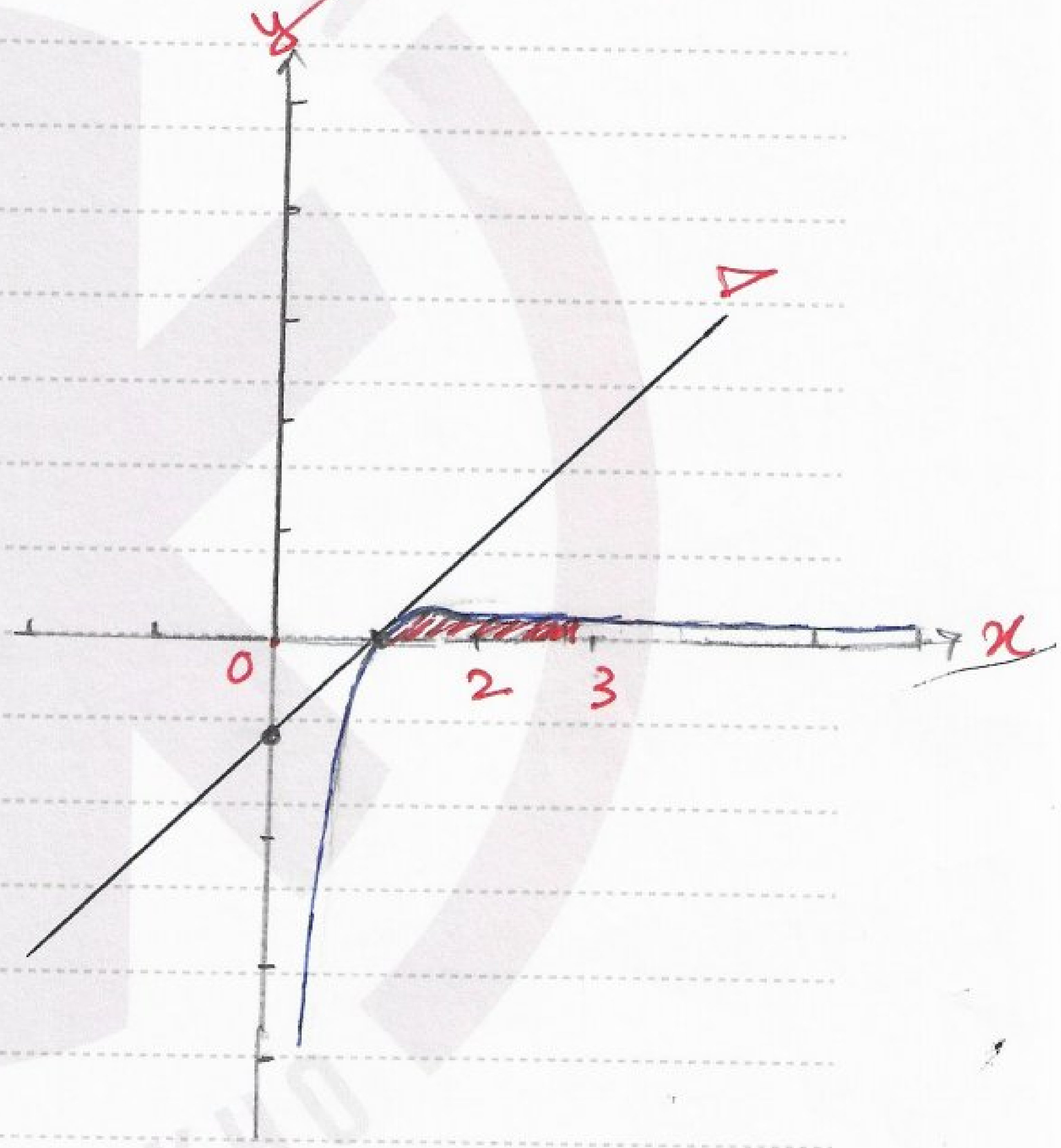
تمارين داعمة تكامل :

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق

$$f(x) = \frac{Ln(x)}{x^2}$$

احسب مساحة السطح المحصور بين C و xx' والمستقيم الذي معادلته $x=e$



الحل:

$$S = \int_a^b f(x)\,d(x)$$

$$= \int_1^e \frac{Ln(x)}{x^2}\,d(x)$$

$$u(x) = Ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{x}$$

$$S = \left[-\frac{1}{x} Ln(x)\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,d(x)$$

$$= \left[-\frac{1}{x} Ln(x)\right]_1^e + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$= \left[-\frac{1}{x} Ln(x) - \frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$= \left[-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right] - (0-1)$$

$$= 1 - \frac{2}{e}$$

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق :

$$f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

اكتب التابع بالشكل : $f(x) = ax+b+\frac{1}{x+3}$

أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

احسب $\int_0^2 f(x)\,d(x)$

الحل: بالصيغة الإقليدية نجد :

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+3}$$

بالتالي $b = -1 \ , \ a = 1$

$$g(x) = f(x) - (x-1)$$

$$= \frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x+3}\right) = 0$$

$\Leftarrow$ $y = x - 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$I = \int_0^2 f(x)\, d(x)$$

$$= \int_0^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x+3}\right) d(x)$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x + Ln(x+3)\right]_0^2$$

$$= (2 - 2 + Ln(5) - Ln(3)$$

$$= Ln\,\frac{5}{3}$$

- لتكن $I = \int_0^{Ln(2)} \frac{2}{e^x + 2}\, d(x)$

$$J = \int_0^{Ln(2)} \frac{e^x}{e^x + 2}\, d(x)$$

والمطلوب احسب J ، احسب $J + I$ ثم استنتج I

الحل:

$$J = \int_0^{Ln(2)} \frac{e^x}{e^x + 2}\, d(x)$$

$$= \left[Ln(e^x + 2)\right]_0^{Ln(2)}$$

$$= Ln(4) - ln(3) = ln\,\frac{4}{3}$$

$$I + J = \int_0^{ln(2)} \frac{2 + e^x}{e^x + 2}\, d(x)$$

$$= \int_0^{Ln(2)} (1)\, d(x) = [x]_0^{Ln(2)}$$

$$= ln\,2$$

$$I + J = Ln(2)$$

$$\Rightarrow I = Ln(2) - J$$

$$= Ln(2) - ln\left(\frac{4}{3}\right) = ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Join us on Telegram
@BAC_MATH_AK
إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على R وفق :

$$f(x) = e^{x} - 1$$

جد حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$

احسب $\int_{0}^{\ln(2)} f(x)\, d(x)$

الحل:

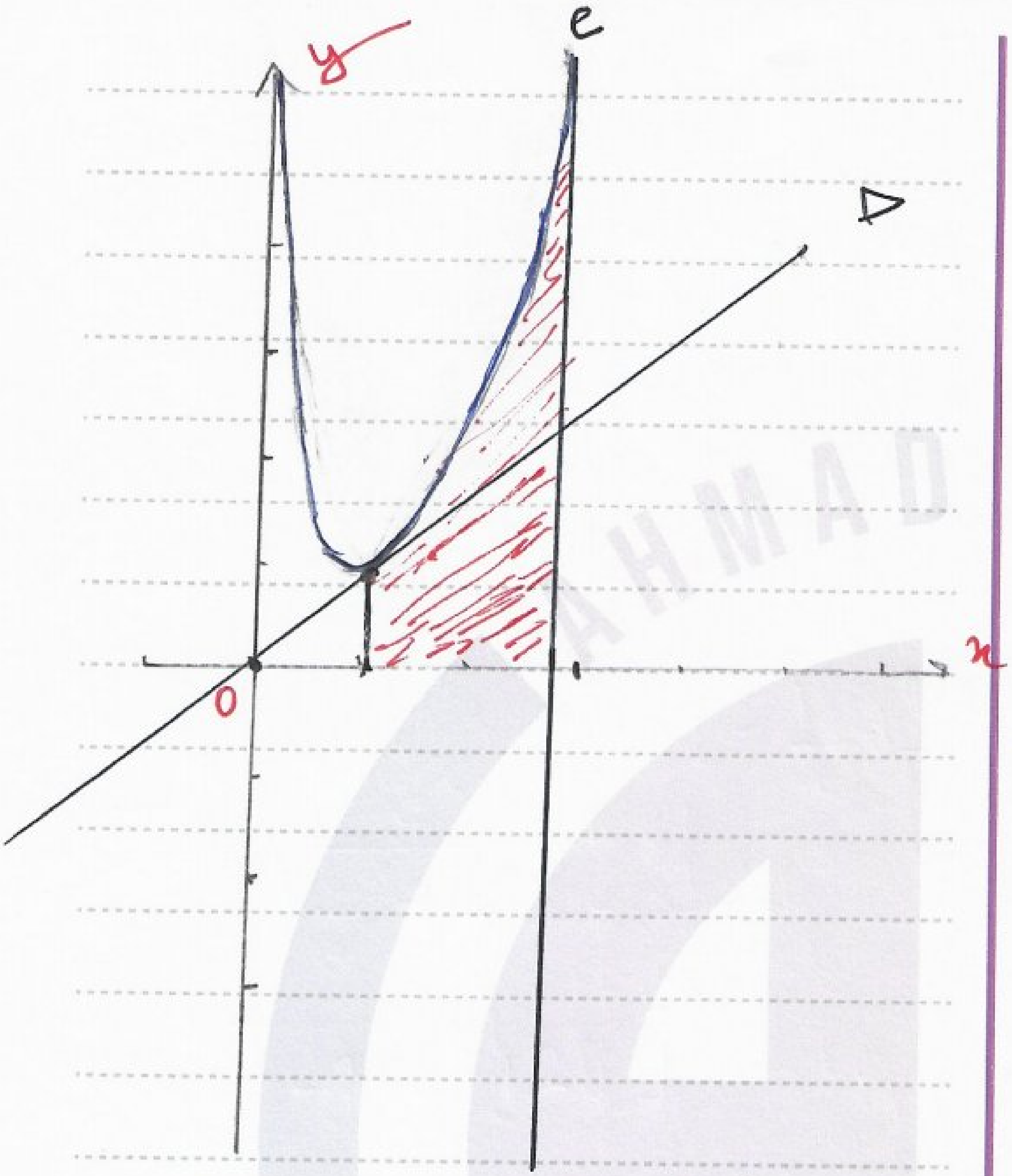
$$e^{x} - 1 \leq 0$$
$$\Rightarrow e^{x} \leq 1$$
$$\Rightarrow e^{x} \leq e^{0}$$
$$x \leq 0$$
$$\Rightarrow x \in]-\infty, 0]$$

$$\int_{0}^{Ln(2)} (e^{x} - 1)\, d(x)$$
$$= [e^{x} - x]_{0}^{Ln(2)}$$
$$= 2 - Ln(2) - 1 = 1 - Ln(2)$$

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف]0,+∞[وفق

$$f(x) = x^{2} - Ln(x)$$

والمطلوب احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=e$



$$S = \int_{1}^{e} f(x)\, d(x)$$
$$= \int_{1}^{e} (x^{2} - Ln(x))\, d(x)$$
$$= \int_{1}^{e} x^{2}\, d(x) - \int_{1}^{e} Ln(x)\, d(x)$$
$$= \left[\frac{x^{3}}{3}\right]_{1}^{e} - \int_{1}^{e} Ln(x)\, d(x)$$
$$I = \int_{a}^{b} (U.V')$$

$= [U \cdot V']_a^b - \int_a^b (U' V)$

$U = \ln(x) \Rightarrow U' = \frac{1}{x}$

$V' = 1 \Rightarrow V = x$

$I = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e 1\, d(x)$

$= [x\ln(x)]_1^e - [x]_1^e$

$= [x\ln(x) - x]_1^e$

$= (e\ln(e) - e) - (\ln(1) - 1)$

$= 1$

$\Rightarrow S = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e - 1$

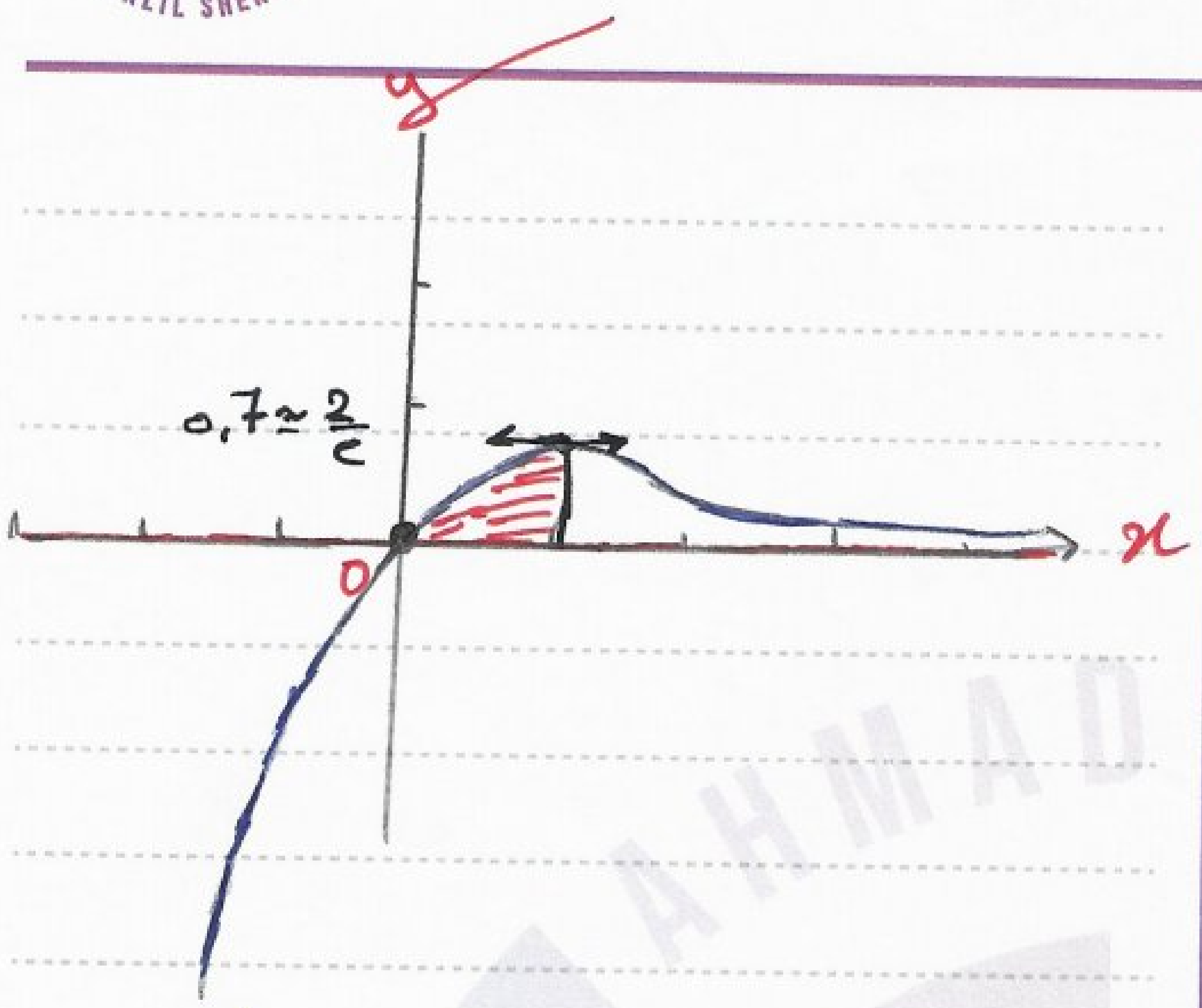
$= \left(\frac{e^3}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) - 1$

$= \frac{e^3 - 1 - 3}{3} = \frac{e^3 - 4}{3}$

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$f(x) = \frac{2x}{e^x}$

والمطلوب احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الاحداثيات والمستقيم $x = 1$



الحل:

$S = \int_0^1 f(x)\, d(x)$

$= \int_0^1 \frac{2x}{e^x}\, d(x) = \int_0^1 2xe^{-x}\, d(x)$

$u = 2x \Rightarrow u' = 2$

$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$

$S = [-2xe^{-x}]_0^1 - 2\int_0^1 -e^{-x}\, d(x)$

$= [-2xe^{-x}]_0^1 - 2[e^{-x}]_0^1$

$= \left(-\frac{2}{e} - 0\right) - 2\left(\frac{1}{e} - 1\right)$

$= 2 - \frac{4}{e} = \frac{2e - 4}{e}$

- احسب العدد

$$I = \int_0^3 (2 - |2 - x|)\, d(x)$$

الحل:

$$I = \int_0^3 (2 - |2 - x|)\, d(x)$$

$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x & x \in [0,2] \\ x - 2 & x \in [2,3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 (2 - (2 - x))\, d(x)$$

$$+ \int_2^3 (2 - (x - 2))\, d(x)$$

$$= \int_0^2 x\, d(x) + \int_2^3 (4 - x)\, d(x)$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_2^3$$

$$= (2 - 0) + \left(12 - \frac{9}{2} - 8 + 2\right)$$

$$= 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$$

- احسب التكامل الآتي:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x)\, d(x)$$

الحل:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x)\, d(x)$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \sin(x) \Rightarrow v = -\cos(x)$$

$$I = \left[-x\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, d(x)$$

$$I = \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (0 - 0) + (1 - 0)$$

$$\Rightarrow I = 1$$

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = e^{-2x} + 2x - 2$$

المطلوب ارسم Δ و C ثم احسب مساحة السطح المحصور بين محور التراتيب و C و Δ و المستقيم $x = 1$

والمطلوب احسب I ثم احسب $I+J$ واستنتج J.

الحل:

$$J=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,d(x)$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{4}\left(\frac{4x^3}{1+x^4}\right)d(x)$$

$$=\left[\frac{1}{4}\ln(1+x^4)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2)-\frac{1}{4}\ln(1)=\frac{1}{4}\ln(2)$$

$$I+J=\int_0^1\left(\frac{x^7}{1+x^4}\right)d(x)+\int_0^1\left(\frac{x^3}{1+x^4}\right)dx$$

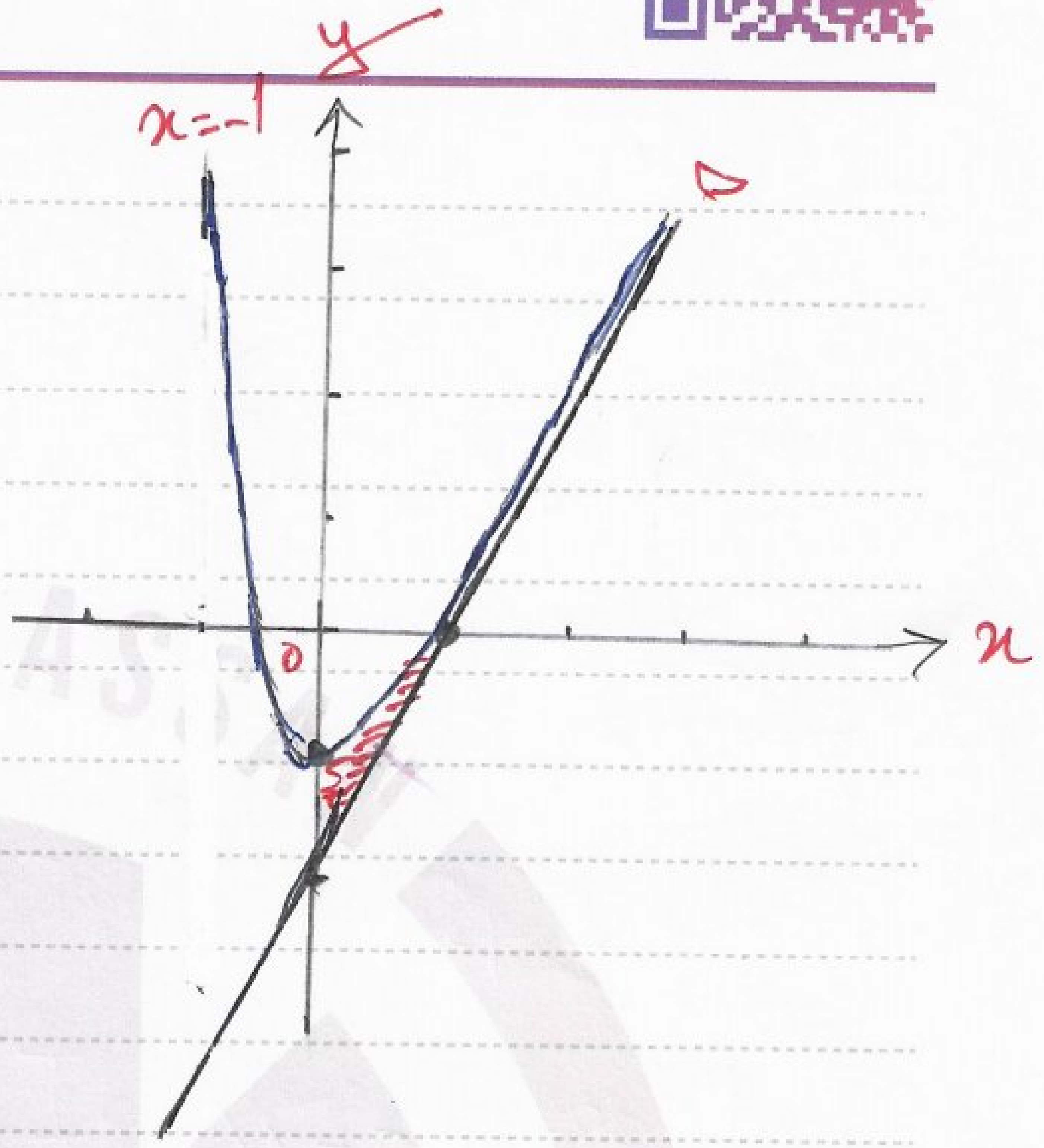
$$=\int_0^1 \frac{x^7+x^3}{1+x^4}\,d(x)$$

$$=\int_0^1 \frac{x^3(x^4+1)}{1+x^4}\,d(x)$$

$$=\int_0^1 x^3\,d(x)=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

$$I+J=\frac{1}{4}\Rightarrow I=\frac{1}{4}-J$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\ln(2)$$



الحل:

$$S=\int_0^1 (f(x)-y_\Delta)\,d(x)$$

$$=\int_0^1 e^{-2x}\,d(x)$$

$$=\left[\frac{-1}{2}e^{-2x}\right]_0^1=\frac{-1}{2e^2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{e^2-1}{2e^2}$$

ليكن -

$$I=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,d(x)$$

$$J=\int_0^1 \frac{x^7}{1+x^4}\,d(x)$$

- احسب $I=\int_0^{\ln(2)} e^{x}(1-e^{x})\,dx$

الحل:

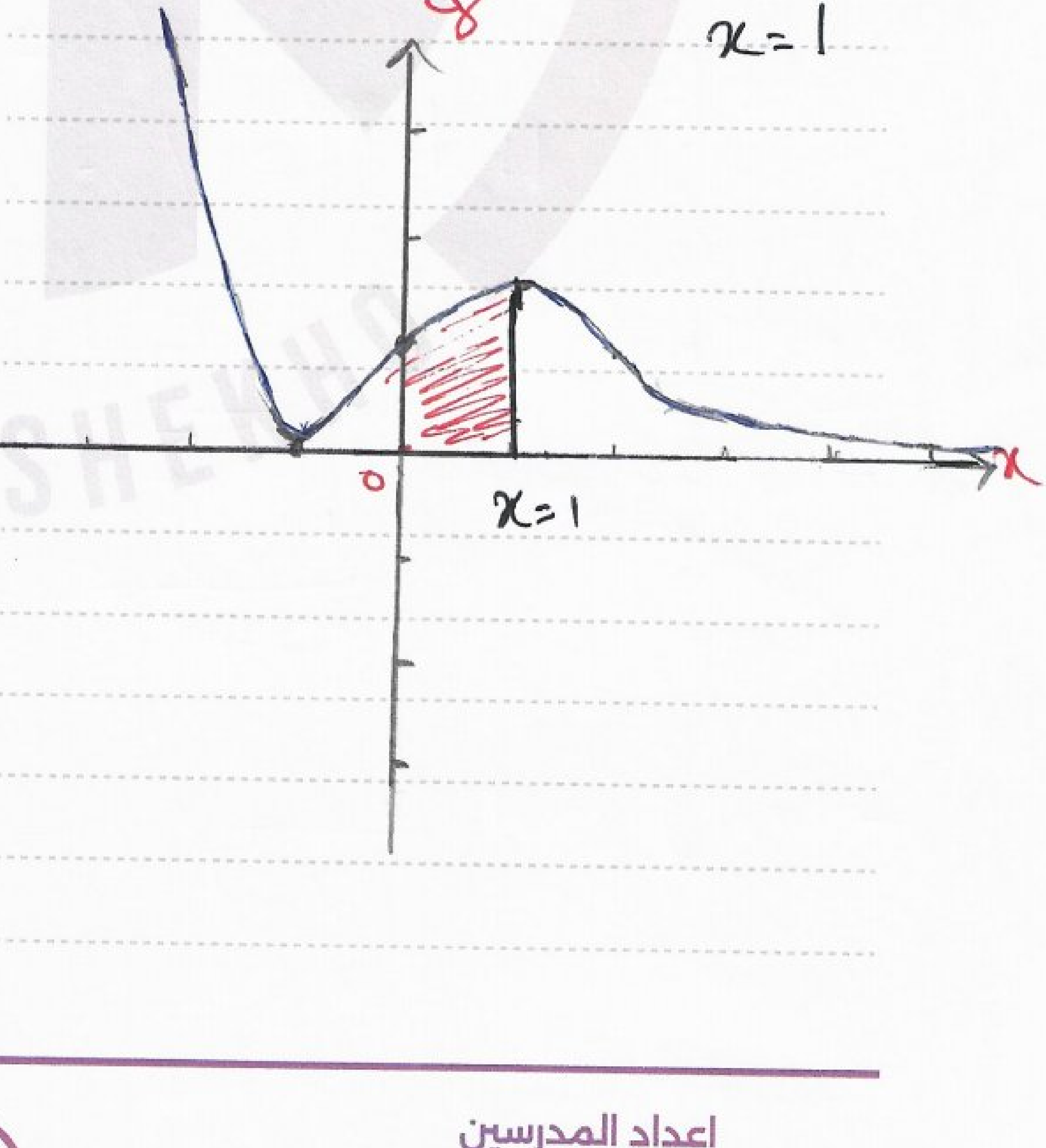
$$I=\int_0^{\ln(2)} (e^{x}-e^{2x})\,dx$$

$$=\left[e^{x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln(2)}$$

$$=(2-2)-\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$

احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$, $x=1$



الحل:

$$S=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 (x+1)^2e^{-x}\,dx$$

$u=(x+1)^2 \Rightarrow u'=2(x+1)$

$v'=e^{-x} \Rightarrow v=-e^{-x}$

$$S=\left[-\frac{(x+1)^2}{e^{x}}\right]_0^1+\int_0^1 2(x+1)e^{-x}\,dx$$

$$=\left[-\frac{4}{e}+1\right]+\int_0^1 2(x+1)e^{-x}\,dx$$

$u=(x+1) \Rightarrow u'=1$

$v'=e^{-x} \Rightarrow v=-e^{-x}$

$$S=-\frac{4}{e}+1-2\left[\frac{x+1}{e^{x}}\right]_0^1+2\int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$$\Rightarrow S=-\frac{4}{e}+1-\frac{4}{e}+2-2\left[\frac{1}{e^{x}}\right]_0^1$$

$$=-\frac{8}{e}+3-\frac{2}{e}+2$$

$$=5-\frac{10}{e}$$

Join us on Telegram
@BAC_MATH_AK
إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

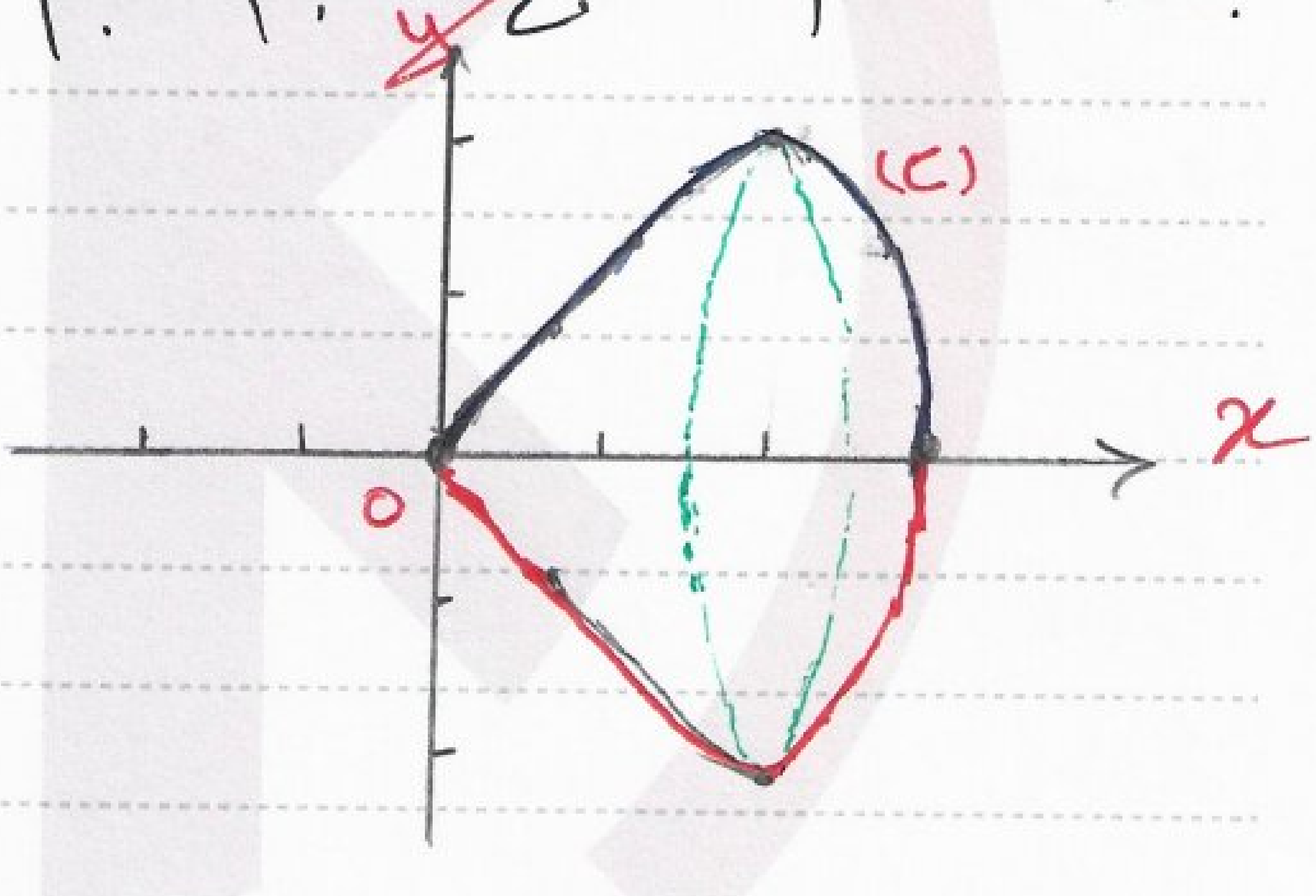
- في الشكل المجاور C هو الخط البياني للتابع f المعرّف على $[0,3]$ بالصيغة

$$f(x) = x\sqrt{3-x}$$

عندما يدور C دورة كاملة حول محور الفواصل يولد مجسماً دورانياً δ .

1) ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ في حالة $x \in]0,3[$

2) عيّن $A(x)$ مساحة هذا المقطع بدلالة x ثم استنتج V حجم المجسم.



الحل: إن مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ هو دائرة مركزها النقطة I ونصف قطرها $f(x)$

$$A = \pi f^2(x) = (3x^2 - x^3)$$

$$V = \int_0^3 \pi f^2(x)\, d(x)$$

$$= \pi \int_0^3 (3x^2 - x^3)\, d(x)$$

$$= \pi \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3$$

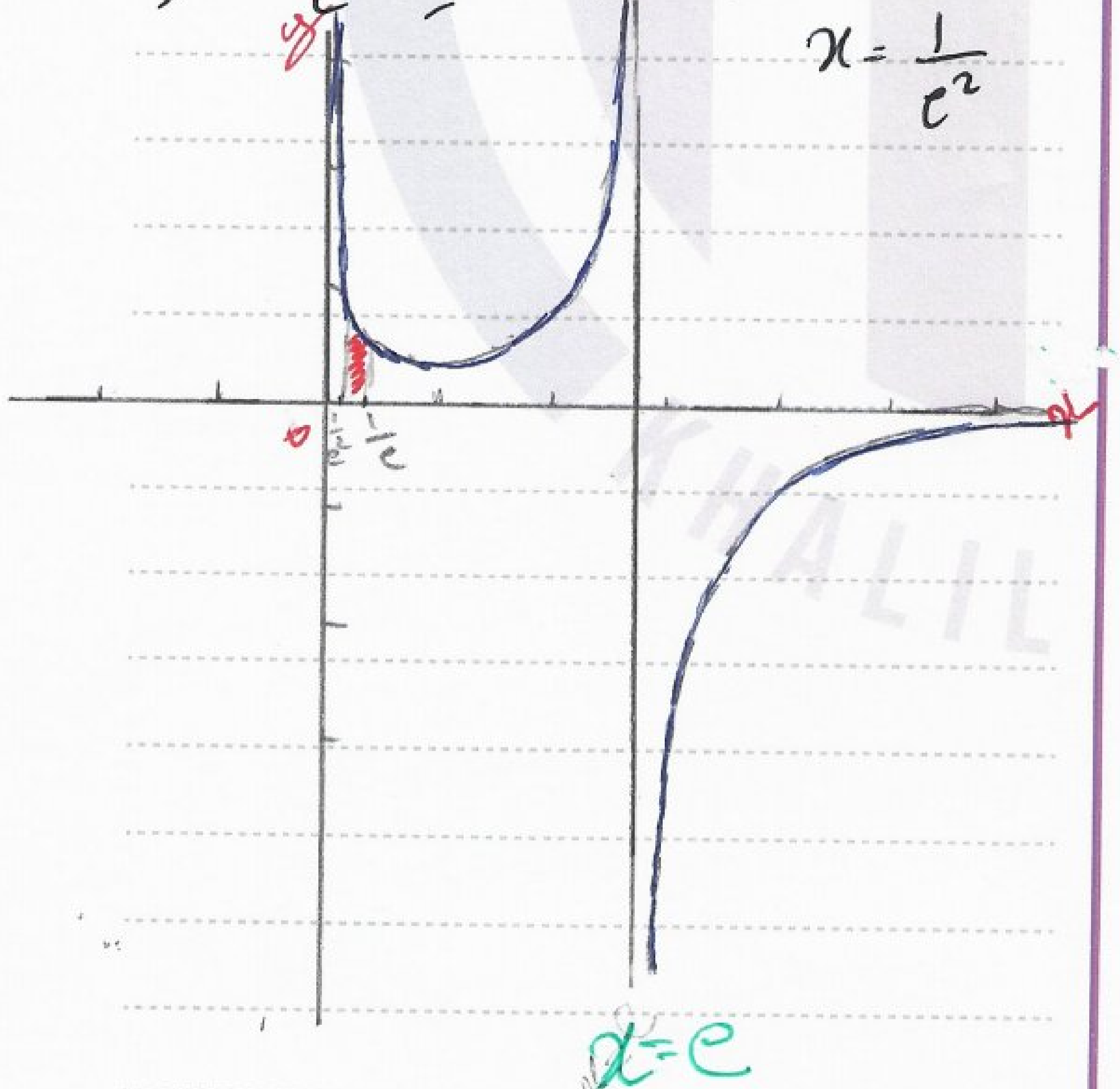
$$= \pi \left(27 - \frac{81}{4} - 0\right)$$

$$= \frac{27}{4}\pi$$

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln(x))}$$

احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = \frac{1}{e}$ و $x = \frac{1}{e^2}$



الحل:

$$S=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(x)\,d(x)$$

$$=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x(1-\ln(x))}\,d(x)$$

$$=-\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln(x)}\,d(x)$$

$$=-\left[\ln(1-\ln(x))\right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$=-(\ln(2)-\ln(3))$$

$$=\ln\frac{3}{2}$$

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=xe^{-x}$$

والمطلوب احسب

$$\int_0^{\ln 3} f(x)\,d(x)$$

أثبت أن التابع $y=f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية

$$y'+y=e^{-x}$$

الحل:

$$I=\int_0^{\ln(3)} f(x)\,d(x)$$

$$=\int_0^{\ln(3)} xe^{-x}\,d(x)$$

$$u=x \Rightarrow u'=1$$

$$v'=e^{-x} \Rightarrow v=-e^{-x}$$

$$I=\int_0^{\ln(3)} xe^{-x}\,d(x)$$

$$=\left[-xe^{-x}\right]_0^{\ln(3)}+\int_0^{\ln(3)} e^{-x}\,d(x)$$

$$=\left[-xe^{-x}\right]_0^{\ln(3)}-\left[e^{-x}\right]_0^{\ln(3)}$$

$$=\left[(-1-x)e^{-x}\right]_0^{\ln(3)}$$

$$=\frac{-1-\ln(3)}{3}-(-1)$$

$$=\frac{2-\ln(3)}{3}$$

$$y'=f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$$

$$y'+y=e^{-x}-xe^{-x}+xe^{-x}$$

$$y'+y=e^{-x}$$

- أثبت صحة المساواة:

$$\cos^2(x)\ \sin^2(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$$

ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \times \sin^2(x)\,dx$

الحل:

$$\cos^2(x)\ \sin^2(x)$$

$$= \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)$$

$$= \frac{1-\cos^2(2x)}{4}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^2(x)\,d(x)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)\right)d(x)$$

$$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{16}$$

ط2:

$$\cos^2(x)\ \sin^2(x)$$

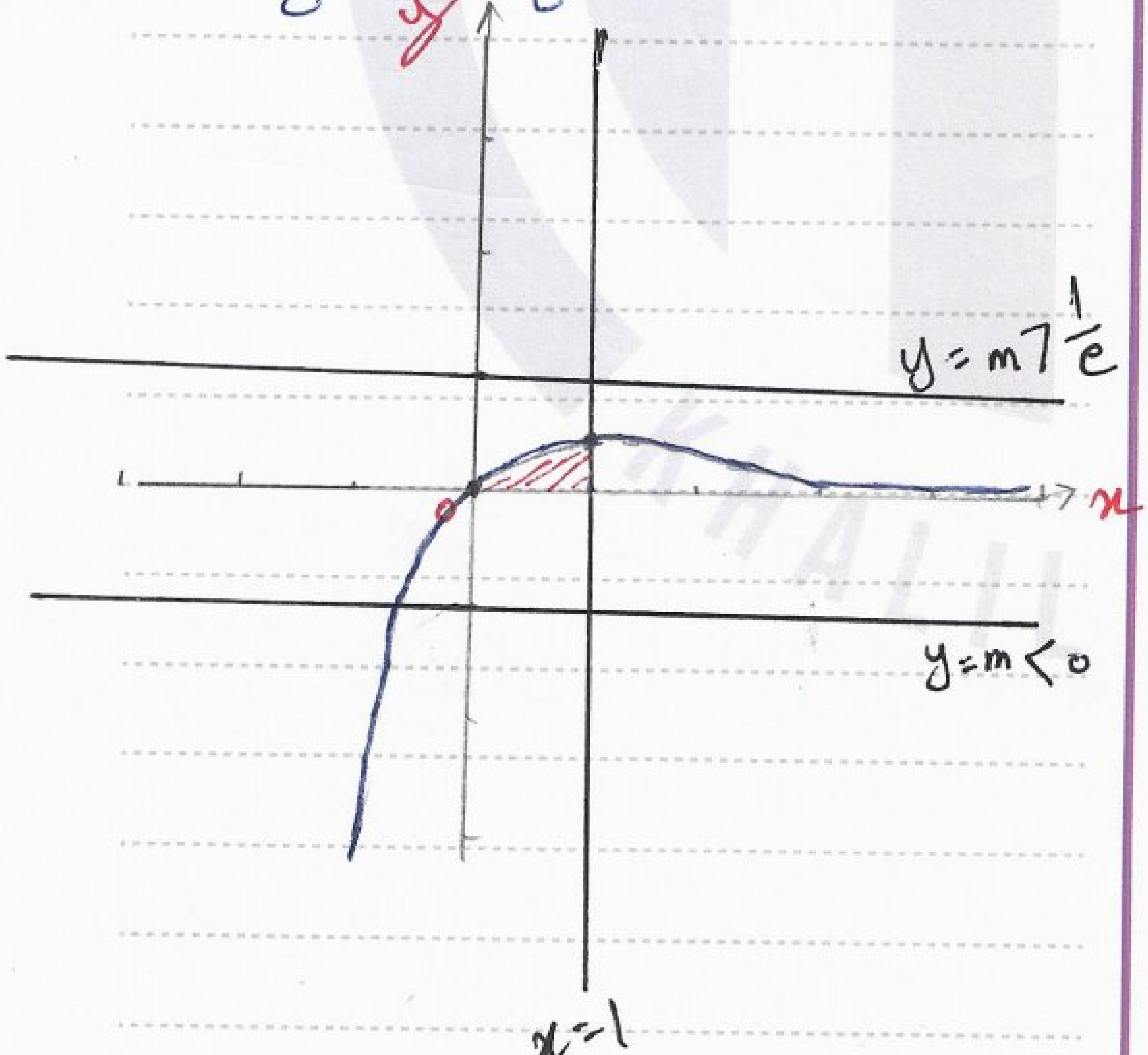
$$= \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^2}{4} \times \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^2}{-4}$$

$$= \frac{[(e^{ix}+e^{-ix})(e^{ix}-e^{-ix})]^2}{-16}$$

$$= \frac{(e^{2ix}-e^{-2ix})^2}{-16}$$

$$= \frac{-2+e^{i4x}+e^{-i4x}}{-16}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$$



إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

ليكن C الخط البياني المرسوم في الصفحة السابقة للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x)=x\times e^{-x}$ احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

الحل:

$$S=\int_0^1 f(x)\,d(x)$$

$$=\int_0^1 x e^{-x}\,d(x)$$

$$u=x \Rightarrow u'=1$$

$$v'=e^{-x} \Rightarrow v=-e^{-x}$$

$$S=[u.v]_0^1-\int_0^1 u'v\,d(x)$$

$$=[xe^{-x}]_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,d(x)$$

$$=-[xe^{-x}]_0^1-[e^{-x}]_0^1$$

$$=[(-x-1)e^{-x}]_0^1$$

$$=\frac{-2}{e}+1$$

سؤال: ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق

$$f(x)=\frac{x^2-5x+1}{x+1}$$

جد الأعداد a , b , c التي تحقق $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ أيًّا كان x من D

احسب $I=\int_0^2 f(x)d(x)$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+1 & x+1 \\ \hline x^2+x & x-6 \\ -6x+1 & \\ -6x-6 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

مما سبق نجد أن

$$f(x)=x-6+\frac{7}{x+1}$$

بالمطابقة نجد أن $a=1$, $b=-6$, $c=7$

(2

$$I=\int_0^2 f(x)d(x)$$

$$=\int_0^2 \left(x-6+\frac{7}{x+1}\right)d(x)$$

$=\left[\frac{1}{2}x^2-6x+7\ln(x+1)\right]_0^2$

$=(2-12+7\ln(3)-(0)$

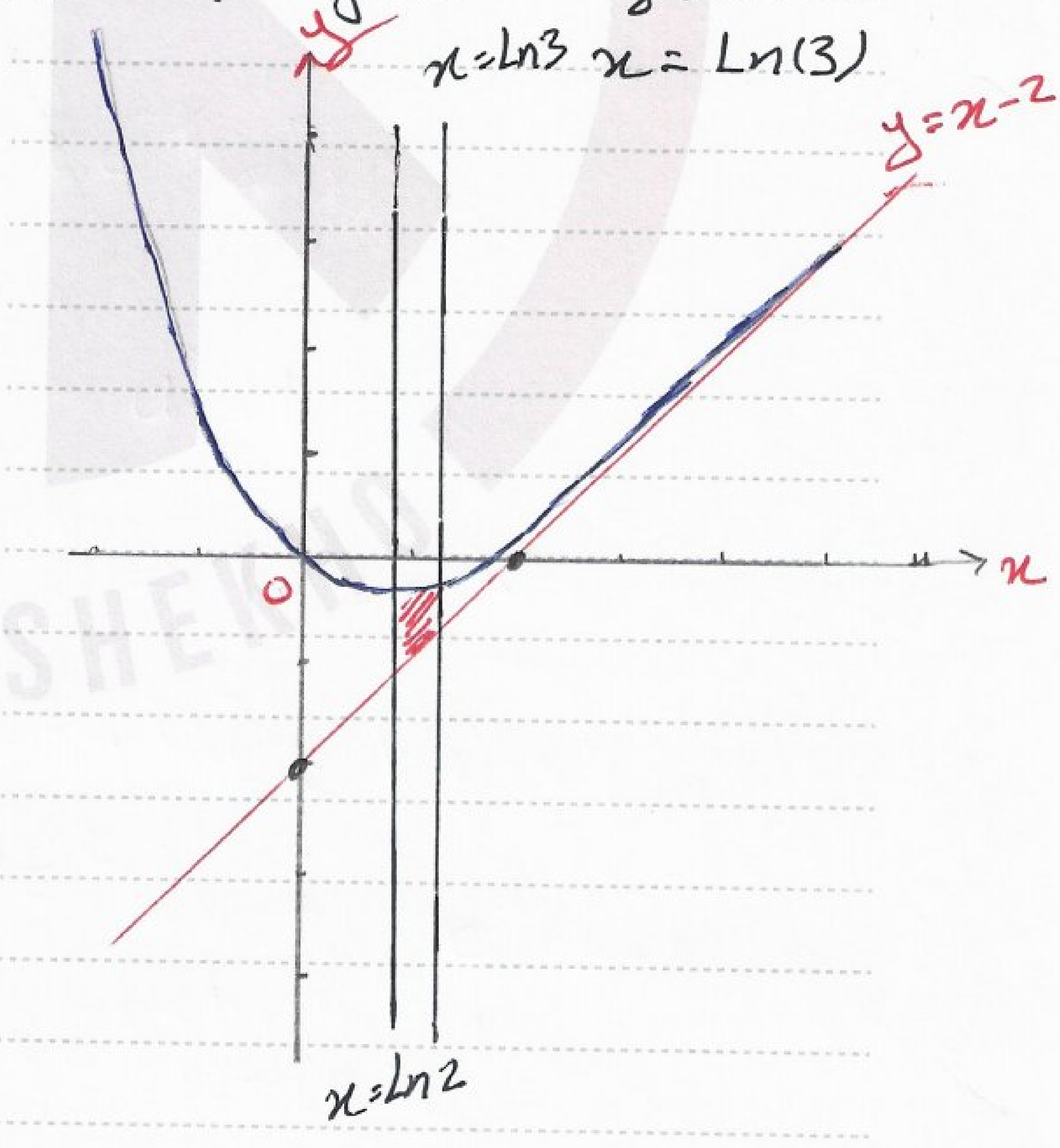
$=7\ln(3)-10$

- ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$f(x)=2e^{-x}+x-2$

خطه البياني C

ارسم المقارب المائل ثم ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمات التي معادلاتها $x=\ln(2)$, $y=x-2$, $x=\ln(3)$



الحل:

$S=\int_{\ln(2)}^{\ln(3)}[f(x)-y_\Delta]d(x)$

$=\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} 2e^{-x}d(x)$

$=\left[-\frac{2}{e^x}\right]_{\ln(2)}^{\ln(3)}=-\frac{2}{3}+1$

$=\frac{1}{3}$

تمرين: ليكن الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق:

$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$

1] اكتب $f(x)$ بالشكل

$f(x)=ax+b+\frac{1}{x+3}$

عيّن كلاً من c, b, a ثم أثبت أن المستقيم $y=ax+b$ مقارب في جوار $+\infty$

2] احسب $\int_0^2 f(x)d(x)$

الحل: بالقسمة الإقليدية نجد:

$f(x)=x-1+\frac{1}{x+3}$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

$c=1\ ,\ b=-1\ ,\ a=1 \Leftarrow$

$$g(x)=f(x)-(x-1)=\frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+3}\right)=0$$

بالتالي $y=x-1$ مقارب مائل
لـ C في جوار $+\infty$

[2

$$I=\int_0^2 f(x)\,d(x)$$

$$=\int_0^2 \left(x-1+\frac{1}{x+3}\right)d(x)$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+3)\right]_0^2$$

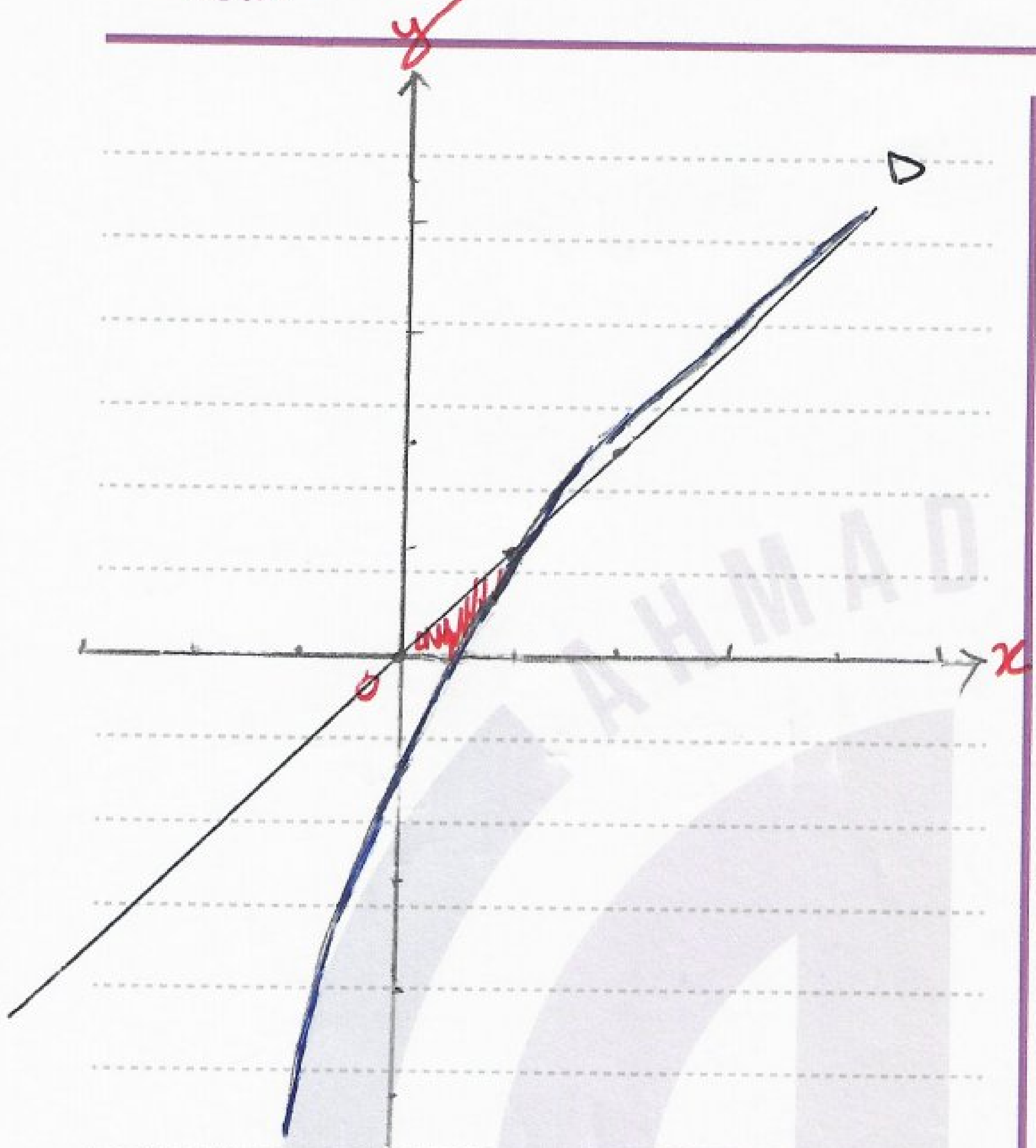
$$=(2-2+\ln(5)-\ln(3))$$

$$=\ln\frac{5}{3}$$

- ليكن C الخط البياني للتابع f
المعرّف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=x+\frac{(x-1)}{e^x}$$

احسب مساحة السطح المحصور بين C
والمستقيم Δ والمستقيمين $x=0$,
$x=1$



الحل:

$$S=\int_0^1 (y_\Delta-f(x))d(x)$$

$$=\int_0^1 (x-1)e^{-x}\,d(x)$$

$u=x-1 \Rightarrow u'=1$

$v'=e^{-x} \Rightarrow v=-e^{-x}$

$$S=[uv]_0^1-\int_0^1 u'v\,d(x)$$

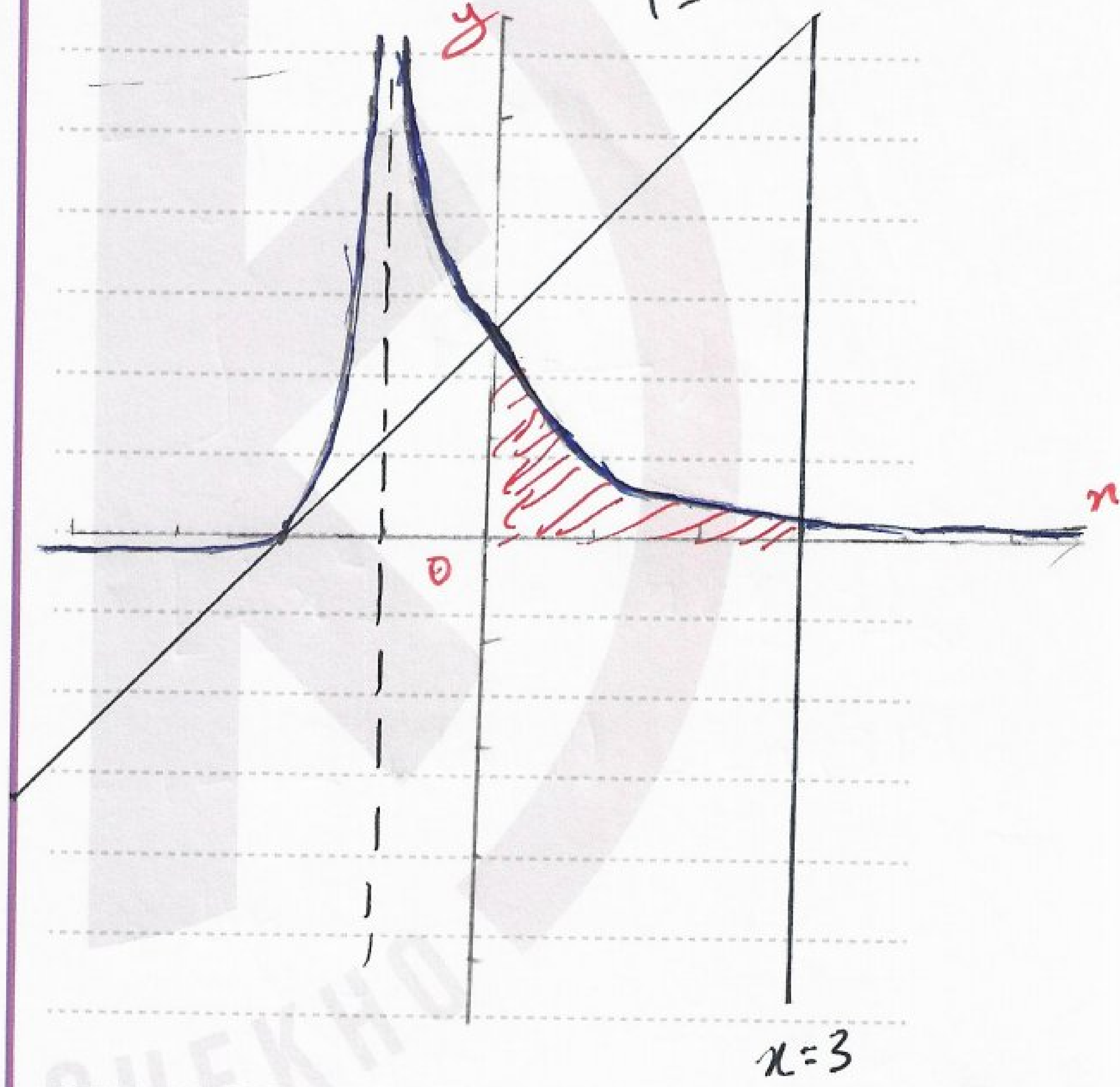
$$=[(1-x)e^{-x}]_0^1+\int_0^1 e^{-x}d(x)$$

$$=[xe^{-x}]_0^1=\frac{1}{e}$$

مسألة: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$$

ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x=3$



الحل: $x+1=t \Rightarrow x=t-1$

$$f(x)=\frac{t-1+2}{t^2}=\frac{t+1}{t^2}=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$S=\int_0^3 f(x)\,d(x)$$

$$=\int_0^3\left(\frac{x+2}{(x+1)^2}\right)d(x)$$

$$=\int_0^3\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)d(x)$$

$$=\left[\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right]_0^3$$

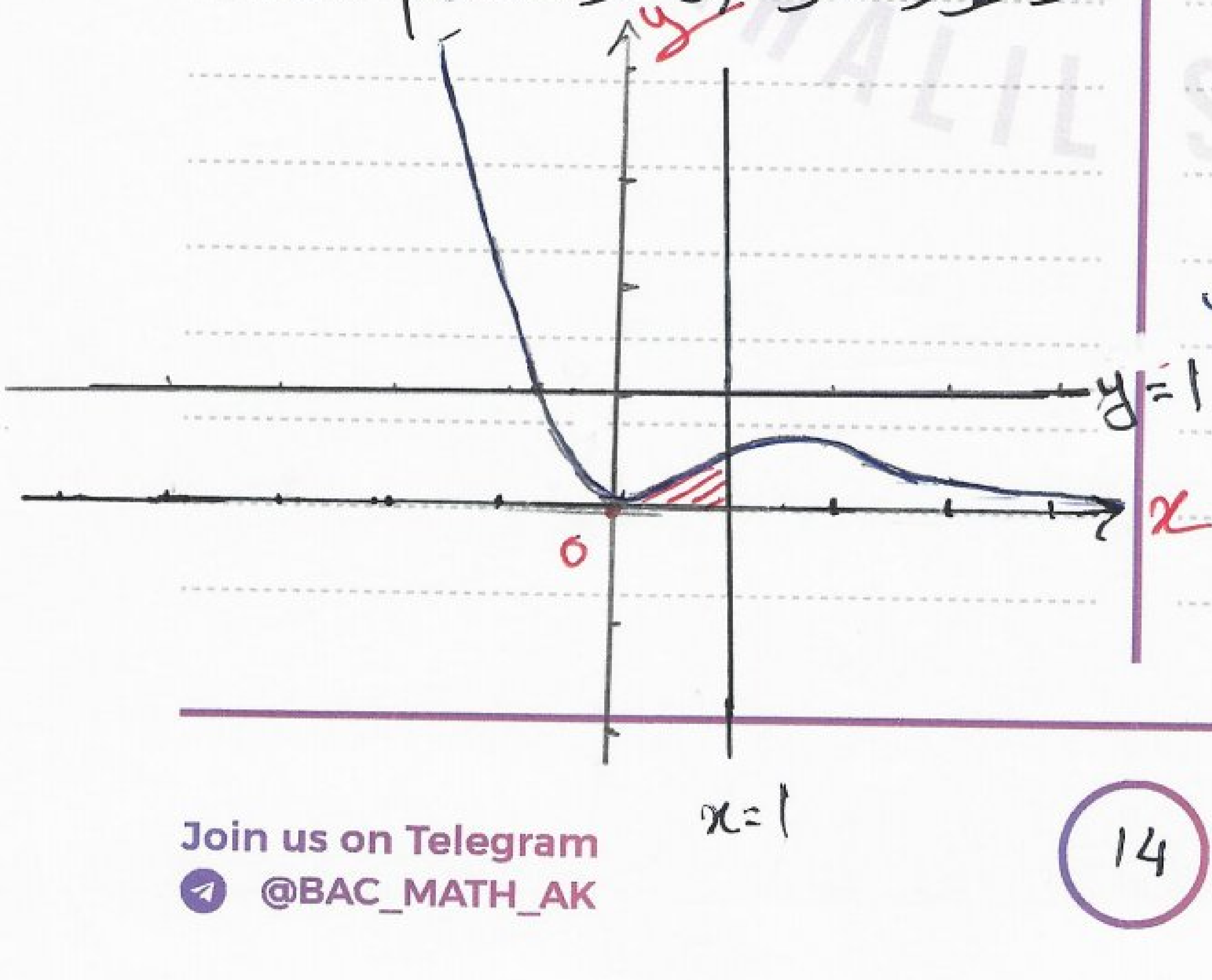
$$=\left(\ln(4)-\frac{1}{4}\right)-(0-1)$$

$$=\frac{3}{4}+2\ln(2)$$

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2}{e^x}$$

احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=1$



الحل:

$$S = \int_0^1 f(x)\, d(x)$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{e^x}\, d(x)$$

$$= \int_0^1 x^2 e^{-x}\, d(x)$$

$$U = x^2 \Rightarrow U' = 2x$$

$$V' = e^{-x} \Rightarrow V = -e^{-x}$$

$$S = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2x e^{-x}\, d(x)$$

$$= \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^1 + \left[-2x e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}\, d(x)$$

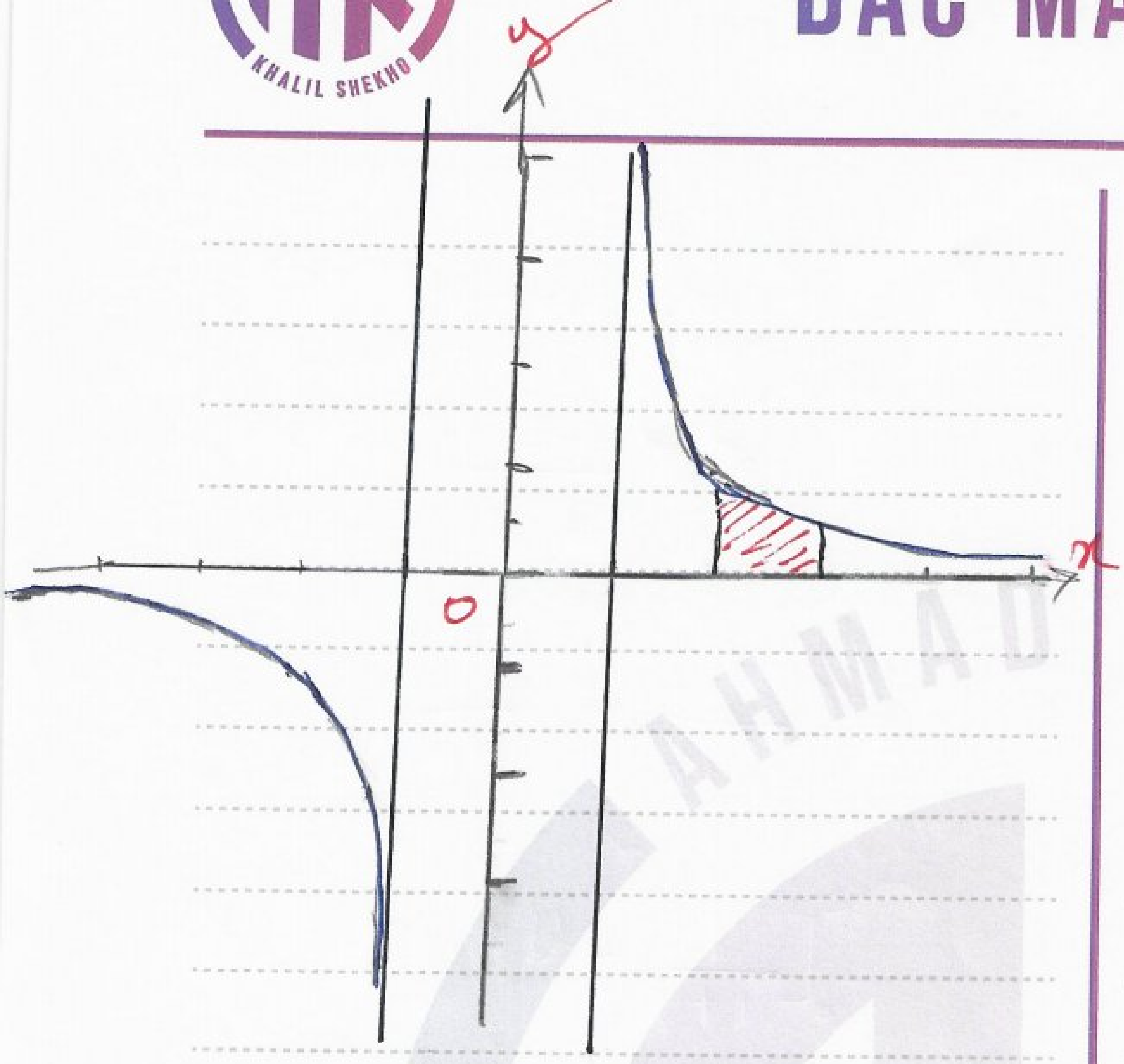
$$= \left[(-x^2 - 2x - 2)e^{-x}\right]_0^1$$

$$= -\frac{5}{e} + 2$$

سؤال: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ بالعلاقة

$$f(x) = Ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$

احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=3$, $x=2$



$x=-1$ $x=1$

الحل:

$$S = \int_a^b f(x)\, d(x)$$

$$= \int_2^3 Ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) d(x)$$

$$U(x) = Ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) \Rightarrow U'(x) = \frac{-2}{x^2-1}$$

$$V'(x) = 1 \Rightarrow V(x) = x$$

$$S = \left[x Ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\, d(x)$$

$$= \left[x Ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]_2^3 + \left[Ln(x^2-1)\right]_2^3$$

$$= (3Ln(2) - 2Ln(3)) + (Ln(8) - Ln(3))$$

$$= 3Ln(2) - 2Ln(3) + 3Ln(2) - Ln(3)$$

$$= 6Ln(2) - 3Ln(3)$$

مسألة: ليكن C الخط البياني للتابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^3 e^x$$

والمطلوب: 1] جد تابعاً أصلياً F لـ f على $\mathbb{R}$ بالصيغة $F(x)=p(x)e^x$ حيث p كثير حدود

2] ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

3] ارسم C للتابع f

4] احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل و $x=1$

الحل:

1]

$F(x)=p(x)e^x$

$F'(x)=f(x)$ $\quad (e^x>0)$

$p'(x)e^x+p(x)e^x=f(x)$

$(p'(x)+p(x))e^x=(x^3)e^x$

$p'(x)+p(x)=x^3 \quad \dots 1]$

لكن $\deg p' < \deg p$ فدرجة الطرف الأيسر تساوي درجة p في حين درجة الطرف الأيمن تساوي 3 إذاً لابد أن يكون $\deg p = 3$ وبالتالي هنا لحلها نفترض أن

$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$p'(x)=3ax^2+2bx+c$

$p'(x)+p(x)=x^3$

$(3ax^2+2bx+c)+(ax^3+bx^2+cx+d)$
$= x^3$

نجد أن:

$ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+c+d$
$= x^3$

بالمطابقة نجد أن

$a=1$

$3a+b=0$

$2b+c=0$

$c+d=0$

ومنه نجد $a=1$

$b=-3 \ , \ c=6$

$d=-6$

نعوض الثوابت في $p(x)$

$p(x)=x^3-3x^2+6x-6$

$F(x)=(x^3-3x^2+6x-6)e^x$

يمكن التوثق أن:

$F'(x)=f(x)$

$F'(x)=p'(x)e^x+p(x)e^x$

$=(x^3-3x^2+6x-6)'e^x$
$+(x^3-3x^2+6x-6)e^x$

$\Rightarrow F'(x)=(3x^2-6x+6)e^x$
$+(x^3-3x^2+6x-6)e^x$

$F'(x)=x^3e^x=f(x)$

2] التابع f معرّف واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \ , \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ومنه نجد أن $y=0$ مقارب أفقي بجوار $-\infty$.

Join us on Telegram
@BAC_MATH_AK

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

$S = \left[F(x)\right]_0^1$

$= \left[(x^3-3x^2+6x-6)e^x\right]_0^1$

$S = (1-3+6-6)e^1 - (0-0+0-6)e^0$

$\Rightarrow S = -2e+6$

$f'(x) = (3x^2)e^x + x^3 e^x$

$f'(x) = x^2(3+x)e^x$

لكن $e^x > 0$ $\Leftarrow$

$f'(x)$ ينعدم إذا

إما $x=0 \Rightarrow f(0)=0$

أو $3+x=0 \Rightarrow x=-3$ $f(-3)=\frac{-27}{e^3}$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-27}{e^3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

[3

[4

$s = \int_0^1 f(x)\,d(x)$