما

نفرض الشعاع $\vec{n} = (a,b,c)$ هو الناظم على المستوي (EIJ) منه : $\vec{n}.\overrightarrow{EI} = 0$, $\vec{n}.\overrightarrow{EJ} = 0$

$(a,b,c)(2,0,-4) = 0$ منه : $2a - 4c = 0$ يعطي : $a = 2c$

$(a,b,c)(0,3,-4) = 0$ منه : $3b-4c=0$ يعطي : $b=\frac{4}{3}c$

من أجل $c=3$ نجد : $b=4$ و $a=6$ ومنه : $\vec{n}=(6,4,3)$

معادلة المستوي : $(EIJ): 6x+4y+3z+d=0$ ، نعوض احداثيات I في المعادلة فنجد : $d=-12$

منه : $(EIJ): 6x+4y+3z-12=0$

الطلب الثالث : الشعاع الموجه للمستقيم (d) هو ذاته $\vec{n}=(6,4,3)$ وبالتالي : $(d): \begin{cases} x=6t \\ y=4t \ ; t\in R \\ z=3t \end{cases}$

نعوض التمثيلات الوسيطية في معادلة المستوي فنجد : $36t+16t+9t-12=0$ ومنه : $t=\frac{12}{61}$

نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية فنجد : $K(\frac{72}{61},\frac{48}{61},\frac{36}{61})$

الطلب الرابع : المثلث EJA هو قائم في A ومنه : $S_{EIA}=\frac{AE\,.\,AJ}{2}=\frac{4\times3}{2}=6$

ارتفاع الهرم هو $h=[AI]=2$ ، قاعدته EJA ، حجم الهرم $V=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}\times2\times6=4$

الطلب الخامس : $dist(A,EIJ)=\frac{|-12|}{\sqrt{36+16+9}}=\frac{12}{\sqrt{61}}$

لحساب مساحة EIJ ، نعتبر ارتفاع الهرم $I-AEJ$ هو $h=dist(A,EIJ)=\frac{12}{\sqrt{61}}$ ، قاعدته EIJ

حجم الهرم $V=\frac{1}{3}S.h \Rightarrow 4=\frac{1}{3}\times S_{EIJ}\times\frac{12}{\sqrt{61}}$ ، منه : $S_{EIJ}=4\times3\times\frac{\sqrt{61}}{12}=\sqrt{61}$

نهاية حلول النموذج الوزاري الثامن / عام ٢٠٢٠

مع تحيات المدرس سام علي حمدان

دورات تعليمية لطلاب الشهادات وطلبة الجامعات

طرطوس - الدريكيش

0994 168 878

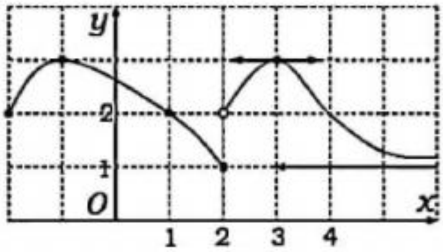
وزارة التربية
مادة الرياضيات

نموذج امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام 2020
(الفرع العلمي)

الاسم:
الرقم:
المدة: ثلاث ساعات.
الدرجة: 600

أولاً أجب عن سؤالين من بين الأسئلة الثلاثة الآتية. ('45 لكل سؤال)

السؤال الأول. ليكن C الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً



1. جد $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x),\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(f(x))$.
2. هل f اشتقاقي عند 2؟
3. جد $f(3), f'(3)$. وجد معادلة للمماس عند 3.
4. ما عدد القيم الحدية للتابع f؟

السؤال الثاني. لتكن المتتاليتين $(u_n)_{\geq 1}$ و $(v_n)_{\geq 1}$ المعرفتين وفق العلاقتين: $u_n = -\frac{1}{n}$ و $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

1. ادرس اطراد كل من $(u_n)_{\geq 1}$ و $(v_n)_{\geq 1}$.
2. أثبت أنّ المتتاليتين $(u_n)_{\geq 1}$ و $(v_n)_{\geq 1}$ متجاورتان .

السؤال الثالث. حل المعادلة $(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)=0$ ثم حل المتراجحة $(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\leq 0$

ثانياً أجب عن سؤالين من بين الأسئلة الثلاثة الآتية. ('45 لكل سؤال)

السؤال الأول. ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4. فيه I منتصف $[CD]$.

1. وضع النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BI}$.
2. احسب العدد $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

السؤال الثاني.

1. جد المجموع $S=1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^6$ بدلالة α.
2. ليكن $\alpha=e^{2i\pi/7}$. أثبت أنّ $1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^6=0$.

السؤال الثالث. يريد طالب أن يدرس مواده السبعة بشكل متتابع.

1. بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد لدراستها.
2. بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد إذا كانت المادة الأولى هي الرياضيات والأخيرة هي الفيزياء.

ثالثاً حل التمارين الثلاثة الآتية. ('70 للأول، '70 للثاني ، '80 للثالث)

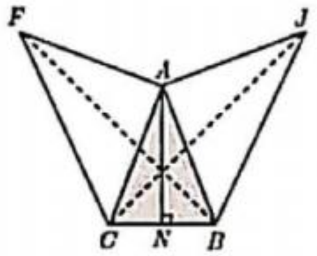
التمرين الأول. ليكن التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ والمعطى بالعلاقة $f(x)=\sqrt{x}\ln(1+x)$.

1. أثبت أن f اشتقاقي عند 0 ثم استنتج مجموعة تعريف f'.
2. جد $f'(x)$ على $[0,+\infty[$.
3. استنتج مشتق التابع g المعرف على المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$ وفق $g(x)=\sqrt{\cos x}\ln(1+\cos x)$.

تابع في الصفحة الثانية.

التمرين الثاني. لتكن النقاط $A(1,-1,2)$ و $B(2,1,0)$ و $C(2,3,-1)$ و $D(0,0,2)$ والمطلوب:

1. عين إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,1)$.
2. حدد S مجموعة النقاط M التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=6$
3. جد معادلة للمجموعة S.



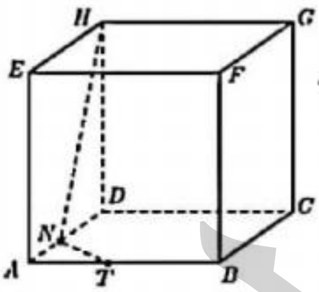
التمرين الثالث. ليكن ABC مثلثاً متساوي الساقين، رأسه A. ننشئ خارجه مثلثين قائمين ومتساويا الساقين ABJ و ACF. لتكن الأعداد العقدية a,b,c,j,f الممثلة للنقاط A,B,C,J,F بالترتيب.

1. جد بدلالة b و c العددين j و f.
2. اكتب العدد $\dfrac{f-b}{c-j}$ بالشكل الجبري.
3. أثبت أن $JC=BF$، وأن المستقيمين (CJ) و (BF) متعامدان.
4. نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1),(C,1),(F,3),(J,2)$ احسب $\dfrac{c}{b}$.

$\boxed{\text{رابعاً}}$ **حل المسألتين الآتيتين.** ($100'$ لكل مسألة)

المسألة الأولى.

ليكن لدينا المكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 1. و T نقطة من $[AB]$ وتحقق $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$، و N نقطة من $[AD]$ وتحقق $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$.



1. في المعلم المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ جد إحداثيات النقاط H,F,N,T.
2. جد الشعاعين $\overrightarrow{NT},\overrightarrow{NH}$ ثم جد معادلة المستوي (HNT).
3. جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EF).
4. استنتج نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT).
5. انكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT). ما طبيعته؟

المسألة الثانية.

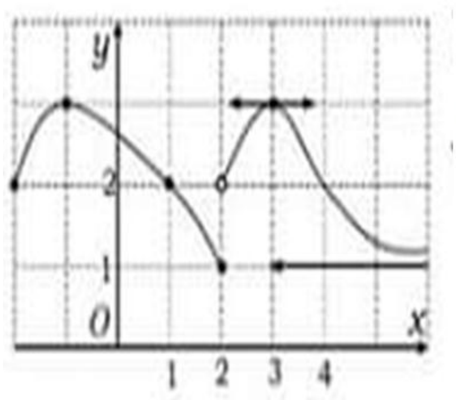
ليكن f التابع المعرف على المجال $I=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$. لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n=g(n)$. حيث g مقصور التابع f على $[1,+\infty[$.

1. ادرس تغيرات f على $]0,+\infty[$ ونظّم جدولاً بها واكتب معادلة كل مقارب.
2. ارسم الخط C على $]0,+\infty[$.
3. أثبت أنّ النقطة $A(-\frac{1}{2},0)$ هي مركز تناظر للخط C، ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع f.
4. نضع $S_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ أثبت أنّ $S_n=-\ln(n+1)$.
5. جد نهاية هذه المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$، وما نهاية $(S_n)_{n\geq1}$؟

انتهت الأسئلة

أولاً - أجب عن سؤالين مما يلي :

السؤال الأول : نجد جانباً خط بياني C للتابع $f(x)$



١) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ ، $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

٢) هل $f(x)$ اشتقاقي عند 2 ؟

٣) جد $f(3), f'(3)$ ثم أوجد معادلة المماس عند 3

٤) ما عدد القيم الحدية للتابع ؟

الطلب الأول : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ، $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ ، $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

الطلب الثاني : $f(x)$ ليس اشتقاقي عند 2 لأنه غير مستمر عندها .

الطلب الثالث : $f(3) = 3$, $f'(3) = 0$, $T: y = 3$

الطلب الرابع : أربع قيم حدية $f(-2) = 2 , f(-1) = 3 , f(2) = 1 , f(3) = 3$

السؤال الثاني : لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1} , (v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين وفق : $u_n = -\frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

١) ادرس اطراد المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1} , (v_n)_{n\geq 1}$

٢) أثبت أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1} , (v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتين .

الطلب الأول : $f(x) = -\frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ كل من $f(x)$ و $g(x)$ اشتقاقيان على المجال $[1, +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ ، منه $f(x)$ متزايد تماماً فالمتتالية u_n متزايدة تماماً

$g'(x) = \frac{\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{-x}{(\sqrt{x^2+1})(x^2+1)} < 0$ ، $g(x)$ متناقص تماماً فالمتتالية v_n متناقصة تماماً

الطلب الثاني : من الطلب السابق وجدنا أن u_n متزايدة تماماً و v_n متناقصة تماماً فالشرط الأول للتجاور محقق

$\lim_{x\to\infty}(v_n) = \lim_{x\to\infty}(u_n) = 0$ ، فالشرط الثاني محقق وبالتالي $(u_n)_{n\geq 1} , (v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتين

السؤال الثالث: حل المعادلة $\left(e^x - \frac{1}{2}\right)(e^x - 1) = 0$ ، ثم حل المتراجحة $\left(e^x - \frac{1}{2}\right)(e^x - 1) \leq 0$

حلول المعادلة : إما $e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -ln2$ أو $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

x	$-ln2 \quad\quad 0$
$\left(e^x-\frac{1}{2}\right)(e^x-1\,)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

منه حلول المتراجحة $\left(e^x-\frac{1}{2}\right)(e^x-1\,)\le 0$ هي : $S=[-ln2,0]$

ثانياً - أجب عن سؤالين مما يلي :

السؤال الأول : $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4 ، فيه I منتصف CD

١) وضع النقطة M التي تحقق العلاقة : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BI}$

٢) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ * تذكير * رباعي الوجوه المنتظم عبارة عن أربع مثلثات متساوية الأضلاع

الطلب الأول $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AI}\right)+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}$

يعطي $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$ ، منه M هي ذاتها B

الطلب الثاني : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos\frac{\pi}{3}=4\times 4\times\frac{1}{2}=8$

السؤال الثاني :

١) احسب المجموع $s=1+a+a^2+\cdots+a^6$ بدلالة a

٢) بفرض $a=e^{2\pi i/7}$ ، أثبت أن : $1+a+a^2+\cdots+a^6=0$

١) نلاحظ أن الحدود عبارة عن مجموع حدود لمتتالية هندسية اساسها a وحدها الأول واحد ، يعطي $S=\frac{1-a^7}{1-a}$

٢) $S=\frac{1-a^7}{1-a}=\frac{1-(e^{2\pi i/7})^7}{1-e^{2\pi i/7}}=\frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{2\pi i/7}}=\frac{1-1}{1-e^{2\pi i/7}}=0$

السؤال الثالث : يريد طالب أن يدرس مواده السبعة بشكل متتابع

١) بكم طريقة يمكن أن يرتب مواده لدراستها

٢) بكم طريقة يمكن أن يرتب دراسة مواده ، إذا كانت المادة الأولى رياضيات والاخيرة فيزياء .

الطلب الأول : $7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$

الطلب الثاني : $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

ثالثاً – حل التمارين الثلاثة التالية :

التمرين الأول : ليكن التابع $f(x)$ العرف على $[0,+\infty[$ ، حيث $f(x)=\sqrt{x}\ln(1+x)$

١) أثبت أن $f(x)$ اشتقاقي عند الصفر ، ثم استنتج مجموعة تعريف $f'(x)$

٢) جد $f'(x)$ على المجال $[0,+\infty[$

٣) استنتج مشتق التابع $g(x)$ المعرف على المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$ وفق: $g(x)=\sqrt{\cos x}\,.\,\ln(1+\cos x)$

الطلب الأول : $h(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{x}\ln(1+x)}{x}=\sqrt{x}\times\frac{\ln(1+x)}{x}$

حسب المبرهنة : $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=1$

يعطي : $\lim_{x\to0}h(x)=0\times1=0$ وبالتالي $f(x)$ اشتقاقي عند الصفر

نعلم أن $\ln(1+x)$ اشتقاقي أياً كانت $x>-1$ و $\sqrt{x}$ اشتقاقي أيا كانت $x>0$ بالتالي $f(x)$ اشتقاقي أيا كانت $x>0$ ، لكن وجدنا أن f يقبل الاشتقاق عند الصفر ، منه مجموعة تعريف $f'(x)$ هي : $[0,+\infty[$

الطلب الثاني : $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\ln(1+x)+\sqrt{x}\times\frac{1}{1+x}=\frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+x}$

الطلب الثالث : $g(x)=f(\cos x)$

نستفيد من قاعدة اشتقاق تابع مركب ، حيث $g'(x)=f'(\cos x)\times(\cos x)'$

منه : $g'(x)=-\sin x\times f'(\cos x)$ ، يعطي $g'(x)=-\sin x\left[\frac{\ln(1+\cos x)}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{\sqrt{\cos x}}{1+\cos x}\right]$

التمرين الثاني : لتكن النقط $A(1,-1,2)$, $B(2,1,0)$, $C(2,3,-1)$, $D(0,0,,2)$

١) عيّن احداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة $(A,1),(B,2),(C,2),(D,1)$

٢) جد S مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=6$

٣) أوجد معادلة المجموعة S

الطلب الأول : $x_G\left(\frac{1+4+4+0}{6},\frac{-1+2+6+0}{6},\frac{2+0-2+2}{6}\right)\Rightarrow x_G\left(\frac{3}{2},\frac{7}{6},\frac{1}{3}\right)$

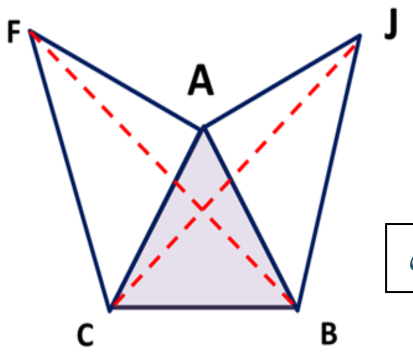
الطلب الثاني : $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=\|6\overrightarrow{MG}\|=6\|\overrightarrow{MG}\|$

إذا مجموعة النقط M التي تحقق $6\|\overrightarrow{MG}\|=6\Rightarrow\|\overrightarrow{MG}\|=1$

هي كرة مركزها G ونصف قطرها $R=1$

الطلب الثالث : $S:\ (x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{7}{6})^2+(z-\frac{1}{3})^2=1$

التمرين الثالث : ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A ،
ننشئ خارجه مثلثين قائمين ومتساويا الساقين ABJ, ACF
لتكن الأعداد العقدية a, b, c, f, j الممثلة للنقاط A, B, C, F, J
بالترتيب ، نختار المعلم المتجانس والمباشر $(A, \vec{u}, \vec{v})$



المدرس سام علي حمدان

١) جد بدلالة b, c العددين f, j
٢) اكتب العدد $\frac{f-b}{c-j}$ بالشكل الجبري
٣) أثبت أن $JC = BF$ ، وأن المستقيمين $(JC), (BF)$ متعامدان .
٤) نفترض A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1), (C,1), (F,3), (J,2)$ ، احسب $\frac{c}{b}$

الطلب الأول : نختار معلم متجانس $(A, \vec{u}, \vec{v})$ فتكون $a = 0$

المثلثان ABJ, ACF كل منهما قائمان في A ومتساويا الساقين ، لدينا J صورة B وفق دوران ربع دورة موجبة مركزه A ، F صورة C وفق دوران ربع دورة سالبة مركزه A ، منه $j = ib \ , \ f = -ic$

الطلب الثاني : $\frac{f-b}{c-j} = \frac{-ic-b}{c-ib} = \frac{-i(c-ib)}{(c-ib)} = -i$

الطلب الثالث : $|-i| = 1 = \left|\frac{f-b}{c-j}\right| = \frac{\|\overrightarrow{FB}\|}{\|\overrightarrow{JC}\|}$ ، $[JC] = [BF]$

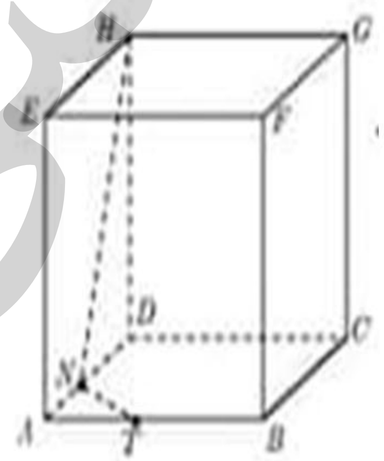
باعتبار $\frac{-\pi}{2} = arg(-i) = arg\left(\frac{f-b}{c-j}\right)$ ، فالمستقيمان $(JC), (BF)$ متعامدان

الطلب الرابع : $\frac{b+c+3f+2j}{7} = a \Rightarrow \frac{b+c+2ib-3ic}{7} = 0$

$$\Rightarrow b + 2ib = 3ic - c \Rightarrow b(1+2i) = c(3i-1)$$

بالتالي : $\frac{c}{b} = \frac{(1+2i)}{(3i-1)} = \frac{(1+2i)(-3i-1)}{(3i-1)(-3i-1)} = \frac{-3i-1+6-2i}{10} = \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

المسألة الأولى : ليكن $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1 ،
T نقطة من $[AB]$ تحقق $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ ، النقطة N من $[AD]$ تحقق $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$



١) في المعلم المتجانس $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ ، جد احداثيات H, F, N, T
٢) جد الشعاعين $\overrightarrow{NT}, \overrightarrow{NH}$ ، ثم جد معادلة المستوي (HNT)
٣) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EF)
٤) استنتج نقطة تقاطع (EF) مع المستوي (HNT)
٥) اذكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT) ، ما طبيعته ؟

المدرس سام علي حمدان

الطلب الأول : $H\ (0,1,1), F(1,0,1), N\left(0,\ \frac{2}{5}\ ,0\right), T(\frac{2}{5}, 0,0)$

الطلب الثاني : $\overrightarrow{NH} = \left(0\ , \frac{3}{5}\ , 1\ \right)$ و $\overrightarrow{NT} = \left(\frac{2}{5}\ , -\frac{2}{5}\ , 0\ \right)$

$\vec{u} = (0,3,5) = 5\overrightarrow{NH}$ ، $\vec{v} = (2,-2,0) = 5\overrightarrow{NT}$ ، منه $\vec{u}\ , \vec{v}$ هما شعاعي توجيه للمستوي $(\ HNT\ )$

نفرض الشعاع $\vec{n} = (a, b, c)$ هو الشعاع الناظم للمستوي HNT ، حيث $\vec{n}.\vec{u} = 0\ , \vec{n}.\vec{v}\ = 0$

منه $(a, b, c)(2, -2,0) = 0 \Rightarrow a = b \dots (1)$ و $(a, b, c)(0,3,5) = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{3}c \dots (2)$

بفرض $c = -3$ نجد أن $a = b = 5$ ، منه $\vec{n} = (5,5, -3)$

يعطي : $(HNT):\ 5x + 5y - 3z + d = 0$

نعوض احداثيات H في المعادلة فنجد أن : $d = -2$ ، منه $(HNT):\ 5x + 5y - 3z - 2 = 0$

الطلب الرابع : $E(0,0,1)$ بالتالي : $\overrightarrow{EF} = (1,0,0)$ منه : $(\ EF\ ): \begin{cases} x = t \\ y = 0\ \ ; t \in R \\ z = 1 \end{cases}$

الطلب الخامس : نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم $(\ EF\ )$ في معادلة $(\ HNT\ )$

$$5t + 5(0) - 3(1) - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

نعوض قيمة t بالمعادلات الوسيطية فنجد $M(1,0,1)$ وهي ذاتها $F(1,0,1)$

الطلب السادس : من الطلب السابق وجدنا أن F جزء من المستوي (HNT)

المستقيم $(\ NT\ )$ محتوى في الوجه $(\ ABCD\ )$ وبالتالي مقطع المستوي (HNT) مع الوجه $(\ EFGH\ )$

هو مستقيم يوازي $(\ NT\ )$ وهو المستقيم (HF) وبالتالي مقطع (HNT) مع المكعب هو $(HNTF)$

ومنه $\overrightarrow{TF} = \left(\frac{3}{5}\ ,0\ ,1\ \right)$: $\|\overrightarrow{TF}\| = \|\overrightarrow{NH}\|\ = \frac{\sqrt{34}}{5}$ ، فالشكل $(HNTF)$ هو شبه منحرف متساوي الساقين

المسألة الثانية : : ليكن التابع $f(x)$ العرف على $I =]-\infty, -1[\cup]\ 0\ , +\infty[$ ، حيث $f(x) =\ ln(\frac{x}{1+x})$

ولتكن $(\ u_n\ )_{n\geq1}$ متتالية معرفة على N^* وفق : $u_n = f\ (n)$

١) ادرس تغيرات $f(x)$ على المجال $]\ 0\ , +\infty[$ ، ونظم جدولاً بها واكتب معادلة كل مقارب

٢) ارسم C على المجال $]\ 0\ , +\infty[$

٣) أثبت أن $A\ (-\ \frac{1}{2}\ ,0\ )$ هي مركز تناظر للخط C ، ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع $f(x)$

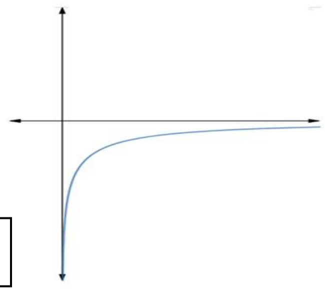
٤) نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ، أثبت أن $S_n = -\ ln(\ n + 1\ )$

٥) جد نهاية المتتالية $(\ u_n\ )_{n\geq1}$ ، وما نهاية $(\ S_n\ )_{n\geq1}$ ؟

الطلب الأول : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ ، $x = 0$ مقارب شاقولي ، $x = 0$ مقارب أفقي

$f(x) = ln(x) - ln(x+1)$ منه : $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x^2+x} = \frac{1}{x^2+x} > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+ \quad +$
$f(x)$		$-\infty \nearrow 0$



المدرس سام علي حمدان

الشرط الأول لتناظر $A(a,b)$ بالنسبة للتابع

أياً كانت $x \in D_f$ كان $2a - x \in D_f$ حيث $2a - x = -1 - x$

نعلم أن عندما $x \in]0,+\infty[$ كانت $-x \in]-\infty,0[$ يعطي $-1-x \in]-\infty,-1[$

كما نعلم $x \in]-\infty,-1[$ كانت $-x \in]1,+\infty[$ يعطي $-1-x \in]0,+\infty[$

بالتالي $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ كان $-1-x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ ، فالشرط الأول محقق

الشرط الثاني لتناظر $A(a,b)$ بالنسبة للتابع : $f(x) + f(2a-x) = 2b$

$$f(-1-x) = ln(\frac{-1-x}{1-1-x}) = ln[\frac{-(1+x)}{-x}] = ln(\frac{1+x}{x})$$

ومنه : $f(-1-x) = ln(1+x) - ln(x)$

ونعلم أن : $f(x) = ln(x) - ln(x+1)$ ، منه : $f(x) + f(-1-x) = 0 = 2b$ ، فالشرط الثاني محقق

بالتالي النقطة $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ هي مركز تناظر للتابع ، منه الخط البياني للتابع على $]-\infty,-1[$

هو متناظر مع الخط البياني بالنسبة للنقطة A على المجال $]0,+\infty[$

الطلب الرابع : $u_n = ln\left(\frac{n}{1+n}\right)$ وبالتالي $u_1 = ln\left(\frac{1}{2}\right), u_2 = ln\left(\frac{2}{3}\right), u_3 = ln\left(\frac{3}{4}\right)$

نعلم أن $ln\left(\frac{1}{2}\right) + ln\left(\frac{2}{3}\right) + ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + ln\left(\frac{n}{1+n}\right) = \ln(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1})$

بالتالي $S_n = ln\left(\frac{1}{1+n}\right) = -ln(n+1)$ وهو المطلوب .

الطلب الخامس : $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ، $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$

.... نـهـايـة حـلـول الـنـمـوذج الـوزاري التاسع عام ٢٠٢٠ ....

المـدرس سـام عـلـي حـمـدان / 0994 168 878

الجمهورية العربية السورية | الاسم:

وزارة التربية | الرقم:

نموذج لمادة الرياضيات لشهادة الدراسة الثانوية العامة دورة 2020 | المدة: ثلاث ساعات

الدرجة: ستمئة فقط

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية. (45° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نجدُ جانباً جدول تغيرات التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	6

1- جدْ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- اذكر قيمة حدّيّة للتابع وبيّن نوعها.

3- هل $f(5)=4$ قيمة حديّة للتابع؟

4- اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني للتابع.

5- اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x)=\ln(f(x))$.

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرّف على المجال $[0,3]$ وفق $f(x)=(x-3)\sqrt{x(3-x)}$، جدْ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$، واستنتج أنّه اشتقاقي عند الـ $x=3$.

السؤال الثالث: $ABCD$ رباعي وجوه، مركز ثقله G، فيه K مركز ثقل الوجه BCD أثبت أنّ النقاط G و A و K تقع على استقامة واحدة، وعيّن موضع G على القطعة المستقيمة $[AK]$.

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية. (45° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: صِف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقات: $x^2+z^2=16$ و $2\le y\le5$

السؤال الثاني: حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2(1+i)z-4+2i=0$.

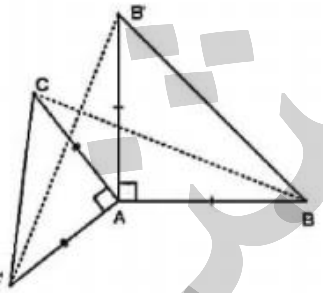
السؤال الثالث: لتكن المجموعة $S=\{2,3,5,8,9\}$، والمطلوب:

1- كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S ؟

2- كم عدداً من مضاعفات العدد 5 ومؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S ؟

ثالثاً: حلّ التمارين الثلاثة الآتية (70° درجة للأول - 70° درجة للثاني - 80° درجة للثالث).

التمرين الأول: في الشكل المجاور المثلثان ABB' و ACC' كلٌ منهما قائمٌ في A ومتساوي الساقين، تأمل المعلم المتجانس والمباشر $(A,\vec{u},\vec{v})$، والمطلوب:



1- اكتب $z_{B'}$ بدلالة z_B ، و $z_{C'}$ بدلالة z_C.

2- احسب $\dfrac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}$.

3- استنتج أنّ $(BC)\perp(B'C')$ و $BC=B'C'$.

التمرين الثاني: لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة تدريجياً وفق: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+4u_n}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

1- أثبت بالتدريج أنّ $u_n > 0$ أيّاً كان العدد الطبيعي n.

2- أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ متتالية حسابيّة، ثمّ اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3- ليكن S_n المجموع المعرّف بالشكل $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$، اكتب S_n بدلالة n واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الثالث: ليكن التابع f المعرّف على $]-5,+\infty[$ وفق $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$، والمطلوب:

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

2- جد عدداً حقيقياً A يحقق الشرط: إذا كان $x > A$، كان $f(x)$ في المجال $]1.99, 2.01[$

3- جد $f'(x)$ ثمّ استنتج $g'(x)$، حيث إنّ $g(x) = \dfrac{2\sin x + 1}{\sin x + 5}$.

رابعاً: حلّ المسألتين الآتيتين (100 درجة لكل مسألة).

المسألة الأولى: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق: $f(x) = 2x - 1 - \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

1- أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ وفي جوار $-\infty$، وادرس الوضع النسبي للخط C_f بالنسبة للمقارب d.

2- ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها، واكتب معادلات المقاربات الشاقولية للخط C_f.

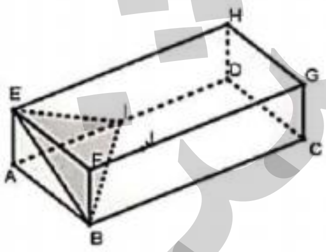
3- أثبت أنّ $f(x) + f(-x) = -2$.

4- استنتج أنّ C_f متناظرٌ بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$.

5- ارسم ما وجدته من مقاربات ثمّ ارسم C_f.

6- استنتج رسم C_g للتابع C_g المعرّف وفق $g(x) = -2x + 1 - \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

المسألة الثانية: ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ و $AD = 4$ و $AE = 1$، ولتكن I منتصف $[AD]$ والنقطة J تحقق $\overline{FJ} = \dfrac{1}{4}\overline{FG}$. نتأمل المعلم المتجانس $(A, \frac{1}{2}\overline{AB}, \frac{1}{4}\overline{AD}, \overline{AE})$، والمطلوب:



1- جدْ احداثيات رؤوس متوازي المستطيلات واحداثيات كل من I و J.

2- أثبت أنّ معادلة المستوي (EIB) هي $x + y + 2z - 2 = 0$.

3- بيّن نوع المثلث EIB، ثم احسب مساحته.

4- احسب بُعد G عن المستوي (EIB)، واستنتج حجم رباعي الوجوه $G - EIB$.

5- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J وعمودياً على المستوي (EIB).

6- استنتج أنّ المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$.

انتهت الأسئلة

أولاً - أجب عن سؤالين مما يلي :

السؤال الأول : نجد جانباً جدول تغيرات التابع $f(x)$ المعرف على R

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	6

١) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

٢) اذكر قيمة حدية للتابع وبيّن نوعها .

٣) هل $f(5)=4$ قيمة حدية للتابع ؟

٤) اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني للتابع

٥) اكتب مجموعة تعريف التابع $g(x)$ حيث $g(x)=ln(f(x))$

١) من الجدول $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

٢) $f(2)=0$ قيمة حدية صغرى

٣) $f(5)=4$ ليست قيمة حدية لأن المشتق لم يغير اشارته عندها

٤) $y=6$, $y=2$ مقاربان افقيان

٥) مجموعة تعريف $g(x)$ هي $R\setminus\{2\}$

السؤال الثاني : ليكن التابع $f(x)$ المعرف على $[0\,,3]$ وفق : $f(x)=(x-3)\sqrt{x(3-x)}$ ، جد $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ واستنتج أنه اشتقاقي عندما $x=3$

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{(x-3)\sqrt{x(3-x)}}{x-3} = \lim_{x\to3}\sqrt{x(3-x)} = 0$$

ومنه $f(x)$ اشتقاقي عندما $x=3$

السؤال الثالث : $ABCD$ رباعي وجوه ، مركز ثقله G ، فيه K مركز ثقل الوجه BCD ،
أثبت أن النقاط $K\,,A\,,G$ تقع على استقامة واحدة وعيّن موضع G على القطعة $[AK]$

باعتبار G مر ثقل رباعي الوجوه فتكون النقط مثقلة وفق : $(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$ ومنه $(G,4)$

باعتبار K مركز ثقل الوجه BCD فإن $(K,3)$ ، حيث $(B,1),(C,1),(D,1)$

حسب الخاصة التجميعية تصبح G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(A,1),(K,3)$

ومنه $K\,,A\,,G$ تقع على استقامة واحدة ، موضع G على القطعة $[AK]$ تحقق العلاقة $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AK}$

المدرس سام علي حمدان

0994 168 878

ثانياً - أجب عن سؤالين مما يلي :

السؤال الأول : صف مجموعة النقط $M\,(\,x\,,y\,,z\,)$ التي تحقق احداثياتها $x^2 + z^2 = 16$ و $2 \le y \le 5$

المجموعة M عبارة عن اسطوانة محورها محور التراتيب وقاعدة كل منها دائرة نصف قطرها $R = 4$

احداثيات مركزي قاعدتي الاسطوانة $O(0\,,2\,,0\,)\,,O'(\,0\,,5\,,0\,)$

السؤال الثاني : حل في C المعادلة التالية : $z^2 - 2(1+\mathrm{i})\mathrm{z} - 4 + 2\mathrm{i} = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-2(1+i)]^2 - 4(-4+2i) = 4(1+2i-1\,) + 16 - 8i \Rightarrow \Delta = 16$$

منه : $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2i+4}{2} = 3 + i\,,\; z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2i-4}{2} = -1 + i$

السؤال الثالث : لتكن المجموعة $S = \{\,2,3,5,8,9\,\}$ والمطلوب :

١) كم عدد مختلف الأرقام مؤلفاً من ثلاثة منازل يمكن تشكيله من عناصر S .

٢) كم عدد من مضاعفات العدد 5 ومؤلفاً من ثلاثة منازل يمكن تشكيله من عناصر S .

الطلب الأول :

الآحاد	العشرات	المئات
5	4	3

يمكن تشكيل 60 عدد من S حيث $5 \times 4 \times 3 = 60$

الطلب الثاني :

الآحاد	العشرات	المئات
1	5	5

يكون العدد من مضاعفات العدد 5 إذا كان احاده 5 أو 0
يتشكيل 25 عدد من مضاعفات العدد 5 أرقامه من S

حيث $5 \times 5 \times 1 = 25$

ثالثاً – حل التمارين الثلاثة التالية :

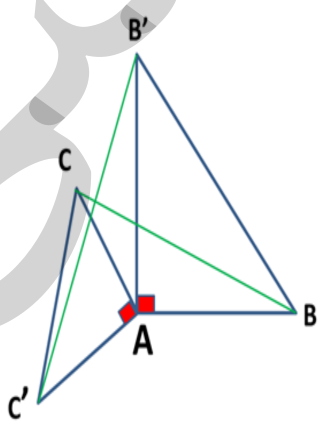
التمرين الأول : في الشكل المجاور ABB' و ACC' كل منهما قائم في A ومتساوي الساقين

نتأمل المعلم المتجانس والمباشر $(\,A,\vec{u},\vec{v}\,)$ ، والمطلوب :

١) جد $z_{B'}$ بدلالة z_B ، و $z_{C'}$ بدلالة z_C

٢) احسب $\frac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}$

٣) استنتج أن $(\,BC\,)$ و $(\,B'C'\,)$ متعامدان ، وأن $BC = B'C'$



المدرس سام علي حمدان

الطلب الأول : لدينا B' صورة B وفق دوران مباشر مركزه A و C' صورة C وفق دوران مباشر مركزه A
ومنه $z_{B'} = i\, z_B$ و $z_{C'} = i\, z_C$

الطلب الثاني : $\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C} = \frac{i\, z_B - i\, z_C}{z_B - z_C} = i$

الطلب الثالث : $arg\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{C'B'}\right) = arg\left(\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$ ومنه (CB) و $(C'B')$

متعامدان ، كما نجد : $\|i\| = 1 = \frac{\|z_{B'} - z_{C'}\|}{\|z_B - z_C\|} = \frac{\|\overrightarrow{C'B'}\|}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ يعطي $\frac{\|\overrightarrow{C'B'}\|}{\|\overrightarrow{CB}\|} = 1$ ومنه $[B'C'] = [BC]$

التمرين الثاني : $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n

١) أثبت بالتدريج أن $u_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n

٢) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية،
ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم عبارة u_n بدلالة n

٣) ليكن S_n المجموع المعرف بالشكل : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ ،
اكتب S_n بدلالة n واستنتج $\lim_{x\to+\infty} S_n$

١) لدينا القضية $E(n) : u_n > 0$ من أجل $n = 0$ نجد أن : $E(0) : u_1 = \frac{2}{9} > 0$ فهي صحيحة

نفترض صحة $E(n)$ من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

حسب الفرض $u_n > 0$ ومنه $4\,u_n > 0$ و بالتالي $1 + 4\,u_n > 0$ يعطي $\frac{u_n}{1+4u_n} = u_{n+1} > 0$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة من أجل $n+1$ ومنه $E(n)$ صحيحة من أجل n

٢) $v_n = \frac{1}{u_n}$ ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}$ يعطي $v_{n+1} - v_n = \frac{1+4u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{4u_n}{u_n} = 4$

ومنه v_n حسابية أساسها $r = 4$ حيث $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$

$v_n = v_0 + nr \Rightarrow v_n = \frac{1}{2} + 4n$ يعطي $v_n == \frac{1+8n}{2}$

نعلم أن $v_n = \frac{1}{u_n}$ ومنه $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{2}{1+8n}$

٣) $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ هي مجموع حدود متتالية حسابية
حدها الأول v_0 وحدها الأخير v_n وعدد الحدود يساوي $(n+1)$

قانون مجموع متتالية حسابية $S_n = \frac{n\,(a+l)}{2}$ حيث n عدد الحدود ، a هو الحد الأول و l هو الحد الأخير

$S_n = \frac{(n+1)\,(v_0+v_n)}{2} = \frac{(n+1)(\frac{1}{2}+\frac{1+8n}{2})}{2} = \frac{(n+1)(1+4n)}{4}$ ، نلاحظ وضوحاً أن $\lim_{x\to+\infty} S_n = +\infty$

التمرين الثالث : ليكن $f(x)$ المعرف على $]-5,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{2x+1}{x+5}$

١) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

٢) جد عدداً حقيقياً A يحقق الشرط إذا كان $x>A$ ، كان $f(x)$ في المجال $]1.99\,,2.01[$

٣) جد $f'(x)$ ، ثم استنتج $g'(x)$ ، حيث أن $g(x)=\frac{2sinx+1}{sinx+5}$

١) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{x\to2} f(x)=\frac{5}{7}$

٢) لدينا المجال $[a,b]$ $c=\frac{a+b}{2}=2\,,r=\frac{b-a}{2}=\frac{1}{100}$ ، حيث c مركز المجال و r نصف قطر المجال

$$|f(x)-c|<r\Rightarrow\left|\frac{2x+1}{x+5}-2\right|<\frac{1}{100}\Rightarrow\left|\frac{2x+1-2x-10}{x+5}\right|<\frac{1}{100}\Rightarrow\left|\frac{-9}{x+5}\right|<\frac{1}{100}$$

وباعتبار x تسعى لقيم كبيرة فإن $\frac{9}{x+5}<\frac{1}{100}$ $\Leftarrow$ $\frac{x+5}{9}>100$ ومنه $x+5>900$

يعطي $x>895$ ومنه $A=895$

٣) $f'(x)=\frac{2x+10-2x-1}{(x+5\ )^2}=\frac{9}{(x+5\ )^2}$ ،

لدينا $u=sinx$ وبالتالي $g(x)=f(u)$ حيث $u'=cosx$

نطبق قاعدة اشتقاق تابع مركب $g'(x)=f'(u)\times u'$ ومنه : $g'(x)=\frac{9cosx}{(sinx+5\ )^2}$

رابعاً – حل المسألتين التاليتين :

المسألة الأولى :

ليكن C_f الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على المجال $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
وفق : $f(x)=2x-1-ln(\frac{x+1}{x-1}\ )$

١) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $-\infty$ و في جوار $+\infty$
ثم ادرس الوضع النسبي بين C_f والمستقيم d

٢) ادرس تغيرات $f(x)$ ونظم جدولاً بها ، ثم اكتب معادلات المقاربات الشاقولية للخط C_f

٣) أثبت أن $f(x)+f(-x)=-2$

٤) استنتج أن C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$

٥) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f

٦) استنتج رسم C_g للتابع $g(x)$ المعرف وفق $g(x)=-2x+1-ln(\frac{x-1}{x+1}\ )$

الطلب الأول : نكتب $h(x) = f(x) - y_{\Delta} \Rightarrow h(x) = -ln(\frac{x+1}{x-1})$ ، نعلم أن

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}h(x) = \lim_{x\to-\infty}h(x) = -\ln(1) = 0$

وبالتالي d مقارب مائل للخط C_f في جوار $-\infty$ و في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي بين C_f والمستقيم d ، ندرس اشارة $h(x)$ من خلال دراسة تغيرات $h(x)$ على D_f

$h(x) = ln(x-1) - ln(x+1)$ ومنه $h'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x+1}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1} > 0$

$\lim_{x\to-1^-} ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to-1^-} h(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to1^+} h(x) = -\infty$

x	$-\infty$ $\quad$ -1		1 $\quad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$		$+$
$h(x)$	$0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0$
$h(x)$	$++$		$--$
الوضع النسبي	C يقع فوق d		C يقع تحت d

الطلب الثاني : بالاستفادة $\lim_{x\to+\infty}h(x) = \lim_{x\to-\infty}h(x) = 0$

وضوحاً نجد أن $\lim_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x) = -\infty$

وجدنا $\lim_{x\to-1^-} h(x) = +\infty$ ومنه وضوحاً $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$

كما وجدنا $\lim_{x\to1^+} h(x) = -\infty$ ومنه وضوحاً $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 2 + \frac{x+1-x+1}{x^2-1} = 2 + \frac{2}{x^2-1} > 0$$

x	$-\infty$ $\quad$ -1		1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

المدرس سام علي حمدان

$x = 1$ مقارب شاقولي لـ C_f حيث C_f يقع على يمين المقارب بجوار $-\infty$

$x = -1$ مقارب شاقولي لـ C_f حيث C_f يقع على يسار المقارب بجوار $+\infty$

الطلب الثالث : نعلم أن $f(x)$ يكتب بالشكل $f(x) = 2x - 1 + ln(x-1) - ln(x+1) \quad ....(1)$

$$f(-x) = -2x - 1 - ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = -2x - 1 - ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right) = -2x - 1 - ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

يكتب بالشكل $f(-x)$ $f(-x)=-2x-1+ln(x+1)-ln(x-1)\quad ....(2)$

بجمع العلاقتين الأولى والثانية نجد أن $f(x)+f(-x)=-2$ وهو المطلوب

الطلب الرابع : الشرط الأول لتناظر نقطة $I(a,b)$ بالنسبة لـ $f(x)$: أياً كان $x\in D_f$ كان $2a-x\in D_f$

عندما $x\in]-\infty,-1[\ \Leftrightarrow -x\in\ ]1,+\infty[$ وعندما $x\in\ ]1,+\infty[\ \Leftrightarrow -x\in]-\infty,-1[$

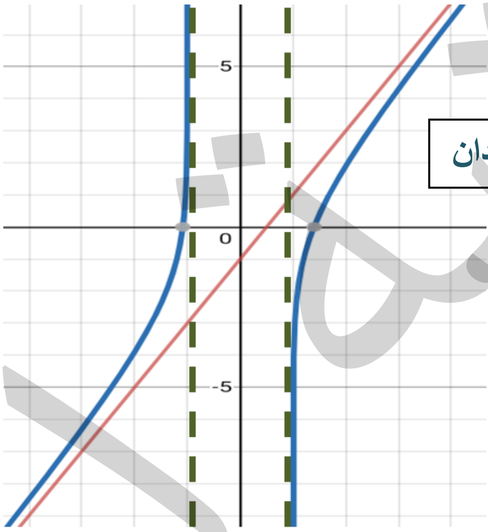
$x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ منه $2a-x=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ حيث $a=0$ فالشرط محقق

الشرط الثاني لتناظر نقطة $I(a,b)$ بالنسبة لخط بياني هو : $f(x)+f(-x)=2b$

من الطلب السابق وجدنا أن : $f(x)+f(-x)=-2$ ، حيث $b=-1$ فالشرط محقق

منه نجد أن C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$

الطلب الخامس : المستقيم d يمر بالنقطتين $A(0,-1)\,,B(\frac{1}{2},0)$



المدرس سام علي حمدان

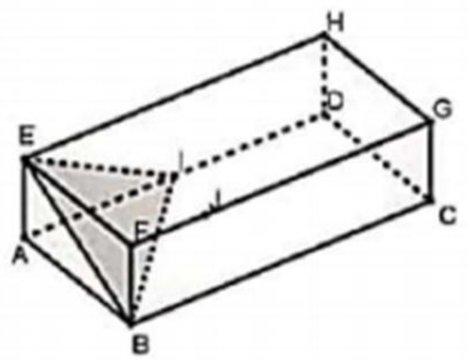
الطلب السادس : $g(x)=-2x+1-ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

يكتب $g(x)$ بالشكل $g(x)=-2x+1+ln(x+1)-ln(x-1)$

وجدنا سابقاً $f(-x)=-2x-1+ln(x+1)-ln(x-1)$

ومنه $g(x)=f(-x)$ ، بالتالي C_g نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب .

المسألة الثانية : ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AD = 4\,,\, AB = 2\,,\, AE = 1$ ولتكن النقطة I منتصف $[AD]$ والنقطة J تحقق $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$ ، نتأمل المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$



١) جد احداثيات رؤوس متوازي المستطيلات واحداثيات كل من I و J

٢) أثبت أن معادلة المستوي (EIB) هي : $x + y + 2z - 2 = 0$

٣) بيّن نوع المثلث EIB ، ثم احسب مساحته

٤) احسب بعد G عن المستوي (EIB) ، ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $G - EIB$

٥) اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J وعمودياً على المستوي (EIB)

٦) استنتج أن المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة (IB)

الطلب الأول : نوجد الاحداثيات : $A(0,0,0), B(2,0,0), D(0,4,0), E(0,0,1)$

$C(2,4,0), G(2,4,1), H(0,4,1), F(2,0,1), I(0,2,0), J(2,1,1)$

الطلب الثاني : نتبع الطريقة المختصرة نعوض احداثيات النقط الثلاثة E, I, B في المستوي فنجدها محققة

مثلاً نعوض احداثيات النقطة I $\quad 0 + 2 - 2(0) - 2 = 0$ فالمعادلة محققة وكذلك نفعل مع B و E

الطلب الثالث : $\overrightarrow{EI} = (0,2,-1), \overrightarrow{EB} = (2,0,-1), \overrightarrow{BI} = (-2,2,0)$ حيث $\|\overrightarrow{BI}\| = 2\sqrt{2}$

نلاحظ أن $\|\overrightarrow{EI}\| = \|\overrightarrow{EB}\| = \sqrt{5} \neq \|\overrightarrow{BI}\|$ فالمثلث EBI متساوي الساقين رأسه E وقاعدته BI

حسب خواص مثلث متساوي الساقين : الخط المتوسط المتعلق بالقاعدة هو ذاته الارتفاع ،

بفرض N هي منتصف $[BI]$ وبالتالي $N(1,1,0)$ ومنه $\overrightarrow{EN} = (1,1,-1)$ ومنه : $\|\overrightarrow{EN}\| = \sqrt{3}$

باعتبار $[EN]$ هو الارتفاع في المثلث يعطي : $S_{EBI} = \frac{\|\overrightarrow{BI}\|.\|\overrightarrow{EN}\|}{2} = \frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$

الطلب الرابع : $dist\,(G\,, EBI\,) = \frac{|2(1)+4(1)+1(2)-2|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

رباعي الوجوه هو هرم ، حيث ارتفاع الهرم $(\,G - EBI\,)$ هو ذاته $h = dist\,(G\,, EBI\,)$

والقاعدة هي EBI وبالتالي حجم الهرم $V = \frac{1}{3}S_{EBI}\,.\,h = \frac{1}{3}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6} = 2$

الطلب الخامس : المستقيم d يعامد المستوي (EBI) فشعاع التوجيه للمستقيم هو ذاته الشعاع الناظم للمستوي

$(d) = \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \quad ; t \in R \\ z = 2t + 1 \end{cases}$ ، حيث $\vec{u} = \vec{n} = (1\,,1\,,2)$ والنقطة $J(2,1,1)$

الطلب السادس : نوجد احداثيات K المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EBI)

بتعويض التمثيلات الوسيطية لـ (d) في معادلة (EBI) فنجد :

$t+2+t+1+4t+2-2=0$ منه : $t=\frac{-1}{2}$ ، منه احداثيات $K(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0)$

$\overrightarrow{BK}=(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0)$ و $\overrightarrow{BI}=(-2,2,0)$ منه : $\overrightarrow{BI}=4\overrightarrow{BK}$ وبالتالي $\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BK}$ مرتبطان خطياً

فالنقطة K تقع على القطعة المستقيمة $[IB]$

نـهـايـة حـلـول الـنـمـوذج الـوزاري العاشر / عام ٢٠٢٠