مسائل شاملة في التحليل التوافقي

لطلاب الثالث الثانوي العلمي ٢٠٢٣-٢٠٢٤

التمرين الأول: تحتوي حقيبة على رمّاز (كود) مؤلف من ثلاث خانات يضم أرقاماً من 0 إلى 9.

1- بكم طريقة يمكن إدخال رمّاز يضم العدد 5 مرّة واحدة على الأقل؟

2- بكم طريقة يمكن إدخال رمّاز مجموع أرقامه زوجي؟

٣- ما عدد الرمّازات التي تصلح لقفل الحقيبة ؟

٤- ما عدد الرمّازات المختلفة التي تصلح لقفل الحقيبة ؟

٥- تذكر مالك الحقيبة أنّ الرمّاز الصحيح مكون من الأرقام ٣ و ٥ و ٥ ولكن نسي ترتيبها، فكم رمّازاً مختلفا يمكن للمالك أن يكوّن من هذه الأرقام ؟

التمرين الثاني: احسب قيمة r إذا علمت أنّ: $\frac{1}{\binom{6}{r}} + \frac{1}{\binom{5}{r}} = \frac{1}{\binom{4}{r}}$

التمرين الثالث:

1- أوجد الحد الثالث في منشور ذي الحدين $(2x+y)^8$.

2- في منشور $(x^2 - \frac{1}{x})^n$ عيّن n علماً أنّ T6 مستقل عن x.

3- عيّن في منشور $(x^2 + \frac{1}{x})^{12}$ الحد الذي يحوي x^{12} والحد المستقل عن x.

4- ما هي أمثال $x^2.y$ في المنشور $(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y})^8$.

التمرين الرابع: مجموعة تضم خمسة أشخاص والمطلوب:

1- بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة أشخاص؟

2- بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مؤلفة من (رئيس-نائب رئيس-أمين سر) ؟

3- بفرض وجود شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مؤلفة من (رئيس-نائب رئيس-أمين سر)؟

التمرين الخامس: لتكن المجموعة $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

1- كم عدد القوائم المختلفة دون تكرار المكونة من ثلاثة عناصر من S ؟

2- كم عدد القوائم المختلفة مع تكرار المكونة من ثلاثة عناصر من S ؟

3- كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S ؟

4- كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد ٣ ؟

5- كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من عناصر S ومجموعها من مضاعفات العدد 2.

التمرين السادس: رفّ يحوي 7 كتب لمؤلفين، ثلاثة لمؤلف A وأربعة لمؤلف B.

1- بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرفّ إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B ؟

2- بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرفّ إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية ؟

3- بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرفّ ؟

4- بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرفّ بشرط ألّا يوجد كتابان متجاوران لنفس المؤلف ؟

التمرين السابع: لتكن لدينا $S=\{1,2,3,4,5\}$

A- نريد تشكيل عدد مؤلف من 3 منازل، بكم طريقة يمكن ذلك في كل من الحالات الآتية:

1- العدد مؤلف من ثلاث منازل

2- العدد مؤلف من ثلاث منازل مختلفة.

3- جميع الأعداد أكبر من 300 ومنازله مختلفة.

4- جميع الأعداد زوجية.

5- جميع الأعداد من مضاعفات العدد 5 ومنازله مختلفة.

B- بكم طريقة يمكن تشكيل عدد مؤلف من خمس منازل مختلفة من هذه المجموعة جميعها أكبر من 2000 ولا يوجد أي عدد منها من مضاعفات العدد 5 ؟

التمرين الثامن: صندوق يحوي ثلاث كرات حمراء وكرتين بيضاء وكرة سوداء، سحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة.

1- ما عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

2- ما عدد النتائج التي تحوي كرتين من نفس اللون ؟

3- ما عدد النتائج التي تكون الكرات فيها مختلفة ؟

4- ما عدد النتائج التي تكون الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء ؟

5- ما عدد النتائج التي تحوي كرة سوداء على الأقل ؟

6- ما عدد النتائج التي تحوي كرتين حمراوين على الأقل ؟

7- ما عدد النتائج التي تحوي كرتين حمراوين على الأكثر ؟

8- أعد حل المسألة في حالة السحب على التتالي مع الإعادة.

التمرين التاسع: صفّ فيه 12 طالب و 8 طالبات، نريد تشكيل لجنة مؤلفة من خمس أشخاص، كم لجنة مختلفة يمكن تشكيل في كلّ من الحالات الآتية:

1- اللجنة مؤلفة من ثلاث طلاب وطالبتين.

2- اللجنة مؤلفة من طالبتين على الأكثر.

3- اللجنة مؤلفة من طالبتين على الأقل.

4- اللجنة تحوي طالبتين فقط.

سوريانا التعليمية

5- أعضاء اللجنة من الطلاب فقط.

التمرين العاشر: في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة على سبعة أسئلة من عشرة.

1- بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟

2- بكم طريقة يمكن الاختيار إذا كانت الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية ؟

3- بكم طريقة يمكن الاختيار إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية والأسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية ؟

التمرين الحادي عشر: أوجد قيمة n في الحالات الآتية:

1- $p_n^5 = 12\binom{n}{3}$

2- $4\binom{n}{2} = 3\binom{n}{3}$

3- $p_{n+1}^3 = 2p_{n+2}^2$

4- $\binom{3n+1}{n} = \frac{16}{5}\binom{3n}{n-1}$

5- $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$

6- $p_{n+1}^3 = 5\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

التمرين الثاني عشر: من أجل $r\geq1$ و n عدد طبيعي أثبت أن $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

التمرين الثالث عشر: يلتقي عشرة أصدقاء في حفل، يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط.

1- كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل ؟

2- كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل علماً أنّ في الحفل ثلاث أشخاص متخاصمين فيما بينهم، لا يصافح أي منهم الآخر ؟

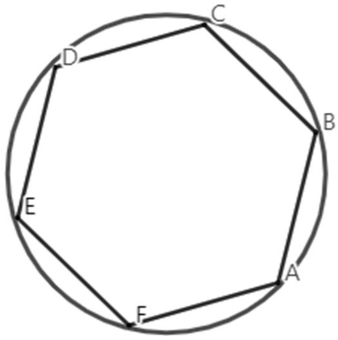
التمرين الرابع عشر: في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط A,B,C,D,E,F موزعة على دائرة بحيث تشكّل رؤوس مسدس منتظم، نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلث.

سوريانا التعليمية

مع التمنّيات بالتوفيق والنجاح

مسائل شاملة في التحليل التوافقي

لطلاب الثالث الثانوي العلمي ٢٠٢٣-٢٠٢٤



1- ما عدد القطع المستقيمة الواصلة بين نقطتين ؟

2- ما عدد الأشعة الواصلة بين نقطتين مختلفتين ؟

3- ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها ؟

4- ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها ؟

5- ما عدد المثلثات منفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها ؟

6- ما عدد المثلثات اللا قائمة واللا منفرجة ؟

7- ما عدد أقطار المسدس المنتظم، ثمّ أثبت أنّه من أجل مضلّع محدب ذي n رأس عدد أقطاره تعطى بالعلاقة $\frac{n(n-3)}{2}$

8- ما عدد نقاط تلاقي أقطار هذا المسدس ؟

9- ما عدد المضلّعات الرباعية التي رؤوسها من هذا المسدس المنتظم ؟

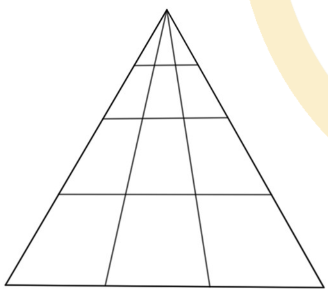
10- كم مستطيل رؤوسه من هذا المسدس المنتظم ؟

التمرين الخامس عشر: اكتب $\sin^3(x)$ على شكل عبارة خطية لنسب مثلثية لمضاعفات الزاوية x ثمّ احسب:

1- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3}{x^3}$

2- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(x).dx$

التمرين السادس عشر: تأمل الشكل المجاور:



1- ما عدد أشباه المنحرفات التي يمكن تشكيلها ؟

2- ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها ؟

التمرين السابع عشر: تتكون مجموعة من الأشخاص من أربع نساء وثمانية رجال، بينهم شخص يسمّى (مؤتمت)، نريد اختيار لجنة مكونة من ثلاثة أشخاص والمطلوب:

1- ما عدد اللجان التي يمكن تكوينها من هذه المجموعة ؟

2- ما عدد اللجان التي تحوي على ثلاثة رجال ؟

3- ما عدد اللجان التي تحوي على رجل واحد على الأقل ؟

4- ما عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث يكون (مؤتمت) رئيس اللجنة ؟

أ. منال البابا

Subject: حل المسائل الشاملة في التحليل التوافقي

حل التمرين الأول:

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1. $(5, 5', 5')$ أو $(5, 5, 5')$ أو $(5, 5, 5)$

$5'$ غير 5

عدد الطرق $= 1 \times 9 \times 9 \times (3) + 1 \times 1 \times 9 \times (3) + 1 \times 1 \times 1 = 271$

تباديل ... تباديل

2. (ف, ف, ز) أو (ز, ز, ز)

عدد الطرق $= 5 \times 5 \times 5 + 5 \times 5 \times 5 \times (3) = 500$

تباديل

3.

عدد الرمازات $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$

4. عدد الرمازات المختلفة $= 10 \times 9 \times 8 = 720$

5. $(5, 5, 3)$

عدد الرمازات $= \frac{!\text{الكلي}}{!\text{التشابه}} = \frac{3!}{2!} = 3$ محاولات

حل التمرين الثاني:

شرط الحل $(6 \geq r) \cap (5 \geq r) \cap (4 \geq r) \Leftarrow 0 \leq r \leq 4$

$$\frac{1}{\frac{4!}{r!(4-r)!}} = \frac{1}{\frac{5!}{r!(5-r)!}} + \frac{1}{\frac{6!}{r!(6-r)!}}$$

$$\Rightarrow \frac{r!(4-r)!}{4!} = \frac{r!(5-r)!}{5!} + \frac{r!(6-r)!}{6!} \quad ; \div r!$$

$$\Rightarrow \frac{(4-r)!}{4!} = \frac{(5-r)(4-r)!}{5 \times 4!} + \frac{(6-r)(5-r)(4-r)!}{6 \times 5 \times 4!}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{5-r}{5} + \frac{(6-r)(5-r)}{30}$$

نوحد المقامات

سوريانا التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أ. صفاء شحاده

Subject :

$$1 = \frac{30 - 6r + 30 - 11r + r^2}{30}$$

$$\Rightarrow 30 = r^2 - 17r + 60$$

$$\Rightarrow r^2 - 17r + 30 = 0$$

$$(r-15)(r-2) = 0$$

أما $r=2$ مرفوضة

أو $r=15$ مقبول

حل التمرين الثالث:

1) منشور $(2x+y)^8$:

$a = 2x \quad , \quad b = y \quad , \quad n = 8$

من دستور الحد العام $T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$

$$\Rightarrow T_r = \binom{8}{r} (2x)^{8-r} \cdot y^r$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{8}{r} 2^{8-r} \cdot x^{8-r} \cdot y^r$$

من أجل الحد الثالث عندها $r = 2$

$$\Rightarrow T_2 = \binom{8}{2} \cdot 2^6 \cdot x^6 \cdot y^2$$

$$= 1792 \; x^6 \cdot y^2$$

2) منشور $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$

$a = x^2 \quad , \quad b = -\frac{1}{x}$

من دستور الحد العام:

$$T_r = \binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^r$$

$$\Rightarrow T_6 = \binom{n}{6} \cdot (x^2)^{n-6} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^6$$

$$= \binom{n}{6} \cdot x^{2n-18}$$

بما أنه T_6 مستقل عن x أي:

$$x^{2n-18} = x^0$$

$$\Rightarrow 2n - 18 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 9}$$

3) منشور $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{12}$:

$a = x^2 \quad , \quad b = \frac{2}{x} \quad , \quad n = 12$

من دستور الحد العام:

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$$

$$= \binom{12}{r} (x^2)^{12-r} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^r$$

$$\Rightarrow \boxed{T_r = \binom{12}{r} \cdot x^{24-3r} \cdot 2^r}$$

حتى نحصل على الحد الذي يحوي x^{12} :

$$24 - 3r = 12 \Rightarrow \boxed{r = 4}$$

$$\Rightarrow T_4 = \binom{12}{4} \cdot x^{12} \cdot 2^4$$

وحتى نحصل على الحد الذي يحوي x^0 :

$$24 - 3r = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 8}$$

AL.SAMRAH

سوريانا التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$T_8 = \binom{12}{8} x^0 . 2^8$

$= \binom{12}{8} . 2^8$

4 منشور $\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y}\right)^8$:

$a = \frac{y^2}{x} \quad , \quad b = \frac{x}{y} \quad , \quad n = 8$

من دستور الحد العام :

$T_r = \binom{n}{r} . a^{n-r} . b^r$

$= \binom{8}{r} . \left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r} . \left(\frac{x}{y}\right)^r$

$= \binom{8}{r} . y^{16-2r} . x^{-8+r} . x^r . y^{-r}$

$\boxed{T_r = \binom{8}{r} . x^{2r-8} . y^{16-3r}}$

حتى نحصل على الحد الذي يحوي $x^2.y$:

يجب أنه يكون

$x^{2r-8} = x^2 \Rightarrow 2r-8=2 \Rightarrow \boxed{r=5}$

$y^{16-3r} = y^1 \Rightarrow 16-3r=1 \Rightarrow \boxed{r=5}$

ومنه الحد الذي يحوي x^2y :

$T_5 = \binom{8}{5} x^2.y \Rightarrow$ أمثاله $\binom{8}{5} = 56$

حل التمرين الرابع :

1) عدد الطرق $= \binom{5}{3} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$

2) أمين نائب رئيس

عدد الطرق $= 5\times4\times3 = 60$

3) بفرض الشخص المتخاصم M

فيكون الشخص غير المتخاصم M'

$\boxed{M' \quad M' \quad M' \quad M \quad M}$

أما اللجنة لا تحوي أي من المتخاصمين فيكون : $(M'M'M')$

عدد الطرق $= 3\times2\times1 = 6$

أو اللجنة تحوي متخاصم واحد فقط فيكون : $(M\,M'\,M')$

عدد الطرق $= 2\times3\times2 \times(3)$ تباديل $= 36$

فيكون عدد الطرق الكلي هو :

$6 + 36 = 42$

حل التمرين الخامس :

1) عدد الطرق $= 12\times11\times10 = 1320$

2) عدد الطرق $= 12\times12\times12 = 1728$

3) عدد الطرق $= \binom{12}{3} = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 660$

سوريانا التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\boxed{4}$ نقسم المجموعة S إلى ثلاث مجموعات جزئية بحيث يكون باقي قسمة العناصر على العدد 3 هو إما (0) أو (1) أو (2)

ومنه:

مجموعة الأعداد التي باقي قسمتها على (3) يساوي (0):

$A_0 = \{3, 6, 9, 12\}$

مجموعة الأعداد التي باقي قسمتها على (3) يساوي (1):

$A_1 = \{1, 4, 7, 10\}$

مجموعة الأعداد التي باقي قسمتها على (3) يساوي (2):

$A_2 = \{2, 5, 8, 11\}$

يمكن اختيار عناصر المجموعات الجزئية الملونة من ثلاثة عناصر بحيث مجموع الأرقام من مضاعفات العدد 3:

عدد الطرق $= \binom{4}{3} + \binom{4}{3} + \binom{4}{3} + \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$

$= 4 + 4 + 4 + 64 = 76$

$\boxed{5}$ $A_0 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

عدد الطرق $= \binom{6}{2} + \binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2\times1} + \frac{6\times5}{2\times1} = 30$

حل التمرين السادس:

$\boxed{BBB \quad BAAA}$

$\boxed{1}$ عدد الطرق $= P^4_3 \cdot P^4_4$

$= 4\times3\times2\times4\times3\times2\times1 = 576$

$\boxed{2}$ كتاب معين

عدد الطرق $= P^1_1 \cdot P^6_6$

$= 1\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$

$\boxed{3}$ عدد الطرق $= P^7_7 = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5040$

$\boxed{4}$ التوزيع يكون على الرف:

B A B A B A B

عدد الطرق $= 4\times3\times3\times2\times2\times1\times1 = 144$

حل التمرين السابع:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(a)

$\boxed{1}$ عدد طرق اختيار الآحاد بـ 5 طرق

عدد طرق اختيار العشرات بـ 5 طرق

المئات " " " بـ 5 طرق

عدد الطرق $= 5\times5\times5 = 125$ طريقة

سوريانا التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Subject : .... / /

(2) عدد الطرق = $5 \times 4 \times 3 = 60$ طريقة

(3) $\boxed{\text{مئات}} \times \boxed{\text{عشرات}} \times \boxed{\text{آحاد}}$

3,4,5

عدد طرق اختيار المئات بـ 3 طرق

عدد طرق اختيار العشرات بـ 4 طرق

عدد طرق اختيار الآحاد بـ 3 طرق

عدد الطرق = $3 \times 4 \times 3 = 36$

(4) العدد الزوجي هو العدد الذي آحاده زوجية.

عدد طرق اختيار الآحاد هو 2 $\{2,4\}$

عدد طرق اختيار العشرات هو 5

عدد طرق اختيار المئات هو 5

عدد الطرق = $\boxed{2} \times \boxed{5} \times \boxed{5} = 50$

آحاد عشرات مئات

(5) عدد طرق اختيار الآحاد هو 1 $\{5\}$

عدد الطرق = $\boxed{1} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 12$

آحاد $\{5\}$ عشرات مئات

(6) يوجد تقاطع شروط

لذلك نستخدم جدول:

آلاف	مئات	عشرات	عدد طرق عشرات الألوف	آحاد
1	2	3	4	1
1	2	3	3	2
1	2	3	3	3
1	2	3	3	4

عدد الطرق = $(4\times3\times2\times1)+(3\times3\times2\times1)$
$+(3\times3\times2\times1)+(3\times3\times2\times1) = 78$

حل التمرين الثامن: السحب دون إعادة

3R حمر	2W بيض	1B سوداء

كرة أولى، ثانية، ثالثة

1) عدد الطرق $n(\Omega) = 6 \times 5 \times 4 = 120$

2) A: حدث أنه تحوي كرتين من نفس اللون

$A = \{(R,R,R')$ أو $(w,w,w')\}$

$n(A) = 3\times2\times3\times(3) + 2\times1\times4\times(3) =$

تباديل تباديل

3) B: حدث أنه تكون الكرات مختلفة اللون

$B = \{(R, w, B)\}$

$n(B) = 3 \times 2 \times 1 \times 3! = 12$

تباديل

AL.SAMRAH

سوريات التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Subject :

حل التمرين التاسع:

12 طالب و 8 طالبة

1

$$\text{عدد الطرق} = \binom{12}{3}\times\binom{8}{2}$$

$$= \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}\times\frac{8\times7}{2\times1}$$

$$= 18480$$

2 اللجنة تحوي طالبتين على الأكثر:

x : بنت طالبة ، y : ذكر طالب

اللجنة تحوي: $yyyxx$

أو $yyyyx$

أو $yyyyy$

$$\text{عدد الطرق} = \binom{12}{3}\times\binom{8}{2} + \binom{12}{4}\binom{8}{1} + \binom{12}{5}$$

$= \ldots$

3 اللجنة تحوي طالبتين على الأقل:

اللجنة تحوي: أما $xxyyy$

أو $xxxyy$

أو $xxxxy$

أو $xxxxx$

$$\text{عدد الطرق} = \binom{8}{2}\binom{12}{3} + \binom{8}{3}\binom{12}{2} + \binom{8}{4}\binom{12}{1} + \binom{8}{5}$$

$= \ldots$

4 اللجنة تحوي طالبتين فقط:

$xxyyy$

$$\text{عدد الطرق} = \binom{8}{2}\binom{12}{3} = \ldots$$

4 ثالثة / ثانية / كرة أولى

$$\text{عدد الطرق} = ③\times②\times① = 6$$

لا نضرب بالتباديل لأنه ذكر كلمة أولى وثانية وثالثة...

5

حدث أن تكون كرة سوداء على الأقل C

$$C = \{(B, B', B')\}$$

$$n(C) = 1\times5\times4\times(3) = 60$$

تباديل

6

حدث أن تكون كرتين حمراوتين على الأقل D

$$D = \{(R, R, R') \text{ أو } (R, R, R)\}$$

$$n(D) = 3\times2\times3\times3 + 3\times2\times1 =$$

تباديل

7

حدث أن تكون كرتين حمراوتين على الأكثر E

$$E = \{(R, R, R') \text{ أو } (R, R', R') \text{ أو } (R', R', R')\}$$

$$n(E) = 3\times2\times3\times3 + 3\times3\times2\times3 + 3\times2\times1$$

تباديل   تباديل

$=$

AL SAMRAH

سوريانا التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

5 اللجنة من الطلاب فقط

عدد الطرائق = $\binom{12}{5}$ = ...

حل التمرين العاشر:

1

عدد الطرائق = $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$

خاصة تخفيض توفيقية

2

عدد الطرائق = $\binom{4}{4}\binom{6}{3} = \frac{1\times6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$

3

عدد الطرائق = $\binom{3}{3}\times\binom{4}{1}\times\binom{3}{3} = 1\times4\times1 = 4$

حل التمرين الحادي عشر:

1

$$P^5_n = 12\binom{n}{3}$$

شرط الحل $(n\geq5)\cap(n\geq3)$

$\Leftarrow \boxed{n\geq5}$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 12\,\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$$

$\Rightarrow (n-3)(n-4) = 2$

$\Rightarrow n^2-7n+10=0$

$\Rightarrow (n-5)(n-2)=0$

إما $n=2$ مرفوض

أو $n=5$ مقبول

2

$$4\binom{n}{2} = 3\binom{n}{3}$$

شرط الحل

$\boxed{n\geq3} \Leftarrow (n\geq2)\cap(n\geq3)$

$$4\,\frac{n(n-1)}{2\times1} = 3\,\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$$

$\Rightarrow 4 = n-2$

$\Rightarrow n = 4+2 = 6$ مقبول

3

$$P^3_{n+1} = 2P^2_{n+2}$$

شرط الحل

$n\geq0 \Leftarrow n+2\geq2$

$n\geq2 \Leftarrow n+1\geq3$

$\boxed{n\geq2} \Leftarrow$

$(n+1)(n)(n-1) = 2(n+2)(n+1)$

$n(n-1) = 2(n+2)$

$\Rightarrow n^2-3n-4=0$

$\Rightarrow (n-4)(n+1)=0$

إما $n=4$ مقبول

أو $n=-1$ مرفوض

5

$$\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$$

شرط الحل:

$10\geq3n\geq0$ و $10\geq n+2\geq0$

$\Leftarrow \boxed{3\geq n\geq0}$

إما $3n = n+2$

$\Rightarrow \boxed{n=1}$ مقبول

أو $3n+n+2 = 10$

$\Rightarrow 4n+2=10 \Rightarrow \boxed{n=2}$ مقبول

سوريانا التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ $\binom{3n+1}{n} = \frac{16}{5}\binom{3n}{n-1}$

أوجد n

بالاستفادة من العلاقة

$$\frac{\binom{n}{r-1}}{\binom{n+1}{r}} = \frac{r}{n+1}$$

الحل: لنضع $3n = m$

$$\binom{m+1}{n} = \frac{16}{5}\binom{m}{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\binom{m}{n-1}}{\binom{m+1}{n}} = \frac{5}{16}$$

بالاستفادة من العلاقة المعطاة:

$$\Rightarrow \frac{n}{m+1} = \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow 16n = 5m+5$$

$$\Rightarrow 16n = 5(3n)+5$$

$$\Rightarrow 16n = 15n+5 \Rightarrow \boxed{n=5}$$

⑥ $P^3_{n+1} = 5\,\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

الحل: شرط الحل $n+1 \geq 3 \Leftarrow \boxed{n \geq 2}$

$$(n+1)n(n-1) = 5\,\frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow n-1 = 5 \Rightarrow \boxed{n=6}$$ مقبول

حل التمرين الثاني:

$$l_1 = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$(n-r+1)$ $\quad$ (r)

$$= \frac{(n-r+1)n! + r\,n!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-r+1+r)}{r!(n-r+1)!} = \frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = l_2$$

حل التمرين الثالث:

① عدد المصافحات $= \binom{10}{2} = 45$

② عدد المصافحات $= \binom{10}{2} - \binom{3}{2} = 45 - 3 = 42$

سوريانا التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل التمرين الرابع عشر:

1. عدد القطع المستقيمة $= \binom{6}{2} = \frac{6\times 5}{2\times 1} = 15$

2. $P_6^2 = 6\times 5 = 30$ شعاع

3. عدد المثلثات $= \binom{6}{3} = 20$ مثلث.

4. عدد المثلثات القائمة $= 6\times 2 = 12$ مثلث

لأن كل رأس يحتوي مثلثين قائمين

أي كل رأس يقابل قطرين من الدائرة

5. عدد المثلثات المنفرجة $= 6\times 1 = 6$ مثلث

لأن كل رأس يصنع مثلث منفرج الزاوية وحيد

6. $\underbrace{20}_{\text{عدد المثلثات الكلية}} - \underbrace{(12)}_{\text{قائم}} - \underbrace{(6)}_{\text{منفرج}} = 2$

7. علماً أن القطر هو القطعة المستقيمة التي تربط بين رأسين غير متجاورين

عدد الأقطار $= \binom{6}{2} - 6 = 15 - 6 = 9$

ومن أجل n:

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)-2n}{2}$$

$$= \frac{n(n-3)}{2}$$

8. $\binom{n}{4} + n$ من أجل n:

من أجل $n=6$:

$$\binom{6}{4} + 6 = 15 + 6 = 21$$

9. $\binom{6}{4} = 15$

10. المستطيل يحتاج إلى قطرين من الدائرة

$\binom{3}{2} = 3$ ← ثلاث أقطار تمر من المركز

حل التمرين الخامس عشر:

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^3$$

$$= -\frac{1}{8i}\left(e^{xi} - e^{-xi}\right)^3$$

$$= -\frac{1}{8i}\left[(e^{xi})^3 - 3(e^{xi})^2(e^{-xi}) + 3(e^{xi})(e^{-xi})^2 - (e^{-xi})^3\right]$$

$$= \frac{-1}{8i}\left[e^{3xi} - 3e^{xi} + 3e^{-xi} - e^{-3xi}\right]$$

$$= \frac{-1}{8i}\left[e^{3xi} - e^{-3xi} - 3\left(e^{xi} - e^{-xi}\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{8i}\left[2i\sin 3x - 6i\sin x\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^3 x = \frac{-1}{4}\left(\sin 3x - 3\sin x\right)} \quad (*)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3x - 3\sin x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{-1}{3} \cos 3x + 3\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\left(-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2} + 3\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}\cos 0 + 3\cos 0\right) \right]$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\left(-\frac{1}{3}(0) + 3(0)\right) - \left(-\frac{1}{3}(1) + 3(1)\right) \right]$$

$$= +\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3} + 3\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3\sin x - 3\sin x + 4\sin^3 x}{x^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} 4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = 4(1)^3 = 4$$

لقد استفدنا من العلاقة نشر $\sin^3 x$
من (ب):

$$4\sin^3 x + 3\sin x = -\sin 3x$$

حل التمرين السادس:

① عدد أشباه المنحرفات:

$$\binom{4}{2}\binom{4}{2} = \frac{4\times3}{2\times1} \times \frac{4\times3}{2\times1} = 36$$

② عدد المثلثات:

$$\binom{4}{2}\times\binom{4}{1} = \frac{4\times3}{2\times1} \times 4 = 24$$

لصنع مثلث:
نحتاج إلى خطين مائلين وخط أفقي

حل التمرين السابع:

① عدد اللجان $= \binom{12}{3} = 220$

② عدد اللجان $= \binom{8}{3} = 56$

③ رجل y ، نساء x

اللجنة تحوي إما yxx
أو yyx
أو yyy

عدد اللجان $= \binom{8}{1}\binom{4}{2} + \binom{8}{2}\binom{4}{1} + \binom{8}{3} = 200$

④ عدد اللجان $= \binom{1}{1} \times \binom{11}{2} = 55$

كل الحب لكم.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner