
تابعونا
ودمتم بخير
سويزانا التعليمية

السؤال الأول : لتكن $u_n = 4n + 1$ أثبت أن المتتالية حسابية وعين أساسها

واحسب $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{10}$

السؤال الثاني : اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي : $z = \dfrac{1 - \sqrt{3}\, i}{1 + i}$

السؤال الثالث : رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ، ثلاثة للمؤلف A وأربعة للمؤلف B :

1) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B .

2) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية .

السؤال الرابع : أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين :

$$\begin{cases} e^x - \dfrac{1}{e} e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

السؤال الأول: لتكن $u_n = 4n + 1$ أثبت أن المتتالية حسابية عين أساسها واحسب $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

الحل:

$$u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 1 - (4n+1)$$
$$= 4n + 5 - 4n - 1 = 4$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r = 4$ وحدها الأول $u_0 = 1$

$$u_{10} = u_0 + 10r = 1 + 10 \times 4 = 41$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = (10 - 0 + 1)\frac{1 + 41}{2} = 231$$

السؤال الثاني: اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$

الحل:

الشكل المثلثي للعدد $1 + i$ هو

$$\left.\begin{array}{l} r = |1+i| = \sqrt{2} \\ \left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

الشكل المثلثي للعدد $1 - i\sqrt{3}$ هو

$$\left.\begin{array}{l} r = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = 2 \\ \left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i.\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]}$$

السؤال الثالث:

رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ثلاثة كبت للمؤلف A وأربعة للمؤلف B

❶ بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B

❷ بكم طريقة ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيّناً للمؤلف B في البداية.

الحل:

❶ عدد طرق ترتيب الكتب الثلاثة الأولى (للمؤلف B) يساوي P_4^3

عدد طرق ترتيب الكتب المتبقية (ثلاث كتب للمؤلف A و كتاب للمؤلف B) يساوي $4!$

فحسب المبدأ الأساسي في العدد فإن عدد طرق ترتيب الكتب وفق شرط هو

$$P_4^3 \times 4!$$

❷ عدد طريقة ترتيب الكتب على الرف بشرط أن يكون كتاباً معيّناً للمؤلف B في البداية هو $1 \times 6! = 6!$

السؤال الرابع: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

الحل:

نفرض $X = e^x$ و $Y = e^y$ عندئذ:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{e}Y = 1 & \dots(1) \\ 2X + Y = 4 + e & \dots(2) \end{cases}$$ نضرب المعادلة (1) بـ (-2) ونجمع

$$\boxed{Y = e} \Leftarrow \left(\frac{2}{e} + 1\right)Y = 2 + e \overset{\text{نجمع}}{\Longleftarrow} \begin{cases} -2X + \frac{2}{e}Y = -2 \\ 2X + Y = 4 + e \end{cases}$$

ومنه $X = 2 \Leftarrow X - \frac{1}{e}e = 1$

إذا

$$\boxed{y = 1} \Leftarrow e^y = e$$
$$\boxed{x = \ln 2} \Leftarrow e^x = 2$$