الوحدة الخامسة - التابع اللوغاريتمي

تعريف:

يوجد تابع وحيد معرف و استقاقي على المجال من $]0,+\infty[$ ينعدم عند 1 و مشتقه على المجال $]0,+\infty[$ هو $\frac{1}{x}$ نسمي هذا التابع بالتابع اللوغاريتمي النيبري ونرمز له بـ Ln:

$$Ln:]0,+\infty[\to R,\ x \to Ln\,x$$

نتائج:

1) التابع Ln معرف ومستمر واشتقاقي $]0,+\infty[$

2) بما أن $(Ln\,x)' = \frac{1}{x} > 0$ فالتابع Ln متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$

3) $Ln\,x > 0 \iff x > 1$

$Ln\,x > 0 \iff x > 1$

$Ln\,x < 0 \iff 0 < x < 1$

إشارة $Ln\,x$

x	0	1	$+\infty$
Ln x	‖ —	0	+

4) أيا كان العددان الحقيقيان الموجبان تماماً a, b فإن:

$Ln\,a = Ln\,b \iff a = b$

$Ln\,a > Ln\,b \iff a > b$

$Ln\,a < Ln\,b \iff a < b$

$f(x) = Ln(U(x))$ مجموعة تعريف التابع

التابع $f(x) = Ln(u(x))$ معرف عندما $U(x) > 0$

مثال:

عين مجموعة تعريف كل من التوابع:

1) $f(x) = Ln(8x-4)$

f معرف عندما $8x-4 > 0$

$8x > 4$

$x > \frac{1}{2}$

$Df =]\frac{1}{2}, +\infty[$

2) $f(x) = Ln(5-x)$

f معرف عندما $5-x > 0$

$x < 5$

ومنه $Df =]-\infty, 5[$

Scanned with CamScanner

[5] $\ln\left(\frac{2x-2}{x-5}\right)$ نحدد شرط f

$\frac{2x-2}{x-5} > 0$

$2x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$x-5=0 \Rightarrow \boxed{x=5}$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$2x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x-2}{x-5}$	$+$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	$+$
المتراجحة	مقبول		≡		مقبول		

[6] $f(x) = \ln(x^3-3x+2)$ نحدد f

$x^3-3x+2 > 0$

$x^3-3x+2 = 0$

$x=1$

$x^3-3x+2 \;\big|\; x-1$

$x^3 \mp x^2$

x^2-3x+2

$\mp x^2 \pm x$

$-2x+2$

$\pm 2x \mp 2$

0

x^2+x-2

[3] $f(x) = \ln(x^2+5x)$ نحدد f

$x^2+5x > 0$

$x^2+5x = 0$

$x(x+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases}$

	$-\infty$		-5		0		$+\infty$
x^2+5x	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
المتراجحة	مقبول		≡		مقبول		

$Df =]-\infty,-5[\cup]0,+\infty[$

[4] $f(x) = \ln(4-x^2)$ نحدد شرط f

$4-x^2 > 0$

$4-x^2 = 0$

$x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=+2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
الشكل	≡		مقبول		≡		

$Df =]-2,2[$

Scanned with CamScanner

$(x-1)(x^2+x-2) \leq 0$

$x = 1$ إما

$x^2 + x - 2 = 0$ أو مميزة

$(x+2)(x-1) = 0$ ⟨ $x = 1$ / $x = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^3-3x+2		$-$	0	$+$	0	$+$	
الإشارة		مقبول		مقبول			

$D_f =]-2,1[\cup]1,+\infty[$

7) $f(x) = \ln(x-2)^2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

8) $f(x) = \ln|x-5|$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

9) $f(x) = \ln|x-2| + \ln|x+3|$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$

هون كتبي نقط بدون ترتيب.

10) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

$D_f =]0,+\infty[\setminus \{1\}$

$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

المعادلات اللوغارتمية المباشرة

حل المعادلة $\ln 2$ و $\ln$ و $\ln$

* نعين عمودة تتوقف اضد الارض ولكن D
* حل المعادلة $\ln$ و $\ln$ والحل المقبول هو الذي ينتمي لـ D

مثال:

حل المعادلة

$\ln(2x) = \ln(x^2-1)$

$D_1 =]0,+\infty[$ معرف على $\ln(2x)$

حل المعادلة

$2x = x^2 - 1$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 8$

$x_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$ مقبول

$x_2 = 1-\sqrt{2}$ مرفوض

$S = \{1+\sqrt{2}\}$

مثال: حل المعادلة:

$\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

$D_1 =]-\infty,0[$ معرف على $\ln(-3x)$

$-3x = x^2 - 4$ حل المعادلة

$x^2 + 3x - 4 = 0$ ومنه

$(x+4)(x-1) = 0$

$x = -4$ مقبول إما

$x = 1$ مرفوض

$S = \{-4\}$

Scanned with CamScanner

المتراجحات اللوغاريتمية

حل المتراجحة $\ln U_1 \geq \ln U_2$

- نعين مجموعة تعريف اللوغ الأصغر
- ولتكن D
- نحل المتراجحة $U_1 \geq U_2$ ونحصر ما يناسب مثلا D

مثال:

حل المتراجحة

$$\ln(X-2) \leq \ln(2X-1)$$

$\ln(X-2)$ معرف على $D_1 =]2, +\infty[$

نحل المتراجحة

$$X-2 \leq 2X-1$$

ومنه

$$-1 \leq X$$

$$X \in [-1, +\infty[$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة

$$S_1 =]2, +\infty[$$

هون بنقاطع

مثال:

حل المتراجحة

$$\ln(2X) \geq \ln(X^2-1)$$

$\ln(X^2-1)$ معرف على $D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

نحل المتراجحة

$$2X \geq X^2-1$$

ومنه

$$X^2-2X-1 \leq 0$$

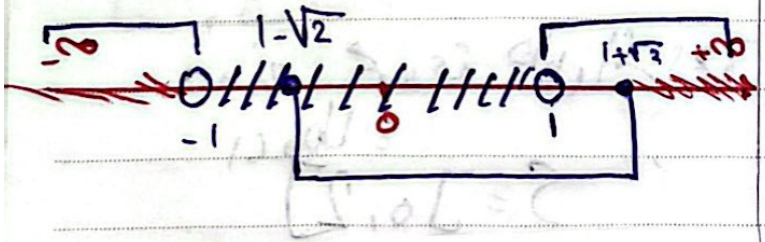
$$X^2-2X-1 = 0 \Leftrightarrow X = 1-\sqrt{2} \text{ or } X = 1+\sqrt{2}$$

X	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
X^2-2X-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة							

$$X \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة:

$$S_2 =]1, 1+\sqrt{2}]$$



Scanned with CamScanner

مثال: حل المتراجحة:

$\ln(1+\frac{2}{x}) \geq \ln x$

$\ln x$ معرف على $]0;+\infty[$ إذن $D=]0;+\infty[$

نحل المتراجحة

$1+\frac{2}{x} \geq x$

$(x>0)\quad x+2 \geq x^2$

$x^2-x-2 \leq 0$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0 \Leftarrow \begin{matrix} x=-1 \\ x=2 \end{matrix}$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	
			مقبول				

$x \in [-1,2]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة:

$S=]0,2]$

خواص اللوغاريتم:

1 خاصة لوغاريتم جداء:

إذا كان العددان الحقيقيان الموجبان تماما a و b فإن

$\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$

2 خاصة لوغاريتم كسر ولوغاريتم مقلوب:

إذا كان العددان الحقيقيان الموجبان تماما a و b فإن:

$\ln(\frac{a}{b})=\ln a-\ln b$

$\ln(\frac{1}{b})=-\ln b$

3 خاصة لوغاريتم قوة:

إذا كان $a>0$ و $r\in\mathbb{R}$ فإن

$\ln(a^r)=r\ln a$

ملاحظة: لا يمكن استخدام خواص اللوغاريتم قبل تحديد مجموعة الأعداد.

Scanned with CamScanner

157 - 1 -

بـ b كتابة الأعداد

[1] $a = \ln 3 + \ln \frac{1}{3}$

$a = \ln 3 - \ln 3$

$a = 0$

[2] $b = \ln \frac{1}{16}$

$b = -\ln 16$

$b = -\ln (2)^4$

$b = -4 \ln 2$

[3] $C = \frac{1}{2} \ln \sqrt{2}$

$C = \frac{1}{2} \ln (2)^{\frac{1}{2}}$

$C = \frac{1}{4} \ln 2$

157 - 2 -

اكتب كلا من الأعداد التالية

$\ln 5 \; , \; \ln 2$

[1] $a = \ln 50$

$a = \ln (25 \times 2)$

$a = \ln 25 + \ln 2$

$a = 2 \ln 5 + \ln 2$

158 - 3 -

$\ln (2+\sqrt{3}) + \ln (2-\sqrt{3}) = 0$

$L_1 = \ln (2+\sqrt{3}) + \ln (2-\sqrt{3})$

$= \ln [(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]$

$= \ln (4-3)$

$= \ln 1 = 0$

$\ln 1,20 = \ln 3$

Scanned with CamScanner

158 - 4 -

في كل من الحالتين الآتيتين
قارن بين العددين X, Y

① $X = \ln 5$, $Y = \ln 2 + \ln 3$
$X = \ln 5$ $\quad Y = \ln 6$
$Y > X$

② $X = 2\ln 3$, $Y = 3\ln 2$
$X = \ln 9$, $Y = \ln 8$
$X > Y$

158 - 6 -

أثبت صحة كل من الحالات الآتية
حيثما يكن $x > 0$

[1] $\ln(1+X) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
$L_2 = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
$= \ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$
$= \ln(x+1) = L_1$

[2] $\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$
$L_2 = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$
$= \ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$
$= \ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$
$= \ln(x^2+1) = L_1$

[2b] $\ln(1+x^2) = \ln\left[x^2\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]$
$= \ln x^2 + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)$
$= 2\ln x + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)$
$= L_2$

158 - 9 -

حل كل متراجحة أو معادلة

[1] $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$
$D_1 =]0, +\infty[$ مجموعة تعريف $2\ln x$
$D_2 =]-4, +\infty[$ مجموعة تعريف $\ln(x+4)$
$D_3 =]0, +\infty[$ مجموعة تعريف $\ln(2x)$
$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]0, +\infty[$ مجموعة تعريف المعادلة
على المجموعة D نكتب :

$\ln x^2 = \ln(2x^2+8x)$
نحل المعادلة
$x^2 = 2x^2 + 8x$
ومنه
$x^2 + 8x = 0$
$x(x+8) = 0$
إما $x = 0$ مرفوض
أو $x = -8$ مرفوض
$S = \emptyset$

ALADIB

Scanned with CamScanner

[2] $\ln(x+11) + \ln(x+3) = \ln(x+2)$

$D_1 =]-11, +\infty[$ معرفة على $\ln(x+11)$

$D_2 =]-3, +\infty[$ معرفة على $\ln(x+3)$

$D_3 =]-2, +\infty[$ معرفة على $\ln(x+2)$

$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]-2, +\infty[$ مجموعة تعريف المعادلة:

على المجموعة D نكتب:

$\ln(x+11) = \ln(x^2+5x+6)$

حل المعادلة:

$x+11 = x^2+4x-5$

$x+11-x^2-5x-6 = 0$

$x^2+4x-5 = 0$

$(x+5)(x-1) = 0$

$x = -5$ مرفوض

$x = 1$ مقبول

$S = \{1\}$

[3] $\ln 4 + \ln 2 = \ln(x-6) + \ln(x+1)$

$D_1 =]6, +\infty[$ معرفة على $\ln(x-6)$

$D_2 =]-1, +\infty[$ معرفة على $\ln(x+1)$

$D = D_1 \cap D_2 =]6, +\infty[$ مجموعة تعريف المعادلة

على المجموعة D نكتب:

$\ln 8 = \ln(x^2-5x-6)$

$x^2-5x-14 = 0$

$(x-7)(x+2) = 0$

$x = 7$ مقبول

أو $x = -2$ مرفوض

$S = \{7\}$

[4] $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$

$D_1 =]0, +\infty[$ معرفة على $\frac{1}{2}\ln(2x)$

$D_2 =]3, +\infty[$ معرفة على $\ln(3-x)$

$D_3 =]-1, +\infty[$ معرفة على $\ln\sqrt{x+1}$

$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]0, 3[$ مجموعة تعريف المعادلة

المعادلة تكافئ:

$\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \frac{1}{2}\ln(x+1)$

$\ln(2x) = 2\ln(3-x) - \ln(x+1)$

$\ln(2x) + \ln(x+1) = \ln(3-x)^2$

$\ln(2x^2+2x) = \ln(9-6x+x^2)$

حل المعادلة:

$2x^2+2x = 9-6x+x^2$

$x^2+8x-9 = 0$

$(x+9)(x-1) = 0$

إما $x = -9$ مرفوض

أو $x = 1$ مقبول

$S = \{1\}$

ALADIB

Scanned with CamScanner

[5] $\ln 3 \geq \ln(5-x) + \ln(x-1)$

$D_1 =]-\infty, 5[$ معرفة على $\ln(5-x)$

$D_2 =]1, +\infty[$ معرفة على $\ln(x-1)$

مجموعة تعريف المتراجحة $D =]1, 5[$

المتراجحة تكافئ:

$\ln 3 \geq \ln(-x^2+6x-5)$

تكافئ:

$3 \geq -x^2+6x-5$

$x^2-6x+8 \geq 0$

$x^2-6x+8 = 0$

$(x-4)(x-2) = 0 \Leftarrow \begin{matrix} x=2 \\ x=4 \end{matrix}$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	
		مقبول					

$x \in [2, 4]$

مجموعة حلول المتراجحة المعطاة

$S = [2, 4]$

[6] $\ln(3x^2-x) \geq \ln x + \ln 2$

$D_1 =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$ معرفة على $\ln(3x^2-x)$

$D_2 =]0, +\infty[$ " " $\ln(x)$

مجموعة تعريف المتراجحة $D =]\frac{1}{3}, +\infty[$

على المجموعة D نكتب:

$\ln(3x^2-x) \geq \ln 2x$

حل المتراجحة:

$3x^2 - x \geq 2x$

$3x^2 - 3x \geq 0$

$3x^2 - 3x \leq 0$

$x(x-1) \leq 0 \Leftarrow \begin{matrix} x \leq 0 \\ x \leq 1 \end{matrix}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$3x^2-3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		مقبول					

وصفة مجموعة حلول المتراجحة المعطاة

$S =]\frac{1}{3}, 1]$

[7] $3\ln x > \ln(3x-2)$

$D_1 =]0, +\infty[$ معرف على $3\ln x$

$D_2 =]\frac{2}{3}, +\infty[$ معرف على $\ln(3x-2)$

مجموعة تعريف المتراجحة $D =]\frac{2}{3}, +\infty[$

على المجموعة D نكتب:

$\ln x^3 > \ln(3x-2)$

تكافئ:

$x^3 > 3x-2$

$x^3 - 3x + 2 > 0$

$x^3 - 3x + 2 = 0$

حل $x = 1$

$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2+x-2)$

$-x^3 + x^2$

$x^2 - 3x + 2$

$-x^2 + x$

$-2x + 2$

$(x-1)(x^2+x-2) \leq 0$

$(x-1)(x+2)(x-1) \leq 0$

$(x-1)^2(x+2) \leq 0 \Leftarrow \begin{matrix} x \leq -2 \\ x = 1 \end{matrix}$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^3-3x+2		$-$	0	$+$	0	$+$	
المتراجحة	مقبول						

$x \in]-2,1[\cup \{1\} \cup]1,+\infty[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة

$S =]\frac{2}{3},1[\cup \{1\} \cup]1,+\infty[$

ملاحظة: عندما تحول المعادلة لمطابقة تصبح مجموعة حلولها هي مجموعة تعريفها

صد مجموعة ضم x التي تحقق

[1] $\ln(x^2-x) \leq \ln x + \ln(x-1)$

$D_1 =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ معرف على $\ln(x^2-x)$

$D_2 =]0,+\infty[$ " " $\ln x$

$D_3 =]1,+\infty[$ " " $\ln(x-1)$

$D =]1,+\infty[$ مجموعة تعريف المعادلة

على المجموعة D نكتب:

$\ln(x^2-x) \leq \ln(x^2-x)$

$x \in]1,+\infty[$

ملاحظة: قسمة درجة أولى على أولى بعد ضبط المقام بـ سالب موجب الأطراف

" " " سالب على بالبعد بين القيم

[2] $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) < \ln(x-1) - \ln(x+2)$

$D_1 =]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$ معرف على $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

$D_2 =]1,+\infty[$ معرف على $\ln(x-1)$

$D_3 =]-2,+\infty[$ " " $\ln(x+2)$

$D =]1,+\infty[$ مجموعة تعريف المعادلة

على المجموعة D نكتب:

$\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) < \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

$x \in]1,+\infty[$

تذكرة:

1) $y = ax+b$ معادلة مستقيم مائل

2) $y = ax$ معادلة مستقيم مائل يمر من مبدأ الإحداثيات

3) $y = ax^2$

- $a > 0$ قطع مكافئ: عمود الأعلى
- $a < 0$ قطع مكافئ: عمود الأسفل

4) $(a \neq 0)$ $y = \frac{a}{x}$ أو $x.y = a$

- $a > 0$ قطع زائد: بالربعين الأول والثالث
- $a < 0$ قطع زائد: بالربعين الثاني والرابع

5) $x.y = 0$ اجتماع مستقيمين هما المحورين الإحداثيين

ALADIB

Scanned with CamScanner

$x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

$\ln(x \cdot y) = c \Rightarrow x \cdot y > 0$ لما $x > 0$ و $y > 0$ أو $x < 0$ و $y < 0$ (11)

ص 153 - 10 -

في كل حالة من الآتية، ارسم في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ مجموعة النقاط $M(x, y)$ المحققة للشرط:

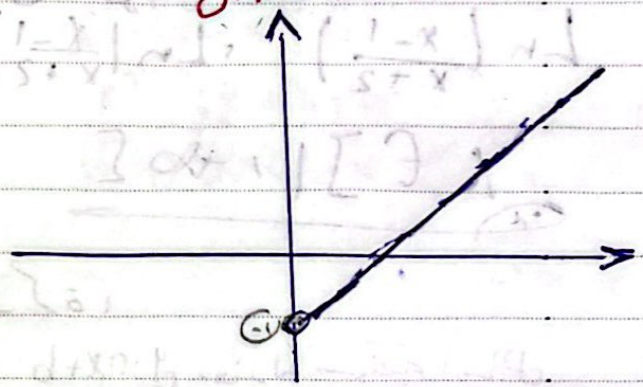
1) $\ln(x) + \ln(y+1)$

المعادلة محققة من أجل $x > 0$ و $y > -1$

المعادلة المكافئة:

$x \cdot (y+1)$

$y = x - 1$



2) $\ln y = 2\ln x$

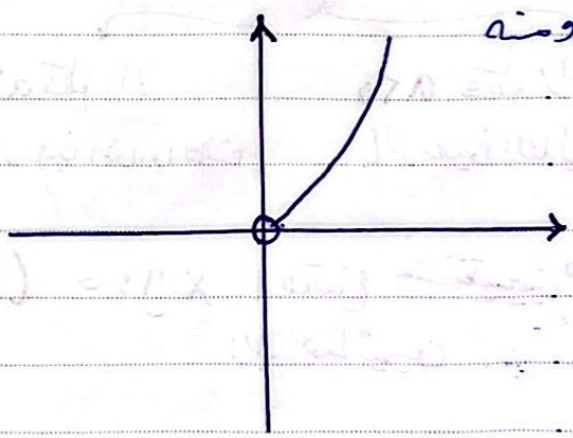
المعادلة محققة من أجل: $x > 0$ و $y > 0$

المعادلة تكافئ:

$\ln(y) = \ln(x^2)$

$y = x^2$

ومنه



3) $\ln x + \ln y \leq 0$

المعادلة محققة من أجل $x > 0, y > 0$

المعادلة تكافئ:

$\ln(x \cdot y) \leq \ln(1)$

$x \cdot y \leq 1$ ومنه

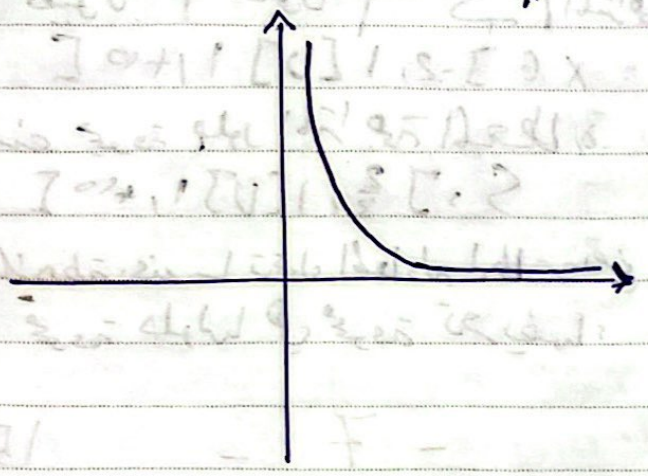
$y \leq \frac{1}{x}$ أو

$\ln(x \cdot y)$ تعطي $x \cdot y > 0$

$x < 0$ و $y < 0$ أو $x > 0$ و $y > 0$

$x \cdot y \leq 0$

(نرسم في القطع الزائد)



ملاحظة هامة:

أيا يكن $a \in \mathbb{R}$ فإن:

1) $\ln(u) = a \iff u = e^a$

2) $\ln(u) > a \iff u > e^a$

3) $\ln(u) < a \iff u < e^a$

- 4 - ، 162

حل كل من متراجحة أو معادلة:

1) $\ln(1-x) \leq -2$

$D_f =]-\infty, 1[$

المعادلة تكافئ:

$1 - x \leq e^{-2}$

$x \geq 1 - e^2$ ، $1 - \frac{1}{e^2} \in D$

$S = \left[1 - \frac{1}{e^2}\right]$

Scanned with CamScanner

$e^{\ln\frac{x-1}{x-1}} = e^{2}$ $e^{\ln e}$ $\ln e^{1}$ (12)

5) $\ln(2-x) \geq 1$

$D_1 =]-\infty, 2[$

المعادلة تكافئ:

$2-x \geq e$

$x \leq 2-e$

$x \in]-\infty, 2-e[$

مجموعة حلول المتراجحة

$S =]-\infty, 2-e[$

6) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) > 2$

$D =]0, +\infty[$

$\frac{1}{x} > e^2$

$x < \frac{1}{e^2}$

$x \in]-\infty, \frac{1}{e^2}[$

مجموعة حلول المتراجحة

$S =]0, \frac{1}{e^2}[$

2) $\ln(x-2) + \ln(x+1) \leq 2$

$D_1 =]2, +\infty[$ مجموعة $\ln(x-2)$

$D_2 =]-1, +\infty[$ " " $\ln(x+1)$

$D =]2, +\infty[$

المعادلة تكافئ:

$\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) \leq 2$

$\frac{x-2}{x+1} \leq \frac{e^2}{1}$

$x-2 \leq e^2x + e^2$

$x - e^2x \leq e^2 + 2$

$x(1-e^2) \leq e^2+2$

$x \leq \frac{e^2+2}{1-e^2} \notin D$

$S = \emptyset$

3) $(\ln x)^2 \leq 16$

$D =]0, +\infty[$

$\ln x \leq 4 \Rightarrow x \leq e^4$ أي:

$\ln x \leq -4 \Rightarrow x \leq e^{-4} = \frac{1}{e^4}$ أو

$S = \left]0, \frac{1}{e^4}\right] \cup [e^4, +\infty[$

4) $(\ln(x)-1)(\ln(x)+2) \leq 0$

$D =]0, +\infty[$

$\ln(x) \leq 1 \Rightarrow x \leq e$ أي:

$\ln(x) \leq -2 \Rightarrow x \leq e^{-2} \Rightarrow x \leq \frac{1}{e^2}$ أو

$S = \left]0, \frac{1}{e^2}\right] \cup [e, +\infty[$

ALADIB

Scanned with CamScanner

$|a|^2 = a^2$

$|x| = a \Leftrightarrow x = a$ أو $x = -a$

$|a+b| \neq |a|+|b|$

$|a \times b| = |a| \times |b|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

حل كل من المعادلات الآتية:

[1] $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

$D_1 = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ مجموعة تعريف $\ln|x+2|$

$D_2 = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ مجموعة تعريف $\ln|x-2|$

$D = \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$

المعادلة تكافئ:

$\ln|(x+2)(x-2)| = 0$

$\ln|x^2-4| = 0 = \ln 1$

$|x^2-4| = 1$

$x^2-4 = 1 \Rightarrow x^2 = 5 \Leftarrow \begin{matrix} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{matrix}$ أما

أو $x^2-4 = -1$

$x^2 = 3 \Leftarrow \begin{matrix} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{matrix}$

$S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

[2] $\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$

$D_1 = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$ مجموعة تعريف $\ln|2x+3|$

$D_2 = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ " " $\ln|x-1|$

$D_3 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ " " $2\ln|x|$

$D = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}, 1, 0\}$

المعادلة تكافئ:

$\ln|2x^2+x-3| = \ln x^2$

$|2x^2+x-3| = x^2$ أما

$x^2+x-3 = 0$

$2x^2+x-3 = -x^2$ أو

$3x^2+x-3 = 0$

[3] $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

$D_1 = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ مجموعة تعريف $\ln|x-2|$

$D_2 =]-4, +\infty[$ " " $\ln(x+4)$

$D =]-4, +\infty[\setminus\{2\}$

المعادلة تكافئ:

$\ln|x-2|(x+4) = \ln 8$

$|x-2|(x+4) = 8$ بما أن

$|x-2| = \frac{8}{x+4}$

$x-2 = \frac{8}{x+4}$ أما

$(x-2)(x+4) = 8$

بالضرب

$x-2 = -\frac{8}{x+4}$ أو

$(x-2)(x+4) = -8$

بالضرب

/ /

-175- 15

في كل حالة حدد مجال المتغيرات المجهولة

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ \ln x+\ln y=\ln 3 \end{cases}$

شرط الحل:

$x>0$ و $y>0$

من (2)

$\ln(x.y)=\ln 3$

ومنه $x.y=3$ ... (3)

من (3)

$\boxed{y=\frac{3}{x}}$

نعوض في (1)

$x^2+\frac{9}{x^2}=10$

ومنه

$x^4+9=10x^2$

$x^4-10x^2+9=0$

$(x^2-9)(x^2-1)=0$

إما $\Leftarrow$ مرفوض $x=-3$ / مقبول $x=+3$ $\Leftarrow x^2=9$

إذ $\Leftarrow$ مرفوض $x=-1$ / مقبول $x=+1$ $\Leftarrow x^2=1$

$x=3 \Rightarrow y=1$

$x=1 \Rightarrow y=3$

$S=\{(3,1),(1,3)\}$

(2) $\begin{cases} 2\ln x+\ln y=7 \\ 3\ln x-5\ln y=4 \end{cases}$

شرط الحل:

$x>0$ و $y>0$

المجملة - كما في:

$10\ln x+5\ln y=35$

$3\ln x-5\ln y=4$

بالجمع

$13\ln x=39$

$\ln x=3 \Rightarrow x=e^3$

نعوض في (1)

$6+\ln y=7$

$\ln y=1 \Rightarrow \boxed{y=e}$

$S=\{(e^3,e)\}$

(3) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y)=-12 & (1) \\ \ln(x.y)=1 & (2) \end{cases}$

شرط الحل $x>0$ و $y>0$

من (2) نجد

$\ln x+\ln y=1$ ... (3)

$\ln x=4 \Rightarrow x=e^4$ إذ $\Leftarrow$

$\ln y=-3 \Rightarrow x=e^{-3}$ إذ $\Leftarrow$

$\ln x=-3 \Rightarrow x=e^{-3}$

$\ln y=4 \Rightarrow y=e^4$

$S=\{(e^4,e^{-3}),(e^{-3},e^4)\}$

Scanned with CamScanner

مشتق التابع المركب $f(x) = \ln(u(x))$

مبرهنة:

إذا كان u تابعاً اشتقاقياً على المجال I وموجباً تماماً على I كان التابع $x \longrightarrow \ln(u(x))$ اشتقاقياً على I وكان:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

مشتق اللوغ / اللوغ

165 — 4 —

في كل مما يأتي أثبت أن التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'

II $f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$ ، $I =]2, +\infty[$

التابع $x \to x-2$ موجب تماماً على I واشتقاقي على I

فالتابع $x \to \ln(x-2)$ اشتقاقي على I

التابع $x \to |x+2|$ موجب تماماً على I واشتقاقي على I

فالتابع $x \to \ln(x+2)$ اشتقاقي على I

إذا كان f فرق تابعين اشتقاقيين على I فإن f اشتقاقي على I

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$

$$f'(x) = \frac{4}{x^2-4}$$

فكرة أخرى:

$f(x) = \ln(x-4)$

f اشتقاقي على $]4, +\infty[$ لأن:

A f مستمر على I

B $x-4$ موجب تماماً على I

C $\ln(x-4)$ اشتقاقي على I

D $\ln(x-4)$ موجب تماماً على I واشتقاقي على I

2) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$I =]1, +\infty[$

التابع $x \to \frac{x-1}{x+1}$ موجب تماماً على I واشتقاقي على I

فالتابع f اشتقاقي على I

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x+1)}{(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

3) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$I =]0, +\infty[$

التابع $x \to \frac{1}{x}$ استقاقي على I

التابع $x \to 1+\frac{1}{x}$ استقاقي على I

و موجب تماما على I

فالتابع $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ استقاقي على I

إذا f أحد تابعين استقاقيين على I فهو استقاقي على I

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+x}$

$f'(x) = \frac{-x^2 - x + x^2}{x^2(x^2+x)}$

$f'(x) = \frac{-1}{x(x^2+x)}$

$f'(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$

4) $f(x) = \ln(1+x^2)$ $I = \mathbb{R}$

التابع $x \to 1+x^2$ موجب تماما و"خطيا" و استقاقي على $\mathbb{R}$ فالتابع f استقاقي على I

$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

فكرة أخرى: $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

A) f استقاقي على $]-1, +\infty[$

B) f استقاقي على $]0, +\infty[$

f استقاقي على $]e, +\infty[$

D) f استقاقي على $]1, +\infty[$

الشرح:

$\ln(\ln x) > 0$ ، e^0

$\ln x > 1$

$x > e$

إذا طلب المشتق:

$f'(x) = \frac{[\ln(\ln x)]'}{\ln(\ln x)}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\ln x}{\ln(\ln x)}}$

ALADIB

لتكون...

Scanned with CamScanner

إثبات صحة متراجحة :

154 - 3 -

f هو التابع المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

1 أثبت أن f متزايد تماماً على I ثم احسب تابعه المشتق $f'(x)$

2 نظم جدولاً يبين صحة إطراد f

3 استنتج من الجدول السابق أنه:

$\forall x \in I$ يكون $f(x) \geq 1$

1 التابع $x \to \frac{1}{x}$ متناقص تماماً على I

التابع $x \to \ln x$ متزايد تماماً على I

إذاً "مجموع تابعين متناقصين على I هو تابع متناقص على I"

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{-1+x}{x^2}$$

2 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	1	↗	

3 من جدول الاطراد نجد $f(1)$ قيمة صغرى محلياً على I ومنه $\forall x \in I$ يكن $f(x) \geq 1$

فكرة أخرى :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	1	↗	

A $\frac{1}{x} + \ln x \geq 3$

$x \in]0, +\infty[$

B $\frac{1}{x} + \ln x \geq 1$

$x \in \mathbb{R}$

C $\frac{1}{x} + \ln x \geq 1$

$x \in]0, +\infty[$

D $\frac{1}{x} + \ln x \geq \ln x$

تمرين :

أثبت أن $\forall x > 0$ يكن $\ln x < 2\sqrt{x}$

المتراجحة $\ln x < 2\sqrt{x}$

تكافئ $2\sqrt{x} - \ln x > 0$

تكافئ $f(x) > 0$

حيث $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$

نبرهن أن التابع f متزايد تماماً على $]0, +\infty[$

f متناقص على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

لتكون...

ALADIB

Scanned with CamScanner

نهايات التابع اللوغاريتمي:

1) $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

2) $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ، $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

4) $\lim_{x \to 0^+} (x \cdot \ln x) = 0^-$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ، $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$

$\ln 1 = 0$ ، $\ln e = 1$

$\ln \frac{1}{e} = -1$ ، $\ln(0) = -\infty$

$\ln(+\infty) = +\infty$

نتيجة:

$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1$

$\Rightarrow x = 1$

$f(1) = 2$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	↘	2	↗	

من جدول الاطراد نجد

$f(1) = 2$ قيمة حدية صغرى محلياً على $]0, +\infty[$

وهذه $f(x) \geq 2 > 0$

وهذه $\ln x < 2\sqrt{x}$ أياً يكن $x > 0$

تمرين:

ليكن التابع $f(x) = 2(\sqrt{x}-1) - \ln x$

جدول الاطراد

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	0	↗	

عندئذٍ:

A) $\ln x < 2(\sqrt{x}-1)$ أياً يكن $x \in \mathbb{R}$

B) $\ln x \geq 2(\sqrt{x}-1)$ أياً يكن $x \in]0, +\infty[$

C) $\ln x < 2\sqrt{x} - 2$ أياً يكن $x \in]0, +\infty[$

D) $\ln x \geq 2\sqrt{x} - 2$ أياً يكن $x \in \mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

مثال: ص 164 :

احسب كلا من نهايات التوابع الآتية عند a

1 $f: x \longrightarrow \frac{1}{x} + \ln x$

$D_f =]0, +\infty[$ $a = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x)$ من الشكل $+\infty - \infty$ عدم التعيين

عندما $x \to 0^+$ نكتب :

$f(x) = \frac{1}{x}(1 + x \ln x)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty (1+0) = +\infty$

2 $f: x \longrightarrow x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ $a = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل $0 \cdot \infty$ عدم تعيين

عندما $x \to +\infty$ نكتب :

$f(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

3 $f: x \longrightarrow \ln(2x+1) - \ln(x-2)$

$a = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل عدم تعيين

عندما $x \to +\infty$ نكتب :

عندما $x \to +\infty$ نكتب :

$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2$

165 :

1 - جد كلا من النهايات الآتية :

1 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

عندما $x \to +\infty$ نكتب :

$f(x) = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (0)(0) = 0$

2 $\lim_{x \to 0} \left((x^2 - x) \cdot \ln x\right)$

$f(x) = (x^2 - x) \cdot \ln x$

$\lim_{x \to 0^+} f(x)$ من الشكل $0 \cdot \infty$ عدم تعيين :

عندما $x \to 0^+$ نكتب :

$f(x) = (x-1)x \cdot \ln x$

$\lim_{x \to 0} f(x) = (-1)(0) = 0$

3 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين ،

عندما $x \to +\infty$ نكتب ،

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})^2} \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\ln(\sqrt{x})}$

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\ln \sqrt{x}}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ALADIN

Scanned with CamScanner

- 2 - 165

فيما يأتي حد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه:

[1] $f(x) = \frac{Lnx}{x}$ $Df =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

[2] $f(x) = \frac{x - Lnx}{x}$ $Df =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

عند $x \to +\infty$ نكتب:

$f(x) = \frac{x}{x} - \frac{Lnx}{x}$

$f(x) = 1 - \frac{Lnx}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 - 0 = 1$

[3] $f(x) = x - Lnx$ $D =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$f(x) = x\left(1 - \frac{Lnx}{x}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(1 - 0) = +\infty$

[4] $f(x) = x + xLn\left[1 + \frac{1}{x}\right]$

$Df =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

عندما $x \to -\infty$ نكتب:

$f(x) = x\left[1 + Ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

عند $0 \cdot \infty$ نكتب $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ على الشكل

$f(x) = x + xLn\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$f(x) = x + xLn(x+1) - xLnx$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + 0 - 0 = 0$

[5] $f(x) = \frac{1}{x} - Lnx$ $Df =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 - \infty = -\infty$

Scanned with CamScanner

8) $f(x) = x(1-\ln x)$

$Df =]0, +\infty[$

حساب $x \to 0^+$ لما

$f(x) = x - x\ln x$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 0 = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

9) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

$Df =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 1 = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 1 = 0$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$

6) $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$

$Df =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{0}{1} = 0$

حساب $x \to +\infty$ لما

$f(x) = \frac{x}{x+1} \cdot \ln x$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (1)(+\infty) = +\infty$

7) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

$Df =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Scanned with CamScanner

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $+\infty+0$; $+\infty$

12) $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$

$D =]0;+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)$; $0+0+\infty$; $+\infty$ عندما $x \to +\infty$ نكتب :

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $+\infty+0 = +\infty$

3 - 165

$f(x) = x+1-\frac{\ln x}{x}$ معرفة على $]0,+\infty[$

1) بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x+1$ مقارب لـ (C)

2) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و (d)

$f(x) - y_d = \frac{\ln x}{x}$: 1

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y_d]$; 0

ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

$f(x) - y_d = -\frac{\ln x}{x}$

$f(x) - y_d = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
إشارة $f(x)-y_d$	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	‖	(C) فوق (d)		(C) تحت (d)	

10) $f(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 1)$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $\infty \cdot 0$ سنحسبها عندما $x \to +\infty$ نكتب :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

11) $f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$

$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

عندما $x \to +\infty$ نكتب :

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x}$$

لتكون...

ALADDIN

Scanned with CamScanner