المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

رقم 2

مذاكرة التابع اللوغارتمي

السؤال الأول

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة : $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{4-x}\right)$

1- تحقق أن D_f مجموعة تعريف التابع f هي $]2,4[$

2- برهن أن منحني التابع C متناظر بالنسبة للنقطة $(3,0)$

3- أوجد نهاية التابع f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه

4- ارسم الخط البياني C للتابع f

5- استنتج الخط البياني للتابع $f_1(x) = |f(x)|$

السؤال الثاني

ليكن g التابع المعرف على $I =]-1, +\infty[$ وفق العلاقة : $g(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$.

احسب كلاً من $g(1)$, $g'(1)$, $g'(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(\sqrt{x}+1) - \ln 2}{x-1}$

السؤال الثالث

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ بالعلاقة :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

1- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه

2- أوجد $f'(x)$ ثم ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

3- ارسم c

4- لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق : $u_n = f(n)$ وليكن :
$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ، أثبت أن : $S_n = \ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

السؤال الرابع

أثبت أنه $\forall x \in]-1, +\infty[$ كان $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$

RASOUL International Education

... حل مذاكرة رقم (٢) لوغاريتم ...

السؤال الأول :

معرف عندما $\frac{x-2}{4-x}>0$ واضح أنه

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$4-x$		$+$	⋮	$+$	0	$-$	
الكسر		$-$	0	$+$	‖	$-$	
الترجيح		//////	[		]	//////	

$D_f =]2,4[$

[2] $x_0=3$ $\quad 2x_0-x=6-x$

$y_0=0$

$\forall x\in]2,4[\Rightarrow -x\in]-4,-2[$

$6-x\in]2,4[$ الشرط الأول محقق.

$f(2x_0-x)\overset{?}{=}2y_0-f(x)$

$* \; f(2x_0-x)=f(6-x)$

$\ell_1=\ln\left(\frac{6-x-2}{4-6+x}\right)=\ln\left(\frac{4-x}{-2+x}\right)$

$=\ln\left(\frac{4-x}{x-2}\right)=\ln\left(\frac{x-2}{4-x}\right)^{-1}$

$=-\ln\left(\frac{x-2}{4-x}\right)=-f(x)=2y_0-f(x)$

$=\ell_2$

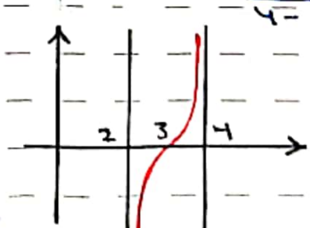
الشرط الثاني محقق إذن $A(3,0)$ مركز تناظر

[3] $\lim_{x\to 2} f(x)=-\infty$

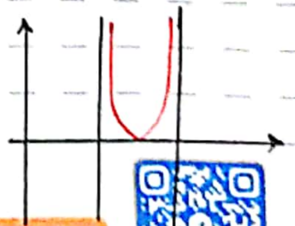
$\lim_{x\to 4} f(x)=+\infty$

[4] f معرف ومستمر واشتقاقي على $]2,4[$

$f'(x)=\frac{\frac{4-x+x-2}{(4-x)^2}}{\frac{x-2}{4-x}}=\frac{2}{(4-x)(x-2)}>0$



x	2		4
f'		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$



السؤال الثاني :

$g(x)=\ln(\sqrt{x+1})$

$g(1)=\ln\sqrt{2}$

$g'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2(x+1)}$

$g'(1)=\frac{1}{4}$

نعلم أن $\lim_{x\to x_0} t(x)=g'(x_0)$

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\sqrt{x+1}-\ln\sqrt{2}}{x-1}=\frac{1}{4}$

السؤال الثالث :

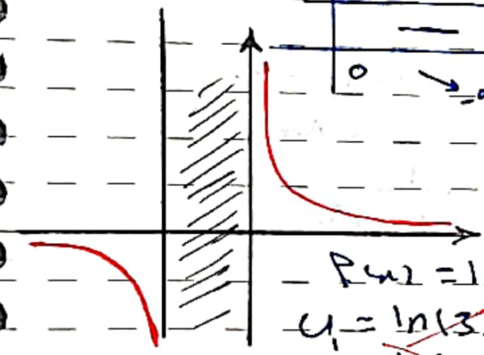
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln(1)=0$

$\lim_{x\to -2} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

$f'(x)=\frac{\frac{x-x-2}{\cancel{x^2}}}{\frac{x+2}{\cancel{x}}}=\frac{-2}{x(x+2)}<0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		$-$		//////		$-$	
f	0	↘	$-\infty$	//////	$+\infty$	↘	0



$f(x)=\ln(x+2)-\ln(x)$

$u_1=\cancel{\ln(3)}-\ln(1)$

$u_2=\cancel{\ln(4)}-\ln(2)$

$u_3=\ln(5)-\cancel{\ln(3)}$

$u_4=\ln(6)-\cancel{\ln(4)}$

$\vdots$

$u_{n-1}=\ln(n+1)-\cancel{\ln(n-1)}$

$u_n=\ln(n+2)-\cancel{\ln(n)}$ $+$

$S_n=-\ln 2+\ln(n+1)+\ln(n+2)$ مجموع التراكيب الجبرية

$=\ln((n+1)(n+2))-\ln 2$

$S_n = \ln((n+2)(n+1)) - \ln 2$

$S_n = \ln \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

السؤال الرابع:

$\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$

$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \quad]-1, \infty[$

$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty + \infty$ عدم تعيين

$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x+1}\left((x+1)\ln(x+1) - x\right)$

$= +\infty(0+1) = +\infty$

بفرض $x+1 = X$

$x \to -1 \Rightarrow X \to 0$

$\lim_{x \to 0} x\ln x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$

$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{x}{(x+1)^2}$

$f' = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 0$

x	-1		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

واضح من جدول التغيرات

$f(x) \geq 0$

أي $\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$

$\ln(x+1) \geq \frac{x}{x+1}$ محقق.

يمكن الاكتفاء بالاطراد دون التغيرات