الاختبارات النموذجية في مادة الرياضيات

2024

تتضمن

- اختبار جزئي لكل بحث من أبحاث الكتاب
- اختبار شامل للجزء الأول وآخر للجزء الثاني
- 4 اختبارات نهائية وفق نمط الامتحان النهائي
- جميع النماذج مرفقة بالحل المفصّل وبطرق متنوعة
- جميع أسئلة الاختبارات مختارة ومؤلّفة بعناية بحيث توافق أفكار المنهاج وتمتحن قدرات الطالب

إعداد المدرّس
عبد الملك خير الله
0964 621 810

الفهرس

بسم الله الرحمن الرحيم

تعتبر الاختبارات الدورية أساساً لا غنى عنه لطلاب الشهادة الثانوية ولاسيّما الفرع العلمي ، فتكمن أهميتها في جميع المواد بشكل عام ، و في الرياضيات بشكل خاص .

فالاختبارات هي المعيار و المقياس التي يمكن للطالب من خلالها أن يقيسَ مدى فهمه للأفكار الأساسيّة الواردة بالمنهج الدراسي ، فضلاً عن كونها مادةً تدريبيّةً فعّالة تنمّي قدرات الطالب و مهاراته في التعامل مع ورقة الامتحان و تنظيم الوقت و تنظيم دفتر الإجابة مما يسمو بدرجاته للقمّة بإذن الله .

تأتي هذه الاختبارات تلبيةً لرغبة كل طالب يسعى للتفوّق و التميّز في مادة الرياضيّات ، فهي تحتوي على تمارينَ مصوغة بدقّة و عناية ، جاء منها على نمط التمارين الواردة في الكتابين المقرّرين ، و أسئلة الدورات السابقة ، و النماذج الوزارية دون نسخٍ و لصقٍ ، فبعضها كان من تأليفي الشخصي ، و البعض الآخر كان قد تمّ اقتباسه من مصادر أخرى ، و ذلك بتصرّف و بما يتوافق بالكلّية مع المنهج الدراسي و نمط الامتحان النهائي .

أرفقتُ جميع الاختبارات بحلولها المفصّلة ، و بطرق متنوعة ، لا لكي يعتادَ الطالب على الإجابة الجاهزة و يحفظها إنما ليتأكد من صحة حلوله و يرى الطرق الأخرى المتاحة و ليرى أخطاءه و يتفاداها في المرّات القادمة .

و في الختام أتوجّه بالشكر الجزيل إلى جميع من ساهم في هذا العمل سواءً بشكل مباشر أو غير مباشر من الأساتذة الكرام و لكل من دعم و ساند في ذلك و لو بكلمة .

و أخصّ بالشكر زميلي و صديقي عبد الله عطورة الذي قدّم إليّ أشكالاً مختلفة من المساعدة ، فأبدى ملاحظاته على المسودات الأولى ، و ساعد في حل المسائل و تحقّق من صحتها ، كما و ساهم في إعادة صياغة بعض التمارين ، فجزاه الله خير الجزاء .

و آمُل من المدرّسين الكرام إبداء ملاحظاتهم القيّمة و مقترحاتهم البنّاءة دونما تردّد .

والله وليّ التوفيق

حلب في 2022/7/16

المؤلّف

عبد الملك خير الله

الاسم :

مذاكرة المتتاليات

الدرجة الكاملة : 300

المدّة : ساعة و نصف

أوّلاً: أجب عن الأسئلة الآتية : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ادرس اطّراد المتتاليات الآتية في حالة $n \geq 1$:

1) $u_n = n + \frac{1}{2^n}$ 2) $u_n = \frac{n}{2^n}$ 3) $u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

السؤال الثاني: نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق : $u_n = n(n!)$. **المطلوب** :

1) أثبت أنّ u_n تكتب بالشكل : $u_n = (n+1)! - n!$.

2) لتكن المتتالية $(s_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق : $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ، أثبت أنّ $s_n = (n+1)! - 1$.

السؤال الثالث: أثبت بالتدريج من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ صحّة الخاصيتين :

1) العدد $A = n^3 - n$ مضاعف للعدد 3 . 2) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

ثانياً: حل التمارين الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة تدريجياً وفق : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{u_n+3} \end{cases}$ ، و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ حيث $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$:

1) أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ هندسيّة ، عيّن أساسها و حدّها الأول ، ثم اكتب v_n بدلالة n .

2) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة تدريجياً وفق : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$ ، و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ حيث $v_n = u_n - 1$:

1) أثبت أنّ $u_n > 1$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$.

2) ادرس اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$.

3) أثبت أنّ المتتالية v_n هندسيّة ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين الثالث: ليكن التابع f المعرّف على المجال $I = [0, +\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{12 + x}$

و لتكن المتتالية العدديّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة تدريجيّاً وفق : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ في حالة $n \in \mathbb{N}$.

1) أثبت أنّ التابع f متزايد تماماً على I ، ثم حل المعادلة $f(x) = x$.

2) أثبت أنّ $0 \leq u_n < 4$ و ذلك من أجل $n \geq 0$.

3) ادرس اطّراد المتتالية u_n .

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة المتتاليات "1-2022"

أولاً: السؤال الأول:

1) $u_n = n + \frac{1}{2^n}$

$u_{n+1} = n+1+\frac{1}{2^{n+1}}$

$u_{n+1}-u_n = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}$

$= 1+\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2} - 1\right)$

$= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة تماماً.

2) $u_n = \frac{n}{2^n}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} \leq 1$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متناقصة.

3) $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$

$u_{n+1} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$

$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{n+1} > 0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة تماماً.

السؤال الثاني:

1) $(n+1)! - n! = (n+1)n! - n!$

$= n!(n+1-1) = n(n!)$

إذن $u_n = n(n!) = (n+1)! - n!$

2- طريقة أولى:

$E(n): \quad S_n = (n+1)!-1$

$E(1)$ محققة لأن:

$$\begin{cases} S_1 = u_1 = 1 \\ S_1 = 2!-1 = 1 \end{cases}$$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

من الفرض: $S_n = (n+1)! - 1$

نضيف للطرفين u_{n+1}:

$S_n + u_{n+1} = (n+1)! - 1 + u_{n+1}$

$S_{n+1} = \cancel{(n+1)!} - 1 + (n+2)! - \cancel{(n+1)!}$

$S_{n+1} = (n+2)! - 1$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كان $n\geq1$.

طريقة ثانية:

$u_1 = \cancel{2!} - 1!$

$u_2 = \cancel{3!} - \cancel{2!}$

$u_3 = 4! - \cancel{3!}$

$\vdots$

$u_n = (n+1)! - \cancel{n!}$ +

$S_n = (n+1)! - 1$

السؤال الثالث:

أ) لتكن $P(n)$ القضية،

$P(n): \quad A = 3K \quad ; K\in\mathbb{N}$

$P(1)$ محققة لأن $A(1)=0$ وهو يقبل القسمة على 3.

نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$:

$A(n+1) = (n+1)^3 - (n+1)$

$= n^3+3n^2+3n+\cancel{1}-n-\cancel{1}$

$= n^3-n+3(n^2+n)$

$= 3K+3(n^2+n)$

وهو يقبل القسمة على 3

فالقضية $P(n)$ صحيحة $\forall n\geq1$.

(2) $E(n):\quad 1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

$E(1)$ محققة لأن: $1=1^2$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$$1+3+\dots+(2n-1)=n^2$$

نضيف للطرفين $2n+1$:

$$1+3+\dots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1$$

$$1+3+5+\dots+(2n+1)=(n+1)^2$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 1$.

ثانياً: التمرين الأول:

(1) $$v_{n+1}=\frac{1-u_{n+1}}{1+u_{n+1}}$$

$$=\frac{1-\frac{3u_n+1}{u_n+3}}{1+\frac{3u_n+1}{u_n+3}}\cdot\frac{u_n+3}{u_n+3}$$

$$=\frac{u_n+3-3u_n-1}{u_n+3+3u_n+1}=\frac{2-2u_n}{4+4u_n}$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}\,\frac{1-u_n}{1+u_n}=\frac{1}{2}v_n$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول: $v_0=\frac{1-u_0}{1+u_0}=1$

$$v_n=v_0\,q^n$$

$$\boxed{v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

(2) $$v_n=\frac{1-u_n}{1+u_n}=\frac{-1-u_n+2}{1+u_n}$$

$$=-1+\frac{2}{1+u_n}$$

$$\Rightarrow v_n+1=\frac{2}{1+u_n}$$

$$1+u_n=\frac{2}{1+v_n}$$

$$u_n=\frac{2}{1+v_n}-1$$

$$\boxed{u_n=\frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}-1}$$

(3) $$S_n=v_0+v_1+\dots+v_{n-1}=a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

حيث: $a=v_0=1,\ q=\frac{1}{2}$

$$S_n=(1)\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{S_n=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

التمرين الثاني:

(1) $E(n):\quad u_n>1$

$E(0)$ محققة لأن: $u_0=2>1$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$$u_n>1$$

$$\frac{1}{2}u_n>\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}>1$$

$$u_{n+1}>1$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 0$.

(2) $$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}-\frac{2}{2}u_n$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}u_n=\frac{1}{2}(1-u_n)<0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

3)

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1$$

$$= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأول $v_0 = u_0 - 1$
$= 2 - 1 = 1$

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v_n = u_n - 1 \Rightarrow u_n = 1 + v_n$$

$$\boxed{u_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

التمرين الثالث:

1) f اشتقاقي على I:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{12+x}} > 0$$

فالتابع f متزايد تماماً على I.

$$f(x) = x$$

$$\sqrt{12+x} = x$$

نربع الطرفين بشرط $x \geq 0$:

$$12 + x = x^2$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x+3)(x-4) = 0$$

$x_1 = -3$ مرفوض.

$x_2 = 4$ مقبول.

2) $E(n):\quad 0 \leq u_n < 4$

$E(0)$ محققة لأن: $0 \leq u_0 = 0 < 4$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

من الفرض $0 \leq u_n < 4$

وبما أن التابع f متزايد تماماً على $[0,4]$:

$$f(0) \leq f(u_n) < f(4)$$

$$0 \leq 2\sqrt{3} \leq u_{n+1} < 4$$

$$0 \leq u_{n+1} < 4$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$.

3)

$$u_0 = 0$$

$$u_1 = 2\sqrt{3}$$

نلاحظ أن $u_1 > u_0$ لذلك تبدو المتتالية متزايدة تماماً. لنثبت ذلك بالتدريج:

$$E'(n):\quad u_{n+1} > u_n$$

$E'(0)$ محققة لأن $u_1 = 2\sqrt{3} > u_0 = 0$

نفرض صحة $E'(n)$ ونبرهن صحة $E'(n+1)$:

$$u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow f(u_{n+1}) > f(u_n)$$

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$.

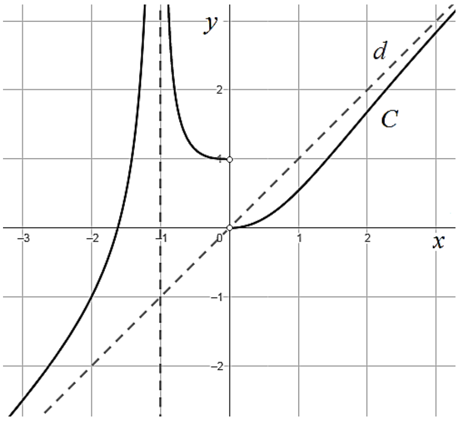
ومنه نستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

الاسم :

مذاكرة النهايات و الاستمرار

الدرجة الكاملة : 300

المدّة : ساعة و نصف



أوّلاً: **أجب عن الأسئلة الآتية :** (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}^*$ ، المستقيم d مقارب مائل للخط C . **المطلوب :**

1) أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-x)$.

2) هل f مستمر عند $x=0$ ؟

3) أوجد $\lim_{x\to-1} f(x)$.

4) ما وضع الخط C بالنسبة للمستقيم d ؟

5) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=1$ ؟

السؤال الثاني: احسب النهايتين الآتيتين : $l_2=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sin 2x-\sin x}$ ، $l_1=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}$.

السؤال الثالث: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق : $f(x)=x\cos(\frac{1}{x})$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ المستقيم Δ ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

2) ادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

ثانياً: **حل التمارين الآتية :** (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(0)=m$ و $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ في حالة $x\neq 0$. **المطلوب :**

1) عيّن قيمة m التي تجعل التابع f مستمرّاً عند $x=0$.

2) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) احسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

التمرين الثاني: ليكن f التابع المعرّف وفق : $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$. **المطلوب :**

1) تحقّق أنّ $D_f=\mathbb{R}$.

2) احسب العددين a و b حيث $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$.

3) استنتج معادلة المقارب المائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.

التمرين الثالث: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. **المطلوب :**

1) أوجد ما للخط C من مقاربات أفقيّة و شاقوليّة ، و ادرس وضعها النسبي .

2) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و استنتج $\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$.

3) أوجد العدد الحقيقي A الذي يحقّق : إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]-1.1\,,-0.9[$.

طلب إضافي (20 درجة إضافية) :

4) أثبت أنّ الخط C متناظر بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=x$.

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة النهايات و الاستمرار "2022-1"

أولاً: السؤال الأول:

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \ , \ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_\Delta) = 0$$

2) f ليس مستمراً عند $x=0$.

3) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$

4) c تحت d على المجال $]0,+\infty[$

c فوق d على المجال $]-\infty,0[$.

5) حلان .

السؤال الثاني:

$$l_1 = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين نزيلها :

نعلم أنّ : $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$

باختيار $\theta = \pi x$: $\sin(\pi x) = \sin(\pi - \pi x)$

$$= \sin(\pi(1-x))$$

$$\Rightarrow l_1 = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi(1-x))}{x-1}\cdot\frac{-\pi}{-\pi}$$

$$= -\pi\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)}$$

$$= -\pi(1) = \boxed{-\pi}$$

حسب القاعدة :

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

$$l_2 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + \sin x}{\sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$l_2 = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x + \sin x}{2\sin x\cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\sin x}(2\cos x+1)}{\cancel{\sin x}(2\cos x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+1}{2\cos x-1}$$

$$= \frac{2(1)+1}{2(1)-1} = \boxed{3}$$

السؤال الثالث:

1) $f(x) - y_\Delta = x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x$

$$= -x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$= -x\cdot 2\sin^2\frac{1}{2x}$$

نجري تغييراً للمتحول: $2x = \frac{1}{t}$

$$t \longrightarrow 0$$

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{\sin^2 t}{t} = -\sin t\cdot\frac{\sin t}{t}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_\Delta) = \lim_{t\to 0}\left(-\sin t\cdot\frac{\sin t}{t}\right)$$

$$= -(0)(1) = 0$$

فالمستقيم Δ ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

2) وجدنا أنّ :

$$f(x) - y_0 = -2x\underbrace{\sin^2\left(\frac{1}{2x}\right)}_{\geq 0}$$

من أجل $x>0$ نجد أنّ $f(x)-y_\Delta<0$

أي C_f تحت Δ .

من أجل $x<0$ نجد أنّ $f(x)-y_\Delta>0$

أي C_f فوق Δ .

ويتقاطع c مع Δ في نقاط فواصلها تحقق:

$$f(x) - y_{\Delta} = 0 \rightarrow -2x\sin^2\frac{1}{2x} = 0$$

$x = 0$ مرفوض (لأنه $x \notin \mathbb{R}^*$)

$$\sin^2\frac{1}{2x} = 0$$

$$\frac{1}{2x} = \pi K$$

$$x = \frac{1}{2\pi K} \qquad K \in \mathbb{Z}^*$$

ثانياً: التمرين الأول:

1) لكي يكون f مستمراً عند $x=0$ يجب تحقق:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\Rightarrow m = \lim_{x \to 0} f(x)$$

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

نضرب بـ $x > 0$:

$$-x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$$

$$-x \leq f(x) \leq x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} [-x] = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} [x] = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

في حالة $x < 0$:

$$x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq -x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} (x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

وبالتالي $\boxed{m = 0}$

2) عند حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ نتعرض لحالة عدم تعيين من الشكل $(\infty)(0)$

نفرض $t = \frac{1}{x}$

$$x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

3)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} = (0)(0) = 0$$

التمرين الثاني:

1) نفرض $g(x) = x^2 + 4x + 5$

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

f معرف بشرط $g(x) \geq 0$

$$x^2 + 4x + 5 \geq 0$$

نحل المعادلة $x^2 + 4x + 5 = 0$

$$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$$

المعادلة مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$.

تابع g يحافظ على إشارته على كامل $\mathbb{R}$

وإشارته تماثل إشارة $g(0) = +5$

وبالتالي $g(x) \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

أي أن $D_f = \mathbb{R}$.

2)

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2})}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + 4/x + 5/x^2}}{x}$$

من أجل $x > 0$ نجد أن $|x| = x$

$$\Rightarrow a = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1 + 4/x + 5/x^2}}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + 4/x + 5/x^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = \boxed{1}$$

$f(x)-(-1) = \frac{1-x+1+x}{1+x} = \frac{2}{1+x}$

في حالة $-1<x$ يكون $f(x)-y_D>0$

أي C فوق المقارب.

في حالة $-1>x$ يكون $f(x)-y_D<0$

أي C تحت المقارب.

$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب شاقولي

للخط C في جوار $+\infty$. C يقع على يمين المقارب.

$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب شاقولي

للخط C في جوار $-\infty$. C يقع على يسار المقارب.

②

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (-1)^+$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{t\to(-1)^+} f(t) = +\infty$

③ $|f(x)-(-1)| < 0.1$

$\left|\frac{1-x}{1+x}+1\right| < 0.1 \Rightarrow \frac{2}{|1+x|} < 0.1$

$20 < |1+x|$

$20 < 1+x$

$\boxed{19 < x}$

$A=19$ أو أي عدد حقيقي أكبر منه.

④ يكفي إثبات أن $f^{-1}(x) = f(x)$

أو $f(f(x)) = x$

$f(f(x)) = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x-1+x}{1+x+1-x} = \frac{2x}{2} = x$

فالخط C للتابع f متناظر بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=x$.

$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-(1)x)$

$= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}-x)$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+4x+5-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+5}{\sqrt{x^2(1+4/x+5/x^2)}+x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(4+5/x)}{\cancel{x}[\sqrt{1+4/x+5/x^2}+1]}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4+5/x}{\sqrt{1+4/x+5/x^2}+1} = \frac{4+0}{1+1} = \boxed{2}$

③ المستقيم $D: y = ax+b$

أي $D: y = x+2$ هو مقارب

مائل للخط C في جوار $+\infty$ لنثبت:

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_D) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)\right)$

بالضرب بالمرافق والإصلاح:

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_D) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x+5-(x^2+4x+4)}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)} = 0$

التمرين الثالث:

①

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$

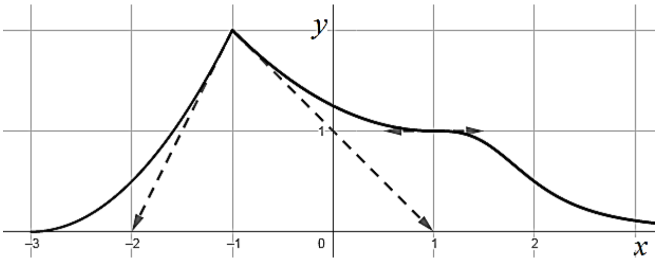
المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ مقارب

أفقي للخط C في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

المدّة : ساعة و نصف	مذاكرة الاشتقاق الدرجة الكاملة : 300	الاسم :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرّف على المجال $]-3;+\infty[$. المطلوب :



1) أوجد $f(-3)\,,f(-1)\,\,,f'(1)\,,f(1)$.

2) هل f اشتقاقي عند $x=-1$ ؟

3) أوجد $f'((-1)^-)$ و $f'((-1)^+)$.

4) ما عدد القيم الحديّة التي يمتلكها التابع f ؟

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرّف على المجال $[0;2]$ وفق : $f(x)=(x-2)\sqrt{x(2-x)}$. أثبت أنّ f اشتقاقي عند $x=2$.

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}x)}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ $f(x)=\frac{2}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}-1$.

2) أثبت أنّ $f(-x)=f(x)$ و $f(x+2)=f(x)$. ماذا تستنتج ؟

3) ادرس تغيّرات f على المجال $[0;1]$ ، ثم ارسم C على المجال $[-2;2]$.

التمرين الثاني: ليكن f التابع المعرّف وفق : $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+2}$. **المطلوب :**

A- عيّن a و b إذا علمت أنّ $f(1)=1$ قيمة حديّة للتابع .

B- بفرض $a=1$ و $b=-2$:

1) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=\sqrt{10}$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]3;5[$ ، ثم جد هذا الحل جبرياً .

2) أوجد $f'(x)$ و استنتج $g'(x)$ حيث $g(x)=f(\cos x)$.

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف وفق : $f(x)=\frac{3x}{x^2-x+1}$. **المطلوب :**

1) تحقّق من أنّ $D_f=\mathbb{R}$.

2) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها ، و دل على القيم الحديّة .

3) اكتب معادلة المماس T_0 للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=0$ ، و ادرس وضعه النسبي .

4) اكتب معادلة المماس T_2 للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=2$ ، و ادرس وضعه النسبي .

5) ارسم في معلم متجانس T_0 و T_2 ثم ارسم C .

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة الاشتقاق "2022-1"

أولاً: السؤال الأول:

1) $f(1)=1$, $f'(1)=0$, $f(-1)=2$, $f(-3)=0$

2) f غير اشتقاقي عند $x=-1$.

3) $$f'(-1)^- = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-0}{-1-(-2)} = 2$$

$$f'(-1)^+ = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-0}{-1-1} = -1$$

4) قيمتان حديّتان (وهما $f(-3)=0, f(-1)=2$)

السؤال الثاني:

معدل التغير:

$$t(x) = \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{(x-2)\sqrt{x(2-x)}-0}{x-2}$$

$$t(x) = \sqrt{x(2-x)}$$

$$\lim_{x\to 2} t(x) = \sqrt{2(0)} = 0$$

فالتابع f اشتقاقي عند $x=2$ بحيث:

$$f'(2)=0$$

ثانياً: التمرين الأول:

1) $$\frac{2}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)} - 1 = \frac{2-1-\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}$$

$$= \frac{1-\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}x)}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)} - 1$$

2) $$f(-x) = \frac{2}{1+\cos^2(-\frac{\pi}{2}x)} - 1$$

$$= \frac{2}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)} - 1 = f(x)$$

نستنتج أنّ التابع f زوجي.

$$f(x+2) = \frac{2}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x+\pi)} - 1$$

نعلم أنّ $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos^2(\theta+\pi) = \cos^2\theta$$

باختيار $\theta = \frac{\pi}{2}x$

$$f(x) = \frac{2}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)} - 1 = f(x+2)$$

نستنتج أنّ التابع f دوري. ودوره $T=2$.

3) f معرّف ومستمر واشتقاقي على $[0,1]$

$f(0)=0$, $f(1)=1$

$$f'(x) = \frac{(0) - 2\cdot\frac{\pi}{2}(-\sin\frac{\pi}{2}x)\cos(\frac{\pi}{2}x)\cdot 2}{(1+\cos^2\frac{\pi}{2}x)^2}$$

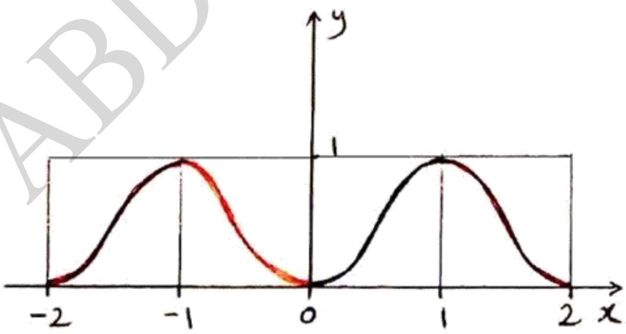
$$= \frac{\pi \sin \pi x}{(1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x))^2}$$

$$f'(x)=0 \iff \sin\pi x = 0$$

$$\pi x = \pi K$$

$$\boxed{x=K} \quad K\in\mathbb{Z}$$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1



التمرين الثاني : A -

$f(1)=1 \Rightarrow \sqrt{a+b+2}=1$

$a+b+2=1$

$a+b=-1 \quad \dots (*)$

$f'(1)=0$

$f'(x)=\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+2}}$

$f'(1)=\dfrac{2a+b}{2}=0$

$2a+b=0 \quad — (**)$

بالحل المشترك نجد أنّ $a=1,\ b=-2$

B-1)

$f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$

$f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}>0 \quad \forall x\in]3,5[$

التابع f مستمر ومطرد تماما على $]3,4[$

$f(3)=\sqrt{5} < \sqrt{10}$

$f(5)=\sqrt{17} > \sqrt{10}$

بالتالي حسب مبرهنة القيمة الوسطى المعادلة $f(x)=\sqrt{10}$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]3,5[$

$f(x)=\sqrt{10} \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{10}$

$x^2-2x+2=10$

$x^2-2x-8=0$

$(x-4)(x+2)=0$

$x_1=-2 \notin]3,5[$

$x_2=4$

$\boxed{\alpha=4}$

2)

$f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

$g(x)=f(\cos x)$

g اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$g'(x)=-\sin x\cdot f'(\cos x)$

$g'(x)=-\sin x\cdot\dfrac{\cos x-1}{\sqrt{\cos^2 x-2\cos x+2}}$

الثالث 1) f معرف بشرط $x^2-x+1\neq 0$

نحل المعادلة $x^2-x+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=1-4=-3<0$

المعادلة مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$.

فالتابع f معرف على $\mathbb{R}$ أي $D_f=\mathbb{R}$.

2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$f'(x)=\dfrac{3(x^2-x+1)-(2x-1)(3x)}{(x^2-x+1)^2}$

$=\dfrac{3x^2\cancel{-3x}+3-6x^2\cancel{+3x}}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{3(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0$

$x_1=-1 \quad , \quad x_2=1$

$f(-1)=-1 \ , \ f(1)=3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

حيث $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

$f(-1)=-1$ قيمة حدية صغرى.

$f(1)=3$ قيمة حدية كبرى.

$T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ③

$f(0) = 0 \ , \ f'(0) = 3$

$$\boxed{T_0 : y = 3x}$$

$$f(x) - y_{T_0} = \frac{3x - 3x(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{\cancel{3x} - 3x^3 + 3x^2 - \cancel{3x}}{x^2-x+1}$$

$$= 3x^2 \frac{1-x}{x^2-x+1}$$

إشارة الفرق تماثل إشارة المقدار $(1-x)$:

في حالة $x=1$ يتقاطع C مع T_0.

في حالة $x<1$ يكون C فوق T_0.

في حالة $x>1$ يكون C تحت T_0.

$T_2 : y = f'(2)(x-2) + f(2)$ ④

$f(2) = \frac{6}{3} = 2 \ , \ f'(2) = \frac{-9}{3^2} = -1$

$$y = -(x-2) + 2$$

$$\boxed{T_2 : y = -x + 4}$$

$$f(x) - y_{T_2} = \frac{3x}{x^2-x+1} - (-x+4)$$

$$= \frac{3x + x^3 - x^2 + x - 4x^2 + 4x - 4}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^2-x+1}$$

مجموع المعاملات $= 0$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 & x-1 \\ \hline -x^3 + x^2 & x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \\ -4x^2 + 8x - 4 & \\ +4x^2 - 4x & \\ 4(x-1) & \\ -4(x-1) & \\ 0 & \end{array}$$

$$f(x) - y_{T_2} = \frac{(x-1)(x-2)^2}{x^2-x+1}$$

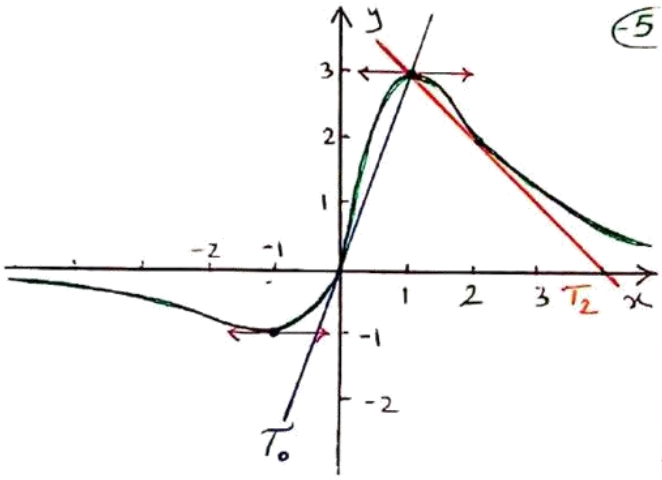
إشارة الفرق $f(x) - y_{T_2}$ تماثل إشارة $(x-1)$

من أجل $x=1$ يتقاطع C مع T_2.

من أجل $x<1$ يقع C تحت T_2.

من أجل $x>1$ يقع C فوق T_2.

⑤



عبد الملك خير الله

الاسم :

مذاكرة نهاية متتالية

الدرجة الكاملة : 300

المدّة : ساعة و نصف

أوّلاً: أجب عن الأسئلة الآتية : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وفق : $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. **المطلوب** :

1) أثبت أنّ $\sqrt{n} \leq u_n$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.
2) استنتج $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

السؤال الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة وفق : $u_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$. **المطلوب** :

1) أثبت أنّ العدد $M = \frac{1}{2}$ راجح على المتتالية u_n .
2) احسب $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n . u_n$.

السؤال الثالث: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة تدريجياً وفق : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \sqrt{1+(u_n-1)^2}$. **المطلوب** :

1) أثبت أنّ $1 \leq u_n \leq 2$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$.
2) ادرس اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ و استنتج أنّها متقاربة نحو نهاية يُطلَب تعيينها .

ثانياً: حل التمارين الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة تدريجياً وفق : $u_0 = 5$ ، $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3} + \frac{3}{1+u_n}$. **المطلوب** :

1) أثبت أنّ التابع $f(x) = \frac{1+x}{3} + \frac{3}{1+x}$ متزايد على المجال $[2,+\infty[$.
2) أثبت بالتدريج أنّ $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$.
3) استنتج أنّ المتتالية متقاربة ، و احسب نهايتها .

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ حيث $u_n = \frac{n}{(n+1)!}$ ، و لتكن المتتالية $(s_n)_{n\geq1}$ $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1) ادرس اطّراد المتتالية $(s_n)_{n\geq1}$.
2) أثبت من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ أنّ $s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.
3) استنتج أنّ المتتالية s_n متقاربة ، و احسب $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

التمرين الثالث: المتتاليتان $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ معرّفتان وفق : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \frac{u_n+6v_n}{7} \end{cases}$ ، $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+5v_n}{7} \end{cases}$ **المطلوب** :

1) لتكن المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ المعرّفة وفق $w_n = u_n - v_n$ ، أثبت أنّ المتتالية w_n هندسيّة ، واكتب عبارة w_n بدلالة n .
2) أثبت أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ متجاورتان .
3) أثبت أنّ المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ المعرّفة وفق $t_n = u_n + 5v_n$ ثابتة ، و استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$.

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة نهاية متتالية "2022-1"

أولاً: السؤال الأول:

1)
$$\frac{n}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{1}}$$

$$\boxed{\sqrt{n} \leq u_n}$$

2)
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

حسب مبرهنة المقارنة.

السؤال الثاني:

1)
$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{2-(n^2+3n+2)}{2(n^2+3n+2)}$$

$$= \frac{-n^2-3n}{2(n^2+3n+2)} \leq 0$$

$$u_n - \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\boxed{u_n \leq \frac{1}{2}}$$

فالعدد $M = \frac{1}{2}$ راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

2)
$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

نضرب بـ $u_n > 0$:

$$-u_n \leq (-1)^n u_n \leq u_n$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = 0 \\ \lim_{n\to+\infty} (u_n) = 0 \end{array}\right\} \lim_{n\to+\infty} (-1)^n u_n = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة.

السؤال الثالث:

1) $E(n):\quad 1 \leq u_n \leq 2$

$E(0)$ محققة لأنّ:

$$1 \leq u_0 = 2 \leq 2$$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

$$0 \leq u_n - 1 \leq 1$$

$$0 \leq (u_n-1)^2 \leq 1$$

$$1 \leq 1+(u_n-1)^2 \leq 2$$

$$1 \leq \sqrt{1+(u_n-1)^2} \leq \sqrt{2} \leq 2$$

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$.

2)
$$u_0 = 2,\quad u_1 = \sqrt{2},\quad u_2 = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

تبدو المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

لتكن القضيّة:

$$P(n):\quad u_{n+1} \leq u_n$$

$P(0)$ محققة لأنّ $u_1 = \sqrt{2} \leq u_0 = 2$

نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$:

$$u_{n+1} \leq u_n$$

$$0 \leq u_{n+1} - 1 \leq u_n - 1$$

$$(u_{n+1}-1)^2 \leq (u_n-1)^2$$

$$1+(u_{n+1}-1)^2 \leq 1+(u_n-1)^2$$

$$\sqrt{1+(u_{n+1}-1)^2} \leq \sqrt{1+(u_n-1)^2}$$

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$P(n+1)$ محققة. فالقضية $P(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$، والمتتالية u_n متناقصة.

المتتالية u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد (1) فهي متقاربة.

نهايتها تحقق المعادلة:

$$\ell = \sqrt{1+(\ell-1)^2}$$

$$\ell^2 = 1+(\ell^2-2\ell+1)$$

$$2-2\ell=0 \Rightarrow \ell=1$$

أي: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$

ثانياً: التمرين الأول:

1) f اشتقاقية على المجال $[2,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{3}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2-9}{3(1+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{3(1+x)^2} \geq 0$$

فالتابع f متزايد على المجال $[2,+\infty[$.

2) $E(n): \quad 2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

$E(0)$ محققة لأن:

$$2 \leq u_1 = \frac{5}{2} \leq u_0 = 5$$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

$$f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$.

3) المتتالية u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد (2) فهي متقاربة.

ولإيجاد نهايتها نحل المعادلة $f(x)=x$

$$\frac{1+x}{3} + \frac{3}{1+x} = x \qquad \times 3(1+x)$$

$$(1+x)^2+9 = 3x(1+x)$$

$$x^2+2x+10 = 3x+3x^2$$

$$2x^2+x-10=0$$

$$(x-2)(2x+5)=0$$

إما $2x+5=0$

$x = \frac{-5}{2}$ (مرفوض)

أو $x-2=0$

$x=2$ (مقبول)

وبالتالي $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$

التمرين الثاني:

1) $S_n = u_1+u_2+\dots+u_n$

$$S_{n+1} = u_1+u_2+\dots+u_n+u_{n+1}$$

$$S_{n+1}-S_n = u_{n+1} = \frac{n+1}{(n+2)!} > 0$$

فالمتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً.

2) طريقة (1):

$$u_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)n!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$u_1 = \frac{1}{1!} - \cancel{\frac{1}{2!}}$$

$$u_2 = \cancel{\frac{1}{2!}} - \frac{1}{3!}$$

$$\vdots$$

$$u_n = \cancel{\frac{1}{n!}} - \frac{1}{(n+1)!} \qquad +$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

طريقة (2): إثبات بالتدرج

$$E(n): \quad S_n = 1-\frac{1}{(n+1)!}$$

$E(1)$ محققة لأن: $S_1 = u_1 = \frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2!}$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\underbrace{S_n + u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} + u_{n+1}$$

$$S_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$

$$(n+2) \qquad (1)$$

$$S_{n+1} = 1 + \frac{-n-2+n+1}{(n+2)!}$$

$$S_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة

أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.

③ $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!} < 1$

المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى

بالعدد (1) فهي متقاربة.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 - 0 = 1$$

حيث $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$

التمرين الثالث:

① $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$

$$= \frac{2u_n + 5v_n - u_n - 6v_n}{7} = \frac{1}{7}(u_n - v_n)$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{7} w_n$$

فالمتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{7}$

$$w_0 = u_0 - v_0 = 6 - 0 = 6$$

$$w_n = w_0 \cdot q^n$$

$$\boxed{w_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n}$$

② لندرس اطراد u_n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 5v_n - 7u_n}{7} = \frac{-5}{7}(u_n - v_n)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-5}{7} w_n < 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

لندرس اطراد v_n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 6v_n - 7v_n}{7} = \frac{u_n - v_n}{7}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{7} w_n > 0$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

(الشرط الأول محقق)

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} 6\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0 \quad ; \ |q| < 1$$

(الشرط الثاني محقق)

فالمتتاليتان u_n و v_n متجاورتان.

③ $t_{n+1} = u_{n+1} + 5v_{n+1}$

$$= \frac{2u_n + 5v_n + 5u_n + 30v_n}{7} = \frac{7u_n + 35v_n}{7}$$

$$t_{n+1} = u_n + 5v_n = t_n$$

فالمتتالية ثابتة.

$$t_n = t_0 = u_0 + 5v_0 = 6$$

بما أن المتتاليتين u_n و v_n متجاورتان:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = L$$

$$u_n + 5v_n = 6$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + 5 \lim_{n\to+\infty} v_n = 6$$

$$L + 5L = 6$$

$$\boxed{L = 1}$$

المدّة : ساعة و نصف

مذاكرة التابع اللوغاريتمي

الدرجة الكاملة : 300

الاسم :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول:

حل المعادلة $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$ ثم استنتج حلول المتراجحة $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 \leq 0$.

السؤال الثاني:

حل جملة المعادلتين : $\begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ \ln(x^2) - \ln y = 3 \end{cases}$

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$. **المطلوب :**

1) عيّن العددين الحقيقيّين a و b إذا علمت أنّ $f(1) = 0$ قيمة حديّة للتابع .

2) أثبت أنّ المستقيم Δ ذي المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل للخط C ، و ادرس وضعه النسبي .

التمرين الثاني: ليكن التابع f المعرّف على المجال $I = [0,+\infty[$ وفق : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln(1+x)} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ التابع f اشتقاقي عند $x = 0$.

2) اكتب معادلة المماس T للخط C عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

3) أثبت من أجل كل x من I أنّ $\ln(1+x) \leq x$ ، ثم استنتج وضعيّة المماس T بالنسبة للخط C .

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$ و **المطلوب :**

1) احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه و اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي .

2) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

3) أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α ينتمي إلى المجال $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

4) في معلم متجانس ارسم الخط البياني C .

5) استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع : $g(x) = \frac{1+x^2+2\ln x}{x^2}$.

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة التابع اللوغاريتمي 1- 2022

أولاً: السؤال الأول:

$$2(\ln x)^2-5\ln x+2=0$$

شرط الحل $x>0$

نفرض: $\ln x = t$

$$2t^2-5t+2=0$$

$$\Delta = b^2-4ac = 25-16=9$$

$$\sqrt{\Delta}=3$$

$$t_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+3}{4}=2$$

$$\ln x_1 = 2$$

$$\boxed{x_1=e^2}$$ مقبول

$$t_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\ln x_2=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x_2=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}}$$ مقبول

x	0		$\sqrt{e}$		e^2		$+\infty$
$2(\ln x)^2-5\ln x+2$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة	‖			محققة			

ومنه نستنتج أن حلول المتراجحة

$$2(\ln x)^2-5\ln x+2 \le 0$$

هي

$$\boxed{x\in[\sqrt{e}, e^2]}$$

السؤال الثاني:

شرط الحل $x>0$, $y>0$

$$\ln x+\ln y=0$$

$$2\ln x-\ln y=3 \quad +$$

$$3\ln x+0=3 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow \boxed{x=e}$$

نعوض: $\ln(e)+\ln y=0$

$$\ln y=-1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{e}}$$

ثانياً: التمرين الأول:

(1)

$$f(1)=0$$

$$\Rightarrow a+b-\frac{\ln(1)}{1}=0 \Rightarrow \boxed{a+b=0} \ (*)$$

$$f'(1)=0$$

$$f'(x)=a-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=a-\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(1)=a-\frac{1-0}{1}=a-1$$

$$a-1=0$$

$$\boxed{a=1}$$

نعوض في $(*)$:

$$1+b=0$$

$$\boxed{b=-1}$$

$$\Rightarrow f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$$

$$\Delta:\ y=x-1$$

(2)

$$f(x)-y_\Delta=-\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x}{x}=0$$

فالمستقيم Δ ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للخط C في جوار $(+\infty)$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	‖	C فوق Δ		C تحت Δ	

ويتقاطع C مع Δ في النقطة $(1,0)$.

التمرين الثاني:

1) معدل التغير:

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x^2}{\ln(1+x)}-0}{x}$$

$$t(x)=\frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 0} t(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1$$

فالتابع f اشتقاقي عند $x=0$ بحيث:
$$f'(0)=1$$

2) $T:\quad y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$$\boxed{T:\quad y=x}$$

3) ليكن g التابع المعرف على I وفق:
$$g(x)=\ln(1+x)-x$$

g معرف ومستمر واشتقاقي على I:

$$g(0)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{x}{1+x}\right]=(+\infty)[0-1]=-\infty$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}\leq 0\quad \forall x\in I$$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ أنه $g(x)\leq 0$

أي أنه: $\ln(1+x)-x\leq 0$

$$\boxed{\ln(1+x)\leq x}\longrightarrow (*)$$

$$f(x)-y_T=\frac{x^2}{\ln(1+x)}-x=x\left(\frac{x}{\ln(1+x)}-1\right)\geq 0$$

C فوق T.

ثالثاً:

1)
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+2\frac{\ln x}{x^2}\right)=0+0=0$$

حيث: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$

$x=0$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

2) f اشتقاقي على I:

$$f'(x)=\frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(1+2\ln x)}{x^4}=\frac{-4\ln x}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \iff \ln x=0$$

$$\boxed{x=1}$$

$$f(1)=\frac{1+2\ln(1)}{1^2}=1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) $0\notin f([1,+\infty[)=]0,1]$

f معرف ومستمر ومطرد تماماً على المجال $]0,1[$

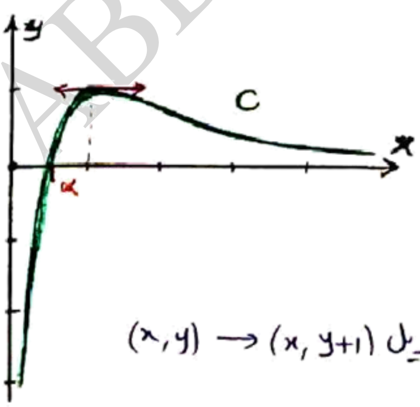
كما أنه $0\in f(]0,1[)=]-\infty,1[$

فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α

$$\left.\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{\sqrt3}\right)&=3(1-\ln 3)<0\\ f\left(\tfrac{1}{\sqrt2}\right)&=2(1-\ln 2)>0\end{aligned}\right\}\ f\left(\tfrac{1}{\sqrt3}\right)\cdot f\left(\tfrac{1}{\sqrt2}\right)<0$$

وبالتالي $\alpha\in\left]\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt2}\right[$ حسب مبرهنة القيمة الوسطى.

4+5)



$$g(x)=f(x)+1$$

C_g ينتج عن C بالتحويل $(x,y)\to(x,y+1)$

الاسم :	مذاكرة التابع الأسي الدرجة الكاملة : 300	المدّة : ساعة و نصف

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: حل المعادلتين الآتيتين :

$$1)\quad 25^x + 5^{x+1} - 6 = 0 \qquad\qquad 2)\quad e^x + 10e^{-x} - 7 = 0$$

السؤال الثاني:

1) عيّن حل المعادلة التفاضليّة $y' - y = 1$ الذي يمر خطه البياني بالمبدأ O .

2) أثبت أنّ التابع $f(x) = x\ln x$ هو حل للمعادلة التفاضليّة $y' - \frac{1}{x}y = 1$.

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = xe^{1-x} + 2$. **المطلوب** :

1) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

2) أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ، و يحقّق $\alpha \in \left]-1,0\right[$.

3) أثبت في حالة $n \geq 1$ أنّ : $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{1-x}$.

التمرين الثاني: ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(0) = 0$ و $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$ في حالة $x \neq 0$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ التابع f اشتقاقي عند $x = 0$.

2) اكتب معادلة المماس T للخط C عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

3) أثبت من أجل كل x من $\mathbb{R}$ أنّ $e^x - 1 \geq x$ ، ثم استنتج وضعيّة المماس T بالنسبة للخط C .

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = 2\ln(e^x + 1) - x$ **و المطلوب :**

1) أثبت أنّ التابع f زوجي و استنتج صفته التناظريّة .

2) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ، و ادرس وضعه النسبي .

3) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها ، و دل على القيم الحديّة .

4) في معلم متجانس ارسم الخط البياني C .

5) استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع : $g(x) = -2\ln(e^{-x} + 1) - x$.

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة التابع الأسي 1-2022

أولاً: السؤال الأول:

1) $25^x+5^{x+1}-6=0$

$5^{2x}+5\cdot 5^x-6=0$

بفرض: $t=5^x$

$t^2+5t-6=0$

$(t+6)(t-1)=0$

إما: $t+6=0$

$t=-6$

$5^x=-6$ مستحيلة الحل

أو: $t-1=0$

$t=1$

$5^x=1$

$\boxed{x=0}$

2) $e^x+10e^{-x}-7=0 \quad (\times e^x)$

$e^{2x}+10-7e^x=0$

$(e^x)^2-7e^x+10=0$

$(e^x-2)(e^x-5)=0$

إما: $e^x-2=0$

$e^x=2$

$x=\ln 2$

أو: $e^x-5=0$

$e^x=5$

$x=\ln 5$

مجموعة الحلول $\boxed{S=\{\ln 2,\ln 5\}}$

السؤال الثاني: ①

$y'-y=1$

$y'=y+1$

وهي معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay+b$

حيث $a=1\ ,\ b=1$

$y=Ke^{ax}-\frac{b}{a} \Rightarrow y=Ke^x-1$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

لإيجاد الحل الخاص الذي يحقق: $y(0)=0$

$y(0)=Ke^0-1=K-1$

$\Rightarrow \boxed{K=1}$

$\boxed{y=e^x-1}$

②

$y=x\ln x$

$y'=(1)(\ln x)+\left(\frac{1}{x}\right)(x)=\ln x+1$

$y'-\frac{1}{x}y=(\ln x+1)-\frac{1}{x}(x\ln x)$

$=\ln(x)+1-\ln(x)=1$ محققة.

فالتابع $f(x)=x\ln x$ حل للمعادلة التفاضلية $y'-\frac{1}{x}y=1$

ثانياً: التمرين الأول: ①

f معرّف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=(-\infty)(+\infty)+2=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e\cdot\frac{x}{e^x}+2\right)$

$=e(0)+2=2$

$f'(x)=(1)e^{1-x}+(-e^{1-x})(x)$

$=e^{1-x}[1-x]$

$f'(x)=0 \iff x=1$

$f(1)=1+2=3$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

② $f([1,+\infty[)=]2,3]$

f معرّف ومستمر ومطرد تماماً على المجال $]-\infty,1[$ كما أنّه:

$$f(]-\infty,1[)=]-\infty,3[$$

$$0\in f(]-\infty,1[)$$

فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α.

f مستمر ومطرد تماماً على $]-1,0[$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=-e^2+2<0 \\ f(0)=2>0 \end{array}\right\} f(-1)\cdot f(0)<0$$

وبالتالي حسب مبرهنة القيمة الوسطى نجد أنّه

$$\alpha\in]-1,0[$$

3) نتأمل القضية:

$$E(n):\quad f^{(n)}(x)=(-1)^n(x-n)e^{1-x}$$

$E(1)$ محققة لأنّه:

$$(-1)^1(x-1)e^{1-x}=e^{1-x}[1-x]=f'(x)$$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n(x-n)e^{1-x}$$

باشتقاق الطرفين:

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\left[(1)e^{1-x}+(-e^{1-x})(x-n)\right]$$

$$=(-1)^n e^{1-x}[1-x+n]$$

$$=-(-1)^n(x-n-1)e^{1-x}$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}(x-(n+1))e^{1-x}$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 1$.

فالتابع f اشتقاقي عند $x=0$ بحيث

$$f'(0)=1$$

2) $$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$\boxed{T:\ y=x}$$

3) ليكن التابع g المعرّف على IR وفق:

$$g(x)=e^x-x-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=0-(-\infty)-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)-1\right]$$

$$=(+\infty)(+\infty)-1=+\infty$$

$$g'(x)=e^x-1$$

$$g'(x)=0 \iff e^x=1$$

$$x=0$$

$$g(0)=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أنّه: $g(x)\geq 0$

أي أنّه: $e^x-x-1\geq 0$

$$\boxed{e^x-1\geq x}$$

$$f(x)-y_T=\frac{x^2}{e^x-1}-x=x\left(\frac{x}{e^x-1}-1\right)$$

لدينا $e^x-1\geq x$

في حالة $x>0$: $1\geq\dfrac{x}{e^x-1}$

$$\frac{x}{e^x-1}-1\leq 0$$

$$x\left(\frac{x}{e^x-1}-1\right)\leq 0$$

$$f(x)-y_T\leq 0$$

C تحت المماس T على المجال $]0,+\infty[$

التمرين الثاني: 1) معدل التغير:

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x^2}{e^x-1}-0}{x}=\frac{x}{e^x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}t(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$$

أما في حالة $x<0$:

$e^x-1 \geq x \quad (\div(e^x-1))$

$\frac{x}{e^x-1} \geq 1$

$\frac{x}{e^x-1}-1 \geq 0 \quad (\times x)$

$x\left(\frac{x}{e^x-1}-1\right) \leq 0$

$f(x)-y_T \leq 0$

C تحت المماس T على المجال $]-\infty , 0[$

ويتقاطع C مع T في النقطة $O(0,0)$.

ثالثاً:

$f(x)=2\ln(e^x+1)-x$

1) $\forall x \in D_f \Rightarrow (-x) \in D_f$

الشرط الأول محقق.

$f(-x)=2\ln(e^{-x}+1)+x$

$=2\ln(e^{-x}(1+e^x))+x$

$=2\ln(e^{-x})+2\ln(1+e^x)+x$

$=-2x+2\ln(1+e^x)+x$

$f(-x)=2\ln(1+e^x)-x$

$f(-x)=f(x)$

فالتابع f زوجي ، ومخطّطه البياني C متناظر بالنسبة لمحور التراتيب $y'y$.

2) بما أن التابع f زوجي:

$f(x)=f(-x)$

$\Rightarrow f(x)=2\ln(e^{-x}+1)+x$

$f(x)-y_\Delta=2\ln(e^{-x}+1)$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=2\ln(0+1)=0$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

$f(x)-y_\Delta=2\ln(e^{-x}+1)$

$e^{-x}>0$

$e^{-x}+1>1$

$2\ln(e^{-x}+1)>0$

$f(x)-y_\Delta>0$

C فوق Δ .

3) f معرّف ومستمر واشتقاقي على IR :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2\ln(e^x+1)-x)$

$=0-(-\infty)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2\ln(e^{-x}+1)+x)$

$=0+\infty=+\infty$

$f'(x)=2\cdot\frac{e^x}{e^x+1}-1=\frac{2e^x-e^x-1}{e^x+1}$

$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

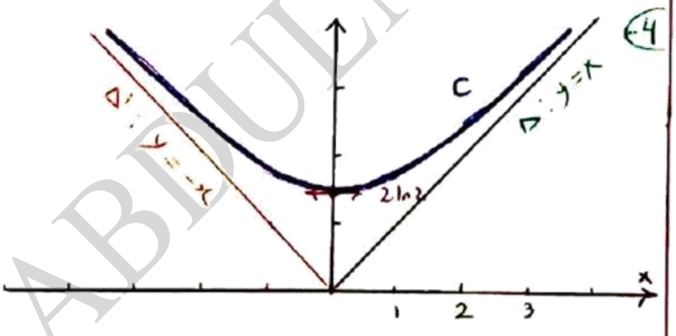
$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$f(0)=2\ln2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln2$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0)=2\ln2$ قيمة حدية صغرى .

4)



5) طريقة 1 : $g(x)=-f(x)$

C_1 نظير C بالنسبة لمحور الفواصل $x'x$

طريقة 2 : $g(x)=-f(-x)$

C_1 نظير C بالنسبة للمبدأ O

المدّة : ساعة و نصف	مذاكرة التكامل و التوابع الأصلية الدرجة الكاملة : 300	الاسم :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: في كل من الحالتين الآتيتين ، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I :

2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$; $I = [-1,+\infty[$

2) $f(x) = \frac{2x}{x^2+4x+3}$; $I = \mathbb{R}\backslash\{-1,-3\}$

السؤال الثاني: احسب التكاملين الآتيين :

2) $J = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$

1) $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$

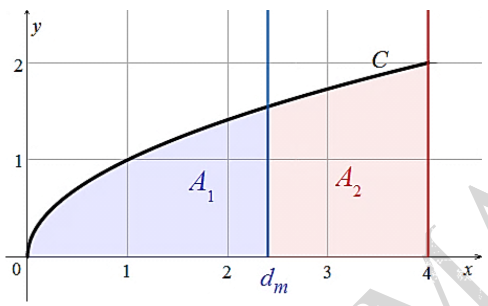
ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$, $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\, dx$ ، و **المطلوب :**

1) احسب J .

2) احسب $I + J$ ثم استنتج I .

التمرين الثاني: ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = \sqrt{x}$ مرسوماً على المجال $[0,4]$.
المستقيم d_m الذي معادلته $x = m$ $(0 \le m \le 4)$ يقسم داخل C إلى منطقتين مساحة الأولى A_1 و مساحة الثانية A_2 كما في الشكل المجاور. **المطلوب :**



1) احسب A_1 و A_2 بدلالة m .

2) عند أية قيمة للوسيط m تتساوى مساحتا المنطقتين المذكورتين ؟

3) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران C دورة كاملة حول محور الفواصل .

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$. **المطلوب :**

1) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

2) اكتب معادلة المماس T للخط C عند $x = 0$ ، ثم ارسم T و C .

3) عيّن الأعداد الحقيقيّة a , b , c إذا علمت أنّ $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$ تابع أصلي لـ f على $\mathbb{R}$.

4) عيّن $A(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين C و محور الفواصل و المستقيمين $x = 0$ و $x = \alpha$ (حيث $\alpha > 0$) .

5) احسب $\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$.

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة التكامل 2022-1

أولاً: السؤال الأول:

1) $$f(x)=\frac{2x}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$$

$$A(x+3)+B(x+1)=2x$$

نعوض $x=-1$:

$$2A+0=-2 \Rightarrow \boxed{A=-1}$$

نعوض $x=-3$:

$$0-2B=-6 \Rightarrow \boxed{B=3}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x+1}$$

$$F(x)=3\ln|x+3|-\ln|x+1|$$

2) $$f(x)=\frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}-1)}$$

$$=\frac{x}{x+1-1}(\sqrt{x+1}-1)=\sqrt{x+1}-1$$

$$f(x)=(x+1)^{1/2}-1$$

$$F(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}-x$$

$$F(x)=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-x$$

السؤال الثاني:

1) $$I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}+e^x-e^x}{e^x+1}dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x(e^x+1)-e^x}{e^x+1}dx$$

$$=\int_0^{\ln 2} e^x-\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$=\left[e^x-\ln(e^x+1)\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\left(e^{\ln 2}-\ln(e^{\ln 2}+1)\right)-\left(e^0-\ln(e^0+1)\right)$$

$$\boxed{I=1+\ln\left(\tfrac{2}{3}\right)}$$

2) $$J=\int_1^e\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^e\frac{1/x}{1+\ln x}dx$$

$$J=\left[\ln|1+\ln x|\right]_1^e$$

$$=\ln|1+\ln e|-\ln|1+\ln(1)|=\ln 2$$

$$\boxed{J=\ln 2}$$

ثانياً: التمرين الأول:

1) $$J=\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx=-\int_0^{\pi/4}\frac{-\sin x}{\cos x}dx$$

$$=\left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4}$$

$$=-\ln\left(\tfrac{1}{\sqrt2}\right)-\left(-\ln(1)\right)=\tfrac12\ln 2$$

2) $$I+J=\int_0^{\pi/4}\tan x+\tan^3 x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/4}\tan x(1+\tan^2 x)\,dx$$

$$=\left[\tfrac12\tan^2 x\right]_0^{\pi/4}=\tfrac12(1)^2-\tfrac12(0)^2=\tfrac12$$

$$I+J=\tfrac12$$

$$I+\tfrac12\ln 2=\tfrac12$$

$$\boxed{I=\tfrac12-\tfrac12\ln 2}$$

التمرين الثاني:

1) $$A_1=\int_0^m f(x)dx=\int_0^m x^{1/2}dx=\left[\tfrac23 x\sqrt{x}\right]_0^m$$

$$A_1=\tfrac23 m\sqrt{m}$$

$$A_2=\int_m^4 f(x)dx=\left[\tfrac23 x\sqrt{x}\right]_m^4$$

$$A_2=\tfrac{16}{3}-\tfrac23 m\sqrt{m}$$

2) $$A_1=A_2 \Longleftrightarrow \tfrac23 m\sqrt{m}=\tfrac{16}{3}-\tfrac23 m\sqrt{m}$$

$$\tfrac43 m\sqrt{m}=\tfrac{16}{3} \Rightarrow m\sqrt{m}=4$$

$$m^3=16 \Rightarrow \boxed{m=\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}}$$

③ $$V=\pi\int_a^b (f(x))^2dx$$

$$V=\pi\int_0^4(\sqrt{x})^2dx=\pi\int_0^4 x\,dx=\pi\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^4$$

$$V=\pi\left[\tfrac{1}{2}\cdot 16-0\right]=8\pi$$

ثالثاً

① f معرفة ومستمرة واشتقاقية على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2e^{-x}+e^{-x})=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)=0+0=0$$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C_f في جوار $+\infty$.

$$f'(x)=2x\cdot e^{-x}+(-e^{-x})(x^2+1)$$

$$=-e^{-x}(x^2-2x+1)=-e^{-x}(x-1)^2$$

$$f'(x)=0 \leftrightarrow (x-1)^2=0$$

$$\boxed{x=1}$$

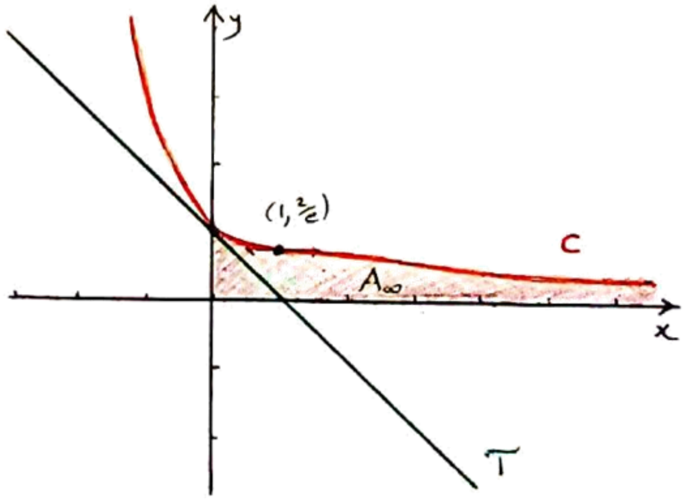
$$f(1)=\frac{2}{e}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

② $T:\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$f(0)=1,\quad f'(0)=-1$

$$\boxed{T:\ y=-x+1}$$



③ يجب تحقق الشرط $F'(x)=f(x)$

$$F'(x)=(2ax+b)e^{-x}+(-e^{-x})(ax^2+bx+c)$$

$$=\underbrace{(-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}}$$

$$=(x^2+1)e^{-x}$$

بالمطابقة: $-a=1 \Rightarrow a=-1$

$2a-b=0 \Rightarrow b=2(-1)=-2$

$b-c=1 \Rightarrow c=b-1=-3$

$$\Rightarrow F(x)=(-x^2-2x-3)e^{-x}$$

④ $$A(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)dx=[F(x)]_0^\alpha$$

$$=F(\alpha)-F(0)$$

$$=-(\alpha^2+2\alpha+3)e^{-\alpha}-(-3)$$

$$\boxed{A(\alpha)=3-(\alpha^2+2\alpha+3)e^{-\alpha}}$$

⑤ $$A(\alpha)=3-\frac{\alpha^2}{e^\alpha}-\frac{2\alpha}{e^\alpha}-\frac{3}{e^\alpha}$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)=3-0-0-0=\boxed{3}$$

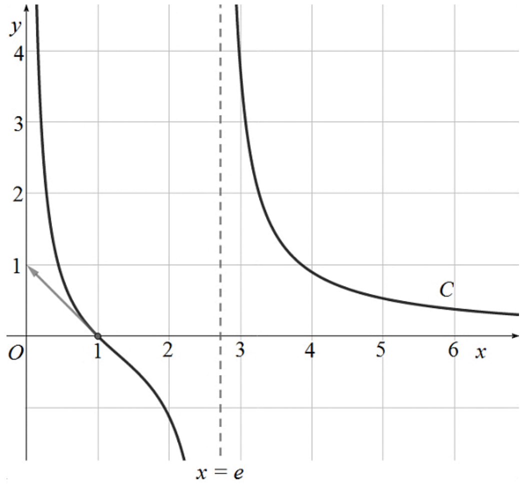
لأنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$.

وهي مساحة السطح المحصور أسفل المنحني C على المجال $[0,+\infty[$.

- انتهى الحل -

الرياضيات:	اختبار الجزء الأول الصفحة الأولى	الاسم: المدة: ثلاث ساعات الدرجة: ستمئة

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول:

نتأمّل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرّف على المجال $I =]0, e[\cup]e, +\infty[$.

1) أوجد $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x\to e^-} f(x)$ ، $\lim_{x\to e^+} f(x)$ ، $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

2) أوجد $f(1)$ و $f'(1)$ و اكتب معادلة المماس عند $x = 1$.

3) حل المتراجحة $f(x) \geq 0$.

4) أوجد $f(]0,1])$.

السؤال الثاني: احسب التكامل $\int_0^1 \frac{2x^2+x-1}{x^3+1}\,dx$.

السؤال الثالث: أثبت من أجل $n \geq 0$ أنّ العدد $A_n = 7^n + 5$ يقبل القسمة على العدد 6 .

السؤال الرابع: حل المعادلة $36^x + 6^{x+1} = 7$ و استنتج حلول المتراجحة $36^x + 6^{x+1} \geq 7$.

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x) = x + \frac{E(x)}{x}$. **المطلوب :**

أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C ، و ادرس وضعه النسبي .

السؤال السادس: أثبت أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان حيث

$$x_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad , \quad y_n = x_n + \frac{1}{n!}$$

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة لكل من التمرينين الأول و الثاني – 60 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول: ليكن f التابع المعرّف وفق : $f(0) = 0$ و $f(x) = \frac{x\ln x}{1+\ln x}$ في حالة $x \in]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$

خطه البياني C . **المطلوب :**

1) احسب العدد $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثمّ احسب $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$. هل يقبل C مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ ؟

2) احسب $\lim_{x\to 0+} f(x)$ و استنتج أنّ التابع f مستمر عند الصفر من اليمين .

3) أثبت أنّ التابع f اشتقاقي عند $x = 0$ من اليمين .

4) اكتب معادلة نصف المماس T للخط C في النقطة O من اليمين ، و ادرس وضعه النسبي .

يتبع في الصفحة الثانية

الرياضيات:	اختبار الجزء الأول الصفحة الثانية	الاسم: المدة: ثلاث ساعات الدرجة: ستمئة

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة تدريجيّاً وفق $u_1 = \frac{7}{2}$ و $u_{n+1} = (u_n - 3)^2 + 3$ عند كل $n \geq 1$. **المطلوب :**

1) أثبت بالتدريج صحّة المتراجحة $u_n > 3$ و ذلك أياً كانت $n \geq 1$.
2) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق $v_n = \ln(u_n - 3)$ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ هندسيّة ، و اكتب عبارة v_n بدلالة n .
3) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4) نعتبر الجداء $P_n = (u_1 - 3)\times(u_2 - 3)\times\ldots\times(u_n - 3)$ احسب $\ln(P_n)$ بدلالة n ، ثم استنتج عبارة P_n بدلالة n .

التمرين الثالث: ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-2,-3\}$ وفق $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ التابع f يُكتَب بالشكل $f(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$ حيث A و B عددان حقيقيّان يُطلَب تعيينهما .
2) احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$.
3) لتكن المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $s_n = f(0) + f(1) + \ldots + f(n)$ أثبت أنّ $s_n = \frac{n+1}{2(n+3)}$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2+1}$

و ليكن g التابع المعرّف على I وفق $g(x) = \frac{1}{x^2} - 1 - 2\ln x$. **المطلوب:**

1) ادرس تغيّرات التابع g و نظّم جدولاً بها .
2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ، ثمّ تحقّق أنّ $\alpha = 1$.
3) أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه ، و اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي .
4) أثبت أنّ $f'(x) = \frac{x\,g(x)}{(x^2+1)^2}$ ، ثم ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها مستفيداً من تغيّرات التابع g .
5) في معلم متجانس ارسم الخط C_f .

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (x-1)e^x$. **المطلوب :**

1) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها ، و دل على القيمة الحديّة .
2) في معلم متجانس ارسم C .
3) احسب مساحة السطح المحصور بين C و المحورين الإحداثيّين .
4) استنتج رسم الخط البياني C' للتابع g حيث $g(x) = \frac{x+1}{e^x}$.
5) أثبت أنّ $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضليّة $y' - y = e^x$.
6) أثبت أنّ عبارة المشتق من المرتبة n للتابع f تعطى وفق $f(x) = (x+n-1)e^x$.

– – – – – – – انتهت الأسئلة – – – – – – –

حل اختبار الجزء الأول 2022-1

أولاً السؤال الأول:

①

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to e^+} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to e^-} f(x)=-\infty$

② $f(1)=0$

حساب $f'(1)$ نختار نقطتين من المماس عند (1)

$B(1,0)$, $A(0,1)$

$$f'(1)=m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-1}{1-0}=-1$$

معادلة المماس:
$y-y_A=m(x-x_A)$
$y=1-x$

③ $x\in]0,1]\cup]e,+\infty[$

④ $f(]0,1])=[0,+\infty[$

السؤال الثاني:

$$\int_0^1\frac{2x^2+x-1}{x^3+1}dx=\int_0^1\frac{\cancel{(x+1)}(2x-1)}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}dx$$

$$=\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\left[\ln(x^2-x+1)\right]_0^1$$

$$=\ln(1)-\ln(1)=0$$

طريقة ثانية: نفرّق الكسر:

$$\frac{2x^2+x-1}{x^3+1}=\frac{2x^2+x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+c}{x^2-x+1}$$

$$A(x^2-x+1)+(Bx+c)(x+1)=2x^2+x-1$$

بوضع $x=-1$:
$3A+0=0 \Rightarrow \boxed{A=0}$

$$(Bx+c)(x+1)=2x^2+x-1$$

بوضع $x=0$:
$(0+c)(1)=-1 \Rightarrow \boxed{c=-1}$

$$(Bx-1)(x+1)=2x^2+x-1$$

بوضع $x=1$:
$(B-1)(2)=2$

$B-1=1 \Rightarrow \boxed{B=2}$

$$\therefore I=\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\ln(x^2-x+1)\Big|_0^1=0$$

السؤال الثالث:

لتكن $E(n)$ القضية « A_n يقبل القسمة على (6) »

$E(0)$ محققة لأن $A_0=7^0+5=6$ قابل للقسمة على 6

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$$A_{n+1}=7^{n+1}+5=7\cdot7^n+5$$

$$=(6+1)7^n+5$$

$$=6\cdot7^n+(7^n+5)$$

$$A_{n+1}=6\cdot7^n+A_n$$

A_n مضاعف للعدد (6) مفروض

$6\cdot7^n$ مضاعف للعدد (6).

وبالتالي A_{n+1} مضاعف للعدد (6) لأنه مجموع حدين مضاعفين للعدد (6).

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي $n\geq0$.

السؤال الرابع:

$$36^x+6^{x+1}-7=0$$

$$\leftrightarrow 6^{2x}+6\cdot6^x-7=0$$

نفرض: $t=6^x$

$$t^2+6t-7=0$$

$$(t-1)(t+7)=0$$

إما $t+7=0$

$t=-7$

$6^x=-7$ (مرفوض)

أو $t=1$

$6^x=1$

$\boxed{x=0}$

ومنه نستنتج الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$36^x+6^{x+1}-7$		$-$	0	$+$	

أي إن حلول المتراجحة $36^x+6^{x+1}-7\geq0$

هي $x\in[0,+\infty[$

السؤال الخامس :

$$f(x)-y_d = x+\frac{E(x)}{x}-(x+1)$$

$$=\frac{E(x)}{x}-1 = \frac{E(x)-x}{x}$$

نعلم أنّ : $x-1 < E(x) \le x$

$$-1 < E(x)-x \le 0$$

في حالة $x>0$:

$$\frac{-1}{x} < \frac{E(x)-x}{x} \le 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y_d\right)=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة. فالمستقيم d مقارب للخط c في جوار $+\infty$.

أما في حالة $x<0$:

$$\frac{-1}{x} > \frac{E(x)-x}{x} \ge 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-y_d\right)=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة. فالمستقيم d مقارب مائل للخط c في جوار $-\infty$.

$$f(x)-y_d=\frac{E(x)-x}{x}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$E(x)-x$	$-$	0	$-$
x	$-$	0	$+$
$f(x)-y_d$	$+$	$\|\|$	$-$
الوضع النسبي	c فوق d		c تحت d

السؤال السادس :

لندرس اطراد المتتالية $(x_n)_{n\ge1}$ ،

$$x_{n+1}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\ge1}$ متزايدة تماماً.

$$y_{n+1}-y_n=(x_{n+1}-x_n)+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}$$

$$y_{n+1}-y_n=\frac{2}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}\cdot\frac{n+1}{n+1}$$

$$=\frac{2-(n+1)}{(n+1)!}=\frac{1-n}{(n+1)!}\le 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\ge1}$ متناقصة.

$(x_n)_{n\ge1}$ متزايدة
$(y_n)_{n\ge1}$ متناقصة
الشرط الأول محقق.

$$\lim_{n\to+\infty}(y_n-x_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)=0$$

الشرط الثاني محقق.

فالمتتاليتان $(x_n)_{n\ge1}$ و $(y_n)_{n\ge1}$ متجاورتان.

ثانياً: التمرين الأول:

1.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1+\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{\ln x}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\ln x}{1+\ln x}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x\ln x}-x-\cancel{x\ln x}}{1+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{1+\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x}{\ln x}}{\frac{1}{\ln x}+1}$$

$$=\frac{-\infty}{0+1}=-\infty$$

فالخط c لا يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$.

2.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{1+\ln x}=\frac{0}{-\infty}=0$$

بما أنّ $\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=0$

فالتابع f مستمر عند $x=0$ من اليمين.

3.

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x\ln x}{1+\ln x}-0}{x}=\frac{\ln x}{1+\ln x}$$

$$\lim_{x\to0^+}t(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\frac{1}{\ln x}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

فالدالة f اشتقاقية عند $x=0$ من اليمين.

حيث $f'(0^+) = 1$

④ معادلة نصف المماس من يمين الصفر:

$$y = f'(0^+)(x-0) + f(0)$$

$$y = (1)(x-0) + 0$$

$$\boxed{T: \quad y = x}$$

$$f(x) - y_T = \frac{x\ln x}{1+\ln x} - x = \frac{-x}{1+\ln x}$$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$-x$	0	$-$		$-$	
$1+\ln x$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)-y_T$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
الوضع النسبي		C فوق T		C تحت T	

التمرين الثاني

① $E(n): \quad u_n > 3$

$u_1 = \frac{7}{2} > 3$ $\quad$ $E(1)$ محققة لأن

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$$u_n > 3$$

$$u_n - 3 > 0$$

$$(u_n-3)^2 > 0$$

$$(u_n-3)^2 + 3 > 3$$

$$u_{n+1} > 3$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ محققة $\forall n \geq 1$.

② $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}-3) = \ln(u_n-3)^2 = 2\ln(u_n-3)$

$$v_{n+1} = 2v_n$$

فالمتتالية v_n هندسية أساسها $q=2$

وحدها الأول: $v_1 = \ln(u_1-3)$

$$= \ln\left(\frac{7}{2}-3\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

$$v_n = v_1 q^{n-1}$$

$$v_n = -\ln 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\boxed{v_n = \frac{-\ln 2}{2} \cdot 2^n}$$

③ $v_n = \ln(u_n-3) \Rightarrow u_n - 3 = e^{v_n}$

$$u_n = e^{v_n} + 3$$

$$u_n = e^{-\ln 2 \cdot 2^{n-1}} + 3$$

$$\boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} + 3}$$

بفرض $m = 2^{n-1}$:

$$\lim_{n\to+\infty} m = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{m\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^m + 3\right] = 0+3 = \boxed{3}$$

لأن $-1 < q' = \frac{1}{2} < 1$

طريقة ثانية

$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$; $\quad q = 2 > 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{v_n\to-\infty}\left(e^{v_n}+3\right) = 0+3 = \boxed{3}$$

④ $P_n = (u_1-3)(u_2-3)\cdots(u_n-3)$

$$\ln(P_n) = \ln(u_1-3) + \ln(u_2-3) + \cdots + \ln(u_n-3)$$

$$= v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

$$= a\,\frac{1-q^n}{1-q} = -\ln 2 \cdot \frac{1-2^n}{1-2}$$

$$\ln(P_n) = \ln 2\,(1-2^n)$$

$$\Rightarrow P_n = e^{\ln 2(1-2^n)}$$

$$\boxed{P_n = 2^{(1-2^n)}}$$

التمرين الثالث :

①

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

$$A(x+3) + B(x+2) = 1$$

$$Ax + 3A + Bx + 2B = 1$$

$$x(A+B) + 3A + 2B = 1$$

بالمطابقة نجد : $A + B = 0 \;—(1)$

$$3A + 2B = 1 \;—(2)$$

من (1) نجد : $A = -B$

نعوض في (2) :

$$-3B + 2B = 1$$

$$-B = 1 \Rightarrow \boxed{B = -1}$$

$$A = -B \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x+3}$$

②

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) dx$$

$$= \Big[\ln|x+2| - \ln|x+3|\Big]_0^1$$

$$= \left[\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\right]_0^1$$

$$= \ln\left(\frac{3}{4}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{9}{8}\right)$$

③

$$f(0) = \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}$$

$$f(1) = \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}$$

$$f(2) = \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}}$$

$$\vdots$$

$$f(n) = \cancel{\frac{1}{n+2}} - \frac{1}{n+3}$$

(+)

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} = \frac{n+3-2}{2(n+3)}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n+1}{2(n+3)}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

طريقة ثانية :

$$E(n):\quad S_n = \frac{n+1}{2(n+3)}$$

$E(0)$ محققة لأنه

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2(3)} = \dfrac{1}{6} \\ S_0 = f(0) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3-2}{6} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$$S_n = \frac{n+1}{2(n+3)}$$

نضيف للطرفين $f(n+1)$:

$$\underbrace{S_n + f(n+1)} = \frac{n+1}{2(n+3)} + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$$

$$S_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+3)} + \frac{2}{2(n+3)} - \frac{1}{n+4}$$

$$= \frac{n+3}{2(n+3)} - \frac{1}{n+4}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+4} = \frac{n+4-2}{2(n+4)}$$

$$S_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+4)}$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n \geq 0$.

ثانياً المسألة الأولى :

① g معرف ومستمر واشتقاقي على I

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 - 1 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - x - 2x\ln x\right)$$

$$= (+\infty)(+\infty - 0 - 0) = +\infty$$

$$g'(x) = \frac{-2}{x^3} - \frac{2}{x} = -\frac{2+2x^2}{x^3} < 0$$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

② g معرف ومستمر ومطرد تماماً على I

كما أن $0 \in g(I) = \mathbb{R}$

فالمعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً على I

$$g(1) = 1 - 1 - 2\ln(1) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

المسألة الثانية :

(1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^x - e^x) = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$f'(x) = (1)e^x + e^x(x-1) = xe^x$$

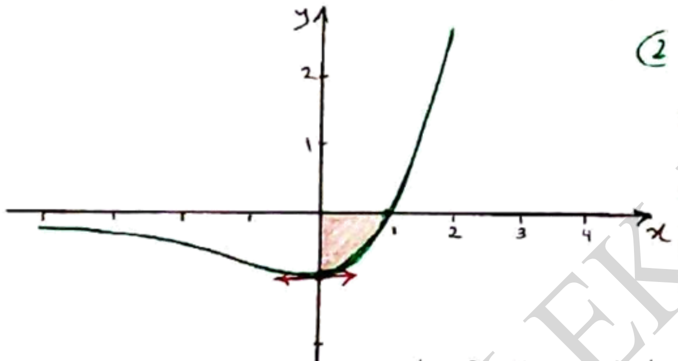
$$f'(x) = 0 \leftrightarrow \boxed{x=0}$$

$$f(0) = -1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = -1$ قيمة حدية صغرى .

(2)



نقطة مساعدة $(1, 0)$

(3)

$$S = \int_a^b |f(x)|dx = \int_0^1 -f(x)\, dx$$

$$= -\int_0^1 (x-1)e^x dx$$

تكامل بالتجزئة

$u = x-1$	$u' = 1$
$v' = e^x$	$v = e^x$

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b vu'$$

$$-S = [(x-1)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= [(x-1)e^x - e^x]_0^1 = [(x-2)e^x]_0^1$$

$$-S = -e - (-2) = 2 - e$$

$$\boxed{S = e - 2}$$

(3)

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

$x=0$ مقارب شاقولي للخط ق في جوار $-\infty$.

$y=0$ مقارب أفقي للخط ق في جوار $+\infty$.

(4)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2+1) - 2x(1+\ln x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x + \frac{1}{x} - 2x - 2x\ln x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} - x - 2x\ln x}{(x^2+1)^2} = \frac{x\left(\frac{1}{x^2} - 1 - 2\ln x\right)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x\, g(x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \leftrightarrow x\, g(x) = 0$$

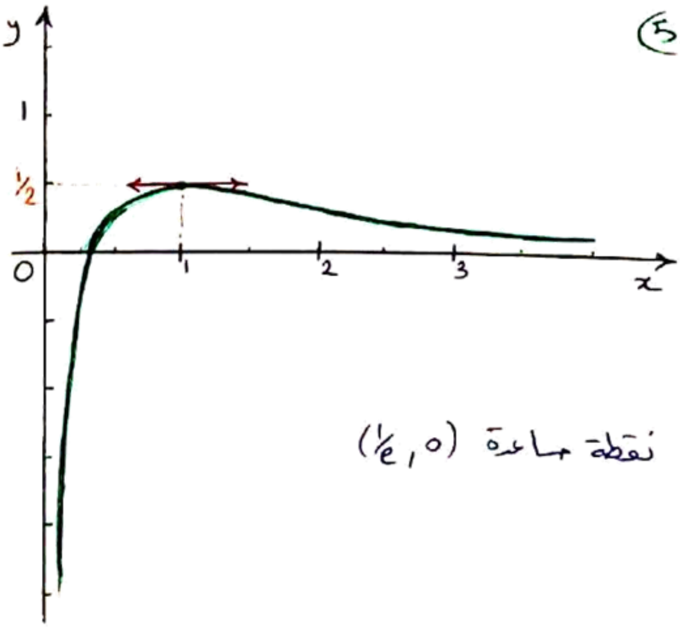
$$x \neq 0$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = \frac{1 + \ln(1)}{2} = \frac{1}{2}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

(5)



نقطة مساعدة $(\frac{1}{e}, 0)$

④ $g(x) = (x+1)e^{-x}$

$= -(-x-1)e^{-x}$

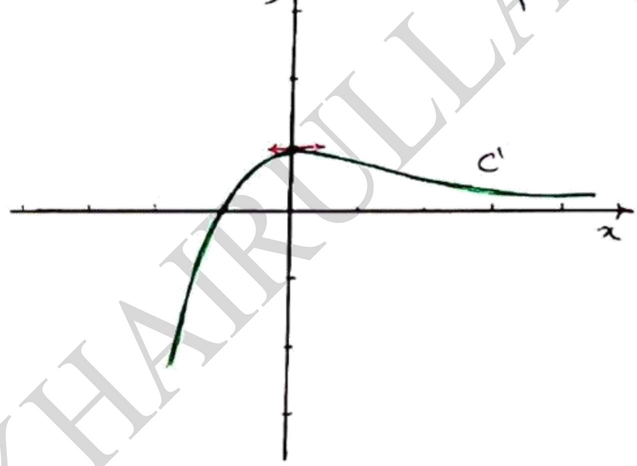
$g(x) = -f(-x)$

C' نظير C بالنسبة للمبدأ.

أو: C' ينتج عن C وفق التحويل

$(x, y) \longrightarrow (-x, -y)$

ثانياً: رسم C'



⑤ $y' - y = xe^{x} - (x-1)e^{x}$

$= e^{x}(x - x + 1) = e^{x}$

فالتابع $y = f(x)$ حل للمعادلة التفاضلية

$y' - y = e^{x}$.

⑥ لتكن $E(n)$ القضية

$E(n): \quad f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^{x}$

$E(1)$ محققة لأنه

$f^{(1)}(x) = f'(x) = xe^{x}$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^{x}$

$(f^{(n)}(x))' = (1)e^{x} + e^{x}(x+n-1)$

$f^{(n+1)}(x) = (x+n)e^{x}$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة $\forall n \geq 1$.

- انتهى الحل -

المدّة : ساعة و نصف

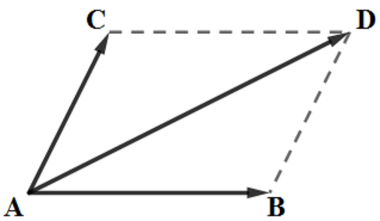
مذاكرة الأشعة في الفراغ

الدرجة الكاملة : 300

الاسم :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: $ABDC$ متوازي أضلاع . **المطلوب :**



1) عيّن النقطة M التي تحقّق العلاقة : $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

2) عبّر عن النقطة D كونها مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) ,(B,β),(C,γ)
حيث α , β , γ أعداد حقيقيّة يُطلَب تعيينها .

السؤال الثاني: نتأمّل النقطتين $A(0,2,-2)$, $B(2,0,0)$. **المطلوب :**

1) اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

2) اكتب معادلة الكرة التي قطرها AB .

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس لتكن النقاط $A(3,2,1)$, $B(0,2,4)$, $C(1,2,7)$, $D(1,2,0)$. **المطلوب :**

1) أوجد إحداثيّات النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,3)$, $(D,4)$.

2) حدّد Γ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تحقّق $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}\right\| = 20$.

3) جد معادلة للمجموعة Γ .

التمرين الثاني: نتأمل في معلم متجانس النقاط : $A(1,1,1)$, $B(0,2,1)$, $C(2,1,2)$, $D(2,3,4)$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ النقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة .

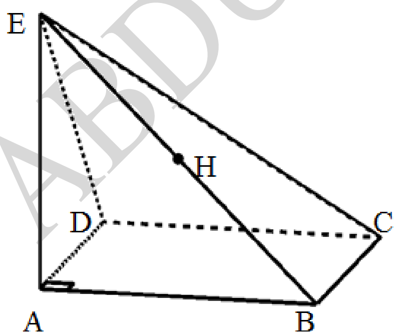
2) عيّن العددين الحقيقيّين α , β اللذين يحقّقان : $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ و استنتج أنّ النقاط A , B , C , D تقع في مستوٍ واحد .

3) جد إحداثيّات النقطة N التي تجعل الرباعي $ABNC$ متوازي أضلاع .

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

$(EABCD)$ هرم رباعي رأسه E ، قاعدته مربع طول ضلعه 2 , $[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA = 2$.

H منتصف $[EB]$, نختار المعلم المتجانس $(A\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,,\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\,,\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$. **المطلوب :**



1) عيّن إحداثيات A , B , C , D , E , H .

2) أثبت أنّ معادلة المستوي (EBC) هي $x + z - 2 = 0$.

3) أثبت أنّ المستقيم (AH) عمودي على المستوي (EBC) .

4) احسب حجم الهرم $EABCD$.

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة الأشعة في الفراغ "1"

أولاً: السؤال الأول:

1)

$$2\vec{AM} = \vec{AD} + \vec{BC}$$

$$2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC}$$

جمع شال

$$2\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{AC}$$

$$2\vec{AM} = 2\vec{AC}$$

$$\boxed{M \equiv C}$$

2) نعلم أن:

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\vec{AD} = (\vec{AD} + \vec{DB}) + (\vec{AD} + \vec{DC})$$

$$\vec{AD} = 2\vec{AD} + \vec{DB} + \vec{DC}$$

$$\vec{AD} + \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$$

$$-\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$$

فالنقطة D مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,-1)$, $(B,1)$, $(C,1)$

أي $\alpha = -1 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 1$

أو: $\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = -1$

ونقبل أي نتيجة صحيحة أخرى.

السؤال الثاني:

1) لتكن النقطة $M(x,y,z)$ التي تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فهي تحقق:

$$MA = MB$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2+(z+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-4y+4+\cancel{z^2}+4z+4$$

$$= \cancel{x^2}-4x+4+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}$$

$$-4y+4z+8=-4x+4$$

$$4x-4y+4z+4=0$$

$$\boxed{x-y+z+1=0}$$

2)

$$2r = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$$

$$\boxed{r=\sqrt{3}}$$

مركز الكرة هي النقطة I منتصف $[AB]$:

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$$I(1,1,-1)$$

معادلة الكرة من الشكل:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

$$\boxed{(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=3}$$

ثانياً: التمرين الأول:

1)
$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

$$x_G=\frac{(1)(3)+(2)(0)+(3)(1)+(4)(1)}{1+2+3+4}$$

$$x_G=\frac{10}{10}=1$$

$$y_G=\frac{(1)(2)+(2)(2)+(3)(2)+(4)(2)}{10}=\frac{20}{10}=2$$

$$z_G=\frac{(1)(1)+(2)(4)+(3)(7)+4(0)}{10}=\frac{30}{10}=3$$

$$\boxed{G(1,2,3)}$$

2)
$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$$

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MD}=10\overrightarrow{MG}$$

$$10\,MG=20$$

$$MG=2$$

Γ هي كرة مركزها G ونصف قطرها $r=2$.

3)
$$(x-x_G)^2+(y-y_G)^2+(z-z_G)^2=r^2$$

$$\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4}$$

التمرين الثاني:

1)
$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$ ، $\overrightarrow{AC}(1,0,1)$

$\overrightarrow{AB}\neq\alpha\overrightarrow{AC}$

الشعاعان غير مرتبطين خطياً

فالنقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة.

2)
$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha+\beta\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد أن: $\alpha=2$ و $\beta=3$

محققة: $\beta-\alpha=3-2=1$

ومنه $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً،

فالنقاط A,B,C,D تقع في مستوٍ واحد.

3)
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CN}$$

$$N(x,y,z)$$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-2\end{pmatrix}$$

بالمطابقة:

$-1=x-2 \Rightarrow x=1$

$1=y-1 \Rightarrow y=2$

$0=z-2 \Rightarrow z=2$

$$\boxed{N(1,2,2)}$$

ثانياً:

1) $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$

$C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $E(0,0,2)$

H منتصف $[EB]$

$$H\left(\frac{x_B+x_E}{2}, \frac{y_B+y_E}{2}, \frac{z_B+z_E}{2}\right)$$

$$\boxed{H(1,0,1)}$$

2) يكفي إثبات أن النقاط E,B,C تحقق المعادلة $x+z-2=0$

$E:\ 0-2+2=0$ محققة

$B:\ 2+0-2=0$ محققة.

$C:\ 2+0-2=0$ محققة.

ومنه نستنتج أن معادلة المستوي (EBC) هي $x+z-2=0$.

3) يكفي إثبات أن الشعاع AH مرتبط خطياً مع ناظم المستوي EBC .

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AH}(1,0,1)\\ \vec{n}_{EBC}(1,0,1)\end{array}\right\}\ \overrightarrow{AH}=\vec{n}_{EBC}$$

فالمستقيم (AH) عمودي على المستوي (EBC).

4) $$V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot h$$

$S=2^2=4$, $h=EA=2$

$$\boxed{V=\frac{8}{3}}$$

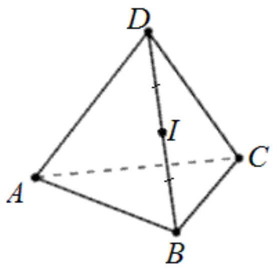
المدّة : ساعة و نصف

مذاكرة الجداء السلمي في الفراغ

الدرجة الكاملة : 300

الاسم :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول : $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول ضلعه 2 ، النقطة I منتصف $[BD]$.

1) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$.

2) احسب $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$.

السؤال الثاني: نتأمّل النقطتين $B(0,1,4)$, $A(-1,0,5)$ و المستوي P ذو المعادلة $x+y-z=0$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ المستقيم (AB) يعامد المستوي P .

2) اكتب المعادلات الوسيطيّة للمستقيم (AB) .

3) استنتج إحداثيّات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي P .

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: نتأمّل النقطة $A(-1,1,0)$ و المستويين $P: x+y+z=0\ ,\ Q: 3x+y-z+2=0$. **المطلوب :**

1) تيقّن أنّ المستويين متقاطعان ، ثم اكتب تمثيلاً وسيطيّاً للفصل المشترك للمستويين $P\ ,\ Q$.

2) اكتب معادلة المستوي R المار من النقطة A و يعامد المستويين P و Q .

3) أثبت أنّ الكرة ذات المعادلة $x^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$ تمسّ المستوي R .

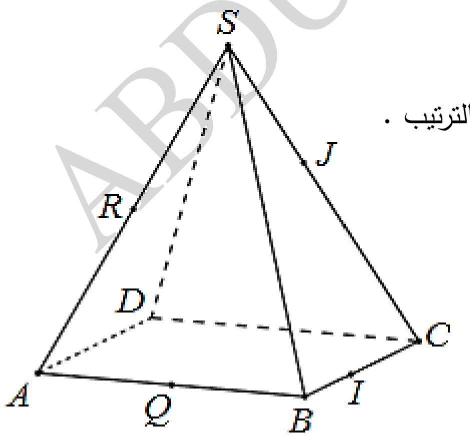
التمرين الثاني: نتأمّل النقطة $A(0,1,2)$ و المستقيم d الممثّل بالمعادلات الوسيطيّة : $t\in\mathbb{R}$; $d:\begin{cases} x=1 \\ y=2+t \\ z=3-t \end{cases}$

1) أوجد إحداثيّات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d .

2) اكتب معادلة الكرة التي مركزها A و تمسّ المستقيم d .

3) اكتب معادلة المستوي الذي يحوي d و يمرّ بالنقطة A .

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)



$(S\text{-}ABCD)$ هرم منتظم طول حرفه 1 ، قاعدته المربع $ABCD$ ،

النقطتان I و J تحقّقان $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{SJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$ ، Q و R منتصفات $[AB]$ و $[AS]$ بالترتيب .

1) احسب $\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{AS}$ و $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$.

2) أثبت أنّ $\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{DS}=2\overrightarrow{BQ}+3\overrightarrow{BI}$.

3) أثبت أنّ المستقيمين (IR) و (QJ) متقاطعان .

4) استنتج أنّ النقاط $I\ ,R\ ,Q\ ,J$ تقع في مستوٍ واحد .

5) أثبت أنّ المستقيمين (QR) و (IJ) متوازيان .

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة الجداء السلمي في الفراغ "1"

أولاً: السؤال الأول:

1) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cdot\cos(\vec{AB},\vec{AC})$

$= 2\cdot 2\cdot \cos\frac{\pi}{3} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$

$\vec{AB}\cdot\vec{BD} = -\vec{BA}\cdot\vec{BD}$

$= -2\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = -2$

2) $\vec{AI}\cdot\vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AD})\cdot\vec{AB}$

$= \frac{1}{2}\vec{AB}^2 + \frac{1}{2}\vec{AD}\cdot\vec{AB}$

$= 2 + \frac{1}{2}(2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}) = 3$

$\vec{AB}\cdot\vec{DC} = \vec{AB}(\vec{DA}+\vec{AC})$

$= -\vec{AB}\cdot\vec{AD} + \vec{AB}\cdot\vec{AC}$

$= -2+2 = 0$

$(\Rightarrow AB \perp DC)$

السؤال الثاني:

1) $\left.\begin{array}{l}\vec{AB}(1,1,-1)\\ \vec{n}(1,1,-1)\end{array}\right\}\ \vec{AB} = \vec{n}$

الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً

فالمستقيم (AB) يعامد المستوي P.

2) $(AB):\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$

$(AB):\begin{cases} x = -1+t \\ y = t \\ z = 5-t \end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$

3) نعوّض معادلات (AB) في معادلة المستوي

$(-1+t)+(t)-(5-t)=0$

$3t = 6 \Rightarrow \boxed{t=2}$

$x=-1+2=1\ ,\ y=2\ ,\ z=5-2=3$

$\boxed{A'(1,2,3)}$

ثانياً: التمرين الأول:

1) $\left.\begin{array}{l}\vec{n_P}(1,1,1)\\ \vec{n_Q}(3,1,-1)\end{array}\right\}\ \frac{1}{3}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$

الناظمان غير مرتبطين خطياً

فالمستويان P و Q متقاطعان.

2) نفرض $\vec{n_R}(a,b,c)$

$\vec{n_P}\cdot\vec{n_R}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$

$\boxed{a+b+c=0}$ — (1)

$\vec{n_Q}\cdot\vec{n_R}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$

$\Rightarrow \boxed{3a+b-c=0}$ — (2)

بفرض $a=1$:

$b+c=-1$

$b-c=-3$ +

$2b=-4 \Rightarrow b=-2$

$c=1$

$\vec{n_R}(1,-2,1)$

$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$x+1-2(y-1)+z-0=0$

$\boxed{R:\ x-2y+z+3=0}$

3)
$\Omega(0,-1,1)\ ,\quad r=\sqrt{6}$

$$dist_{(\Omega,R)}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|0+2+1+3|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

$$dist_{(\Omega,R)}=r$$

فالكرة تمس المستوي R .

التمرين الثاني :

1)
$A'\in d \Rightarrow A'(1,2+t,3-t)$

$$\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{v}_d=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1+t\\1-t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$0+(1+t)-(1-t)=0$$

$$2t=0$$

$$\boxed{t=0}$$

$x_{A'}=1\ ,\ y_{A'}=2,\ \ z_{A'}=3$

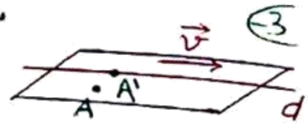
$$\boxed{A'(1,2,3)}$$

2)
$r=AA'=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=r^2$$

$$\boxed{x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3}$$

3)
نفرض $\vec{n}(a,b,c)$



$\vec{n}\cdot\vec{v}=0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{b-c=0}-①$$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA'}=0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{a+b+c=0}-②$$

نفرض $c=1$ نجد أنّ $b=1$ و $a=-2$

$$\vec{n}(-2,1,1)$$

$$-2(x-0)+(1)(y-1)+(1)(z-2)=0$$

$$\boxed{-2x+y+z=3}$$

الحل :

1)
$$\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{AS}=(-\overrightarrow{SB})(-\overrightarrow{SA})$$

$$=\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SA}=SB\cdot SA\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC})$$

$$=\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$=\frac{1}{2}+\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

2)
$$l_2=2\overrightarrow{BQ}+3\overrightarrow{BI}$$

$$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$$

$$l_1=\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{BD}$$

$$l_1=l_2$$

3)
من العلاقة $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

I مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين

$(B,2)\qquad(C,1)$

من العلاقة $\overrightarrow{SJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$

J مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين

$(S,2)\qquad(C,1)$

R منتصف [AS] فهي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(A,2), (S,2)$

Q منتصف [AB] فهي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(A,2), (B,2)$

لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2)\ (B,2)\ (C,1)\ (S,2)$

فهي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(Q,4), (J,3)$

فالنقطة G واقعة على القطعة $[QJ]$ ... (*)

G م.أ.م للنقاط $(S,2), (A,2), (B,2), (C,1)$

فهي م.أ.م للنقطتين $(R,4), (I,3)$

فالنقطة G واقعة على القطعة $[IR]$ ... (**)

من (*) و (**) فنستنتج أن المستقيمين (IR) و (QJ) متقاطعان في G .

4) بما أن المستقيمين (IR) و (QJ) متقاطعان نستنتج أن النقاط I, R, Q, J تقع في مستوٍ واحد.

5)

$$\vec{BS} = \vec{BI} + \vec{IJ} + \vec{JS}$$
$$= \frac{1}{3}\vec{BC} + \vec{IJ} + \frac{1}{3}\vec{CS}$$
$$= \frac{1}{3}(\vec{BC} + \vec{CS}) + \vec{IJ}$$
$$\vec{BS} = \frac{1}{3}\vec{BS} + \vec{IJ}$$
$$\frac{2}{3}\vec{BS} = \vec{IJ} \Rightarrow \boxed{(BS)//(IJ)} \quad ①$$

$$\vec{BS} = \vec{BQ} + \vec{QR} + \vec{RS}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{BA} + \vec{QR} + \frac{1}{2}\vec{AS}$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AS}) + \vec{QR}$$
$$\vec{BS} = \frac{1}{2}\vec{BS} + \vec{QR}$$
$$\frac{1}{2}\vec{BS} = \vec{QR}$$
$$\Rightarrow \boxed{(BS)//(QR)} \quad ②$$

من ① و ② نستنتج أن $(IJ)//(QR)$

حسب النتيجة (المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان)

*: التمرين الأول: 1- إيجاد الفصل المشترك لـ Q و P :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+y-z+2=0 \end{cases} \quad +$$
$$4x+2y+2=0 \Rightarrow y=-1-2x$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -3x-y+z-2=0 \end{cases} \quad +$$
$$-2x+2z-2=0 \Rightarrow z=1+x$$

بفرض $x=t$:

$$\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-1-2t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1+t \end{cases}$$

المدّة : ساعة و نصف	مذاكرة المستقيمات و المستويات في الفراغ الدرجة الكاملة : 300	الاسم :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : أوجد نقطة تقاطع المستويات :

$$P : 3x - y + z = 5 \quad , \quad Q : 2x + y - z = 0 \quad , \quad R : x - 2y + z = 0$$

السؤال الثاني: نتأمّل المستوي $P : 2x - y + 2z = 0$ و المستقيم ذي المعادلات الوسيطيّة $d : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 4t \; ; \; t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}$.

1) أثبت أنّ المستقيم d يوازي المستوي P .

2) احسب بعد المستقيم d عن المستوي P .

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: نتأمّل المستقيمين : $d_2 : \begin{cases} x = 4 - s \\ y = 2s \quad ; s \in \mathbb{R} \\ z = 2 - s \end{cases}$, $d_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ المستقيمين متعامدان .

2) أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع المستقيمين d_1 و d_2 .

3) اكتب معادلة المستوي P الذي يشمل المستقيمين d_1 و d_2 .

التمرين الثاني: نتأمّل المستويين : $Q : x + y + z = 0$, $P : x - 3y + 2z = 0$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ المستويين متقاطعان .

2) اكتب تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم Δ الذي يمثّل الفصل المشترك للمستويين P و Q .

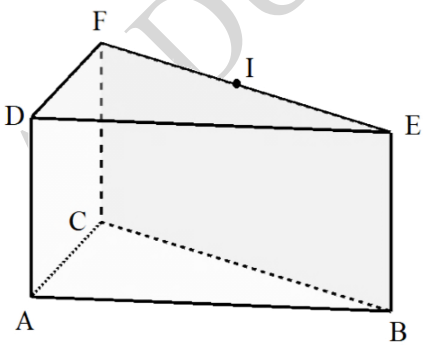
3) اكتب معادلة المستوي R الذي يمر بالمبدأ O و يعامد المستويين P و Q .

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

نتأمّل جانباً الموشور ABCDEF قاعدته المثلث ABC قائم في A ، [AD] عمودي على المستوي ABC ، النقطة I منتصف [FE] .

نعلم أنّ $AB = 4 \quad , \quad AC = 2 \quad , \quad AD = 1$

نختار المعلم المتجانس $(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. **المطلوب :**



1) أوجد إحداثيّات النقاط A , B , C , D , E , F , I .

2) اكتب معادلة ديكارتيّة للمستوي ACI .

3) اكتب تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم (DE) .

4) استنتج أنّ J منتصف [DE] هي نقطة تقاطع المستقيم (DE) مع المستوي ACI .

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة المستقيمات والمستويات في الفراغ "1"

أولاً: السؤال الأول:

$$x-2y+z=0 \quad \text{———} \quad (L_1)$$
$$2x+y-z=0 \quad \text{———} \quad (L_2)$$
$$3x-y+z=5 \quad \text{———} \quad (L_3)$$

$$x-2y+z=0 \quad \text{———} \quad (L_1)$$
$$-5y+3z=0 \quad \text{———} \quad (2L_1-L_2)\ (L_2')$$
$$-5y+2z=-5 \quad \text{———} \quad (3L_1-L_3)\ (L_3')$$

$$\boxed{z=5} \quad (L_2'-L_3')$$

نعوّض في L_2':

$$-5y+15=0$$
$$\Rightarrow \boxed{y=3}$$

نعوّض في (L_1):

$$x-6+5=0$$
$$\Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$\boxed{I(1,3,5)}$$

السؤال الثاني:

1) $\vec{n}_P(2,-1,2)\ ,\ \vec{v}_d(1,4,1)$

$$\vec{n}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}=(2)(1)+(-1)(4)+(2)(1)$$
$$=2-4+2=0$$
$$\vec{n}\perp\vec{v}$$

فالمستقيم d يوازي المستوي P.

2) لتكن K نقطة من المستقيم d:

$$K(3+t;\ 2+4t;\ 1+t)$$

$$dist(K,P)=\frac{|6+\cancel{2t}-\cancel{2}-\cancel{4t}+\cancel{2}+\cancel{2t}|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{9}}=2$$

ثانياً: التمرين الأول:

1) $\vec{v}_1(1,2,3)\ ,\ \vec{v}_2(-1,2,-1)$

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=-1+4+(-3)=0$$

فالمستقيمان d_1 و d_2 متعامدان.

2)
$$3+t=4-s \quad \text{———} \quad (1)$$
$$2+2t=2s \quad \text{———} \quad (2)$$
$$1+3t=2-s \quad \text{———} \quad (3)$$

من (1) نجد:
$$t=1-s$$

نعوّض في (2):
$$2+2(1-s)=2s$$
$$2+2-2s=2s$$
$$4s=4$$
$$\boxed{s=1}$$
$$\Rightarrow t=1-1=0$$
$$\boxed{t=0}$$

نعوّض قيم s و t في (3) للتحقق:

$$1+3(0)\overset{?}{=}2-(1)$$
$$1=1 \ \text{محققة.}$$

نعوّض $t=0$ في المعادلات الوسيطية للمستقيم d_1:

$$x=3 \qquad y=2 \qquad z=1$$

$$\boxed{I(3,2,1)}$$

3) طريقة أولى: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي P فهو يحقق:

$$\vec{n}\cdot\vec{v_1}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{a+2b+3c=0} \text{ —(1)}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{v_2}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$\boxed{-a+2b-c=0} \text{ —(2)}$$

بجمع (1) و (2): $4b+2c=0$

$$\boxed{c=-2b}$$

نفرض $c=-2$ عندها $b=1$ و $a=4$

$$\vec{n}(4,1,-2)$$

معادلة المستوي من الشكل:

$$a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$$

$$4(x-3)+(1)(y-2)-2(z-1)=0$$

$$\boxed{P:\ 4x+y-2z-12=0}$$

طريقة ثانية: المستوي P موجه بالشعاعين $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ ويمر بالنقطة I:

$$\vec{IM}=\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}$$

$$\begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-\beta\\2\alpha+2\beta\\3\alpha-\beta\end{pmatrix}$$

بالمطابقة:

$$x-3=\alpha-\beta \text{ —(1)}$$
$$y-2=2\alpha+2\beta \text{ —(2)}$$
$$z-1=3\alpha-\beta \text{ —(3)}$$

نضرب (1) ب 4 و (3) ب (-2):

$$4x-12=4\alpha-4\beta$$
$$y-2=2\alpha+2\beta$$
$$-2z+2=-6\alpha+2\beta \quad +$$

$$4x+y-2z-12=0$$

وهي معادلة المستوي P.

التمرين الثاني:

1) $\left.\begin{matrix}\vec{n_P}(1,-3,2)\\ \vec{n_Q}(1,1,1)\end{matrix}\right\}\ \frac{1}{1}\neq\frac{-3}{1}\neq\frac{2}{1}$

المركبات غير متناسبة، فالشعاعان غير مرتبطين خطياً والمستويان P و Q متقاطعان.

2) بالحل المشترك:

$$x+y+z=0 \quad (*)$$
$$-x+3y+2z=0 \quad + \quad (**)$$

$$0+4y-z=0$$

$$z=4y$$

نعوض في (*):

$$x+y+4y=0$$

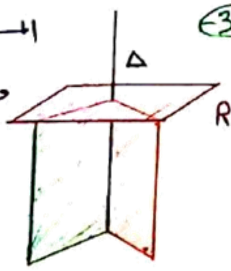
$$x=-5y$$

نفرض $y=t$:

$$\Delta:\begin{cases}x=-5t\\y=t\\z=4t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

3) المستقيم (Δ) ناظمي على المستوي R

ومنه: $\vec{n_R}=\vec{v_\Delta}(-5,1,4)$



$$R:\ ax+by+cz+d=0$$

$$-5x+y+4z+d=0$$

نعوض مبدأ الإحداثيات (O):

$$0+d=0$$

$$\Rightarrow \boxed{R:\ -5x+y+4z=0}$$

الحل:

1) $A(0,0,0)\ ,\ B(4,0,0),\ C(0,2,0)$

$D(0,0,1),\ E(4,0,1),\ F(0,2,1)$

$$I(2,1,1)$$

2) معادلة المستوي ACI من الشكل:

$$ax+by+cz+d=0$$

نعوض $A(0,0,0)$:

$$0+d=0$$

$$\boxed{d=0}$$

$$\Rightarrow\ ax+by+cz=0$$

نعوض $C(0,2,0)$:

$$0+2b+0=0$$

$$2b=0$$

$$\boxed{b=0}$$

$$\Rightarrow\ ax+cz=0$$

نعوض $I(2,1,1)$:

$$2a+c=0$$

$$c=-2a$$

$$ax-2az=0 \qquad (\div a)$$

$$\boxed{ACI:\ x-2z=0}$$

3) $\overrightarrow{DE}(4,0,0)$

$$(DE):\begin{cases} x=4t \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

4) $J\left(\dfrac{x_D+x_E}{2}, \dfrac{y_D+y_E}{2}, \dfrac{z_D+z_E}{2}\right)$

$$J(2,0,1)$$

لتكن N نقطة تقاطع (DE) مع (ACI)

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم (DE)

في معادلة المستوي (ACI):

$$4t-2=0 \qquad \boxed{t=\tfrac{1}{2}}$$

$$x=4\left(\tfrac{1}{2}\right)=2\ ,\ y=0,\ z=1$$

$$N(2,0,1)$$

نلاحظ أن $J=N$

فالنقطة J هي ذاتها نقطة تقاطع

(DE) مع المستوي (ACI).

5. طلب إضافي: اذكر مقطع الموشور بالمستوي (ACI) معيّناً طبيعة المقطع ومساحته.

المقطع هو الرباعي $ACIJ$

وهو شبه منحرف قاعدته الكبرى $[AC]$

وقاعدته الصغرى $[IJ]$ وارتفاعه $[AJ]$.

$$S=\frac{AC+IJ}{2}\cdot AJ=\frac{2+1}{2}\cdot\sqrt{5}$$

$$S=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

+ احسب حجم الهرم $D\text{-}ACIJ$.

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h \quad ;\quad h=dist_{(D,\,ACI)}$$

$$h=\frac{|0-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow\ V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=1 .$$

المدّة : ساعة و نصف

مذاكرة أشعة شاملة

الدرجة الكاملة : 300

الاسم :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : نتأمّل النقطتين : $A(1,0,1)$, $B(5,2,1)$. **المطلوب :**

1) اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [AB] .

2) صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

السؤال الثاني: نتأمّل النقاط $A\ (0,1,-2)$, $B\ (1,2,0)$, $C\ (3,4,7)$. **المطلوب :**

1) اكتب تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم (AB) .

2) أوجد إحداثيّات النقطة C' المسقط القائم للنقطة C على المستقيم (AB) .

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن لدينا المستويان $Q : x - y + z + 4\sqrt{3} = 0$, $P : x + 2y + z - 3\sqrt{6} = 0$

1) تيقّن أنّ المستويين متعامدان . 2) احسب بعد مبدأ الإحداثيات عن كلٍ من المستويين .

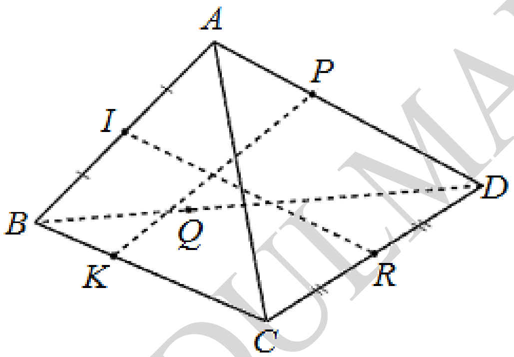
3) استنتج بعد المبدأ O عن الفصل المشترك للمستويين (Δ) .

4) اكتب معادلة الكرة التي مركزها O و تمسّ (Δ) .

التمرين الثاني: $ABCD$ رباعي وجوه ، النقاط P , Q , R , K , I تحقّق : $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ ،

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,2)$, $(B,2)$, $(C,1)$, $(D,1)$ ،

R منتصف $[CD]$ ، I منتصف $[AB]$ **و المطلوب :**



1) أثبت أنّ المستقيمَين (IR) , (PK) متقاطعان .

2) عيّن موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,2)$, $(C,1)$.

3) عيّن مجموعة النقاط M التي تحقق :

$$\|2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}\| = \|2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM}\|$$

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A\ (1,0,1)$, $B\ (2,1,-1)$, $C\ (0,1,1)$, $D\ (1,1,3)$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ النقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة .

2) أثبت أنّ المثلث ABC قائم و احسب مساحته .

3) اكتب معادلة المستوي ABC .

4) احسب بعد النقطة D عن المستوي ABC .

5) احسب حجم رباعي الوجوه $D\text{-}ABC$.

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة الأشعة الشاملة "2022-1"

أولاً: السؤال الأول:

1) $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري:

$$\Rightarrow MA = MB$$

$$MA^2 = MB^2$$

$$(x-1)^2+y^2+\cancel{(z-1)^2} = (x-5)^2+(y-2)^2+\cancel{(z-1)^2}$$

$$\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2} = \cancel{x^2}-10x+25+\cancel{y^2}-4y+4$$

$$8x+4y-28=0$$

$$\boxed{2x+y-7=0}$$

طريقة ثانية: المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ يمر بمنتصف $[AB]$ ويقبل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له.

$$I(3,1,1) \quad , \quad \overrightarrow{AB}(4,2,0)$$

$$a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$$

$$4(x-3)+2(y-1)=0$$

$$2x+y-7=0$$

2) $$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

$$\begin{pmatrix}1-x\\-y\\1-z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5-x\\2-y\\1-z\end{pmatrix}=0$$

$$(1-x)(5-x)-y(2-y)+(1-z)^2=0$$

$$x^2-6x+5+y^2-2y+(z-1)^2=0$$

$$(x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)+(z-1)^2=5$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$$

تمثل كرة مركزها $I(3,1,1)$

ونصف قطرها $r=\sqrt{5}$

السؤال الثاني:

1) $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$,
$$(AB):\begin{cases}x=1+t\\y=2+t \quad ; t\in\mathbb{R}\\z=2t\end{cases}$$

2) $$c'(1+t,2+t,2t)$$

$$\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}t-2\\t-2\\2t-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=0$$

$$t-2+t-2+4t-14=0$$

$$6t=18$$

$$\boxed{t=3}$$

$$\boxed{c'(4,5,6)}$$

ثانياً: التمرين الأول:

1) $\vec{n}_P(1,2,1)$, $\vec{n}_Q(1,-1,1)$

$$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=(1,2,1)\cdot(1,-1,1)=1-2+1=0$$

$$\Rightarrow P\perp Q$$

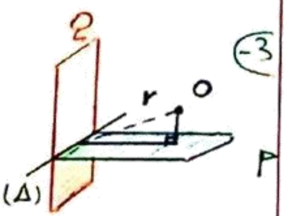
2) $$d_P=dist(O,P)=\frac{|-3\sqrt{6}|}{\sqrt{1+4+1}}=3$$

$$d_Q=dist(O,Q)=\frac{|4\sqrt{3}|}{\sqrt{1+1+1}}=4$$

3) $$r^2=d_P^2+d_Q^2$$

$$=9+16=25$$

$$\boxed{r=5}$$



وهو بعد المبدأ (O) عن المستقيم (Δ).

4) $$x^2+y^2+z^2=25$$

التمرين الثاني :

1) من العلاقة $\vec{CK}=\frac{2}{3}\vec{CB}$

K مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,2)$ و $(C,1)$

من العلاقة $\vec{AP}=\frac{1}{3}\vec{AD}$

P مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(D,1)$ $(A,2)$

ولكن: G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $\underbrace{(D,1)\ (A,2)}\ \underbrace{(B,2)\ (C,1)}$

فهي (حسب الخاصة التجميعية) مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(P,3)$ $(K,3)$

$\Leftarrow$ G تقع على القطعة $[PK]$ ——$(*)$

G م.أ.م لـ $\underbrace{(A,2)\ (B,2)}\ \underbrace{(C,1)\ (D,1)}$

$(I,4)$ $(R,2)$

$\Leftarrow$ G تقع على القطعة $[IR]$ ——$(**)$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن المستقيمين (IR) و (PK) متقاطعان.

2) $\vec{AJ}=\frac{1}{3}\vec{AC}$

3) Q مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(D,1)$, $(B,2)$

$\Rightarrow \quad 2\vec{BQ}+\vec{DQ}=\vec{0}$

$\Rightarrow \quad 2\vec{BM}+\vec{DM}=3\vec{QM}$ ——(1)

J مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,2),(C,1)$

$2\vec{AM}+\vec{CM}=3\vec{JM}$ ——(2)

$\|3\vec{JM}\|=\|3\vec{QM}\|$

$JM=QM$

M تتحرك على المستوي المحوري للقطعة $[JQ]$.

حل:

1) $\left.\begin{array}{l}\vec{AB}(1,1,-2)\\ \vec{AC}(-1,1,0)\end{array}\right\}\ \frac{1}{-1}\neq\frac{1}{1}$

المركبات غير متناسبة

فالشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

فالنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

2) $AB=\|\vec{AB}\|=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$

$AC=\|\vec{AC}\|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}$

$BC^2=AB^2+AC^2$

فالمثلث ABC قائم في A.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3}$

3) $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=0$

$a+b-2c=0$ ---(1)

$\vec{n}\cdot\vec{AC}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=0\Rightarrow\boxed{a=b}$

نفرض $a=1$ عندئذٍ $b=1$, $c=1$

$\vec{n}(1,1,1)$

$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$\boxed{ABC:\ x+y+z=2}$

4) $dist_{(D-ABC)}=\frac{|1+1+3-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

5) $V=\frac{1}{3}S\cdot h=\frac{1}{3}(\sqrt{3})(\sqrt{3})=1.$

المدّة : ساعة و نصف	مذاكرة الأعداد العقديّة الدرجة الكاملة : 300	الاسم :

أوّلاً: أجب عن الأسئلة الآتية : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ليكن العدد العقدي $z = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$. **المطلوب :**

1) عيّن طويلة و زاوية العدد العقدي z^2 ، ثم اكتب z بالشكل الأسّي .

2) استنتج كلاً من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

السؤال الثاني: ليكن العدد العقدي z الذي يحقق $|z| = 1$. أثبت في الحالتين الآتيتين أنّ $|w| = 1$:

1) $w = \frac{5+7z}{7+5z}$ 2) $w = \frac{z+2i}{1-2iz}$

السؤال الثالث: بسّط كتابة العدد العقدي :

$$z = \frac{\cos\theta + i\sin\theta - 1}{\cos\theta + i\sin\theta + 1}$$

ثانياً: حل التمارين الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن كثير الحدود $P(z) = z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i$ نهدف إلى حل المعادلة $P(z) = 0$ في $\mathbb{C}$.

1) أثبت أنّ $P(i) = 0$.

2) عيّن كثير حدود Q من الدرجة الثانية يحقّق $P(z) = (z-i)Q(z)$.

3) أوجد جميع حلول المعادلة $P(z) = 0$ بالشكل الجبري .

التمرين الثاني: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين العقديين :

$$z_A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad , \quad z_B = \overline{z_A}$$

1) أثبت أنّ $\frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ و استنتج زاوية العدد العقدي z_A .

2) استنتج قيمة $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$.

3) أثبت أنّ $1 + z_A + z_A^2 + \cdots + z_A^{15} = 0$.

التمرين الثالث: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ليكن العدد العقدي $w = -12 + 16i$. **المطلوب :**

1) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد w .

2) أوجد العددين z_A و z_B حلَّي المعادلة $z^2 + (4+2i)z + 6 = 0$.

3) صف Γ مجموعة النقاط $M(z)$ من المستوي التي تحقّق : $|z+1-i| = |z+3+3i|$.

4) اكتب معادلة للمجموعة Γ .

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة الأعداد العقدية "1-2022"

أولاً: السؤال الأول:

(1)

$$z^2=(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}-1)^2+2i(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$$

$$=(\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1)+2i(3-1)$$

$$=(2\sqrt{3})(2)+4i$$

$$z^2=4\sqrt{3}+4i$$

$$|z^2|=4\cdot\sqrt{3+1}=4\cdot 2=8$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{x}{r}=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta&=\frac{y}{r}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\ \theta=\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$$

$$z^2=8e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\boxed{z=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

(2)

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

السؤال الثاني:

$$|z|=1 \iff \bar{z}=\frac{1}{z}$$

(1)

$$\bar{w}=\overline{\left(\frac{5+7z}{7+5z}\right)}=\frac{\overline{(5+7z)}}{\overline{(7+5z)}}$$

$$\bar{w}=\frac{5+7\bar{z}}{7+5\bar{z}}=\frac{5+7\cdot\frac{1}{z}}{7+5\cdot\frac{1}{z}}\cdot\frac{z}{z}$$

$$\bar{w}=\frac{5z+7}{7z+5}=\frac{1}{w}$$

$$\Rightarrow \boxed{|w|=1}$$

(2)

$$\bar{w}=\frac{\bar{z}-2i}{1+2i\bar{z}}=\frac{\frac{1}{z}-2i}{1+2i\cdot\frac{1}{z}}\cdot\frac{z}{z}$$

$$\bar{w}=\frac{1-2iz}{z+2i}=\frac{1}{w}\Rightarrow\boxed{|w|=1}$$

السؤال الثالث:

طريقة أولى:

$$z=\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\cdot\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}=\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\boxed{z=i\tan\frac{\theta}{2}}$$

طريقة ثانية:

$$z=\frac{-(1-\cos\theta)+i\sin\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$=\frac{-2\sin^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\left[\frac{i\cos\frac{\theta}{2}+i^2\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$=\tan\frac{\theta}{2}(i)=i\tan\frac{\theta}{2}$$

ثانياً: التمرين الأول:

(1)

$$P(i)=i^3-6i^3-11i+6i$$

$$=-i+6i-11i+6i=0$$

(2)

$$\begin{array}{r|l} & z^2-5iz-6\\ \hline z-i & z^3-6iz^2-11z+6i\\ & \underline{-z^3+iz^2}\\ & \quad -5iz^2-11z+6i\\ & \quad \underline{+5iz^2+5z}\\ & \qquad -6(z-i)\end{array}$$

$Z_A = re^{i\theta}$, $Z_B = \overline{Z_A} = re^{-i\theta}$

$$\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

$$e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi K \quad (K \in \mathbb{Z})$$

$$\theta = \frac{\pi}{8} + \pi K$$

لكن A تقع في الربع الأول :

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{8}} \quad (2\pi)$$

2)

$$Z_A = |Z_A| . e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$Z_A = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

بالمطابقة :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

3)

$$1 + Z_A + Z_A^2 + Z_A^3 + \dots + Z_A^{15}$$

$$= (1)\frac{1 - Z_A^{16}}{1 - Z_A} = \frac{1 - (e^{i\frac{\pi}{8}})^{16}}{1 - e^{i\frac{\pi}{8}}}$$

$$= \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{i\frac{\pi}{8}}} = \frac{1-1}{1 - e^{i\frac{\pi}{8}}} = 0$$

حيث علماً :

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\Rightarrow Q(Z) = Z^2 - 5iZ - 6$$

3)

$$P(Z) = (Z - i)(Z^2 - 5iZ - 6)$$

$$P(Z) = 0 \leftrightarrow \boxed{Z_1 = i}$$

أو إما

$$Z^2 - 5iZ - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -25 + 24 = -1$$

$$\sqrt{-\Delta} = 1$$

$$Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{5i + i}{2} = 3i$$

$$\boxed{Z_2 = 3i}$$

$$Z_3 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{5i - i}{2} = 2i$$

$$\boxed{Z_3 = 2i}$$

$$S = \{i, 2i, 3i\}$$

التمرين الثاني :

1)

$$\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{Z_A}{\overline{Z_A}} = \frac{Z_A^2}{\overline{Z_A} \cdot Z_A} = \frac{Z_A^2}{|Z_A|^2}$$

$$Z_A^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} - \frac{2-\sqrt{2}}{4} + 2i\,\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{4-2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|Z_A|^2 = |Z_A^2| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{Z_A}{Z_B} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\frac{Z_A}{Z_B} = e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

التمرين الثالث :

1) $Z = x+iy \quad , \quad w = a+ib$

$$Z^2 = w$$

$$x^2-y^2 = a = -12$$

$$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{144+256}$$

$$= \sqrt{400} = 20$$

$$2xy = b = 16 \quad \text{—} (*)$$

$$x^2-y^2 = -12 \quad \text{—} (1)$$

$$x^2+y^2 = 20 \quad \text{—} (2) \quad +$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

نعوض في (2) :

$$4+y^2 = 20 \Rightarrow y^2 = 16$$

$$y = \pm 4$$

من $(*)$ الإشارات متماثلة :

$$Z_1 = 2+4i \quad , \quad Z_2 = -2-4i$$

2) $z^2+(4+2i)z+6=0$

$$\Delta = b^2-4ac = (4+2i)^2-24$$

$$= 16+16i-4-24$$

$$\Delta = -12+16i$$

$$\sqrt{\Delta} = 2+4i$$

$$Z_A = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2i+2+4i}{2}$$

$$= \frac{-2+2i}{2} = -1+i$$

$$Z_B = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2i-2-4i}{2} = -3-3i$$

3) $\Gamma: \quad |Z-(-1+i)| = |Z-(-3-3i)|$

$$|Z-Z_A| = |Z-Z_B|$$

$$MA = MB$$

تمثل محور القطعة المستقيمة AB .

4) $Z = x+iy$

$$|x+iy+1-i| = |x+iy+3+3i|$$

$$|(x+1)+i(y-1)| = |(x+3)+i(y+3)|$$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}$$

نربع الطرفين :

$$(x+1)^2+(y-1)^2 = (x+3)^2+(y+3)^2$$

$$\cancel{x^2}+2x+1+\cancel{y^2}-2y+1 = \cancel{x^2}+6x+9+\cancel{y^2}+6y+9$$

$$2x-2y+2 = 6x+6y+18 \quad (\div 2)$$

$$x-y+1 = 3x+3y+9$$

$$2x+4y+8=0$$

$$\boxed{\Gamma: \quad x+2y+4=0}$$

المدّة : ساعة و نصف	**مذاكرة تطبيقات الأعداد العقديّة** الدرجة الكاملة : 300	الاسم :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

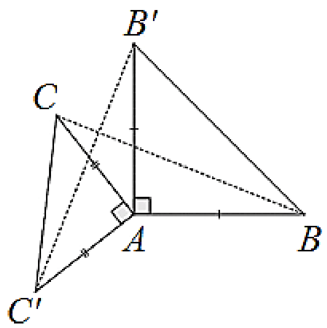
السؤال الأول: نعرّف النقطتين A و B بحيث : $z_A = 4 + i \ , \ z_B = 2 + 3i$. **المطلوب :**

1) أوجد العدد العقدي z_C الممثّل للنقطة C صورة A وفق دوران مركزه B و زاويته $+\frac{\pi}{2}$.
2) أوجد العدد العقدي z_D الممثّل للنقطة D بحيث يكون الرباعي $ADBC$ متوازي أضلاع .

السؤال الثاني: نتأمّل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان $a = 2$ ، $b = 2e^{5i\pi/6}$ ، و لتكن I منتصف $[AB]$. **المطلوب :**

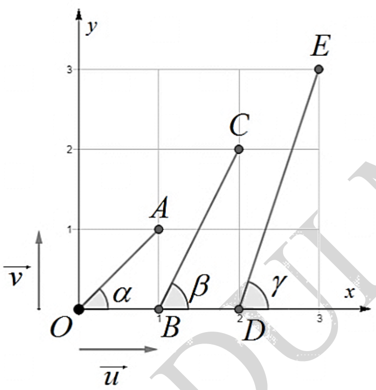
1) ارسم شكلاً مناسباً ، و بيّن طبيعة المثلث OAB ، ثم استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$.
2) احسب العدد العقدي z_I الممثّل للنقطة I بصيغته الجبريّة و الأسيّة ، ثم استنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)



التمرين الأول: في الشكل المجاور المثلّثان ABB' و ACC' كلٌّ منهما قائمٌ في A و متساوي الساقين ، تأمّل المعلم المتجانس و المباشر $(A; \vec{u}, \vec{v})$ ، و المطلوب :

1) اكتب $z_{B'}$ بدلالة z_B، و $z_{C'}$ بدلالة z_C .
2) احسب $\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C}$.
3) استنتج أنّ $(BC) \perp (B'C')$ و $BC = B'C'$.



التمرين الثاني: في الشكل المجاور α و β و γ هي القياسات الأساسيّة للزوايا الموجّهة $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ و $(\vec{u}, \overrightarrow{BC})$ و $(\vec{u}, \overrightarrow{DE})$ بالترتيب . **المطلوب :**

1) اكتب الأعداد العقديّة الآتية بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسّي : $z_{\overrightarrow{DE}}$ ، $z_{\overrightarrow{BC}}$ ، $z_{\overrightarrow{OA}}$.
2) اكتب العدد العقدي $z_{\overrightarrow{OA}} \cdot z_{\overrightarrow{BC}} \cdot z_{\overrightarrow{DE}}$ بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسّي .
3) استنتج المجموع $\alpha + \beta + \gamma$.

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

أولاً : في مجموعة الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$ ، نُعطى كثير الحدود $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$:

1) تحقّق أنّ $P(4) = 0$ ، ثم عيّن العددين الحقيقيّين α و β ليكون $P(z) = (z-4)(z^2 + \alpha z + \beta)$.
2) حل المعادلة $P(z) = 0$.

ثانياً : في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس نعرّف النقاط A , B , C صور الأعداد :

$$z_A = 1 - i\sqrt{3} \quad , \quad z_B = 1 + i\sqrt{3} \quad , \quad z_C = 4$$

3) احسب طويلة و زاوية العدد $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ ، ثم استنتج نوع المثلث ABC .
4) احسب z_G الممثّل للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A, |z_A|) , (B, |z_B|) , (C, |z_C|)$.

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة تطبيقات الأعداد العقدية "2022-1"

أولاً: السؤال الأول:

1) $z_C - z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_B)$

$z_C - 2 - 3i = i(4+i-2-3i)$

$z_C - 2 - 3i = i(2-2i)$

$z_C - 2 - 3i = 2i + 2$

$\boxed{z_C = 4+5i}$

2) $\vec{AD} = \vec{CB}$

$z_{\vec{AD}} = z_{\vec{CB}}$

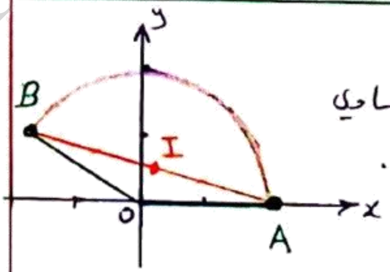
$z_D - z_A = z_B - z_C$

$z_D = z_A + z_B - z_C$

$= (4+i) + (2+3i) - (4+5i)$

$\boxed{z_D = 2-i}$

السؤال الثاني:



1) المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O.

فيه OI متوسط

فهو منصّف للزاوية $(\vec{u},\vec{OB})$

أي إنّ: $(\vec{u},\vec{OI}) = \frac{1}{2}(\vec{u},\vec{OB})$

$(\vec{u},\vec{OI}) = \frac{5\pi}{12}$ (2π)

2) $b = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$

$z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

بما أنّ $(\vec{u},\vec{OI}) = \frac{5\pi}{12}$ وإذاً:

$\arg(z_I) = \frac{5\pi}{12}$

$z_I = re^{i\theta}$

$r = |z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4-4\sqrt{3}+3+1}{4}}$

$r = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\theta = \frac{5\pi}{12}$

$\Rightarrow z_I = \sqrt{2-\sqrt{3}}\, e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ونقبل:

$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ونقبل.

ثانياً: التمرين الأول:

1) B' صورة B وفق دوران مركزه A زاويته $+\frac{\pi}{2}$

$z_{B'} - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$

$\boxed{z_{B'} = i z_B}$

C' صورة C وفق دوران مركزه A زاويته $+\frac{\pi}{2}$

$z_{C'} - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_A)$

$\boxed{z_{C'} = i z_C}$

2- $$\frac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}=\frac{iz_B-iz_C}{z_B-z_C}=\frac{i(\cancel{z_B-z_C})}{\cancel{z_B-z_C}}$$

$$\frac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}=i$$

3- $$\frac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}=i \begin{cases} \left|\frac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}\right|=1 \quad \frac{B'C'}{BC}=1 \Rightarrow \boxed{B'C'=BC} \\ \arg\left(\frac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{B'C'})=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(BC)\perp(B'C')}$$

التمرين الثاني :

1- $z_{\overrightarrow{OA}}=z_A-z_O=1+i$

$=\sqrt{1^2+1^2}\,e^{i\alpha}=\sqrt{2}\,e^{i\alpha}$

$z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=(2+2i)-(1)=1+2i$

$=\sqrt{1^2+2^2}\,e^{i\beta}=\sqrt{5}\,e^{i\beta}$

$z_{\overrightarrow{DE}}=z_E-z_D=(3+3i)-(2)=1+3i$

$=\sqrt{1^2+3^2}\,e^{i\gamma}=\sqrt{10}\,e^{i\gamma}$

2- $z_{\overrightarrow{OA}}\cdot z_{\overrightarrow{BC}}\cdot z_{\overrightarrow{DE}}=(1+i)(1+2i)(1+3i)$

$=(1+2i+i-2)(1+3i)=(-1+3i)(1+3i)$

$=(3i)^2-(1)^2=-9-1=-10$

$z_{\overrightarrow{OA}}\cdot z_{\overrightarrow{BC}}\cdot z_{\overrightarrow{DE}}=\sqrt{2}\,e^{i\alpha}\cdot\sqrt{5}\,e^{i\beta}\cdot\sqrt{10}\,e^{i\gamma}$

$=10\,e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$

3- $10\,e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}=-10$

$e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}=e^{i\pi}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha+\beta+\gamma=\pi}$

ثالثاً : 1- $P(4)=64-96+48-16=0$

$P(z)=(z-4)(z^2+\alpha z+\beta)$

$=z^3+\alpha z^2+\beta z-4z^2-4\alpha z-4\beta$

$=z^3+(\alpha-4)z^2+(\beta-4\alpha)z-4\beta$

بالمطابقة :

$-4\beta=-16 \Rightarrow \boxed{\beta=4}$

$\alpha-4=-6 \quad \boxed{\alpha=-2}$

2- $P(z)=0 \Leftrightarrow (z-4)(z^2-2z+4)=0$

إما $z_1=4$

أو $z^2-2z+4=0$

$\Delta=b^2-4ac=4-16=-12$

$\sqrt{-\Delta}=2\sqrt{3}$

$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2+i2\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$

$z_3=\overline{z_2}=1-i\sqrt{3}$

3- $$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{(3+i\sqrt{3})^2}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{9+6i\sqrt{3}-3}{9+3}=\frac{6+6i\sqrt{3}}{12}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع .

4- $|z_A|=|z_B|=2\ ,\ |z_C|=4$

$$z_G=\frac{2(1-i\sqrt{3})+2(1+i\sqrt{3})+4(4)}{2+2+4}=\frac{5}{2}\ .$$

المدّة : ساعة و نصف	مذاكرة التحليل التوافقي الدرجة الكاملة : 400	الاسم :

أجب عن الأسئلة الآتية : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأوّل: يريد تاجر تعبئة 5 سلع مختلفة في 4 صناديق ، بحيث يضع في كل صندوق سلعة واحدة على الأقل .
ما عدد النتائج المختلفة لهذه العمليّة ؟

السؤال الثاني: أعلنت إحدى الشركات عن وظيفتين شاغرتين ، فتقدّم لملء هاتين الوظيفتين 3 رجال و 4 سيدات . **المطلوب** :

1) بكم طريقة يمكن ملء الوظيفتين الشاغرتين ؟
2) بكم طريقة يمكن تعيين رجل و امرأة في هاتين الوظيفتين ؟

السؤال الثالث: لتكن المجموعة $s = \{a, b, c, d, e\}$. **المطلوب** :

1) ما عدد المجموعات الجزئيّة التي يمكن تشكيلها من s ؟
2) ما عدد تباديل المجموعة s ؟

السؤال الرابع: لتكن المجموعة $s = \{2,3,4,5,7\}$. **المطلوب** :

1) كم عدداً زوجيّاً مؤلّفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة s ؟
2) كم عدداً مختلف الأرقام و مؤلّفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة s ؟

السؤال الخامس: يراد ملء رف بعدد من الكتب من إجمالي 5 كتب مختلفة .

1) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب إذا كان الرف يتّسع لأربعة كتب ؟
2) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب إذا كان الرف يتّسع لكتابين ؟

السؤال السادس: يراد تشكيل لجنة قوامها ثلاثة أشخاص مأخوذين من مجموعة مؤلّفة من 7 رجال و 5 نساء .

1) كم لجنة مختلفة يمكننا تشكيلها ؟
2) كم لجنة مختلفة تحوي رجلين و امرأة يمكننا تشكيلها ؟

السؤال السابع: عيّن قيمة n في الحالتين الآتيتين : $P_n^3 = 6\binom{n}{4}$ ، $\binom{9}{n} = \binom{9}{2n}$.

السؤال الثامن: كم كلمة مختلفة من سبعة حروف يمكن تشكيلها من حروف كلمة $unusual$ ؟

السؤال التاسع: ما عدد أقطار مضلّع محدّب عدد رؤوسه 6 ؟

السؤال العاشر: ليكن كثير الحدود $F(x) = (1 + ax)^7(1 + bx)^8$ حيث a و b عددان طبيعيّان .
إذا علمت أنّ أمثال x تساوي 56 فما هي القيم الممكنة للمجموع $a + b$ ؟

-------- انتهت الأسئلة --------

حل اختبار التحليل التوافقي 2022-1

السؤال الأول:

عدد النواتج: $\binom{5}{2}\cdot 4! = \frac{5\cdot 4}{2!}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$= 240$

السؤال الثاني:

1) $\binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2!} = 21$

2) $\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1} = 4\times 3 = 12$

السؤال الثالث:

1) طريقة أولى: $2^5 = 32$

طريقة ثانية: $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\dots+\binom{5}{5}$

$= 1+5+10+10+5+1 = 32$

2) $5! = 120$

السؤال الرابع

1) يتم اختيار الآحاد بطريقتين (2)

يتم اختيار العشرات بـ (5) طرق

وبالتالي حسب المبدأ الأساسي بالعد يكون المطلوب:

$5\times 2 = 10$ (أعداد)

2) $P_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$

طريقة ثانية: حسب المبدأ الأساسي بالعد

$$5\times 4\times 3 = 60 \quad \begin{cases} \text{آحاد: 5 طرق} \\ \text{عشرات: 4 طرق} \\ \text{مئات: 3 طرق} \end{cases}$$

السؤال الخامس:

1) $P_5^4 = 5\times 4\times 3\times 2 = 120$

2) $P_5^2 = 5\times 4 = 20$

السؤال السادس:

1) $\binom{12}{3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} = 220$

2) $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{1} = \frac{7\cdot 6}{2!}\cdot 5 = 105$

السؤال السابع

$P_n^3 = 6\binom{n}{4}$

شرط الحل:

$n\geq 3$ & $n\geq 4 \Rightarrow \boxed{n\geq 4}$

$P_n^3 = 6\binom{n}{4} \longleftrightarrow$

$n(n-1)(n-2) = 6\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$

نقسم على $n(n-1)(n-2)$ (غير معدوم لأنه $n\geq 4$)

$1 = 6\cdot\frac{n-3}{4\cdot 3\cdot 2}$

$4 = n-3 \Rightarrow \boxed{n=7}$

$\binom{9}{n} = \binom{9}{2n}$

شرط الحل

$$n\leq 4 \quad \begin{cases} n\leq 9 \\ 2n\leq 9 \end{cases}$$

إما $n = 2n$ وهذا يعني أنه $\boxed{n=0}$ (مقبول)

أو $n+2n = 9$

$3n = 9$

$\boxed{n=3}$ (مقبول)

السؤال الثامن:

الكلمة مؤلفة من 7 حروف

لكن حرف (u) تكرر 3 مرات

وبالتالي عدد الطرق $\frac{7!}{3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!}$

$= 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$

طريقة ثانية:

لدينا 7 خانات. نختار الحرف n بـ (7) طرق

نختار الحرف s بـ (6) طرق

نختار الحرف a بـ (5) طرق

نختار الحرف l بـ (4) طرق

يتبقى لدينا (3) خانات فارغة يجب ملؤها بالحرف u

ويتم ذلك بطريقة واحدة

وبالتالي عدد الكلمات: $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 1 = 840$

طريقة ثالثة لحل السؤال الثامن:

لدينا 7 خانات يراد ملؤها ب (3) أحرف (4)

ويتم ذلك ب $\binom{7}{3}$ طريقة

(لأنه ليس للترتيب أهمية)

يتبقى (4) خانات يراد ملؤها ب (4) أحرف مختلفة ، ويتم ذلك ب $P_4^4 = 4!$ طريقة

أي أن عدد الكلمات:

$$\binom{7}{3}\cdot 4! = \frac{7.6.5}{3!}4.3!$$

$$= 7.6.5.4 = 840$$

السؤال التاسع:

عدد أقطار مضلع محدب عدد رؤوسه (6):

$$\binom{6}{2} - 6 = \frac{6.5}{2!} - 6 = 9$$

السؤال العاشر:

بما أن أمثال x في منشور التابع هي $F'(0)$

أي بما أن $F'(0) = 56$

لكن:

$$F'(x) = 7a(1+ax)^6\cdot(1+bx)^8 + 8b(1+bx)^7\cdot(1+ax)^7$$

$$F'(0) = 7a + 8b$$

$$\Rightarrow 7a + 8b = 56$$

وبما أن a و b عددان طبيعيان فإن،

$$7a + 7b \leq \underbrace{7a + 8b} \leq 8a + 8b$$

$$7(a+b) \leq 56 \leq 8(a+b)$$

أي أن $7(a+b) \leq 56$

$$\boxed{a+b \leq 8} \longrightarrow (1)$$

$$56 \leq 8(a+b)$$

$$\boxed{7 \leq a+b} \longrightarrow (2)$$

نستنتج أن

$$7 \leq a+b \leq 8$$

وبما أن a و b طبيعيان فمجموعهما طبيعي

وبالتالي القيم الممكنة لـ $(a+b)$ هي 7 و 8

أي أن $(a+b) \in \{7, 8\}$

- انتهى الحل -

المدّة : ساعة و نصف	مذاكرة الاحتمالات الدرجة الكاملة : 300	الاسم :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: يمثّل الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج (X,Y) من المتحوّلات العشوائيّة . **المطلوب :**

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

1) أوجد $\mathbb{P}(X=0)$ و $\mathbb{P}(Y=1)$ و $\mathbb{P}(X=0,Y=1)$.

2) هل المتحوّلان العشوائيّان (X,Y) مستقلان احتماليّاً ؟

السؤال الثاني: في أحد الامتحانات المؤتمتة ، يتضمّن الاختبار ستون سؤالاً كلّ منها مزوّد بأربعة إجابات مقترحة ، منها واحدة صحيحة فقط . يقرّر أحد المتقدّمين الإجابة عشوائيّاً عن هذه الأسئلة .

ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يدل على عدد الإجابات الصحيحة التي يحققها الطالب ، احسب توقعه الرياضي و تباينه .

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: في أحد المجتمعات تظهر أعراض مرض كورونا على 70% من الأشخاص ، 20% منهم مسحاتهم إيجابيّة ، و 70% من المسحات المأخوذة من أشخاص لا تظهر عليهم أعراض المرض تكون نتيجتها سلبيّة ، نختار عشوائيّاً شخص من هذا المجتمع .

نتأمّل الحدثين : A : " الشخص المختار تظهر عليه الأعراض " ، B : " مسحة الشخص المختار إيجابيّة "

1) أعطِ تمثيلاً شجريّاً للتجربة . 2) احسب احتمال أن تكون مسحة الشخص المختار إيجابيّة .

3) إذا علمت أنّ الشخص المختار مسحته إيجابيّة ، فما احتمال أن تظهر عليه الأعراض ؟

التمرين الثاني: في تجربة رمي أهداف العدو بقذائف الدبابات ، نفترض أنّ احتمال أن تصيب القذيفة الهدف $\frac{5}{6}$ ، إلّا أنّ القذيفة لا تنفجر باحتمال 0.2 . نفترض أنّ الهدف يتم تدميره عندما تصيبه قذيفة واحدة على الأقل و تنفجر .

إذا تم إطلاق قذيفتين على هدف معيّن ، فما هو احتمال أن يُدمّر ؟

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

يخضع الطالب سعيد لعدّة اختبارات متتالية وفق ما يلي : احتمال نجاحه في الاختبار الأوّل يساوي احتمال رسوبه .

إذا نجح سعيد في اختبار ما ، يكون احتمال رسوبه في الاختبار التالي $\frac{2}{5}$ ، و إذا رسب في ذلك الاختبار ، يكون احتمال نجاحه في الاختبار التالي هو $\frac{3}{10}$ ، ليكن A_n حدث نجاح الطالب سعيد في الاختبار n ، و B_n حدث رسوب الطالب سعيد في الاختبار n .

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n\geq 1$: $p_n=\mathbb{P}(A_n)$ و $q_n=\mathbb{P}(B_n)$. **المطلوب :**

1) احسب p_2 . 2) عبّر عن p_{n+1} بدلالة p_n .

3) نعرّف المتتالية $u_n=p_n-\frac{3}{7}$ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ هندسيّة ، عيّن أساسها و حدّها الأوّل ، ثم اكتب u_n بدلالة n .

4) استنتج p_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة الاحتمالات 2022-1

أولاً: السؤال الأول:

① $P(X=0) = \frac{1}{20} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{10}$

$P(Y=1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$

$P(X=0, Y=1) = \frac{1}{8}$

② $P(X=0) \times P(Y=1) = \frac{3}{20} \neq \frac{1}{8}$

$P(X=0, Y=1) \neq P(X=0)\cdot P(Y=1)$

فالمتحولان العشوائيان (X,Y) غير مستقلين احتمالياً.

السؤال الثاني:

X متحول عشوائي ثنائي (تجربة برنولية)

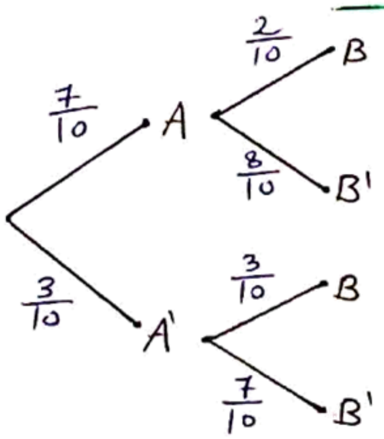
$n=60 \quad , \quad p=\frac{1}{4}$

التوقع الرياضي $E(X) = n.p = \frac{60}{4} = 15$

التباين $V(X) = n.p.q = 60\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{45}{4}$

ثانياً: التمرين الأول:

①



② $P(B) = P(B\cap A) + P(B \cap A')$

$= P(B|A)\cdot P(A) + P(B|A')\cdot P(A')$

$= \left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{23}{100}$

③ $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$

$= \frac{\left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)}{\frac{23}{100}} = \frac{14}{23}$

التمرين الثاني:

ليكن A_1 الحدث « تم تدمير الهدف بالقذيفة الأولى »

$P(A_1) = \frac{5}{6}\cdot\frac{8}{10} = \frac{2}{3}$

A_2 الحدث « تم تدمير الهدف بالقذيفة الثانية »

$P(A_2) = \frac{2}{3}$

احتمال تدمير الهدف هو احتمال تدميره بأحد القذيفتين على الأقل:

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)\cdot P(A_2)$

حيث $P(A_1)\cdot P(A_2) = P(A_1 \cap A_2)$

{ لأن الحدثين مستقلين احتمالياً }

$P(A_1 \cup A_2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$

$= \frac{4}{3} - \frac{4}{9} = \frac{12-4}{9} = \boxed{\frac{8}{9}}$

وهو احتمال تدمير الهدف.

طريقة ثانية

$P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1 \cup A_2)'$

$= 1 - P(A_1' \cap A_2')$

$= 1 - P(A_1')\cdot P(A_2')$

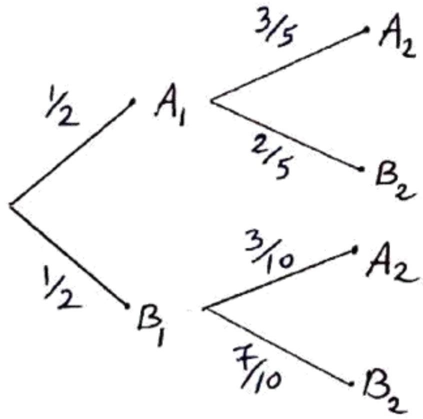
$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{8}{9}}$

حيث $(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2'$

(قانون ديمورغان)

الحل:

①

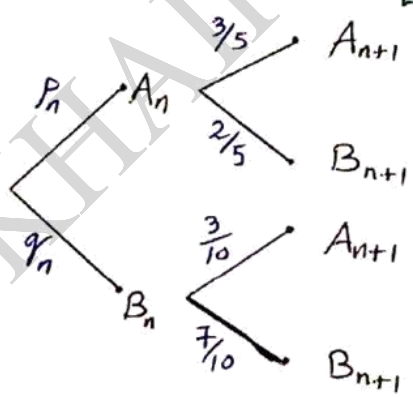


$$P_2 = P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap B_1)$$

$$= P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2 | B_1) \cdot P(B_1)$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{9}{20}}$$

②



$$P_{n+1} = \frac{3}{5} P_n + \frac{3}{10} q_n$$

$$= \frac{3}{5} P_n + \frac{3}{10}(1 - P_n)$$

$$= \frac{3}{5} P_n - \frac{3}{10} P_n + \frac{3}{10}$$

$$\boxed{P_{n+1} = \frac{3}{10} P_n + \frac{3}{10}}$$

③

$$u_n = P_n - \frac{3}{7}$$

$$u_{n+1} = P_{n+1} - \frac{3}{7}$$

$$= \frac{3}{10} P_n + \frac{3}{10} - \frac{3}{7}$$

$$= \frac{3}{10} P_n - \frac{9}{70}$$

$$= \frac{3}{10}\left(P_n - \frac{3}{7}\right) = \frac{3}{10} u_n$$

فالمتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ هندسية أساسها $q = \frac{3}{10}$

وحدها الأول:

$$u_1 = P_1 - \frac{3}{7}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$$

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

$$u_n = \frac{1}{14}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{14} \cdot \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n$$

$$\boxed{u_n = \frac{5}{21}\left(\frac{3}{10}\right)^n}$$

④

$$P_n = u_n + \frac{3}{7}$$

$$P_n = \frac{5}{21}\left(\frac{3}{10}\right)^n + \frac{3}{7}$$

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = \frac{5}{21}(0) + \frac{3}{7} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

لأن: $|q| < 1$

— انتهى الحل —

الرياضيات:	**اختبار الجزء الثاني** **الصفحة الأولى**	الاسم: المدة: ثلاث ساعات الدرجة: ستمئة

أولاً: أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ليكن X متحوّل عشوائي يمثّل عدد النجاحات في تجربة برنوليّة .
الجدول المجاور غير المكتمل هو القانون الاحتمالي لـ X .

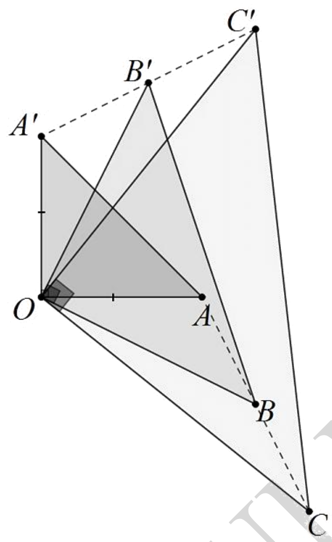
k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$					$\frac{1}{16}$

1) ما عدد الاختبارات في التجربة ؟
2) أكمل الجدول المجاور .
3) احسب $\mathbb{E}(X)$ ، $\mathbb{V}(X)$ ، $\sigma(X)$.

السؤال الثاني: اكتب بالشكل الجبري العدد العقدي $z=\left(\sin\frac{3\pi}{8}-i\cos\frac{3\pi}{8}\right)^{16}$.

السؤال الثالث: لتكن المجموعة $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. **المطلوب** :
1) ما عدد الأعداد المؤلّفة من ثلاث منازل التي يمكن تشكيلها من عناصر S ؟
2) ما عدد الأعداد الفرديّة المؤلّفة من ثلاث منازل و أصغر من 600 التي يمكن تشكيلها من عناصر S ؟

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)



التمرين الأول : في الشكل المجاور نتأمّل المثلّثات OAA' ، OBB' ، OCC' كل منها قائم في O و متساوي الساقين ، النقاط A ، B ، C تقع على استقامة واحدة و $AB=BC$.
باتّخاذ المعلم المتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$:
1) اكتب العدد العقدي a' بدلالة a ، و b' بدلالة b ، و c' بدلالة c .
2) أثبت أنّ $\frac{b-a}{b-c}=\frac{b'-a'}{b'-c'}$.
3) استنتج أنّ النقاط A' ، B' ، C' تقع على استقامة واحدة و أنّ $A'B'=B'C'$.
4) نفترض أنّ O مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,1)$ ، $(A',2)$ ، $(B,1)$ ، $(B',-2)$ احسب $\frac{a}{b}$.

التمرين الثاني: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $A(1,2,0)$ ، $B(1,1,-1)$ ، $C(3,2,-2)$ ، $D(3,1,6)$. **المطلوب** :
1) أثبت أنّ المثلّث ABC قائم و احسب مساحته .
2) اكتب معادلة المستوي ABC .
3) احسب حجم رباعي الوجوه $D\text{-}ABC$.

التمرين الثالث: في تجربة إلقاء حجري نرد متوازنين ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يدل على أصغر العددين الظاهرين . **المطلوب** :
1) اكتب مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي .
2) احسب توقّعه الرياضي $\mathbb{E}(X)$.
3) إذا علمت أنّ أصغر العددين الظاهرين هو (1) فما احتمال ظهور العدد (6) ؟

يتبع في الصفحة الثانية

الرياضيات:	اختبار الجزء الثاني الصفحة الثانية	الاسم: المدة: ثلاث ساعات الدرجة: ستمئة

ثالثاً: حل المسائل الثلاث الآتية : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

$A-$ نعتبر كثير الحدود $p(z)=z^3-z^2-(1+i)z-2+2i$

1) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد $w=8+6i$.

2) أثبت أنّ $p(i)=0$ ، ثم أوجد كثير حدود Q من الدرجة الثانية يحقّق $p(z)=(z-i)Q(z)$.

3) حل المعادلة $p(z)=0$.

$B-$ في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمّل النقاط A ، B ، C التي تمثّلها الأعداد العقديّة $z_A=2$ ، $z_B=i$ ، $z_C=-1-i$

1) احسب العدد $\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$ و استنتج طبيعة المثلّث ABC .

2) أوجد العدد العقدي z_D الممثّل للنقطة D التي تجعل الرباعي $ABCD$ مربعاً .

المسألة الثانية: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقطتين $A(1,-4,5)$ ، $B(2,-2,1)$ و المستويين :

$$P: 3x+2y+z=0 \quad , \quad Q: x-y-z=0$$

1) تيقّن من أنّ المستويين P و Q متعامدان .

2) اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d .

3) اكتب معادلة المستوي R الذي يمر من النقطة A و يعامد المستويين P و Q .

4) اكتب معادلة المستوي P' الذي يحوي d و يمر بالنقطة B .

5) اكتب معادلة الكرة S التي مركزها B و تمس المستوي Q .

المسألة الثالثة: في إحدى السنوات قُدّر عدد الطلاب الناجحين في السنة التحضيريّة للكلّيات الطبيّة بجامعة حلب 1000 طالب و طالبة .
تم فرز 40% منهم إلى كليّة الطب البشري ، و 30% منهم إلى كلّية طب الأسنان ، و 30% إلى كلّية الصيدلة .
نسبة الذكور في كليّة الطب البشري بعد الفرز 50% و في كلّية طب الأسنان 40% و في كلّية الصيدلة 30% .
اختيرَ عشوائيّاً طالب واحد من إجمالي الطلاب الـ 1000 . نتأمّل الأحداث :

A: " الفرز إلى كليّة الطب البشري " B: " الفرز إلى كليّة طب الأسنان " C: " الفرز إلى كليّة الصيدلة " D : " اختيار طالب (ذكر) "

1) أعطِ تمثيلاً شجريّاً للتجربة .

2) احسب احتمال أن يكون الطالب المختار ذكراً .

3) استنتج عدد الطالبات الإناث الناجحات في السنة التحضيريّة لذلك العام .

4) إذا علمت أنّ الطالب المختار ذكر ، فما احتمال أن يكون قد تم فرزه إلى كلّية الطب البشري ؟

– – – – – – – **انتهت الأسئلة** – – – – – – –

حل اختبار الجزء الثاني 2022-1

أولاً السؤال الأول:

1) عدد الاختبارات: $n=4$

2) $P(X=K)=\binom{n}{K}p^K q^{n-K}\ ;\ n=4$

$$P(X=4)=\binom{4}{4}p^4 q^0=p^4$$

$$\Rightarrow p^4=1/16 \Rightarrow \boxed{p=\tfrac{1}{2}}$$

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\left(\tfrac{1}{2}\right)^4=\tfrac{1}{16}$$

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\left(\tfrac{1}{2}\right)^3=\tfrac{4}{16}$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{6}{16}$$

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(\tfrac{1}{2}\right)^1=\tfrac{4}{16}$$

K	0	1	2	3	4
$P(X=K)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

3) $E(X)=np=4\cdot\frac{1}{2}=2$

$V(X)=npq=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1}=1$

السؤال الثاني:

$$Z=\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{3\pi}{8}\right)-i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{3\pi}{8}\right)\right)^{16}$$

$$=\left(\cos\tfrac{\pi}{8}-i\sin\tfrac{\pi}{8}\right)^{16}$$

$$=\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\tfrac{\pi}{8}\right)\right)^{16}$$

$$=\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)=1$$

السؤال الثالث:

1) $6\times6\times6=216$

2)

آحاد: 3 طرق
عشرات: 6 طرق
مئات: 5 طرق

وبالتالي حسب المبدأ الأساسي بالعد $5\times6\times3=90$ عدد.

التمرين الأول:

1) A' صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$a'-0=e^{i\frac{\pi}{2}}(a-0)\Rightarrow \boxed{a'=ia}$$

B' صورة B وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$b'-0=e^{i\frac{\pi}{2}}(b-0)\Rightarrow \boxed{b'=ib}$$

c' صورة c وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$c'-0=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-0)\Rightarrow \boxed{c'=ic}$$

2)
$$\frac{b'-a'}{b'-c'}=\frac{ib-ia}{ib-ic}=\frac{i(b-a)}{i(b-c)}=\frac{b-a}{b-c}$$

3)
$$\frac{b'-a'}{b'-c'}=\frac{b-a}{b-c}\Rightarrow\left|\frac{b'-a'}{b'-c'}\right|=\left|\frac{b-a}{b-c}\right|$$

$$\frac{A'B'}{C'B'}=\frac{AB}{CB}=1$$

$$\Rightarrow \boxed{A'B'=B'C'}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{b'-a'}{b'-c'}\right)=\arg\left(\frac{b-a}{b-c}\right)$$

وبما أنّ النقاط A، B، C تقع على استقامة واحدة
فالنقاط A'، B'، c' تقع على استقامة واحدة.

4)
$$z_0=\frac{\alpha a+\beta a'+\gamma b+\delta b'}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=0$$

$$\Rightarrow (1)a+(2)(ia)+(1)b+(-2)(ib)=0$$

$$a(1+2i)+b(1-2i)=0$$

$$a(1+2i)=-b(1-2i)$$

$$\frac{a}{b}=\frac{-(1-2i)}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{-(1-2i)^2}{1^2+2^2}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{-(1-4i-4)}{5}=\frac{3+4i}{5}=\boxed{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i}$$

التمرين الثاني:

1)
$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}$$
$$=\sqrt{4+0+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

$$AB=\sqrt{0+1+1}=\sqrt{2}$$

نلاحظ أنّ $AC^2=AB^2+BC^2$
فالمثلث ABC قائم وتره AC

$X=2$ هو حدث ظهور الرقم (2) مرتين

أو ظهوره مرة مع أحد الأرقام $\{3,4,5,6\}$

$$P(X=2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot 2=\frac{9}{36}$$

$X=3$ هو حدث ظهور الرقم (3) مرتين

أو ظهوره مرة مع احد الأرقام $\{4,5,6\}$

$$P(X=3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot 2=\frac{7}{36}$$

$$P(X=4)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot 2=\frac{5}{36}$$

$$P(X=5)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{3}{36}$$

$$P(X=6)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$^{11}/_{36}$	$^{9}/_{36}$	$^{7}/_{36}$	$^{5}/_{36}$	$^{3}/_{36}$	$^{1}/_{36}$

(2)
$$E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i\, P(X=x_i)$$

$$=(1)\frac{11}{36}+(2)\frac{9}{36}+(3)\frac{7}{36}+(4)\frac{5}{36}+(5)\frac{3}{36}+(6)\frac{1}{36}$$

$$E(X)=\frac{91}{36}$$

(3) ليكن A الحدث: >>أصغر العددين الظاهرين هو (1)<<

B الحدث: >> ظهور العدد (6) <<

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

حيث:
$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{2}{36}$$

$$P(A)=P(X=1)=\frac{11}{36}$$

$$\Rightarrow P(B|A)=\frac{^{2}/_{36}}{^{11}/_{36}}=\boxed{\frac{2}{11}}$$

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{3}$$

(2) ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي ABC:

$$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$0-b-c=0$$

$$\boxed{b=-c} \quad (1)$$

$$\vec{n}\cdot\vec{AC}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=0$$

$$2a+0-2c=0$$

$$\boxed{a=c} \quad (2)$$

بفرض $c=1$ نجد: $a=1$ و $b=-1$

$$\vec{n}(1,-1,1)$$

معادلة المستوي من الشكل: $ax+by+cz+d=0$

$$x-y+z+d=0$$

نعوض A: $1-2+0+d=0$

$$\Rightarrow d=1$$

$$\boxed{ABC:\ x-y+z+1=0}$$

(3)
$$V_{D-ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h$$

حيث:

$$h=dist_{(D,ABC)}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|3-1+6+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$$

$$V=\frac{1}{3}(\sqrt{3})(3\sqrt{3})=\boxed{3}$$

التمرين الثالث:

(1)
$$X(\Omega)=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$X=1$ هو حدث ظهور الرقم (1) مرتين

أو ظهوره مرة مع احد الأرقام $\{2,3,4,5,6\}$

$$P(X=1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 2=\frac{11}{36}$$

الحل: المسألة الأولى:

1-A) نفرض $z=x+iy$ حل المعادلة $z^2=w$

تكون:

$x^2-y^2=a=8$ —(1)

$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$ —(2)

$2xy=b=6$ —(3)

نجمع (1) و(2): $2x^2=18$

$x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

نعوض في (2): $9+y^2=10$

$\Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

من (3) نستنتج أنه إشارة x توافق إشارة y:

$z_1=3+i \quad , \quad z_2=-3-i$

2-A)

$P(i)=-i+1-(1+i)(i)-2+2i$

$=-i+1-i+1-2+2i=0$

$$\begin{array}{l|l} z-i & z^3-z^2-(1+i)z-2+2i \\ & \quad z^2+(-1+i)z-2-2i \end{array}$$

$-z^3+iz^2$

$(-1+i)z^2-(1+i)z-2+2i$

$-(-1+i)z^2-(1+i)z$

$(-2-2i)z-2+2i$

$-(-2-2i)z+2-2i$

$0 \quad 0$

وبالتالي $P(z)=(z-i)(z^2+(-1+i)z-2-2i)$

أي أنه $Q(z)=z^2+(-1+i)z-2-2i$

3-A)

$P(z)=0 \leftrightarrow (z-i)(z^2+(-1+i)z-2-2i)=0$

إما $\boxed{z_1=i}$

أو $z^2+(-1+i)z-2-2i=0$

$\Delta=b^2-4ac=-2i+8+8i=8+6i$

$\sqrt{\Delta}=3+i$

$z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-i+3+i}{2}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$

$z_3=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-i-3-i}{2}=\frac{-2-2i}{2}=\boxed{-1-i}$

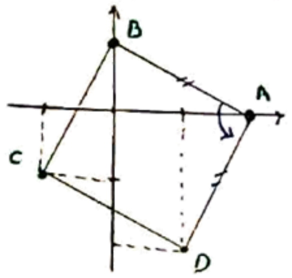
1-B)

$\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}=\frac{i-2}{1+2i}=\frac{i(\cancel{1+2i})}{\cancel{1+2i}}=i$

$\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}=i \to \left|\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right|=1 \Rightarrow \boxed{BA=BC}$

$\to \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{BA\perp BC}$

فالمثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين.



2-B) طريقة أولى:

الرباعي ABCD مربع

فهو متوازي أضلاع

$\vec{AB}=\vec{DC}$

$z_{\vec{AB}}=z_{\vec{DC}}$

$\Rightarrow z_B-z_A=z_C-z_D$

$\Rightarrow z_D=z_C+z_A-z_B$

$=-1-i+2-i=\boxed{1-2i}$

طريقة ثانية:

D صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$z_D-z_A=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_A)$

$z_D=i(i-2)+2=-1-2i+2$

$\boxed{z_D=1-2i}$

طريقة ثالثة:

$\vec{BD}=\vec{BA}+\vec{BC}$

$z_{\vec{BD}}=z_{\vec{BA}}+z_{\vec{BC}}$

المسألة الثانية:

1) $\vec{n_P}(3,2,1) \quad , \quad \vec{n_Q}(1,-1,-1)$

$\vec{n_P}\cdot\vec{n_Q}=(3)(1)+(2)(-1)+(1)(-1)=3-2-1=0$

فالمستويان P و Q متعامدان.

2) $3x+2y+z=0$ —(I)

$x-y-z=0$ —(II) +

$4x+y=0 \Rightarrow y=-4x$

نعوض في (I):

$3x-8x+z=0$

$z=5x$

بفرض: $x=t$

$d:\ x=t\ ,\ y=-4t\ ,\ z=5t\ ;\ t\in\mathbb{R}$

3 لأن المستوي R عمودي على كل من P و Q فهو عمودي على فصلهما المشترك d:

$$\vec{n}_R=\vec{v}_d(1,-4,5)$$

$$x-4y+5z+d=0$$

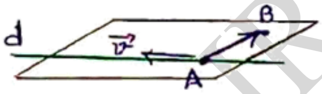
نعوض A:

$$1+16+25+d=0$$

$$d=-42$$

$$\boxed{R:\ x-4y+5z-42=0}$$

4 بتعويض $t=1$ في المعادلات الوسيطة نحصل على النقطة $A(1,-4,5)$



لأن المستوي P' موجه بالشعاعين $\vec{v}(1,-4,5)$ و $\vec{AB}(1,2,-4)$

لكن $\vec{n}'(\alpha,\beta,\gamma)$ ناظم للمستوي P':

$$\vec{n}'\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -4\\ 5\end{pmatrix}=0$$

$$\alpha-4\beta+5\gamma=0 \quad (*)$$

$$\vec{n}'\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -4\end{pmatrix}=0$$

$$\alpha+2\beta-4\gamma=0 \quad (**)$$

بفرض $\alpha=2$ نجد أن $\beta=3$ و $\gamma=2$

$$\vec{n}'(2,3,2)$$

$$2x+3y+2z+d=0$$

نعوض (B):

$$4-6+2+d=0$$

$$d=0$$

$$\boxed{P':\ 2x+3y+2z=0}$$

5 $S:\ (x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(z-z_B)^2=r^2$

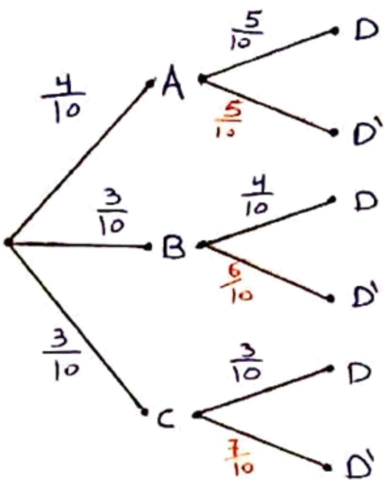
حيث:

$$r=dist_{(B,Q)}=\frac{|2+2-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\boxed{S:\ (x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3}$$

المسألة الثالثة:

1



2 $P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)$

$$=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{41}{100}$$

3 $P(D')=1-P(D)=1-\frac{41}{100}=\frac{59}{100}$

$$P(D')=\frac{n(D')}{n(\Omega)} \Rightarrow n(D')=P(D')\cdot n(\Omega)$$

$$=\frac{59}{100}\cdot 1000$$

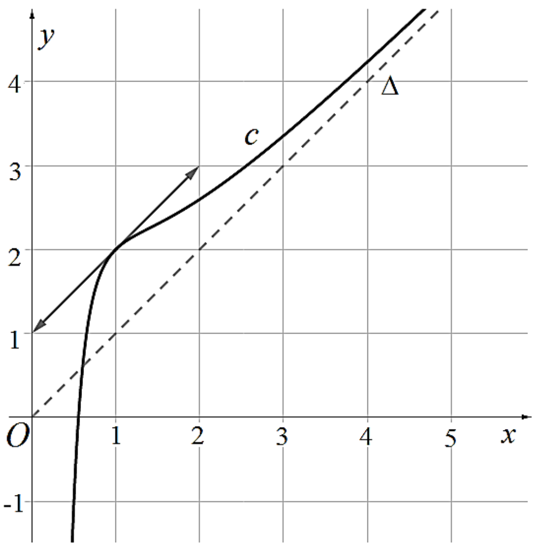
عدد الطالبات: $n(D')=590$

4 $P(A|D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{10}}{\frac{41}{100}}=\frac{20}{41}$

— انتهى الحل —

النموذج التدريبي الأول	امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2022	الاسم:
الرياضيات:	(الفرع العلمي – الدورة الأولى)	الرقم:
	الصفحة الأولى	المدة: ثلاث ساعات
		الدرجة: ستمئة

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: نتأمّل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرّف على المجال $I =]\,0,+\infty\,[$ المستقيم Δ مقارب مائل للخط C . **و المطلوب:**

1) أوجد $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) أوجد $f(1)$ و $f'(1)$.
3) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$.
4) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ ؟ (حيث $m\in\mathbb{R}$)

السؤال الثاني: احسب التكامل $\int_1^3 (|x-1|+|x-2|)dx$.

السؤال الثالث: عيّن أمثال x^3 في منشور $(x^2+\frac{1}{x})^6$ و الحد الثابت المستقل عن x .

السؤال الرابع: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,2,3)$ ، $B(3,2,1)$. **المطلوب :**

1) اكتب معادلة للكرة S التي قطرها AB .
2) تحقّق أنّ المستوي p الذي معادلته $p: x-y+2=0$ يمس الكرة S.

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(0) = m$ و $f(x) = x + \frac{e^x-1}{x}$ في حالة $x \neq 0$. **المطلوب :**

1) عيّن قيمة m التي تجعل التابع f مستمراً عند $x = 0$.
2) أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$ ، و ادرس وضعه النسبي .

السؤال السادس: ليكن العدد العقدي $w = \frac{-2}{1+\sqrt{3}i} e^{i\frac{\pi}{4}}$. **المطلوب :**

1) بيّن أنّ $|w| = 1$ ثم اكتب العدد w بالشكل الأسّي .
2) ليكن العدد $z = \frac{2iw+1}{w-2i}$ أثبت أنّ $|z| = 1$.

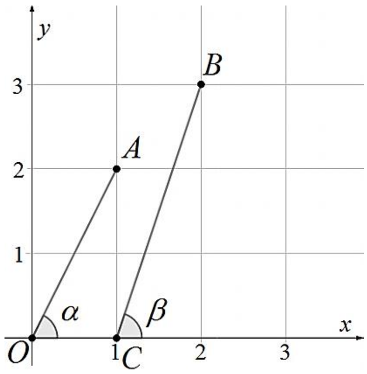
ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة لكل من التمرينين الأول و الثاني – 60 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وفق $u_1 = -1$ و $u_{n+1} = \frac{2n}{n+1}u_n$ عند كل $n \geq 1$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ $u_n < 0$ و ذلك أياً كانت $n \geq 1$.
2) ادرس اطّراد المتتالية u_n .
3) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وفق $v_n = n\,u_n$ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ هندسيّة ، و اكتب عبارة v_n بدلالة n .
4) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

يتبع في الصفحة الثانية

النموذج التدريبي الأول	امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2022	الاسم:
الرياضيات:	(الفرع العلمي – الدورة الأولى)	الرقم:
	الصفحة الثانية	المدة: ثلاث ساعات
		الدرجة: ستمئة



التمرين الثاني: في الشكل المجاور α هي القياس الأساسي للزاوية الموجّهة $(\vec{u},\overrightarrow{OA})$ و β هي القياس الأساسي للزاوية الموجّهة $(\vec{u},\overrightarrow{CB})$. **المطلوب** :

4) اكتب العددين العقديّين $z_{\overrightarrow{OA}}$ و $z_{\overrightarrow{CB}}$ بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسّي .

5) اكتب العدد العقدي $z_{\overrightarrow{OA}}\cdot z_{\overrightarrow{CB}}$ بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسّي .

6) استنتج قيمة المجموع $\alpha+\beta$.

التمرين الثالث: صندوق يحتوي 5 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 6 كرات حمراء . نسحب بشكل عشوائي كرة واحدة من الصندوق نسجل لونها ثم نعيدها بعد إضافة 10 كرات من اللون ذاته إلى الصندوق ثم نسحب كرة أخرى . **المطلوب** :

1) أعطِ تمثيلاً شجريّاً للتجربة .

2) احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في السحبة الثانية حمراء .

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نتأمّل المستقيمين المعرّفين وسيطيّاً وفق :

$$d:\begin{cases} x=1+u \\ y=1+2u \\ z=1+3u \end{cases} ;u\in\mathbb{R} \quad , \quad d':\begin{cases} x=1+v \\ y=-2-2v \\ z=1+v \end{cases} ;v\in\mathbb{R}$$

1) أثبت أنّ المستقيمين d و d' ليسا من نفس المستوي .

2) أثبت أنّ المستقيمين d و d' متعامدان .

3) اكتب معادلة المستوي p الذي يشمل d و يوازي d' .

4) احسب بعد المستقيم d' عن المستوي p .

5) تحقّق من أنّ النقطة $A(2,3,4)$ تنتمي إلى المستقيم d ، ثمّ أوجد A' المسقط القائم لـ A على المستقيم d' .

6) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم d' .

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}$. **المطلوب:**

1) احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه ، و اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي .

2) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها ، و دل على القيمة الحديّة .

3) في معلم متجانس ارسم C .

4) باستخدام التكامل بالتجزئة احسب مساحة السطح المحصور بين C و محور الفواصل و المستقيمين $x=1$ و $x=e$.

5) استنتج رسم الخط البياني C' للتابع g حيث $g(x)=\dfrac{\ln\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

– – – – – **انتهت الأسئلة** – – – – –

حل النموذج الشامل 2022-1

أولاً/ السؤال الأول

1) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2) $f(1) = 2$

نختار نقطتين من المماس $A(1,2)\ ,\ B(2,3)$

$$f'(1) = m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{2-1} = 1$$

3) المستقيم $\Delta : y = x$ مقارب مائل للخط c

في جوار $+\infty$ وعليه فإنّ: $\lim_{x\to +\infty}(f(x) - x) = 0$

4) للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد

السؤال الثاني:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & ; 2 \le x \le 3 \\ 2-x & ; 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$|x-1| = x-1 \quad \forall x \in [1,3]$$

$$I = \int_1^3 (x-1+|x-2|)\,dx$$

$$= \int_1^2 (x-1+(2-x))\,dx + \int_2^3 (x-1+(x-2))\,dx$$

$$= \int_1^2 dx + \int_2^3 (2x-3)\,dx$$

$$= [x]_1^2 + [x^2-3x]_2^3$$

$$= (2-1) + (0-(-2)) = 3$$

السؤال الثالث:

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r \quad ; \quad n=6\ ,\ a = x^2\ ,\ b = 1/x$$

$$T_r = \binom{6}{r}(x^2)^{6-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{6}{r} x^{12-2r} \cdot x^{-r}$$

$$T_r = \binom{6}{r} x^{12-3r}$$

$$x^{12-3r} = x^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 12 - 3r = 3$$

$$3r = 9$$

$$r = 3$$

$$T_3 = \binom{6}{3} x^3 = 20x^3$$

أي إن أمثال x^3 هي 20 .

أما لتعيين الحد الثابت:

$$x^{12-3r} = 1$$

$$12 - 3r = 0$$

$$12 = 3r \Rightarrow r = 4$$

$$T_4 = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \boxed{15}$$

السؤال الرابع:

1) طريقة أولى: بما أنّ مركز الكرة S هي النقطة I

منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$$I(2,2,2)$$

$$2r = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

$$2r = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$S : (x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2 = r^2$$

$$\boxed{S : (x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2 = 2}$$

طريقة ثانية: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الكرة:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \\ 3-z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3-x \\ 2-y \\ 1-z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-x)(3-x) + (2-y)^2 + (3-z)(1-z) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 + (y-2)^2 + z^2 - 4z + 3 = 0$$

$$(x^2-4x+4) - 1 + (y-2)^2 + (z^2-4z+4) - 1 = 0$$

$$S : (x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2 = 2$$

2) لنحسب بعد النقطة I عن المستوي P:

$$dist(I,P) = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2-2+2}{\sqrt{1+1+0}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

نلاحظ أنّ $dist(I,P) = r$

فالمستوي P يمس الكرة S .

السؤال الخامس:

1) يكون التابع مستمراً عند $x=0$ إذا تحقق الشرط

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

وعليه فإنّ:

$$m = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x + \frac{e^x-1}{x}\right) = 0+1 = \boxed{1}$$

حسب القاعدة $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

2) $$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_d) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0-0 = 0$$

فالمستقيم d الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط c في جوار $-\infty$.

$$f(x)-y_d = \frac{e^x-1}{x}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
$f(x)-y_d$		$+$	$\Vert$	$+$	

c فوق المقارب d دوماً.

السؤال السادس:

1) $$|w| = \left|\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = \left|\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right|\cdot\underbrace{\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right|}_{1}$$

$$= \frac{|-2|}{|1+\sqrt{3}i|} = \frac{2}{\sqrt{1+3}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow w = \frac{\cancel{2}e^{i\pi}}{\cancel{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\pi}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$= e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\boxed{w = e^{i\frac{11\pi}{12}}}$$

2) لإثبات أنّ $|z|=1$ يكفي إثبات أنّ

$$\overline{z} = \frac{1}{z}$$

$$\overline{z} = \overline{\left(\frac{2iw+1}{w-2i}\right)} = \frac{\overline{(2iw+1)}}{\overline{(w-2i)}} = \frac{-2i\overline{w}+1}{\overline{w}+2i}$$

لكن $|w|=1$ أي أنّ $\overline{w} = \frac{1}{w}$:

$$\overline{z} = \frac{\frac{-2i}{w}+1}{\frac{1}{w}+2i}\cdot\frac{w}{w} = \frac{-2i+w}{1+2iw} = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{|z|=1}$$

ثانياً: التمرين الأول:

1) $E(n):\ u_n < 0$

$E(1)$ محققة لأنّ $u_1 = -1 < 0$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$$u_n < 0 \qquad \left(\times\frac{2n}{n+1}\right)$$

$$\frac{2n}{n+1}\cdot u_n < 0$$

$$u_{n+1} < 0$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة $\forall n \geq 1$.

2) $$u_{n+1}-u_n = \frac{2n}{n+1}u_n - u_n$$

$$= u_n\left(\frac{2n}{n+1}-1\right) = u_n\cdot\frac{2n-n-1}{n+1}$$

$$= \underbrace{u_n}_{-}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n+1}}_{+} \leq 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

3) $$v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} = \cancel{(n+1)}\cdot\frac{2n}{\cancel{n+1}}\cdot u_n = 2n u_n$$

$$v_{n+1} = 2v_n$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ هندسية أساسها $q=2$

حدها الأول: $v_1 = (1).u_1 = -1$

$$v_n = v_1\cdot q^{n-1}$$

$$v_n = -2^{n-1} = \frac{-1}{2}\cdot 2^n$$

(4-

$v_n = n\cdot u_n \Rightarrow u_n = \frac{v_n}{n}$

$\boxed{u_n = \frac{-1}{2}\cdot\frac{2^n}{n}}$

$u_n = \frac{-1}{2}\cdot\frac{e^{n\ln 2}}{n\cdot\ln 2}\cdot\ln 2$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \left(\frac{-1}{2}\right)(+\infty)(\ln 2) = -\infty$

حسب القاعدة $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

التمرين الثاني:

(1- $z_O=0$, $z_A=1+2i$, $z_B=2+3i$, $z_C=1$

$z_{\vec{OA}} = z_A - z_O = 1+2i$, $z_{\vec{OA}} = |z_{\vec{OA}}|e^{i\alpha}$

$z_{\vec{CB}} = z_B - z_C = 1+3i$, $z_{\vec{CB}}=|z_{\vec{CB}}|e^{i\beta}$

$|z_{\vec{OA}}| = \sqrt{1^2+2^2}=\sqrt5$

$\Rightarrow z_{\vec{OA}} = \sqrt5\, e^{i\alpha}$

$|z_{\vec{CB}}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\Rightarrow z_{\vec{CB}}=\sqrt{10}\, e^{i\beta}$

(2-

$z_{\vec{OA}}\cdot z_{\vec{CB}} = (1+2i)(1+3i)$

$= 1+3i+2i-6 = -5+5i$

$z_{\vec{OA}}\cdot z_{\vec{CB}} = \sqrt5\, e^{i\alpha}\cdot\sqrt{10}\, e^{i\beta} = 5\sqrt2\, e^{i(\alpha+\beta)}$

(3-

$5\sqrt2\, e^{i(\alpha+\beta)} = -5+5i$

لنكتب العدد $-5+5i$ بالشكل الأسي:

$-5+5i = 5\sqrt2\left(\frac{-1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}i\right)$

$= 5\sqrt2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 5\sqrt2\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$\Rightarrow 5\sqrt2\, e^{i(\alpha+\beta)} = 5\sqrt2\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$\boxed{\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}}$

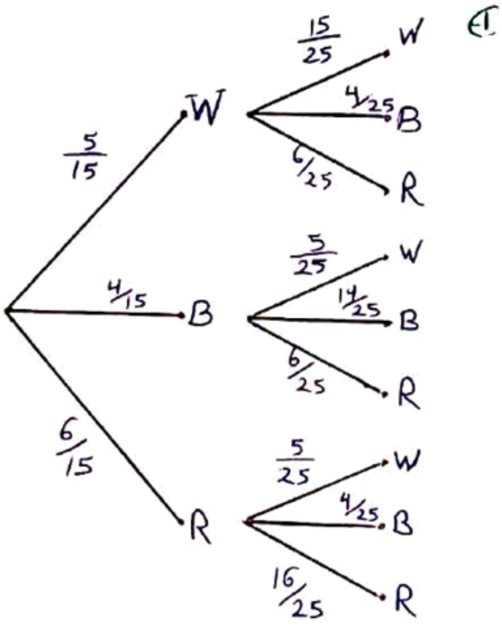
ملاحظة: يمكن القول مباشرة أن

$\alpha+\beta = \arg(-5+5i) = \frac{3\pi}{4}$

وذلك في الطلب الثالث

التمرين الثالث:

(1-



(2-

$P(R_2) = P(R_2\cap R_1) + P(R_2\cap B_1) + P(R_2\cap W_1)$

$= \frac{16}{25}\cdot\frac{6}{15} + \frac{6}{25}\cdot\frac{4}{15} + \frac{6}{25}\cdot\frac{5}{15} = \frac{2}{5}$

(3- طلب إضافي: إذا علمت أن الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء، فما احتمال أن تكون الأولى حمراء؟

$P(R_1|R_2) = \frac{P(R_1\cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{6}{15}\cdot\frac{16}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{16}{25}$

ثانياً: المسألة الأولى:

(1- $\vec u(1,2,3)$ شعاع توجيه d

$\vec v(1,-2,1)$ شعاع توجيه d'

$\frac{1}{1}\neq\frac{2}{-2}\neq\frac{3}{1}$

المركبات غير متناسبة فالشعاعان $\vec u$ و $\vec v$ غير مرتبطين خطياً. فالمستقيمان d و d' غير متوازيين.

الحل المشترك:

$1+u = 1+v$ ——— (1)

$1+2u = -2-2v$ ——— (2)

$1+3u = 1+v$ ——— (3)

من (1): $u=v$

من (3): $3u=v$

أي أن $u=3u$

$\Rightarrow u=0 \Rightarrow v=0$

نعوض في (2):

$$8x+2y-4z-6=0$$

$$\boxed{4x+y-2z-3=0}$$

4) نختار نقطة كيفية من d' ونحسب بعدها عن P

$$K(1+v,-2-2v,1+v)$$

$$dist_{(K,P)}=\frac{|4+4v-2-2v-2-2v-3|}{\sqrt{16+1+4}}=\frac{3}{\sqrt{21}}$$

وهو ذاته بعد المستقيم d' عن المستوي P.

5) النقطة A تقع على المستقيم d

$$\left.\begin{array}{l}1+u=2 \to u=1\\ 1+2u=3 \to u=1\\ 1+3u=4 \to u=1\end{array}\right\}$$

لتكن A' نقطة من المستقيم d' فهي تحقق معادلاته

$$A'(1+v,-2-2v,1+v)$$

$$\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}v-1\\-5-2v\\v-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0$$

$$v-1+10+4v+v-3=0$$

$$6v+6=0 \Rightarrow \boxed{v=-1}$$

نعوض في المعادلات الوسيطة للمستقيم d':

$$x=1+(-1)=0 \quad y=-2+2=0 \quad z=1-1=0$$

$$A'(0,0,0)=O$$

6) إن بعد النقطة A عن المستقيم d' هي ذاتها المسافة AA' أي:

$$dist_{(A,P')}=AA'=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$$

طلب إضافي: أوجد إحداثيات النقطة A'' المسقط القائم لـ A' على المستوي P.

نكتب المعادلات الوسيطة للمستقيم d'' المار من A' ويعامد المستوي P:

$$d'': x=4t \ , y=t \ , z=-2t \quad ; t\in\mathbb{R}$$

نعوض في معادلة المستوي P:

$$16t+t+4t-3=0$$

$$21t=3 \Rightarrow t=\frac{1}{7}$$

$$x=\frac{4}{7} \ , \ y=\frac{1}{7} \ , \ z=\frac{-2}{7}$$

$$A''\left(\frac{4}{7},\frac{1}{7},\frac{-2}{7}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}l_1=1+2u=1+2(0)=1\\ l_2=-2-2v=-2-2(0)=-2\end{array}\right\} l_1\neq l_2$$

المساواة غير محققة. والمستقيمان غير متقاطعين فهما متخالفان أي أنهما ليسا من نفس المستوي.

2) $$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=1-4+3=0$$

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Rightarrow \boxed{d\perp d'}$$

3) طريقة أولى: إن المستوي P موجه بالشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ويمر من النقطة $d\ni A(1,1,1)$

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي P

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow a+2b+3c=0 \quad (1)$$

$$\vec{n}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow a-2b+c=0 \quad (2)$$

$$2a+4c=0 \quad (1)+(2)$$

$$\boxed{a=-2c}$$

بفرض $a=4$ نجد أن: $c=-2, b=1$

$$\vec{n}(4,1,-2)$$

$$P: \ ax+by+cz+d=0$$

$$P: \ 4x+y-2z+d=0$$

نعوض $A(1,1,1)$:

$$4(1)+(1)-2(1)+d=0$$

$$d=-3$$

$$P: \ 4x+y-2z=3$$

طريقة ثانية:

$$\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

$$\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\2\alpha-2\beta\\3\alpha+\beta\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll}x-1=\alpha+\beta & (1)\\ y-1=2\alpha-2\beta & (2)\\ z-1=3\alpha+\beta & (3)\end{array}$$

نحل (1) و (2) حلاً مشتركاً بالنسبة لـ α و β ثم نعوض في (3):

$$\begin{array}{ll}2x-2=2\alpha+2\beta & \\ y-1=2\alpha-2\beta & +\\ \hline 4\alpha=2x+y-3 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll}2x-2=2\alpha+2\beta & \\ y-1=2\alpha-2\beta & -\\ \hline 4\beta=2x-y-1 & \end{array}$$

نعوض في (3):

$$z-1=\frac{3}{4}(2x+y-3)+\frac{1}{4}(2x-y-1) \quad (\times 4)$$

$$4z-4=6x+3y-9+2x-y-1$$

المسألة الثانية :

1) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{2}\ln x}{\sqrt{x}}\right)$

$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = 0+0=0$

حسب القاعدة $\lim_{t\to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

حيث $t=\sqrt{x}$

$x=0$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$.

$y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$.

2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $I =]0,+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(2+\ln x)}{2x} \cdot \dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{2-(2+\ln x)}{4x\sqrt{x}} = \dfrac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$

$f'(x)=0 \leftrightarrow -\ln x = 0$

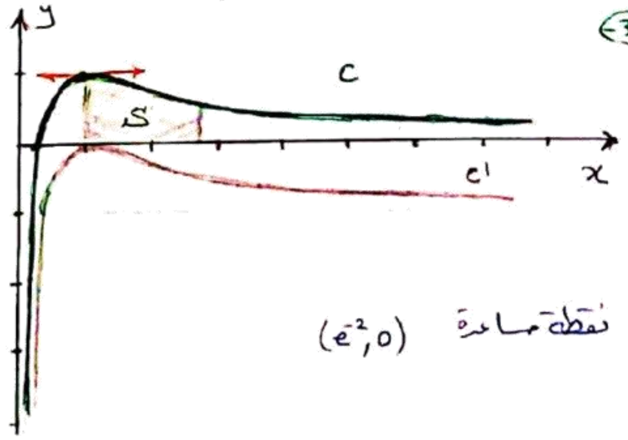
$\boxed{x=1}$

$f(1) = \frac{2+0}{2} = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(1)=1$ قيمة حدية كبرى .

3)



نقطة مساعدة $(e^{-2},0)$

4) $S = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)\,dx$

$u = 2+\ln x$	$u' = \frac{1}{x}$
$v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$v = \sqrt{x}$

$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b vu'$

$S = \left[\sqrt{x}(2+\ln x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$= \left[\sqrt{x}(2+\ln x) - 2\sqrt{x}\right]_1^e = \left[\sqrt{x}\ln x\right]_1^e$

$= \sqrt{e}\ln e - \sqrt{1}\ln(1)$

$\boxed{S = \sqrt{e}}$

5) $g(x) = \dfrac{1+\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{1+\frac{1}{2}\ln x}{\sqrt{x}} - 1$

$= \dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}} - 1 = f(x) - 1$

C' ينتج عن C بالتحويل $(x,y) \to (x,y-1)$

6) طلب إضافي: احسب حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة S دورة كاملة حول محور الفواصل .

$V = \pi\int_1^e (f(x))^2\,dx = \pi\int_1^e \frac{1}{4x}(2+\ln x)^2\,dx$

$= \frac{\pi}{4}\int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\,(\underbrace{2+\ln x}_{u})^2\,dx$

$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{3}(2+\ln x)^3\right]_1^e = \frac{\pi}{12}(27-8)$

$\boxed{V = \frac{19\pi}{12}}$

— انتهى الحل —

النموذج التدريبي الثاني **الرياضيات:**	**امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2022** (الفرع العلمي – الدورة الأولى) **الصفحة الأولى**	الاسم: الرقم: المدة: ثلاث ساعات الدرجة: ستمئة

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمّل جانباً جدول تغيّرات التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$. **المطلوب :**

x	$-\infty$ 0 $\ln 2$ $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 − ‖ +
$f(x)$	0 ↗ 1 ↘ −1 ‖ ↗ 2

1) أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و اكتب معادلة كل مقارب أفقي .

2) دل على القيم الحديّة للتابع مبيّناً نوعها .

3) أوجد $f([0,\ln 2])$.

4) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

السؤال الثاني: احسب التكامل $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$.

السؤال الثالث: عيّن قيمة n التي تحقّق المساواة $\binom{7}{n}=\binom{7}{n+1}$.

السؤال الرابع: ليكن كثير الحدود $p(z)=z^2-\sqrt{3}z+1$. **المطلوب :**

1) حل المعادلة $p(z)=0$.

2) لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين العقديّين z_A و z_B حلَّي المعادلة $p(z)=0$ ، أثبت أنّ المثلّث OAB متساوي الأضلاع .

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\dfrac{ax+b}{1+(\ln x)^2}$. **المطلوب :**

1) عيّن العددين الحقيقيّين a و b إذا علمت أنّ المستقيم T الذي معادلته $y=x$ يمس الخط C في النقطة التي فاصلتها $x=1$.

2) ادرس الوضع النسبي للمماس T بالنسبة لـ C .

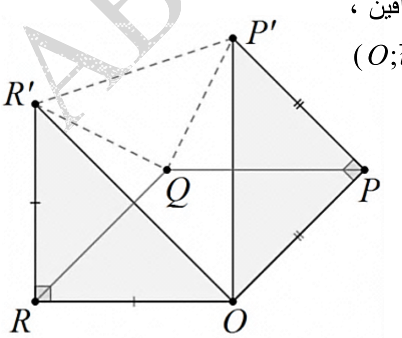
السؤال السادس: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $A(3,2,1)\ ,\ B(0,2,7)\ ,\ C(1,2,1)$ و **المطلوب :**

1) أوجد إحداثيّات النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)\ ,\ (B,2)\ ,\ (C,3)$.

2) صف Γ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تحقّق $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\|$.

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة لكل من التمرينين الأول و الثاني – 60 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأوّل: $OPQR$ متوازي أضلاع . ننشئ على الضلع OP المثلث OPP' القائم في P و متساوي الساقين ، و ننشئ على الضلع OR المثلث ORR' القائم في R و متساوي الساقين . نتخذ المعلم المتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ ولتكن الأعداد $p\ ,\ q\ ,\ r\ ,\ p'\ ,\ r'$ الممثّلة للنقاط $P\ ,\ Q\ ,\ R\ ,\ P'\ ,\ R'$ بالترتيب . **المطلوب :**



1) أثبت أنّ $p'=(1+i)p$ و $r'=(1-i)r$.

2) اكتب العدد العقدي q بدلالة p و r .

3) احسب العدد $\dfrac{q-r'}{q-p'}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $QP'R'$.

يتبع في الصفحة الثانية

النموذج التدريبي الثاني	امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2022	الاسم:
الرياضيات:	(الفرع العلمي – الدورة الأولى)	الرقم:
	الصفحة الثانية	المدة: ثلاث ساعات
		الدرجة: ستمئة

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجيّاً وفق $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1$ عند كل $n \geq 0$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ التابع $f(x) = x + \frac{1}{x} - 1$ متزايد تماماً على المجال $[1,+\infty[$.
2) أثبت بالتدريج أنّ $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ و ذلك أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$.
3) استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة ، و احسب نهايتها .

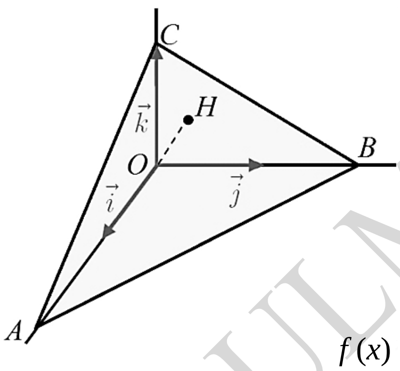
التمرين الثالث: يحتوي صندوق على خمس كرات ، منها ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 2 ، 1 ، 2 و كرتان بيضاوان تحملان الرقمين 1 ، 2 .
نسحب من الصندوق كرتين معاً ، و نتأمل الحدثين :

A : " سحب كرتين من لونين مختلفين " B : " سحب كرتين تحملان نفس الرقم "

1) احسب $\mathbb{P}(A)$ و $\mathbb{P}(B)$.
2) إذا علمت أنّ الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين ، ما احتمال أن تحملا نفس الرقم ؟
3) ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع رقمَي الكرتين المسحوبتين . اكتب جدول القانون الاحتمالي لـ X و احسب توقعه الرياضي .

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(2,0,0)$ ، $B(0,2,0)$ ، $C(0,0,1)$. **المطلوب:**



1) أثبت أنّ $x + y + 2z = 2$ معادلة للمستوي ABC .
2) استنتج تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم Δ المار بالنقطة O عمودياً على المستوي (ABC) .
3) أوجد إحداثيّات النقطة H نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (ABC) .
4) تحقّق من أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC .
5) احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$ ثم استنتج مساحة المثلث ABC .

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $I =]0,2[\cup]2,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{3\ln x}{4-x^2}$
و ليكن g التابع المعرّف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق $g(x) = \frac{4}{x^2} - 1 + 2\ln x$. **المطلوب :**

1) ادرس تغيّرات التابع g و نظّم جدولاً بها .
2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$.
3) احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه ، و اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي .
4) أثبت من أجل كل x من I أنّ $f'(x) = \frac{3xg(x)}{(4-x^2)^2}$ ، ثم نظّم جدولاً بتغيّرات التابع f .
5) اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 1$.
6) في معلم متجانس ارسم T ثم ارسم C .

– – – – – **انتهت الأسئلة** – – – – –

حل النموذج الشامل 2022-2

أولاً السؤال الأول:

① $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

$y=0$ مقارب أفقي للخط ج في جوار $-\infty$

$y=2$ مقارب أفقي للخط ج في جوار $+\infty$.

② $f(0)=1$ قيمة حدية كبرى

$f(\ln 2)=-1$ قيمة حدية صغرى.

③ $f([0,\ln 2])=[-1,1]$

④ حلان.

السؤال الثاني:

$$\int_0^1 x e^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int_0^1 -2x e^{-x^2}dx$$

$$= \frac{-1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{-1}{2}\left(e^{-1}-e^{0}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

السؤال الثالث: لنوجد شرط الحل

$$\left.\begin{array}{l} n+1 \leq 7 \\ n \leq 7 \end{array}\right\} \quad n \leq 6$$

إما $n = n+1$

مرفوض $0=1$

أو $n+(n+1) = 7$

$2n+1 = 7$

$2n = 6 \Rightarrow \boxed{n=3}$ مقبول

السؤال الرابع:

$a=1 \quad b=-\sqrt{3} \quad c=1$

① $\Delta = b^2-4ac = 3-4=-1 < 0$

للمعادلة حلين عقديين مترافقين

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

② $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \quad , \quad z_B = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$$\frac{z_A-z_0}{z_B-z_0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}\cdot\frac{2}{2} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{3+1}$$

$$= \frac{3+2i\sqrt{3}-1}{4} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{z_A-z_0}{z_B-z_0} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

أي إنَّ:

$$\left|\frac{z_A-z_0}{z_B-z_0}\right| = 1 \Rightarrow OA = OB$$

$$\arg\left(\frac{z_A-z_0}{z_B-z_0}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3}$$

المثلث OAB متساوي الساقين فيه الزاوية $A\hat{O}B=60°$

فهو متساوي الأضلاع.

السؤال الخامس:

① المستقيم T يمس الخط C في النقطة $(1,1)$

أي إنَّ $f(1)=1$

ومنه: $a+b=1 \longrightarrow (1)$

كما أنَّ $f'(1)=m_T=1$

$$f'(x) = \frac{a(1+(\ln x)^2) - 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x\,(ax+b)}{(1+(\ln x)^2)^2}$$

$f'(1)=a \Rightarrow \boxed{a=1}$

نعوّض في (1) فنجد $\boxed{b=0}$

أي إنَّ $f(x) = \frac{x}{1+(\ln x)^2}$

② $f(x)-y_T = \frac{x}{1+(\ln x)^2} - x$

$$= x\left(\frac{1}{1+(\ln x)^2}-1\right) = x\cdot\frac{-(\ln x)^2}{1+(\ln x)^2} \leq 0$$

C تحت المماس T.

السؤال السادس:

1) $x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{(1)(3)+(2)(0)+(3)(1)}{6}$

$x_G = \frac{6}{6} = 1$

$y_G = \frac{(1)(2)+(2)(2)+(3)(2)}{6} = \frac{12}{6} = 2$

$z_G = \frac{(1)(1)+(2)(7)+(3)(1)}{6} = \frac{18}{6} = 3$

$\boxed{G(1,2,3)}$

2) $\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}$

$\vec{MA}+2\vec{MB}+3\vec{MC} = 6\vec{MG}$

$\vec{MA}+2\vec{MB}-3\vec{MC} = \underbrace{\vec{MA}+2\vec{MB}+3\vec{MC}} - 6\vec{MC}$

$= 6\vec{MG} - 6\vec{MC}$

$= 6(\vec{MG}+\vec{CM}) = 6\vec{CG}$

تصبح العلاقة،

$6MG = 6CG$

$MG = CG$

إذن Γ هي كرة مركزها G وتمر من النقطة C

(أي: مركزها G نصف قطرها $r=CG$)

ثانياً التمرين الأول:

1) P' صورة O وفق دوران مركزه P زاويته $-\frac{\pi}{2}$

$p'-p = e^{-i\frac{\pi}{2}}(0-p)$

$p'-p = -i(-p)$

$p' = p+ip = (1+i)p$

R' صورة O وفق دوران مركزه R زاويته $\frac{\pi}{2}$

$r'-r = e^{i\frac{\pi}{2}}(0-r)$

$r'-r = -ir$

$\Rightarrow r' = r-ir = (1-i)r$

2) نعلم أنّ $\vec{OQ} = \vec{OP}+\vec{OR}$

$(q-0) = (p-0)+(r-0)$

$\Rightarrow \boxed{q = p+r}$

3) $\frac{q-r'}{q-p'} = \frac{p+r-(1-i)r}{p+r-(1+i)p} = \frac{p+\cancel{r}-\cancel{r}+ir}{\cancel{p}+r-\cancel{p}-ip}$

$= \frac{p+ir}{r-ip} = \frac{i\cancel{(r-ip)}}{\cancel{(r-ip)}} = i$

$\left|\frac{q-r'}{q-p'}\right| = |i| = 1 \Rightarrow \boxed{QR' = QP'}$ —(I)

$\arg\left(\frac{q-r'}{q-p'}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{QR' \perp QP'}$ —(II)

من (I) و (II) نستنتج أنّ المثلث $QP'R'$ قائم و متساوي الساقين.

التمرين الثاني:

1) $f'(x) = 1-\frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \geq 0$

$f'(x)$ لا ينعدم على أي مجال جزئي من $[1,+\infty[$

فالتابع f متزايد تماماً على المجال $[1,+\infty[$.

2) $E(n):\quad 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

$E(0)$ محققة لأنه:

$1 \leq u_1 \leq u_0$

$1 \leq \frac{3}{2} \leq 2$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n \geq 0$

3) بما أنّ $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

فالمتتالية u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد (1) فهي متقاربة.

ونهايتها ℓ هي حل المعادلة $f(x)=x$

$f(x)=x \leftrightarrow \cancel{x}+\frac{1}{x}-1 = \cancel{x}$

$\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$

التمرين الثالث:

1)

$$P(A)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$P(B)=\frac{\binom{3}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3+1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

2)

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

حيث

$$P(B\cap A)=\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}+\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$$

$$P(B|A)=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

3)

$$X(\Omega)=\{2,3,4\}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$$

$$P(X=4)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$$

x_i	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\,P(X=x_i)$$

$$=(2)\left(\frac{1}{10}\right)+(3)\left(\frac{6}{10}\right)+(4)\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{32}{10}=3.2$$

ثانياً: المسألة الأولى:

1) $\vec{AB}(-2,2,0)$, $\vec{AC}(-2,0,1)$

يكن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي ABC

$$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow -2a+2b=0$$

$$a=b \text{ ---- } *$$

$$\vec{n}\cdot\vec{AC}=0 \Rightarrow -2a+c=0$$

$$c=2a \text{ ---- } **$$

نعوض $a=1$ فنجد $b=1$ و $c=2$

$$\vec{n}(1,1,2)$$

معادلة المستوي من الشكل

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$x-2+y+2z=0$$

$$\boxed{ABC:\ x+y+2z=2}$$

2) المستقيم Δ يقبل ناظم المستوي ABC كشعاع موجه له

$$\vec{v}(1,1,2)$$

$$\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}\rightarrow \Delta:\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=2t\end{cases};\ t\in\mathbb{R}$$

3) نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي:

$$t+t+4t=2$$

$$6t=2 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$$

$$x_H=\frac{1}{3}\qquad y_H=\frac{1}{3}\qquad z_H=\frac{2}{3}$$

$$H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

4) $\vec{HA}\left(\frac{5}{3},\frac{-1}{3},\frac{-2}{3}\right)$, $\vec{HB}\left(\frac{-1}{3},\frac{5}{3},\frac{-2}{3}\right)$

$$\vec{HA}\cdot\vec{BC}=\left(\frac{5}{3},\frac{-1}{3},\frac{-2}{3}\right)\cdot(0,-2,1)$$

$$=0+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$$

إذاً (HA) ارتفاع في المثلث ABC ....(1)

$$\vec{HB}\cdot\vec{AC}=\left(\frac{-1}{3},\frac{5}{3},\frac{-2}{3}\right)\cdot(-2,0,1)$$

$$=\frac{2}{3}+0-\frac{2}{3}=0$$

إذاً (HB) ارتفاع في المثلث ABC ....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن النقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

5)

$$V=\frac{1}{3}S'_{OAB}\cdot h$$

$$S'_{OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2\ ,\ h=OC=1$$

$$\boxed{V=\frac{2}{3}}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$$

حيث h في هذه الحالة هي بعد النقطة O عن المستوي ABC أي بأن $h = OH$

④ $h = OH = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

$$\frac{2}{\cancel{3}} = \frac{1}{\cancel{3}} S_{ABC} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot S_{ABC} = 2$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \boxed{\sqrt{6}}$$

المسألة الثانية:

① g معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{4}{x} - x + 2x\ln x\right)$$

$$= (+\infty)(+\infty - 0 + 0) = +\infty$$

(حيث $\lim_{x \to 0^+} x\ln x = 0^-$)

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 - 1 + \infty = +\infty$$

$$g'(x) = \frac{0 - 8x}{x^4} + \frac{2}{x} = \frac{-8}{x^3} + \underset{(x^2)}{\frac{2}{x}} = \frac{-8 + 2x^2}{x^3}$$

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow -8 + 2x^2 = 0$$

$$x^2 = 4$$

مرفوض $x_1 = -2$ مقبول $x_2 = 2$

$$g(2) = 2\ln 2$$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$2\ln 2$	↗	$+\infty$

② نلاحظ أن $g(x) \geq 2\ln 2$ أياً كانت x من $\mathbb{R}_+^*$ أي بأن $g(x) > 0$.

③ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 \cdot \frac{\ln x}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \frac{3 \cdot (0)}{0 - 1} = 0$$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C

$x = 2$ مقارب شاقولي للخط C

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$.

④ $f'(x) = 3 \cdot \dfrac{\frac{1}{x}(4 - x^2) - (-2x)(\ln x)}{(4 - x^2)^2}$

$$= 3 \cdot \frac{\frac{4}{x} - x + 2x\ln x}{(4 - x^2)^2} = \frac{3x\left(\frac{4}{x^2} - 1 + 2\ln x\right)}{(4 - x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x\, g(x)}{(4 - x^2)^2} > 0$$

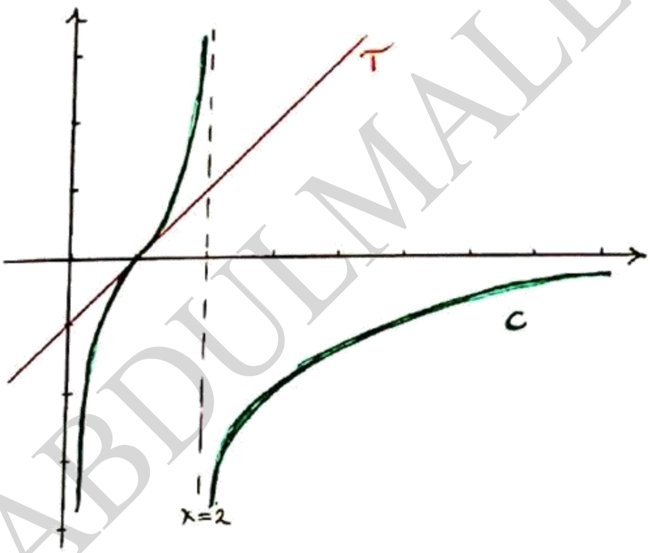
x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

⑤ $T: \quad y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

حيث $f(1) = 0$

$$f'(1) = \frac{3\, g(1)}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

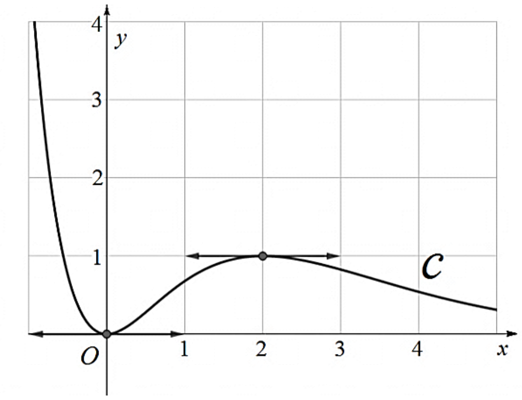
$$\boxed{T: \ y = x - 1}$$



— انتهى الحل —

النموذج التدريبي الثالث	**امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2022**	الاسم:
الرياضيات:	(الفرع العلمي – الدورة الأولى)	الرقم:
		المدة: ثلاث ساعات
	الصفحة الأولى	**الدرجة: ستمئة**

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: نتأمّل جانباً الخط البياني لتابع f معرّف على $\mathbb{R}$. **المطلوب :**

1) أوجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$.

2) دل على القيم الحدّية للتابع مبيّناً نوعها .

3) أوجد $f([0,2])$.

4) حل المتراجحة $f'(x) > 0$.

السؤال الثاني: ليكن التابع f المعرّف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x) = (x-1)\sqrt{x(1-x)}$. ادرس قابليّة اشتقاق f عند $x = 1$.

السؤال الثالث: لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$. **المطلوب :**

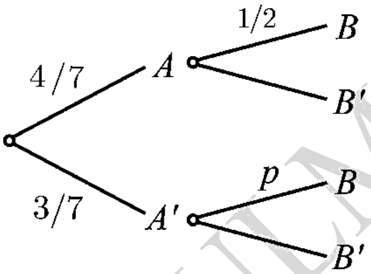
1) ما عدد الأعداد المكوّنة من منزلتين يمكن تشكيلها من عناصر S ؟

2) ما عدد الأعداد المكوّنة من منزلتين مجموع رقميهما عدد زوجي يمكن تشكيلها من عناصر S ؟

السؤال الرابع: نتأمّل المستويين $P : x + y + z = 0$ ، $Q : 2x - y - z = 0$. **المطلوب :**

1) تيقّن من أنّ المستويين P و Q متعامدان .

2) اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك Δ .



السؤال الخامس: A و B حدثان مرتبطان بتجربة عشوائيّة معروضة بالمخطط الشجري المجاور .

1) احسب $\mathbb{P}(A)$ و $\mathbb{P}(A\cap B)$ ، و احسب $\mathbb{P}(B)$ بدلالة p .

2) عيّن قيمة p إذا علمت أنّ الحدثين A و B مستقلان احتمالياً .

السؤال السادس: ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^x \sin x$. **المطلوب :**

1) احسب $f'(x)$.

2) استنتج أنّ التابع $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضليّة $y' - y = e^x \cos x$.

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة لكل من التمرينين الأول و الثاني – 60 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجيّاً وفق $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - 1$ عند كل $n \geq 0$. **المطلوب :**

1) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ أثبت أنّ المتتالية v_n هندسيّة ، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n .

2) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم ادرس اطّراد $(u_n)_{n\geq 0}$.

3) اكتب بدلالة n المجموع $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} s_n$.

يتبع في الصفحة الثانية

النموذج التدريبي الثالث **الرياضيات:**	**امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2022** (الفرع العلمي – الدورة الأولى) **الصفحة الثانية**	الاسم: الرقم: المدة: ثلاث ساعات الدرجة: ستمئة

التمرين الثاني: نتأمّل في معلم متجانس النقطتين $A(0,-1,2)$ ، $B(2,5,4)$ و المستقيم d الذي تمثيله الوسيطي $d:\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t\ ;t\in\mathbb{R} \\ z=5+2t \end{cases}$

1) أثبت أنّ المستقيمين (AB) و d متعامدان ، ثم أوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) .
2) عيّن إحداثيّات النقطة I نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و d .
3) اكتب معادلة المستوي p الذي يحوي المستقيمين (AB) و d .

التمرين الثالث: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $I=]2,+\infty[$ وفق $f(x)=x-2-\ln(\frac{x}{x-2})$. **المطلوب :**

1) ادرس تغيّرات التابع f على المجال I و استنتج $f(I)$.
2) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في I ، ثم تحقّق من أنّ $3<\alpha<4$.
3) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

$A-$ نعتبر كثير الحدود $p(z)=z^3-(4+4i)z^2+(-2+8i)z+12$

1) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد $w=12+16i$.
2) احسب $p(2)$ ثمّ عيّن العددين العقديّين α و β بحيث يكون $p(z)=(z-2)(z^2+\alpha z+\beta)$.
3) حل المعادلة $p(z)=0$.

$B-$ في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمّل النقاط A ، B ، C التي تمثّلها الأعداد العقديّة $z_A=2$ ، $z_B=3+3i$ ، $z_C=-1+i$

1) مثّل النقاط A ، B ، C في المستوي .
2) احسب العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و استنتج طبيعة المثلّث ABC .

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2\frac{e^x-1}{e^x+1}$. **المطلوب:**

1) أثبت أنّ f تابع فردي .
2) ادرس تغيّرات التابع f على المجال $[0,+\infty[$.
3) اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ ، و احسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0.1$.
4) في معلم متجانس ارسم C .
5) احسب مساحة السطح المحصور بين C و محور الفواصل و المستقيمين $x=0$ و $x=\ln 3$.

– – – – – **انتهت الأسئلة** – – – – –

حل النموذج الشامل 2022-3

أولاً: السؤال الأول:

(1)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = f(0) = 0$

(2) $f(0)=0$ قيمة حدية صغرى

$f(2)=1$ قيمة حدية كبرى.

(3) $f([0,2]) = [0,1]$

(4) $x \in]0,2[$

السؤال الثاني: نشكل معدل التغير

$$t(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}\sqrt{x(1-x)}}{\cancel{(x-1)}} = \sqrt{x(1-x)}$$

$$\lim_{x\to1} t(x) = \lim_{x\to1} \sqrt{x(1-x)} = 0$$

فالتابع f اشتقاقي عند $x=1$ و $f'(1)=0$.

السؤال الثالث

(1) $5\times5=25$

(حسب المبدأ الأساسي بالعد)

(2) عدد الأعداد المكونة من عددين فرديين:

$3\times3=9$

عدد الأعداد المكونة من عددين زوجيين:

$2\times2=4$

وبالتالي عدد الأعداد المكونة من عنصرين مجموعهما

عدد زوجي هو: $3\times3+2\times2=13$

السؤال الرابع:

(1)

$\vec{n_P}(1,1,1)$ $\vec{n_Q}(2,-1,-1)$

$\vec{n_P}\cdot\vec{n_Q} = 2-1-1 = 0$

فالمستويان P و Q متعامدان

(2)

$x+y+z=0$ ——— ①

$2x-y-z=0$ +

$3x=0 \Rightarrow x=0$

نعوض في ①:

$y+z=0 \Rightarrow y=-z$

نفرض $z=t$:

$$\Delta: \begin{cases} x=0 \\ y=-t & t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

السؤال الخامس:

(1) $P(A)=\frac{4}{7}$, $P(A\cap B)=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{7}$

$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')$

$= \frac{2}{7}+\frac{3}{7}p$

(2) لكي يكون الحدثين A و B مستقلان احتماليا يجب

تحقق الشرط $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$\frac{2}{7}=\frac{4}{7}\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}p\right)$

$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}p=\frac{1}{2}$ $(\times14)$

$4+6p=7$

$6p=3 \Rightarrow \boxed{p=\frac{1}{2}}$

السؤال السادس:

(1) $f'(x)=e^x\cdot\sin x+\cos x\cdot e^x = e^x(\cos x+\sin x)$

(2) $y'-y = e^x(\cos x+\sin x)-e^x\sin x = e^x\cos x$

فالتابع $y=f(x)$ حل للمعادلة التفاضلية

$y'-y=e^x\cos x$

ثانياً: التمرين الأول:

(1)

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-1}=\frac{1}{2u_n-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{2}v_n$$

فالمتتالية v_n هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

حدها الأول

$v_0=\frac{1}{u_0-1}=1$

$v_n=v_0\cdot q^n$

$\boxed{v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

(2)

$v_n=\frac{1}{u_n-1} \to u_n-1=\frac{1}{v_n} \to u_n=1+\frac{1}{v_n}$

$\boxed{u_n=1+2^n}$

$$U_{n+1}-U_n = 1+2^{n+1}-(1+2^n)$$

$$= 2^{n+1}-2^n = 2^n(2-1) = 2^n > 0$$

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما.

③

$$S_n = U_0+U_1+\dots+U_{n-1}$$

$$= (2^0+1)+(2^1+1)+\dots+(2^{n-1}+1)$$

$$= (2^0+2^1+\dots+2^{n-1})+\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n\ \text{مرة}}$$

$$= 2^0\cdot\frac{1-2^n}{1-2}+n$$

$$\boxed{S_n = 2^n+n-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty+\infty = +\infty$$

حيث $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$; $|2|>1$

التمرين الثاني:

①

$\vec{u_d}(1,-1,2)$, $\vec{AB}(2,6,2)$

$$\vec{AB}\cdot\vec{u} = (2)(1)+(6)(-1)+(2)(2)$$

$$= 2-6+4 = 0$$

فالمستقيمان (AB) و d متعامدان.

المستقيم (AB) يقبل الشعاع $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{AB}(1,3,1)$ كشعاع توجيه له

$$(AB):\begin{cases} x = 2+s' \\ y = 5+3s' \\ z = 4+s' \end{cases} ;\ s'\in\mathbb{R}$$

② بالحل المشترك:

$2+t = 2+s'$ —— $(*)$

$1-t = 5+3s'$ —— $(**)$

$5+2t = 4+s'$ —— $(***)$

من $(*)$ نجد:

$$t = s'$$

نعوض في $(**)$

$$1-s' = 5+3s' \Rightarrow 4s' = -4$$

$$\boxed{s'=-1} \Rightarrow \boxed{t=-1}$$

نعوض في $(***)$ للتحقق:

$$\left.\begin{aligned} \ell_1 &= 5+2(-1) = 3 \\ \ell_2 &= 4+(-1) = 3 \end{aligned}\right\}\ \ell_1=\ell_2$$

نعوض $t=-1$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d:

$x = 2-1 = 1$ $y = 1-(-1) = 2$

$z = 5+2(-1) = 3$

$$\Rightarrow \boxed{I(1,2,3)}$$

③ المستوي P موجه بالشعاعين

$\vec{u}(1,-1,2)$ $\vec{v}(1,3,1)$

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي P:

$\vec{n}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow a-b+2c = 0$ (1)

$\vec{n}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow a+3b+c = 0$ (2)

بالطرح: $-4b+c = 0$

$c = 4b$

بفرض $c=4$ يكون $b=1$

$a-1+8 = 0$ $a = -7$

$$\vec{n}(-7,1,4)$$

معادلة المستوي من الشكل:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$$

$$-7(x-0)+(y+1)+4(z-2) = 0$$

$$\boxed{P:\ -7x+y+4z-7 = 0}$$

ملاحظة: المستوي يشمل النقاط A و B و I

يمكن كتابة معادلة المستوي من علاقة الارتباط الخطي للثلاث أشعة

$$\vec{AM} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

حيث $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ و $M(x,y,z)$

التمرين الثالث:

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على I

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-2-\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)\right) = +\infty-2-0=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = -\infty$$

$$f(x) = x-2+\ln(x-2)-\ln(x)$$

$$f'(x) = 1+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}$$

$$= 1+\frac{x-(x-2)}{x(x-2)} = 1+\frac{2}{x(x-2)} > 0$$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(I) =]-\infty,+\infty[\quad (=\mathbb{R})$

2) f معرف ومستمر ومطرد تماما على I

كما أن $0 \in f(I)$

فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على I.

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 1-\ln(3) < 0 \\ f(4) = 2-\ln(2) > 0 \end{array}\right\} f(3)\cdot f(4) < 0$$

أي أن $\alpha \in]3,4[$.

3) $f(x)-y_\Delta = -\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = -\ln(1) = 0$$

فالمستقيم Δ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

ثانيا المسألة الأولى A-

1) ليكن $z=x+iy$ لنحل المعادلة $z^2=w$

$x^2-y^2 = a = 12$ —(I)

$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{144+256} = \sqrt{400} = 20$ —(II)

$2xy = b = 16$ —(III)

بجمع (I) و(II):

$2x^2 = 32 \Rightarrow x^2=16$

$x = \pm 4$

نعوض في (II):

$16+y^2 = 20 \to y^2=4 \to y=\pm 2$

من (III) بإشارة x تماثل إشارة y

$z_1 = 4+2i \quad , \quad z_2 = -4-2i$

2)

$$\begin{array}{r|l} z^3-(4+4i)z^2+(-2+8i)z+12 & z-2 \\ \hline -z^3+2z^2 & z^2-(2+4i)z-6 \\ (-2-4i)z^2+(-2+8i)z+12 & \\ (2+4i)z^2+(-4-8i)z & \\ -6z+12 & \\ +6z-12 & \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

أي بأن

$$P(z) = (z-2)(z^2-(2+4i)z-6)$$

وبالتالي $\boxed{\alpha = -2-4i}$

و $\boxed{\beta = -6}$

3) $P(z)=0 \iff$

إما $z-2=0$

$z_1 = 2$

أو $z^2-(2+4i)z-6=0$

$$\Delta = (2+4i)^2-4(1)(-6)$$

$$= 4+16i-16+24 = 12+16i = w$$

وبالتالي $\sqrt{\Delta} = 4+2i$

$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4i+4+2i}{2} = 3+3i$$

$$z_3 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4i-4-2i}{2} = -1+i$$

③ $T: y = f'(0)(x-0)+f(0)$

حيث $f'(0) = \frac{4}{4} = 1$ و $f(0)=0$

$$\boxed{T: \ y = x}$$

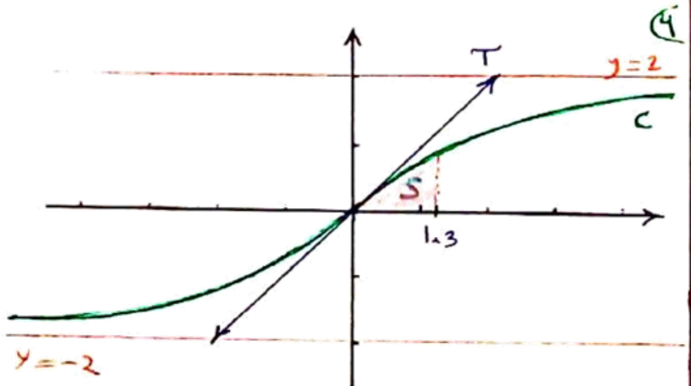
$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)\cdot h$$

حيث $a=0$ و $h=0.1$

$$f(0.1) \simeq f(0) + f'(0)\cdot(0.1)$$

$$f(0.1) \simeq 0.1$$

④



⑤ $S = \int_0^{\ln 3} f(x)\,dx = 2\int_0^{\ln 3}\left(\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{e^x+1}\right)dx$

$$= 2\int_0^{\ln 3}\left(\frac{e^x}{e^x+1} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$$

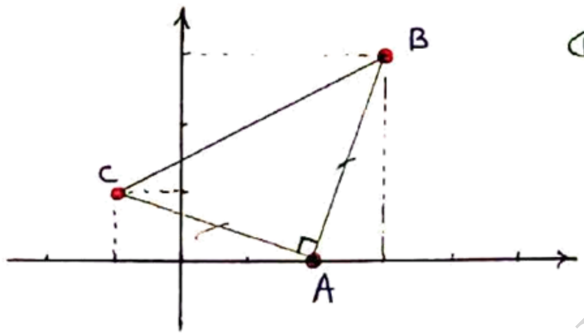
$$= 2\left[\ln(e^x+1) + \ln(1+e^{-x})\right]_0^{\ln 3}$$

$$= 2\left(\cancel{\ln 4} + \ln\left(\tfrac{4}{3}\right) - \cancel{(\ln 2+\ln 2)}\right)$$

$$\boxed{S = 2\ln\left(\tfrac{4}{3}\right)}$$

- انتهى الحل -

①-B



② $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1+i-2}{3+3i-2} = \frac{-3+i}{1+3i} = \frac{i(3i+1)}{(3i+1)} = i$

وبالتالي $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |i| = 1 \Rightarrow \boxed{AC = AB}$

$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{AB \perp AC}$

فالمثلث ABC قائم ومتساوي الساقين وتره BC

المسألة الثانية:

① أيا كانت x من IR فإن $(-x)$ من IR

$$f(-x) = 2\cdot\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\cdot\frac{e^x}{e^x} = 2\cdot\frac{1-e^x}{1+e^x}$$

$$= -2\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$$

فالتابع f فردي خطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ (O)

② f معرف ومستمر واشتقاقي على IR، $f(0)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2\cdot\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) = 2\cdot\frac{1-0}{1+0} = 2$$

$y=2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$.

$$f'(x) = 2\cdot\frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$

$$= 2\cdot\frac{\cancel{e^{2x}}+e^x-\cancel{e^{2x}}+e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	2

النموذج التدريبي الرابع **الرياضيات:**	**امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2022** (الفرع العلمي – الدورة الأولى) **الصفحة الأولى**	الاسم: الرقم: **المدة: ثلاث ساعات** **الدرجة: ستمئة**

أولاً: أجب عن ثلاثة فقط من الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمّل جانباً جدول تغيّرات التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. **المطلوب :**

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ 0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

1) أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و اكتب معادلة المقارب الأفقي .

2) أوجد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و اذكر نقطة مقاربة .

3) أوجد $f(]1,+\infty[)$.

4) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

السؤال الثاني: احسب التكامل $\int_0^2 x(x^2-1)^3dx$.

السؤال الثالث: انشر $(1+x)^5$ و استنتج قيمة المجموع $s=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\cdots+\binom{5}{5}$.

السؤال الرابع: نتأمّل جانباً جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X .

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{\alpha}{16}$	$\frac{\beta}{16}$	$\frac{7}{16}$

عيّن العددين الحقيقيّين α و β إذا علمت أنّ $\mathbb{E}(X)=\frac{17}{8}$.

ثانياً: أجب عن السؤالين الآتيين: (50 درجة لكل سؤال)

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $I=[2,+\infty[$ وفق $f(x)=x+\sqrt{x-2}-4$. **المطلوب:**

1) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

2) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً على I ، ثم جد هذا الحل جبرياً .

السؤال السادس: نعتبر العددين العقديّين $z_1=1+i\sqrt{3}$ ، $z_2=1-i$. **المطلوب :**

1) اكتب العددين z_1 و z_2 بالشكل الأسّي .

2) احسب الجداء $z_1.z_2$ بالشكلين الجبري و الأسّي ، و استنتج $\sin\frac{\pi}{12}$.

ثالثاً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق $u_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ u_n تُكتَب بالشكل $u_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$ أياً كانت $n\geq 1$.

2) نعتبر المجموع $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ أثبت أنّ $s_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

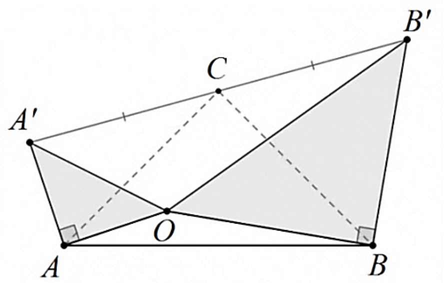
يتبع في الصفحة الثانية

النموذج التدريبي الرابع **الرياضيات:**	**امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2022** (الفرع العلمي – الدورة الأولى) **الصفحة الثانية**	الاسم: الرقم: المدة: ثلاث ساعات الدرجة: ستمئة

التمرين الثاني: f هو التابع المعرّف على المجال $]-\infty,0]$ وفق $f(0)=0$ و $f(x)=x\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ في حالة $x<0$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ f اشتقاقي عند $x=0$ من اليسار .
2) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)$.
3) أثبت أنّ $y=f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضليّة $y-xy'=\exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

التمرين الثالث: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ليكن المثلث OAB
ننشئ على ضلعيه $[OA]$ و $[OB]$ و خارجه المثلثين $OA'A$ و OBB' كل منهما قائم الزاوية
و متساوي الساقين ، النقطة C هي منتصف $[A'B']$.
تمثل الأعداد العقديّة a , b , c , a' , b' النقاط A , B , C , A' , B' . **المطلوب :**



1) اكتب b' بدلالة b و a' بدلالة a ، ثم اكتب c بدلالة a و b .
2) احسب العدد $\dfrac{c-b}{c-a}$ و استنتج طبيعة المثلّث ABC .

رابعاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمّل النقطة $A(1,1,1)$ و المستويين $P: x+y+z=6$ ، $Q: 3x+y-z=2$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ المستويين P و Q متقاطعان .
2) اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك Δ .
3) أوجد إحداثيّات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستقيم Δ .
4) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ .
5) اكتب معادلة المستوي R الذي يشمل Δ و يمر بالنقطة A .

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\ln(x+e^{-x})$. **المطلوب:**

1) أثبت أنّ التابع f يُكتب بالشكل $f(x)=\ln(1+xe^{x})-x$.
2) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=-x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$ ، و ادرس وضعه النسبي .
3) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .
4) في معلم متجانس ارسم Δ ثم C .
5) استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=\ln(e^{x}-x)$.

– – – – – **انتهت الأسئلة** – – – – –

حل النموذج الشامل 2022-4

أولاً: السؤال الأول:

(1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$y=1$ مقارب أفقي للخط f في جوار $+\infty$

(2) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

النقطة $A(0,0)$ نقطة مقاربة.

(3) $f(]1,+\infty[)=]-\infty,1[$

(4) للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد.

السؤال الثاني:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^2 2x(x^2-1)^3\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2-1)^4}{4}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{8}\left(3^4-(-1)^4\right) = \frac{1}{8}(81-1)=\frac{80}{8}$$

$$\boxed{I=10}$$

السؤال الثالث: $a=1$, $b=x$

$$(1+x)^5=\binom{5}{0}1^5x^0+\binom{5}{1}1^4x^1+\dots+\binom{5}{5}1^0x^5$$

$$(1+x)^5=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}x+\binom{5}{2}x^2+\dots+\binom{5}{5}x^5$$

عند تعويض $x=1$ نحصل على المجموع S

وبالتالي $S=(1+1)^5=2^5=32$

السؤال الرابع: نحسب $E(X)$ بدلالة α و β:

$$E(X)=0+\frac{\alpha}{16}+\frac{2\beta}{16}+\frac{21}{16}$$

$$\frac{\alpha+2\beta+21}{16}=\frac{17}{8}$$

$$\alpha+2\beta+21=34$$

$$\alpha+2\beta=13 \quad \text{——} (1)$$

$$\sum_{i=1}^{4}P_i=1 \Rightarrow \frac{1+\alpha+\beta+7}{16}=1$$

$$\alpha+\beta+8=16$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta=8 \quad \text{——} (2)$$

بطرح (2) من (1) نجد $\boxed{\beta=5}$

نعوض في (2) فنجد $\boxed{\alpha=3}$

ثانياً: السؤال الخامس:

(1) f معرف ومستمر على I

$f(2)=-2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

f اشتقاقي على المجال $]2,+\infty[$:

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0$$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

(2) مما سبق: f مستمر ومطرد تماماً على I

كما أنَّ $0\in f(I)=[-2,+\infty[$

فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً على I.

بفرض $t=\sqrt{x-2}$:

$$f(x)=0 \longleftrightarrow t^2+t-2=0$$

$$(t-1)(t+2)=0$$

إما $t=-2$

$\longleftrightarrow \sqrt{x-2}=-2$ (مرفوض)

أو $t=1$

$\sqrt{x-2}=1$

نربع $x-2=1$

مقبول $\boxed{x=3}\in I$

السؤال السادس:

(1)

$r_1=\sqrt{1+3}=2$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_1=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\theta_1=\frac{\pi}{3} \rightarrow \boxed{z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$r_2=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}\theta_2=\frac{\pi}{4} \rightarrow \boxed{z_2=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

بالشكل الجبري:

$$z_1\cdot z_2=(1+i\sqrt{3})(1-i)$$
$$=1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)$$

بالشكل الأسي:

$$z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}\,e^{i(\pi/3-\pi/4)}=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$$

ومنه نستنتج أنّ:

$$2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}=(1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)$$
$$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=(1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)$$

بالمطابقة نجد $2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{3}-1$

وبالتالي $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

ثالثاً: التمرين الأول:

1) $$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=u_n$$

طريقة ثانية:

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{A}{n^2}+\frac{B}{(n+1)^2}$$

نوحد المقامات ونحذفها

$$A\cdot(n+1)^2+B\cdot n^2=2n+1$$
$$A\cdot(n^2+2n+1)+B\cdot n^2=2n+1$$
$$n^2(A+B)+2n\cdot A+A=2n+1$$

بالمطابقة نجد:

$A=1$

$2A=2$

$A+B=0\Rightarrow B=-A\Rightarrow B=-1$

ومنه نستنتج أنّ $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$

أي $u_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$

2) طريقة أولى:

$$u_1=\frac{1}{1^2}-\cancel{\frac{1}{2^2}}$$
$$u_2=\cancel{\frac{1}{2^2}}-\cancel{\frac{1}{3^2}}$$
$$u_3=\cancel{\frac{1}{3^2}}-\cancel{\frac{1}{4^2}}$$
$$\vdots$$
$$u_n=\cancel{\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{(n+1)^2}\quad\oplus$$

$$S_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

طريقة ثانية (إثبات بالتدريج)

$n\geq 1\qquad E(n):\ S_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

$E(1)$ محققة لأنّ

$$S_1=u_1=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$$S_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

نضيف للطرفين (u_{n+1}):

$$\underbrace{S_n+u_{n+1}}=1-\cancel{\frac{1}{(n+1)^2}}+\left(\cancel{\frac{1}{(n+1)^2}}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$$
$$S_{n+1}=1-\frac{1}{(n+2)^2}$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n\geq 1$.

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1$$

التمرين الثاني:

1) نشكل معدل التغير $t(x)$:

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x\exp(1/x)}{x}=\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to0^-}t(x)=\lim_{x\to0^-}\exp\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to-\infty}e^t=0$$

فالتابع f اشتقاقي عند $x=0$ من اليسار

و نجد $f'(0^-)=0$

(2) $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x(e^{1/x}-1)\right)$

بفرض : $t=\frac{1}{x}$ $\quad t\to 0$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}(e^t-1)$

$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$ (مبرهنة)

(3) $y'=f'(x)=\exp(\frac1x)-\frac{1}{x^2}\cdot x\cdot\exp(\frac1x)$

$x\cdot y'=x\exp(\frac1x)-\exp(\frac1x)$

$y-x\cdot y'=\cancel{xe^{1/x}}-\cancel{xe^{1/x}}+e^{1/x}=e^{1/x}=\ell_2$

فالتابع $y=f(x)$ حل للمعادلة التفاضلية $y-xy'=e^{1/x}$

التمرين الثالث:

(1) B' هي صورة O وفق دوران مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$b'-b=e^{-i\pi/2}(0-b)$

$b'-b=-i(-b)$

$b'=b+ib \Rightarrow \boxed{b'=(1+i)b}$

A' صورة O وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$a'-a=e^{i\pi/2}(0-a)$

$a'-a=i(-a)$

$\boxed{a'=(1-i)a}$

$c=\frac{a'+b'}{2}=\frac{(1-i)a+(1+i)b}{2}$

(2) $\frac{c-b}{c-a}=\frac{2c-2b}{2c-2a}$

$=\frac{(1-i)a+(1+i)b-2b}{(1-i)a+(1+i)b-2a}$

$=\frac{(1-i)a+(-1+i)b}{(-1-i)a+(1+i)b}=\frac{(1-i)\cancel{(a-b)}}{(-1-i)\cancel{(a-b)}}$

$=\frac{-(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-(1-2i-1)}{1^2+1^2}=\frac{2i}{2}$

$=i$

$\frac{c-b}{c-a}=i \begin{cases}\left|\frac{c-b}{c-a}\right|=1 \Rightarrow BC=CA \\ \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow CB\perp CA\end{cases}$

فالمثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

رابعاً: المسألة الأولى:

(1) $\left.\begin{array}{l}\vec{n}_P(1,1,1)\\ \vec{n}_Q(3,1,-1)\end{array}\right\}\ \frac13\neq\frac11\neq\frac{1}{-1}$

المركبات غير متناسبة. فالناظمان غير مرتبطين خطياً. فالمستويان P و Q متقاطعان.

(2)

$3x+y-z=2$

$x+y+z=6 \quad +$

$4x+2y=8 \Rightarrow y=4-2x$

نعوض فنحصل على $z=2+x$

بفرض $x=t$ يكون:

$\Delta:\begin{cases}x=t\\ y=4-2t \quad ; t\in\mathbb{R}\\ z=2+t\end{cases}$

(3) $A'\in\Delta \Rightarrow A'(t,4-2t,2+t)$

لتعيين قيمة t نستفيد من المعادلة

$\vec{AA'}\cdot\vec{v}=0$

$\Rightarrow (t-1,3-2t,1+t)\cdot(1,-2,1)=0$

$t-1-6+4t+1+t=0$

$6t=6 \Rightarrow \boxed{t=1}$

$x=1 \quad y=4-2=2 \quad z=2+1=3$

$\boxed{A'(1,2,3)}$

(4) بعد A عن المستقيم Δ هو طول AA'

$AA'=\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\boxed{\sqrt5}$

(5) المستوي R يشمل Δ فهو يشمل النقطة A' يقبل الشعاعين $\vec{v}(1,-2,1)$, $\vec{AA'}(0,1,2)$ كشعاعين موجهين له.

نفرض $\vec{n}_R(a,b,c)$

$\vec{n}_R\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow a-2b+c=0$ ——(1)

$\vec{n}_R\cdot\vec{AA'}=0 \Rightarrow b+2c=0$ ——(2)

نفرض $b=2$ يكون

$2+2c=0 \Rightarrow c=-1$

نعوض في (1) : $a-4-1=0 \Rightarrow a=5$

وبالتالي $\vec{n}_R(5,2,-1)$

معادلة المستوي من الشكل:

$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$5x-5+2y-2-z+1=0$

$\boxed{R: \quad 5x+2y-z=6}$

المسألة الثانية :

① $f(x)=\ln(e^{-x}(xe^{x}+1))$

$=\ln(e^{-x})+\ln(xe^{x}+1)$

$=\ln(1+xe^{x})-x$ محققة.

② $f(x)-y_\Delta=\ln(1+xe^{x})$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to-\infty}(\ln(1+xe^{x}))=\ln(1)=0$

حيث $\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0$

فالمستقيم Δ ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل يلاحظ C في جوار $-\infty$.

$f(x)-y_\Delta=\ln(1+xe^{x})$

$f(x)-y_\Delta=0 \leftrightarrow \ln(1+xe^{x})=0$

$1+xe^{x}=1$

$xe^{x}=0$

$\boxed{x=0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	0	$+$
C_f	تحت Δ	$(0,0)$ نقطة تقاطع	فوق Δ

③ f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(\ln(1+xe^{x})-x)=\ln(1)+\infty=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln(x+e^{-x}))=+\infty$

$f'(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

$f'(x)=0 \leftrightarrow 1-e^{-x}=0$

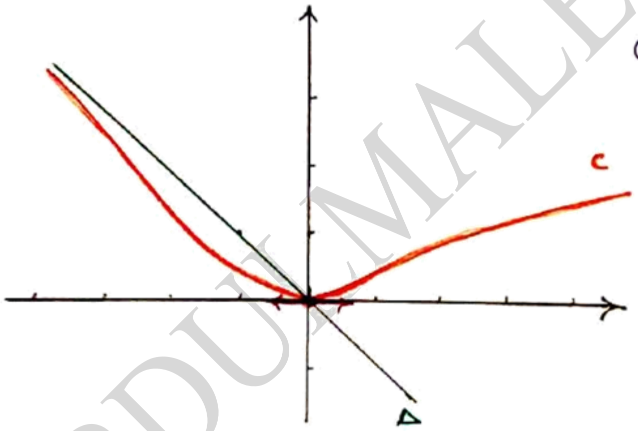
$e^{-x}=1$

$-x=0 \qquad \boxed{x=0}$

$f(0)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

④



⑤ $g(x)=f(-x)$

C' نظير C بالنسبة لمحور التراتيب.

– انتهى الحل –