بسم الله الرحمن الرحيم

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

نقدم هذا العمل البسيط لوجه الله سبحانه وتعالى فلا تجعله لغير ذلك

((هذا العمل غير معد للشهرة أو للبيع))

((نرجو منكم الدعاء))

المهندس

حسام خضر قاسم

الأستاذ

فادي يوسف المحمد

الجمهورية العربية السورية	الرياضيات للثالث الثانوي العلمي	اسم الطالب :
النموذج الأول 2018	(نموذج 2018)	المدة : ثلاث ساعات الدرجة : 600

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة التالية : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : نجد فيما يأتي جدولاً بتغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$1 \Vert -2$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3

1) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط C
2) هل يوجد مقاربات مائلة للخط C ؟
3) هل يمكنك رسم مماس أفقي للخط C في إحدى نقاطه ؟
4) هل f اشتقاقي عند 3 ؟
5) عين القيم الحدية للتابع f ؟

السؤال الثاني :

لتكن النقاط C و B و A التي تمثلها الأعداد العقدية $c = 7+3i$ $\quad b = 3-5i$ $\quad a = 3+5i$

بيّن أن $\frac{b-c}{a-c} = 2i$ ثم استنتج أنّ ABC قائم الزاوية و $BC = 2AC$

السؤال الثالث : عين في منشور $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{12}$ الحد الذي يحوي x^{12} والحد المستقل عن x

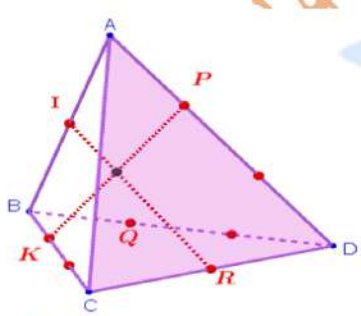
السؤال الرابع : احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق $u_n = \frac{2n!+(-1)^n}{n!}$

ثانياً : حل التمارين الأربعة التالية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : $ABCD$ رباعي وجوه ، النقاط P, Q, R, K, I تحقق :

$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ $\quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ $\quad R$ منتصف $[CD]$ $\quad \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ $\quad I$ منتصف $[AB]$

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A;2), (B;2), (C;1), (D;1)$ المطلوب :



1) أثبت أن المستقيمان (IR) و (PK) متقاطعان
2) عين موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A;2), (C;1)$
3) عين المجموعة المكونة من النقاط M التي تحقق :

$$\left\|2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}\right\| = \left\|2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM}\right\|$$

التمرين الثاني : $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة وفق :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6} \end{cases}$$ عند كل: $n \geq 0$

① أثبت أن التابع $x \to \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماماً .

التمرين الثالث : f هو التابع المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{x^2+4x+4sinx}{x}$

خطه البياني C

① أوجد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

② برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

وادرس وضع C بالنسبة لهذا المقارب .

التمرين الرابع : لتكن الأعداد المركبة $Z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $Z_2=\sqrt{3}+i$ و $Z_3=1$

① اكتب كلاً من العددين Z_1 و Z_2 بالشكل الأسي

② حل في C المعادلة $Z^3=Z_3$

③ اكتب $\left(\frac{Z_1}{2}\right)^{12}$ و $\left(\frac{Z_2}{2}\right)^{12}$ بالشكل الجبري

④ اكتب العدد $Z=\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكلين الجبري والأسي واستنتج قيمة كل من $sin\frac{\pi}{12}$ و $cos\frac{\pi}{12}$

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : نتأمل في معلم متجانس النقاط :

$D(-3,3,-1)$ $C(2,1,1)$ $B(-1,0,2)$ $A\left(-\frac{1}{2},3,1\right)$

① a) أثبت أن النقاط B,C,D تمثل مستوٍ أوجد معادلته

b) استنتج طبيعة المثلث BCD واحسب مساحته

② a) أثبت أن النقطة A تقع خارج المستوي (BCD)

b) احسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD)

③ احسب حجم رباعي الوجوه $(ABCD)$

④ a) أثبت أنّ النقاط B,C,D تقع على كرة مركزها A

b) احسب نصف قطر هذه الكرة واكتب معادلتها

المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على R وفق : $f(x)=x^3e^x$ والمطلوب :

1) جد تابعاً أصلياً F للتابع f على R بالصيغة $F(x)=P(x)e^x$ حيث P كثير حدود

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

3) ارسم C الخط الباني للتابع f

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=1$

حل النموذج الامتحاني الأول 2018

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة التالية : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : نجد فيما يأتي جدولاً بتغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$1 \Vert -2$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3

1) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط C
2) هل يوجد مقاربات مائلة للخط C
3) هل يمكنك رسم مماس أفقي للخط C في إحدى نقاطه ؟
4) هل f اشتقاقي عند 3 ؟
5) عين القيم الحدية للتابع f ؟

الحل :

1) $x = -2$ مقارب شاقولي للخط C **توضيح لأن :** $\lim_{x\to-2} f(x) = -\infty$

$y = 1$ مقارب أفقي للخط C **توضيح لأن :** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$y = -3$ مقارب أفقي للخط C **توضيح لأن :** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -3$

2) لا يوجد مقاربات مائلة للخط C **توضيح لأنه :** يوجد مقاربات أفقية في جوار $-\infty$ وفي جوار $+\infty$

3) لا يمكن رسم مماس أفقي للخط C **توضيح لأنه :** لا توجد نقاط ينعدم عندها المشتق

4) التابع f ليس اشتقاقي عند $x = 3$ **توضيح لأنه :** $f'(3^-) \neq f'(3^+)$

5) $f(3) = 0$ قيمة كبرى محلياً **توضيح لأنه :** يوجد جوار I للعدد 3 يحقق :

أياً كانت x ينتمي إلى $I \cap D_f$ فإن $f(x) \leq f(3)$

السؤال الثاني :

لتكن النقاط C و B و A التي تمثلها الأعداد العقدية $c = 7 + 3i$ $b = 3 - 5i$ $a = 3 + 5i$

بيّن أن $\frac{b-c}{a-c} = 2i$ ثم استنتج أنّ ABC قائم الزاوية و $BC = 2AC$

الحل :

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{3-5i-7-3i}{3+5i-7-3i} = \frac{-4-8i}{-4+2i} = \frac{2+4i}{2-i} = \frac{(2+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{4+2i+8i-4}{4+1} = \frac{10i}{5} = 2i$$

$$\frac{b-c}{a-c} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$arg(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} \qquad \frac{CB}{CA} = 2 \quad \Rightarrow CB = 2CA$$

وبالتالي المثلث ABC قائم الزاوية في C وتره AB

السؤال الثالث :

عين في منشور $\left(\boldsymbol{x}^2 - \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathbf{12}}$ الحد الذي يحوي $\boldsymbol{x}^{12}$ والحد المستقل عن x

الحل :

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدين $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$ هي

$$T_r = \binom{n}{r} a^{\,n-r} b^r$$

$$T_r = \binom{12}{r} (\boldsymbol{x}^2)^{\,12-r} \left(-\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}}\right)^r = \binom{12}{r} x^{24-2r} \,.\, (-2)^r\, x^{-r} = \binom{12}{r} (-2)^r x^{24-3r}$$

- الحد الذي يحوي x^{12} هو الحد ذي الدليل r حيث

$$24 - 3r = 12$$

$$r = \frac{-12}{-3} = 4$$

$$T_4 = \binom{12}{4} (-2)^4 x^{24-3(4)} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} (16) x^{12} = 7920 x^{12}$$

- الحد المستقل عن x هو الحد ذي الدليل r حيث

$$24 - 3r = 0$$

$$r = \frac{-24}{-3} = 8$$

$$T_8 = \binom{12}{8} (-2)^8 = \binom{12}{4} (-2)^8 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} (256) = 126720$$

السؤال الرابع

احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $u_n = \dfrac{2n! + (-1)^n}{n!}$

الحل :

$$u_n = \frac{2\,n! + (-1)^n}{n!} = \frac{2\,n!}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!} = 2 + \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$u_n - 2 = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$|u_n - 2| = \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right|$$

$$|u_n - 2| = \frac{1}{n!}$$

$n! \geq n$ أياً كان العدد الطبيعي $n > 0$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$$

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

حسب مبرهنة $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$

بما أن : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$

حسب مبرهنة المقارنة: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

ثانياً : حل التمارين الأربعة التالية (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : $ABCD$ رباعي وجوه ، النقاط P, Q, R, K, I تحقق :

$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ $\quad$ $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ $\quad$ Rمنتصف $[CD]$ $\quad$ $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ $\quad$ I منتصف $[AB]$

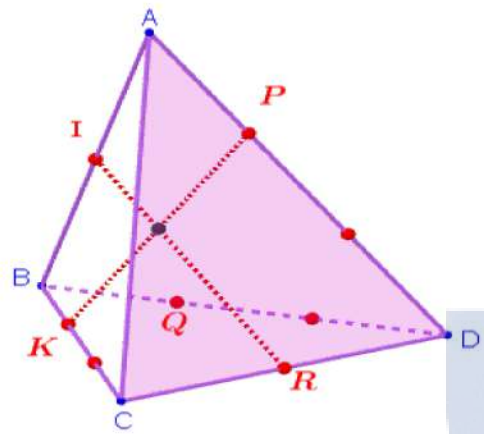
G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A;2), (B;2), (C;1), (D;1)$ المطلوب :

4) أثبت أن المستقيمان (IR) و (PK) متقاطعان

5) عين موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A;2), (C;1)$

6) عين المجموعة المكونة من النقاط M التي تحقق :

$$\|2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}\| = \|2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM}\|$$



الحل :

❖

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PD}$

$2\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{PD} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$

إذاً P مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A;2), (D;1)$

$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

$3\overrightarrow{CK} = 2\overrightarrow{CK} + 2\overrightarrow{KB}$

$\overrightarrow{CK} - 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$

إذاً K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C;1), (B;2)$

بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A;2), (B;2), (C;1), (D;1)$

وحسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(P;3)$ و $(K;3)$

إذاً G تقع على المستقيم (PK)

❖

Rمنتصف $[CD]$

إذاً R مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C;1), (D;1)$

I منتصف $[AB]$

إذاً I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A;2), (B;2)$

بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A;2), (B;2), (C;1), (D;1)$

وحسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(R;3)$ و $(I;3)$

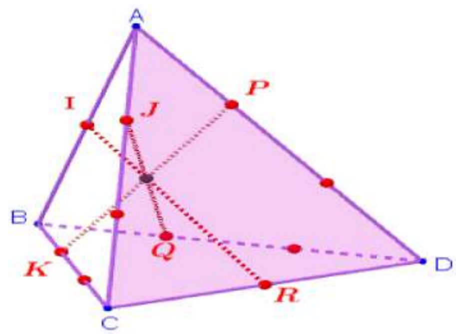
إذاً G تقع على المستقيم (IR)

بالتالي المستقيمان (IR) و (PK) متقاطعان في G

❖ تعيين موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A;2),(C;1)$

حسب تعريف مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين مثقلتين $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

إذاً النقطة J تقع على القطعة المستقيمة $[AC]$ بحيث $AJ=\frac{1}{3}AC$



❖ لدينا J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A;2),(C;1)$

أيا كانت M نقطة من الفراغ نجد : $\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MJ}$ (مبرهنة)

$$2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=3\,\overrightarrow{MJ}$$

- من العلاقة $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

طريقة ثانية :

$$3\overrightarrow{BQ}=\left(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{QD}\right)$$

$$-3\overrightarrow{QB}-\left(-\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD}\right)=\vec{0}$$

$$-2\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QD}=\vec{0}$$

ومنه $2\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD}=\vec{0}$

طريقة أولى :

$$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{1+2}\overrightarrow{BD}$$

حسب العلاقة $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ بالتالي

فإن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B;2),(D;1)$

- أيا كانت M نقطة من الفراغ نجد : $2\,\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=3\,\overrightarrow{MQ}$

- ومن الشرط المعطى :

$$\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DM}\right\|$$

$$\left\|3\overrightarrow{MJ}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MQ}\right\|$$

$$3\left\|\overrightarrow{MJ}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MQ}\right\|$$

$$\left\|\overrightarrow{MJ}\right\|=\left\|\overrightarrow{MQ}\right\|$$

وبالتالي مجموعة النقاط M هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[QJ]$

التمرين الثاني : $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 6} \end{cases} \quad \text{عند كل } n \geq 0$$

① أثبت أن التابع $x \to \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً .

الحل :

① التابع : $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ معرف على $R\backslash\{-3\}$

التابع f اشتقاقي على كل من المجالين $]-3, +\infty[$ و $]-\infty, -3[$

$$f'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2} = \frac{6x + 18 - 6x - 4}{(2x+6)^2} = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

فالتابع f متزايد تماماً على كل من المجالين $]-3, +\infty[$ و $]-\infty, -3[$

❖ لتكن الخاصة : $E(n) : \frac{1}{2} < u_n \leq 1 \ : \ n \geq 0$

- نثبت صحة الخاصة لأجل $n = 0$ محققة $E(0) : \dfrac{1}{2} < u_0 = 1 \leq 1$
- نفرض الخاصة صحيحة لأجل n $E(n) : \dfrac{1}{2} < u_n \leq 1 \quad : n \geq 0$
- نثبت صحة الخاصة لأجل $n+1$ $E(n+1) : \dfrac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$

نعلم أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$

بما أن المتتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$ والتابع f متزايد تماماً على $]-3, +\infty[$ نستنتج أن :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(u_n) \leq f(1)$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8} < 1$$

إذاً : $\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$ وبالتالي $E(n+1)$ محققة و $E(n)$ صحيحة أيا كان العدد الطبيعي n

② لتكن الخاصة : $E'(n) \colon u_{n+1} < u_n$

- نثبت صحة الخاصة لأجل $n = 0$ محققة $E'(0) : u_1 = \dfrac{5}{8} < u_0 = 1$
- نفرض الخاصة صحيحة لأجل n $E'(n) : \ u_{n+1} < u_n$
- نثبت صحة الخاصة لأجل $n+1$ $E'(n+1) : \ u_{n+2} < u_{n+1}$

نعلم أن $u_{n+1} < u_n$

بما أن المتتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$ والتابع f متزايد تماماً على $]-3, +\infty[$ نستنتج أن :

$$f(u_{n+1}) < f(u_n)$$

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

وبالتالي $E'(n+1)$ محققة و $E'(n)$ صحيحة أيا كان العدد الطبيعي n (فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً)

التمرين الثالث : f هو التابع المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{x^2+4x+4sinx}{x}$

خطه البياني C

① أوجد $\lim_{x\to 0} f(x)$

② برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

وادرس وضع C بالنسبة لهذا المقارب .

الحل :

① لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$ نزيله $\lim_{x\to 0} f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4sinx}{x} = x + 4 + \ 4\left(\frac{sinx}{x}\right)$$

ولأن: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\right) = 1$ فإن $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 + 4 + 4(1) = 8$

② لنضع : $g(x) = f(x) - (x+4) = 4\left(\frac{sinx}{x}\right)$

أيا كان $x \in]0,+\infty[$ فإن : $-1 \le sinx \le +1$

عندما $x > 0$ $-\frac{1}{x} \le \frac{sinx}{x} \le +\frac{1}{x}$

$$-\frac{4}{x} \le 4\frac{sinx}{x} \le \frac{4}{x}$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x}\right) = 0$ حسب مبرهنة الإحاطة : $\lim_{x\to+\infty}\left(4\frac{sinx}{x}\right) = 0$

لدراسة الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه Δ ندرس إشارة $g(x) = 4\frac{sinx}{x}$ وهي نفس إشارة $\frac{sinx}{x}$

$$g(x) = f(x) - (x+4) = 4\frac{sinx}{x}$$

لدينا $x > 0$ على $]0,+\infty[$ وينعدم الفرق عندما ينعدم البسط

$$sinx = 0 \Leftrightarrow x = \pi k \quad k \in z$$

تتفق إشارة التابع $g(x)$ مع إشارة $sinx$ على المجال $]0,+\infty[$ في حالة $K\epsilon Z^+$

x	$2K\pi$		$(2k\pi + \pi)$		$(2k\pi + 2\pi)$
$g(x)$	0	+	0	−	0
C_f		فوق Δ		تحت Δ	

عندما $k \in Z$ عدد صحيح غير معدوم يتقاطع C_f مع Δ في النقاط $(K\pi, K\pi + 4)$

التمرين الرابع : لتكن الأعداد المركبة $Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $Z_2 = \sqrt{3} + i$ و $Z_3 = 1$

① اكتب كلاً من العددين Z_1 و Z_2 بالشكل الأسي

② حل في C المعادلة $Z^3 = Z_3$

③ اكتب $\left(\frac{Z_1}{2}\right)^{12}$ و $\left(\frac{Z_2}{2}\right)^{12}$ بالشكل الجبري

④ اكتب العدد $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكلين الجبري والأسي واستنتج قيمة كل من $sin\frac{\pi}{12}$ و $cos\frac{\pi}{12}$

الحل :

①

$$Z_2 = \sqrt{3} + i$$

$$|Z_2| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ k \in Z \end{array}$$

$$Z = |Z|(cos\theta + isin\theta) = |Z|e^{i\theta}$$

$$Z_2 = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$Z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$|Z_1| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ k \in Z \end{array}$$

$$Z = |Z|(cos\theta + isin\theta) = |Z|e^{i\theta}$$

$$Z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

② $Z^3 = 1 \Rightarrow (re^{i\theta})^3 = 1 \Rightarrow r^3e^{i(3\theta)} = 1e^{i(0)}$

وبالتالي : $r^3 = 1$ و $3\theta = 0 + 2\pi k$ بحيث k عدد صحيح

وبالتالي : $r = 1$ و $3\theta = 2\pi k$ $\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}k}$

$k = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow Z = 1e^{i(0)} = 1$

$k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow Z = 1e^{i(\frac{2\pi}{3})} = e^{i(\frac{2\pi}{3})}$

$k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow Z = 1e^{i(\frac{4\pi}{3})} = e^{i(\frac{4\pi}{3})}$

بالتالي مجموعة حلول المعادلة $Z^3 = 1$: $\left\{1, e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{4i\frac{\pi}{3}}\right\}$

③ اكتب $\left(\frac{Z_1}{2}\right)^{12}$ و $\left(\frac{Z_2}{2}\right)^{12}$ بالشكل الجبري

$$\left(\frac{Z_1}{2}\right)^{12}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}\right)^{12}=e^{i\frac{12\pi}{4}}=e^{i3\pi}=cos(3\pi)+\mathrm{i}\sin(3\pi)=cos\pi+isin\pi=-1$$

$$\left(\frac{Z_2}{2}\right)^{12}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}\right)^{12}=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{12}=e^{i\frac{12\pi}{6}}=e^{i2\pi}=cos2\pi+isin2\pi=1$$

④ اكتب العدد $Z=\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكلين الجبري والأسي واستنتج قيمة كل من $sin\frac{\pi}{12}$ و $cos\frac{\pi}{12}$

$$Z=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}=\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i+\sqrt{6}i+\sqrt{2}}{3+1}$$

الشكل الجبري :

$$Z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

الشكل الأسي :

$$Z=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+isin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

بالمطابقة بين الشكلين المثلثي والجبري

$$cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : **(100 درجة لكل مسألة)**

المسألة الأولى : نتأمل في معلم متجانس النقاط

$A\left(-\frac{1}{2}, 3, 1\right)$ $B(-1, 0, 2)$ $C(2, 1, 1)$ $D(-3, 3, -1)$

① c) أثبت أن النقاط B, C, D تمثل مستوٍ أوجد معادلته

d) استنتج طبيعة المثلث BCD واحسب مساحته

② c) أثبت أن النقطة A تقع خارج المستوي (BCD)

d) احسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD)

③ احسب حجم رباعي الوجوه $(ABCD)$

④ c) أثبت أنّ النقاط B, C, D تقع على كرة مركزها A

d) احسب نصف قطر هذه الكرة واكتب معادلتها

الحل :

① a)

$\overrightarrow{BC}(x_c - x_B, y_C - y_B, z_C - z_B) = (3, 1, -1)$

$\overrightarrow{BD}(x_D - x_B, y_D - y_B, z_D - z_B) = (-2, 3, -3)$

$\frac{3}{-2} \neq \frac{1}{3}$

فالشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما

فالنقاط B, C, D لا تقع على استقامة واحدة فهي تعين مستوٍ

إيجاد معادلة المستوي (BCD) بأكثر من طريقة سنكتفي بوضع طريقتين :

الطريقة الأولى : نعين $\vec{n}(a, b, c)$ أحد الأشعة الناظمة على المستوي (BCD)

$\vec{n} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow 3a + b - c = 0 \quad \ldots\ldots(1)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow -2a + 3b - 3c = 0 \quad \ldots\ldots(2)$

بما أنه يوجد عدد غير منته من أشعة النواظم على المستوي (BCD) نحدد إحداها باختيار $c = 1$ مثلاً

نعوض في جملة المعادلتين (1) و (2)

$3a + b - 1 = 0 \quad \ldots\ldots(1)'$

$-2a + 3b - 3 = 0 \quad \ldots\ldots(2)'$

نضرب طرفي $(1)'$ بـ العدد -3

$-9a - 3b + 3 = 0 \quad \ldots\ldots(1)''$

$-2a + 3b - 3 = 0 \quad \ldots\ldots(2)'$

بجمع $(1)''$ مع $(2)'$

$-11a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$

نعوض في $(1)'$ نجد $3(0) + b - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 1}$

فيكون شعاع ناظم المستوي (BCD) هو $\vec{n}(0,1,1)$

فتكون معادلة المستوي : $(BCD)\ : a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$

$(BCD)\ : 0(x + 1) + 1(y - 0) + 1(z - 2) = 0$

$(BCD)\ : y + z - 2 = 0$

ملاحظة : بعد إيجاد $\vec{n}(0,1,1)$ شعاع ناظم المستوي (BCD) يمكننا إيجاد معادلة المستوي كما يلي :

معادلة المستوي (BCD) من الشكل : $(BCD)\ : ax + by + cz + d = 0$

$(BCD)\ : 0x + y + z + d = 0$

$(BCD)\ : y + z + d = 0$

وبما أن المستوي (BCD) مار من النقطة $B(-1\,,0\,,2)$ نجد

$(0) + (2) + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -2$

فتصبح معادلة المستوي $(BCD)\ : y + z - 2 = 0$

طريقة الثانية لإيجاد معادلة المستوي (BCD) :

أثبتنا أن الشعاعين $\overrightarrow{BC}(3,1,-1)$ و $\overrightarrow{BD}(-2,3,-3)$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما

حسب تعريف المستوي (BCD) هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق :

$\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$

$(x + 1, y, z - 2) = \alpha(3,1,-1) + \beta(-2,3,-3)$

$(x + 1\,, y\,, z - 2) = (3\alpha - 2\beta\,, \quad \alpha + 3\beta\,, \quad -\alpha - 3\beta)$

$$\begin{cases} x + 1 = 3\alpha - 2\beta & \dots\dots(1) \\ y = \alpha + 3\beta & \dots\dots(2) \\ z - 2 = -\alpha - 3\beta & \dots\dots(3) \end{cases}$$

من (3) نجد $z - 2 = -(\alpha + 3\beta) \quad \dots(4)$

نعوض (2) في (4) **نجد** $z - 2 = -(y)$ ومنه : $(BCD)\ : y + z - 2 = 0$

b) نوجد الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{BC}(3,1,-1) \\ \overrightarrow{BD}(-2,3,-3) \end{matrix}\right\} \quad \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = (3)(-2) + (1)(3) + (-1)(-3) = 0$$

وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ متعامدان فالمثلث BCD قائم في B

يمكن معرفة نوع المثلث BCD كما يلي : نحسب أطوال أضلاع المثلث BCD

$\overrightarrow{BC}(3,1,-1)$ ⇒ $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$ ⇒ $BC^2 = 11$

$\overrightarrow{BD}(-2,3,-3)$ ⇒ $\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$ ⇒ $BD^2 = 22$

$\overrightarrow{CD}(-5,2,-2)$ ⇒ $\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{25+4+4} = \sqrt{33}$ ⇒ $CD^2 = 33$

نلاحظ أن $CD^2 = BC^2 + BD^2$ فالمثلث BCD قائم في B حسب عكس فيثاغورث

حساب مساحة المثلث BCD

$$S = \frac{1}{2} \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| = \frac{1}{2} \times \sqrt{11} \times \sqrt{22}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{11} \times \sqrt{11} \times \sqrt{2} = \frac{11\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{11}{\sqrt{2}}$$

2 (a $A\left(-\frac{1}{2}, 3, 1\right)$ $(BCD) : y + z - 2 = 0$

لإثبات أنّ النقطة A خارج المستوي (BCD) نعوض إحداثيات A في معادلة الـ (BCD)

$$3 + 1 - 2 = 2 \neq 0$$

نلاحظ أن A لا تحقق معادلة (BCD) وبالتالي النقطة A خارج المستوي (BCD)

(b $A\left(-\frac{1}{2}, 3, 1\right)$

$$(BCD) : \overset{a}{\overbrace{0}}x + \overset{b}{\overbrace{1}}y + \overset{c}{\overbrace{1}}z - 2 = 0$$

قانون حساب بعد نقطة $A(\alpha, \beta, \gamma)$ عن مستوي P

$$P : ax + by + cz + d = 0$$

$$dist(A, P) = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$dist(A, (BCD)) = \frac{|y_A + z_A - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$dist(A, (BCD)) = \frac{|3 + 1 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2|}{\sqrt{2}}$$

$$dist(A, (BCD)) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

3 حساب حجم رباعي الوجوه : $(ABCD)$

h ارتفاع رباعي الوجوه $(ABCD)$ هو بعد الرأس A عن القاعدة (BCD)

$$V = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3} \times \frac{11}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = \frac{11}{3}$$

④ (a

$$BA = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2 + (3-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$CA = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-2\right)^2 + (3-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$DA = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2 + (3-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

نلاحظ أن $BA = CA = DA$ فالنقاط B, C, D تقع على سطح كرة مركزها A

(b حساب R :

$$R = BA = CA = DA = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

معادلة الكرة S :

$$S: (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$$

$$S: \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = \frac{41}{4}$$

المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على R وفق : $f(x) = x^3e^x$ والمطلوب :

1) جد تابعاً أصلياً F للتابع f على R بالصيغة $F(x) = P(x)e^x$ حيث P كثير حدود

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

3) ارسم C الخط الباني للتابع f

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = 1$

الحل :

1) التابع الأصلي المطلوب له الصيغة :

$F(x) = P(x)e^x$ حيث $P(x)$ كثير حدود

$F'(x) = f(x)$

$P'(x)e^x + P(x)e^x = f(x)$

$\big(P'(x) + P(x)\big)e^x = (x^3)e^x \qquad (e^x > 0)$

$P'(x) + P(x) = x^3 \qquad \dots (1)$

لكن $degP' < degP$ فدرجة الطرف الأيسر تساوي درجة P في حين درجة الطرف الأيمن تساوي 3

إذاً لابد أن يكون $degP = 3$ وبالتالي هذا يجعلنا نفترض أن $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$P'(x) + P(x) = x^3$

$(3ax^2 + 2bx + c) + (ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^3$

$ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + c + d = x^3$

بالمطابقة بين الطرفين نجد :

$a = 1$ و $3a + b = 0$ و $2b + c = 0$ و $c + d = 0$

ومنه نجد : $a = 1 \quad , \quad b = -3 \quad , \quad c = 6 \quad , \quad d = -6$

نعوض الثوابت a , b , c , d في $P(x)$ $\qquad P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$

$F(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$

يمكن التوثق أنّ $F'(x) = f(x)$

$F'(x) = P'(x)e^x + P(x)e^x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)'e^x + (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$

$F'(x) = (3x^2 - 6x + 6)e^x + (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$

$F'(x) = x^3e^x = f(x)$

(2

$f(x) = x^3 e^x$

التابع f معرف واشتقاقي على R

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 e^x = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي لـ C بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 e^x = +\infty$$

$$f'(x) = (3x^2)e^x + x^3 e^x$$

$$f'(x) = x^2(3 + x)e^x$$

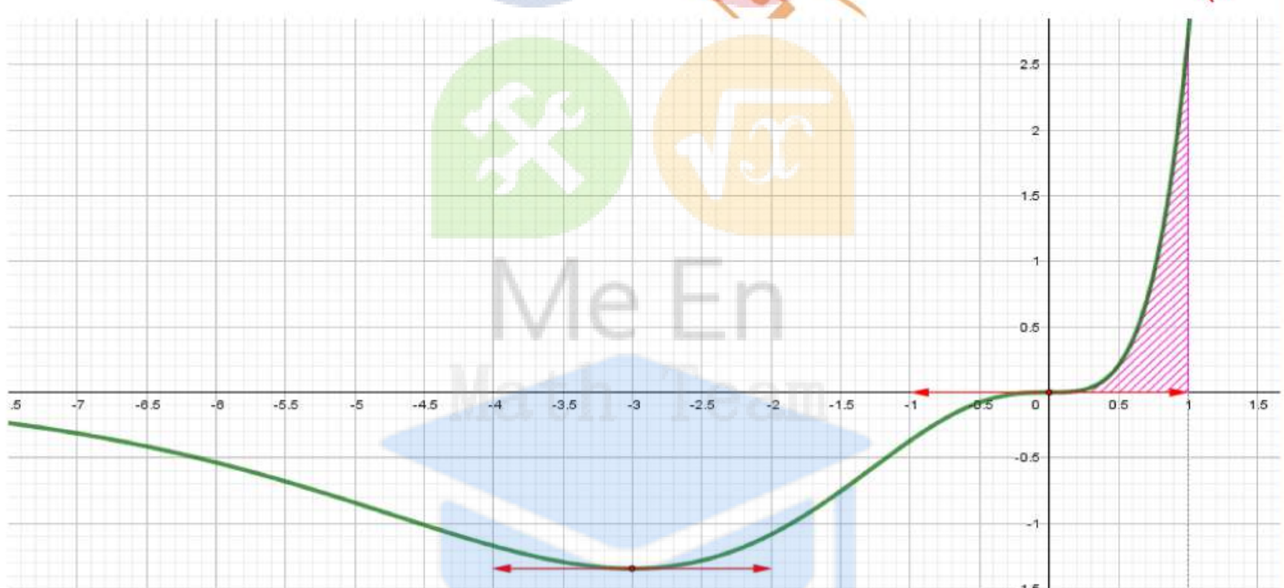
بما أن $e^x > 0$ عندها ينعدم المشتق عندما :

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

أو $x = -3 \Rightarrow f(-3) = -\frac{27}{e^3}$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{27}{e^3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(3



(4

$$S = \int_0^1 f(x)\, dx$$

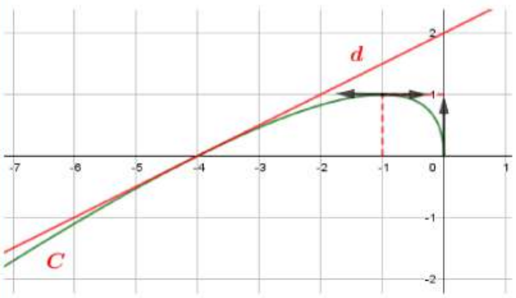
$$S = \Big[F(x)\Big]_0^1 = \Big[(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x\Big]_0^1$$

$$S = (1 - 3 + 6 - 6)e^1 - (0 - 0 + 0 - 6)e^0 = -2e + 6$$

نهاية النموذج الأول بعون الله وفضله

الجمهورية العربية السورية	مادة الرياضيات للثالث الثانوي العلمي	اسم الطالب:
حل النموذج الثاني 2018	دورة 2018 – 2017	المدة: ثلاث ساعات
		الدرجة: 600 درجة

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة التالية (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول : ليكن الشكل المرسوم جانباً C هو الخط البياني لتابع f معرف على $]-\infty, 0]$ و d هو مماس للخط C في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل . والمطلوب

1) نظم جدولاً بتغيرات التابع f

2) اكتب معادلة المماس d والمماس الأفقي لـ C ونصف المماس الشاقولي لـ C

3) ارسم الخط البياني C' للتابع $g(x) = -f(-x)$

السؤال الثاني : ليكن لدينا التابع $f: x \to \frac{3x-1}{(x-2)^2}$ احسب نهاية f عند 2 ثم عين عدداً α يحقق الشرط إذا كان x عنصراً من المجال $]2-\alpha, 2+\alpha[$ مختلفاً عن 2 كان $f(x) > 10^3$

السؤال الثالث : أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) إذا علمت أن $A(3,2,1)$ و $B(0,1,0)$ ثم تمثيلاً وسيطياً لنصف المستقيم $[BA)$

السؤال الرابع : احسب أمثال x^4 في منشور $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^{16}$

ثانياً : أجب عن التمارين الأربعة التالية (60 درجة لكل سؤال)

التمرين الأول : لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 6} : \ n \geq 0 \end{cases}$$

① أثبت أن التابع $x \to \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية متناقصة تماماً ((التمرين مكرر تم حله بالنموذج السابق))

التمرين الثاني : ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1}$

① احسب نهاية f عند $+\infty$

② أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$

وأن نهاية $x \to f(x) - ax$ عدد حقيقي b ثم استنتج وجود مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$

التمرين الثالث : يتواجه فريقان A و B في لعبة كرة الطائرة مكونة من خمسة أشواط .

يكسب الفريق B الشوط الواحد باحتمال يساوي 0.6

ويربح الفريق المباراة الذي يكسب أكبر عدد من الأشواط . ما احتمال أن يربح الفريق A ؟

التمرين الرابع : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط

$A(1,-1,-2)$ $B(1,-2,-3)$ $C(2,0,0)$

① برهن أن النقط A و B و C تعين مستوٍ ثم تحقق أن معادلته الديكارتية هي $x+y-z-2=0$

② ليكن المستويان P و Q معادلتاهما $P: x-y-2z=0$ و $Q: 3x+2y-z+10=0$

ادرس تقاطع المستويات (ABC) و P و Q

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : في مجموعة الأعداد العقدية C

1) المعادلة $z^3-12z^2+48z-128=0$

1. تحقق أن $z=8$ هو حلاً للمعادلة
2. عين الثوابت α و β و γ ليكون $z^3-12z^2+48z-128=(z-8)(\alpha z^2+\beta z-\gamma)$

2) في المستوي العقدي لنعرف النقط A و B و C صور الأعداد

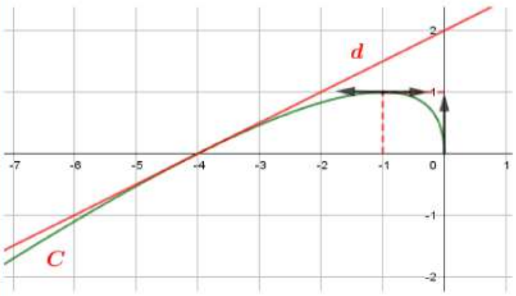
$Z_C=8$ $Z_B=2+2i\sqrt{3}$ $Z_A=2-2i\sqrt{3}$

1. اكتب كلاً من الأعداد Z_A و Z_B و Z_C بالشكل الأسي
2. أوجد طويلة وزاوية العدد $Z=\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC
3. أنشئ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(C,|Z_C|)$ و $(B,|Z_B|)$ و $(A,|Z_A|)$
4. أوجد مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|$

المسألة الثانية : ليكن الخط البياني C للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$

1) احسب نهاية التابع f عند الصفر و $+\infty$ واستنتج ماله من مقاربات توازي المحورين الإحداثيين ثم ادرس وضع C مع مقاربه الأفقي Δ
2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها
3) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$
4) باستخدام التقريب التآلفي المحلي احسب قيمة تقريبية لـ $f(1.1)$
5) ارسم Δ ثم ارسم C
6) احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين $x=e$, $x=1$

حلول النموذج الثاني 2018



أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة التالية (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : ليكن الشكل المرسوم جانباً Cهو الخط البياني لتابع f معرف على $]-\infty, 0[$ و d هو مماس للخط C في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل . والمطلوب

1) نظم جدولاً بتغيرات التابع f

2) اكتب معادلة المماس d والمماس الأفقي لـ C ونصف المماس الشاقولي لـ C

3) ارسم الخط البياني C' للتابع $g(x) = -f(-x)$

الحل :

1)

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

2) المماس d مار بالنقطتين $(0,2)$ و $(-4,0)$

ميل المماس :
$$m = \frac{2-0}{0-(-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

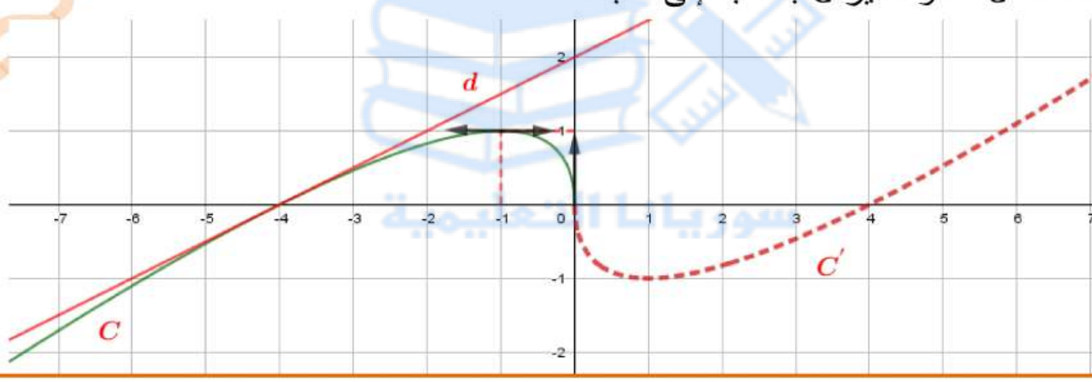
معادلة المماس :
$$d: y = mx + c$$
$$y = \frac{1}{2}x + c$$

لتعيين الثابت c نعلم أن $(0,2) \in d$
$$2 = \frac{1}{2}(0) + c \;\Rightarrow\; c = 2$$

إذاً معادلة المماس d
$$d: y = \frac{1}{2}x + 2$$

(نصف المماس الشاقولي معادلته $x = 0$) (المماس الأفقي معادلته $y = 1$)

3) الخط C' هو نظير C بالنسبة إلى المبدأ



السؤال الثاني : ليكن لدينا التابع $f: x \to \frac{3x-1}{(x-2)^2}$ احسب نهاية f عند 2 ثم عين عدداً α يحقق الشرط

إذا كان x عنصراً من المجال $]2-\alpha, 2+\alpha[$ مختلفاً عن 2 كان $f(x) > 10^3$

الحل :

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{(x-2)^2} = +\infty$$

البسط $3x-1$ يقترب من 5 عندما تقترب x من 2

نجعل $3x-1 > A$ حيث $A \in]0,5[$ (ونتحقق أن $x \neq 2$)

بفرض $A = 1.6$ مثلاً (أي عدد أصغر تماماً من 5)

فيكون $3x-1 > 1.6$ في جوار العدد 2 وتحديدا $x > 0.86$ ومختلفا عن 2

$$f(x) = \frac{3x-1}{(x-2)^2} > \frac{1.6}{(x-2)^2} > 10^3$$

$$\frac{1.6}{(x-2)^2} > 10^3$$

$$\frac{(x-2)^2}{1.6} < 10^{-3}$$

$$(x-2)^2 < 10^{-3} \times 1.6$$

$$(x-2)^2 < 10^{-3} \times \frac{16}{10}$$

$$(x-2)^2 < 10^{-4} \times 16$$

$$|x-2| < 10^{-2} \times 4$$

$$|x-2| < \overbrace{0.04}^{\alpha}$$

نأخذ $\alpha = 0.04$ عندئذٍ أياً كانت $x \in]2-\alpha, 2+\alpha[$ في حالة $x \neq 2$ كان :

$$f(x) = \frac{3x-1}{(x-2)^2} > \frac{3(2-\alpha)-1}{(2-\alpha-2)^2} = \frac{5-2\alpha}{\alpha^2} = \frac{5-2(0.04)}{(0.04)^2} = \frac{4.92}{1.6\times 10^{-3}} = \frac{4.92}{1.6}\times 10^3 > 10^3$$

وبالتالي $\alpha = 0.04$

السؤال الثاني : ليكن لدينا التابع $f: x \to \frac{3x-1}{(x-2)^2}$ احسب نهاية f عند 2 ثم عين عدداً α يحقق الشرط

إذا كان x عنصراً من المجال $]2-\alpha, 2+\alpha[$ مختلفاً عن 2 كان $f(x) > 10^3$

الحل بطريقة ثانية

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x-1}{(x-2)^2} = +\infty$$

$$2-\alpha < x < 2+\alpha$$

$x < 2+\alpha$	$2-\alpha < x$
$x-2 < \alpha$	$6-3\alpha < 3x$
$(x-2)^2 < \alpha^2$	$5-3\alpha < 3x-1$

إذا كان a, b, c, d مقادير موجبة تماماً وكان $a \le b$ و $c \le d$ فإن $\frac{a}{d} \le \frac{b}{c}$

$$f(x) = \frac{3x-1}{(x-2)^2} > \frac{5-3\alpha}{\alpha^2}$$

نختار α بحيث تجعل الكسر أكبر من 10^3

نختار $\alpha = 0.01 = 10^{-2}$ فيكون

$$f(x) > \frac{5-3\alpha}{\alpha^2} = \frac{5-3(0.01)}{10^{-4}} = (5-0.03)10^4 = 4.94 \times 10^4 = 49.4 \times 10^3$$

يمكن اعتبار $\alpha = 0.01$

السؤال الثاني : ليكن لدينا التابع $f: x \to \frac{3x-1}{(x-2)^2}$ احسب نهاية f عند 2 ثم عين عدداً α يحقق الشرط

إذا كان x عنصراً من المجال $]2-\alpha, 2+\alpha[$ مختلفاً عن 2 كان $f(x) > 10^3$

الحل بطريقة ثالثة :

$D_f = R\backslash\{2\}$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{3x-1}{(x-2)^2} = +\infty$$

الشرط : إذا كان x من المجال $]2-\alpha, 2+\alpha[$ مختلفاً عن 2 كان $f(x) > 10^3$ هذا يعني:

$$\frac{3x-1}{(x-2)^2} > 10^3$$

$$\frac{3(x-2+2)-1}{(x-2)^2} > 10^3$$

$$\frac{3(x-2)+5}{(x-2)^2} > 10^3$$

$$10^3(x-2)^2 - 3(x-2) - 5 < 0$$

بفرض $y = x - 2$

$$10^3 y^2 - 3y - 2 < 0$$

$a = 10^3$

$b = -3$

$c = -5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(10^3)(-5)$$

$$\Delta = 9 + 20\,000 = 20\,009 > 0$$

للمعادلة حلان

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{20\,009} \simeq 141.45$$

$$y_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-141.45}{2000} = \frac{-138.45}{2000} \simeq -0.07$$

$$y_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+141.45}{2000} = \frac{144.45}{2000} \simeq 0.07$$

ومنه حلول المتراجحة هي

$$-0.07 < y < 0.07$$

$$-0.07 < x - 2 < 0.07$$

$$2 - 0.07 < x < 2 + 0.07$$

$$x \in]2-0.07, \quad 2+0.07[$$

$$\alpha = 0.07$$

ملاحظة : يوجد عدد من قيم α تحقق المتراجحة

السؤال الثالث : أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) إذا علمت أن $A(3,2,1)$ و $B(0,1,0)$

ثم تمثيلاً وسيطياً لنصف المستقيم $[BA)$

الحل :

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}\left(\overbrace{-3}^{a}, \overbrace{-1}^{b}, \overbrace{-1}^{c}\right)$$ شعاع موجه للمستقيم (AB)

$$(AB)\begin{cases} x = at + x_B \\ y = bt + y_B \quad ; \quad t \in R \\ z = ct + z_B \end{cases} \qquad (AB)\begin{cases} x = -3t \\ y = -t + 1 \quad ; \quad t \in R \\ z = -t \end{cases}$$

طريقة أولى : لإيجاد تمثيلاً وسيطياً لنصف المستقيم $[BA)$

$$\overrightarrow{AB}\left(\overbrace{-3}^{a}, \overbrace{-1}^{b}, \overbrace{-1}^{c}\right)$$ شعاع موجه لنصف المستقيم $[BA)$

$$[BA)\begin{cases} x = at + x_B \\ y = bt + y_B \quad ; \quad t \in [0, +\infty[\\ z = ct + z_B \end{cases}$$

$$[BA)\begin{cases} x = -3t \\ y = -t + 1 \quad ; \quad t \in [0, +\infty[\\ z = -t \end{cases}$$

طريقة ثانية : لإيجاد تمثيلاً وسيطياً لنصف المستقيم $[BA)$

$$\overrightarrow{BA}\left(\overbrace{3}^{a}, \overbrace{1}^{b}, \overbrace{1}^{c}\right)$$ شعاع موجه لنصف المستقيم $[BA)$

$$[BA)\begin{cases} x = at + x_B \\ y = bt + y_B \quad ; \quad t \in [0, +\infty[\\ z = ct + z_B \end{cases} \qquad [BA)\begin{cases} x = 3t \\ y = t + 1 ; \quad t \in [0, +\infty[\\ z = t \end{cases}$$

السؤال الرابع : احسب أمثال x^4 في منشور $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{16}$

الحل :

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدين $(a+b)^n$ هي :

$$T_r = \binom{n}{r} a^{\,n-r} b^r \qquad ; r = 0, \ldots, n$$

$$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{16} = (a+b)^n \qquad \Rightarrow \qquad a = 2x \qquad b = \frac{1}{x} \qquad n = 16$$

$$T_r = \binom{16}{r} (2x)^{\,16-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$T_r = \binom{16}{r} (2x)^{\,16-r} . (x)^{-r}$$

$$T_r = \binom{16}{r} 2^{16-2r}\, x^{\,16-r} x^{-r}$$

$$T_r = \binom{16}{r} 2^{16-2r}\, x^{\,16-2r}$$

الحد الذي يحوي x^4 هو الحد ذي الدليل r حيث :

$$16 - 2r = 4 \qquad \Rightarrow \qquad r = 6$$

$$T_6 = \binom{16}{6} 2^{16-2(6)}\, x^{\,4} = \binom{16}{6} 2^4\, x^{\,4}$$

أمثال $x^{\,4}$ هو : $\binom{16}{6} 2^4 = \dfrac{16\times15\times14\times13\times12\times11}{6\times5\times4\times3\times2\times1} \times 16 = 128128$

ثانياً : أجب عن التمارين الأربعة التالية (60 درجة لكل سؤال)

التمرين الثاني : ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1}$

① احسب نهاية f عند $+\infty$

② أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$

وأن نهاية $x \to f(x) - ax$ عدد حقيقي b ثم استنتج وجود مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$

الحل :

①
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

②
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+1}}{\sqrt{x^2}}$$

$\sqrt{x^2} = |x| = x : x > 0$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+4x+1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$$

$\boxed{a = 1}$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1} - x\right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty+$ نزيله

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4x+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+4x+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+4x+1} + x\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+4x+1} + x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+1}{\left(\sqrt{x^2+4x+1} + x\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{|x| \,.\, \sqrt{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x \,.\, \sqrt{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4+\frac{1}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} + 1} = \frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{4}{2} = 2 \;\Rightarrow\; \boxed{b = 2}$$

المقارب المائل لـ C بجوار $+\infty$ هو $y = ax + b$ أي $y = x + 2$: Δ

التمرين الثالث : يتواجه فريقان A و B في لعبة كرة الطائرة مكونة من خمسة أشواط .

يكسب الفريق B الشوط الواحد باحتمال يساوي 0.6

ويربح الفريق المباراة الذي يكسب أكبر عدد من الأشواط . ما احتمال أن يربح الفريق A ؟

الحل :

التجربة هنا برنولية فيها حدث النجاح S أن يربح B الدور الواحد

فيكون $p = P(S) = \frac{6}{10}$ و $(n = 5)$ تكرار التجربة 5 مرات

المتحول العشوائي X الذي يعطي عدد النجاحات في هذه التجربة يتبع قانون حداني وسيطاه $\beta\left(5, \frac{6}{10}\right)$ $\beta(n, p)$

((X عدد الأدوار التي يكسبها B بعد خمسة أدوار))

A حدث أن يربح A المباراة يوافق : $A = \{(X \leq 2)\}$

ملاحظة ((احتمال ربح الفريق A يساوي احتمال خسارة الفريق B هذا يعني ربح الفريق B شوطين على الأكثر))

$$P(A) = P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k} \qquad (0 \leq k \leq n \text{ طبيعي})$$

$$P(A) = P(X \leq 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{6}{10}\right)^2 \left(\frac{4}{10}\right)^3 + \binom{5}{1}\left(\frac{6}{10}\right)^1 \left(\frac{4}{10}\right)^4 + \binom{5}{0}\left(\frac{6}{10}\right)^0 \left(\frac{4}{10}\right)^5$$

$$P(A) = P(X \leq 2) = \frac{5 \times 4}{2 \times 1}\left(\frac{36}{100}\right)\frac{64}{1000} + 5\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{256}{10000}\right) + 1(1)\,\frac{1024}{100000}$$

$$P(A) = P(X \leq 2) = \frac{10 \times 36 \times 64}{100000} + \frac{5 \times 6 \times 256}{100000} + \frac{1024}{100000} = \frac{23040 + 7680 + 1024}{100000}$$

$$P(A) = P(X \leq 2) = \frac{23040 + 7680 + 1024}{100000} = \frac{31744}{100000}$$

طريقة ثانية :

بما أن الفريق B يكسب الشوط الواحد باحتمال يساوي 0.6

فيكون الفريق A يكسب الشوط الواحد باحتمال يساوي $0.4 = 1 - 0.6$

التجربة هنا برنولية فيها حدث النجاح S أن يربح A الدور الواحد

فيكون $p = P(S) = \frac{4}{10}$ و $(n = 5)$ تكرار التجربة 5 مرات

المتحول العشوائي X الذي يعطي عدد النجاحات في هذه التجربة يتبع قانون حداني وسيطاه $\beta\left(5, \frac{4}{10}\right)$

((Xعدد الأدوار التي يكسبها A بعد خمسة أدوار)) الفريق A يربح المباراة إذا فاز ثلاث أدوار على الأقل :

$$P(A) = P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

التمرين الرابع : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط

$A(1,-1,-2)$ $\quad$ $B(1,-2,-3)$ $\quad$ $C(2,0,0)$

1) برهن أن النقط A و B و C تعين مستوٍ ثم تحقق أن معادلته الديكارتية هي $x+y-z-2=0$

2) ليكن المستويان P و Q معادلتاهما $P: x-y-2z=0$ و $Q: 3x+2y-z+10=0$

ادرس تقاطع المستويات (ABC) و P و Q

الحل :

1) $\frac{0}{1}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{-1}{2}$

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)=(0,-1,-1)$

$\overrightarrow{AC}(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)=(1,1,2)$

فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما

فالنقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة فهي تعين مستوٍ (ABC)

يمكن إيجاد معادلة المستوي (ABC) بأكثر من طريقة سنكتفي بطريقة واحدة :

نعين $\vec{n}(a,b,c)$ أحد الأشعة الناظمة على المستوي (ABC)

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -b-c=0 \quad ......(1)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow a+b+2c=0 \quad ......(2)$

بما أنه يوجد عدد غير منته من أشعة النواظم على المستوي (BCD) نحدد إحداها باختيار $c=1$ مثلاً

نعوض في جملة المعادلتين (1) و (2) $\quad$ $-b-1=0 \quad ......(1)'$

$a+b+2=0 \quad ......(2)'$

من $(1)'$ نجد أن $b=-1$ نعوض في $(2)'$ نجد $a=-1$

فيكون شعاع ناظم المستوي (ABC) هو $\vec{n}(-1,-1,1)$

فتكون معادلة المستوي : $(ABC): a(x-x_C)+b(y-y_C)+c(z-z_C)=0$

$$-1(x-2)-1(y-0)+1(z-0)=0$$

$$-x+2-y+z=0$$

$(ABC): x+y-z-2=0$

ملاحظة : بعد إيجاد $\vec{n}(-1,-1,1)$ شعاع ناظم المستوي (ABC)يمكننا إيجاد معادلة المستوي كما يلي :

معادلة المستوي (ABC) من الشكل : $(ABC)\ : ax + by + cz + d = 0$

$(ABC)\ : -x - 1y + 1z + d = 0$

وبما أن المستوي (ABC) مار من النقطة $C(2\,,0\,,0)$ نجد :

$-(2) - 1(0) + 1(0) + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2$

فتصبح معادلة المستوي $(ABC) : x + y - z - 2 = 0$

2

$$(S)\begin{cases} (ABC) : x + y - z - 2 = 0 & \ldots \quad (L_1) \\ P \quad : x - y - 2z = 0 & \ldots \quad (L_2) \\ Q \quad : 3x + 2y - z + 10 = 0 & \ldots \quad (L_3) \end{cases}$$

$$(S')\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 & \ldots \quad (L_1) \\ 2y + z - 2 = 0 & \ldots \quad (L_1 - L_2) = (L_2)' \\ -y + 2z + 16 = 0 & \ldots \quad (-3L_1 + L_3) = (L_3)' \end{cases}$$

$$(S')\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 & \ldots \quad (L_1) \\ 2y + z - 2 = 0 & \ldots \quad (L_2)' \\ 5z + 30 = 0 & \ldots \quad ((L_2)' + 2(L_3)') = (L_3)'' \end{cases}$$

$$(S'')\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 & \ldots \quad (L_1) \\ 2y + z - 2 = 0 & \ldots \quad (L_2)' \\ z + 6 = 0 & \ldots \quad (L_3)'' \end{cases}$$

من $(L_3)''$ نجد أن $\boxed{z = -6}$ نعوض في $(L_2)'$ نجد أن $\boxed{y = 4}$ ثم نعوض في (L_1) نجد $\boxed{x = -8}$

فالجملة تقبل حلاً وحيداً $(x, y, z) = (-8,4,-6)$

أي أن المستويات الثلاث تتقاطع في نقطة واحدة $I(-8,4,-6)$

طريقة ثانية لحل جملة المعادلات الثلاث للمستويات (ABC) و P و Q :

2

$$(S)\quad \begin{cases} (ABC) : x + y - z - 2 = 0 & \dots \quad (L_1) \\ P \quad : x - y - 2z \ = 0 & \dots \quad (L_2) \\ Q \quad : 3x + 2y - z + 10 = 0 & \dots \quad (L_3) \end{cases}$$

من (L_1) و (L_2) نجد :

$$x + y = z + 2 \qquad (L_1)'$$

$$x - y = 2z \qquad (L_2)'$$

بالجمع :

$$x = 1 + \frac{3}{2}z \qquad (L_4)$$

نعوض في $(L_1)'$

$$1 + \frac{3}{2}z + y = z + 2$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}z \qquad (L_5)$$

نعوض (L_4) و (L_5) في (L_3)

$$3 + \frac{9}{2}z + 2 - z - z + 10 = 0$$

$$\frac{5}{2}z + 15 = 0$$

$$5z + 30 = 0$$

$$z = -\frac{30}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = -6}$$

نعوض في (L_4) و (L_5)

$$x = 1 + \frac{3}{2}(-6) = -8$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}(-6) = 4$$

فالجملة تقبل حلاً وحيداً $(x, y, z) = (-8, 4, -6)$

أي أن المستويات الثلاث تتقاطع في نقطة واحدة $I(-8, 4, -6)$

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : في مجموعة الأعداد العقدية C

1) المعادلة $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0$

1. تحقق أن $z = 8$ هو حلاً للمعادلة

2. عين الثوابت α و β و γ ليكون $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = (z-8)(\alpha z^2 + \beta z - \gamma)$

ثم حل المعادلة .

2) في المستوي العقدي لنعرف النقط A و B و C صور الأعداد

$Z_C = 8$ $\qquad Z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$ $\qquad Z_A = 2 - 2i\sqrt{3}$

1. اكتب كلاً من الأعداد Z_A و Z_B و Z_C بالشكل الأسي

2. أوجد طويلة وزاوية العدد $Z = \frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC

3. أنشئ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(C, |Z_C|)$ و $(B, |Z_B|)$ و $(A, |Z_A|)$

4. أوجد مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\|$

الحل :

1)
$$z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0$$

1. تحقق أن $z = 8$ هو حلاً للمعادلة

$$(8)^3 - 12(8)^2 + 48(8) - 128 = 0$$
$$512 - 768 + 384 - 128 = 0$$

ومنه $z = 8$ هو حلاً للمعادلة لأنه حققها $\qquad 0 = 0$ محققة

2. بإجراء القسمة الإقليدية

$$\begin{array}{r|l} & Z^2 - 4Z + 16 \\ \hline Z - 8 & Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 \\ & \mp Z^3 \pm 8Z^2 \\ \hline & 0 - 4Z^2 + 48Z - 128 \\ & \pm 4Z^2 \mp 32Z \\ \hline & 0 + 16Z - 128 \\ & \mp 16Z \pm 128 \\ \hline & 0 + 0 \end{array}$$

$$z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = (z-8)(z^2 - 4z + 16)$$
$$z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = (z-8)(\alpha z^2 + \beta z - \gamma)$$

بالمطابقة نجد : $\gamma = +16$ و $\beta = -4$ و $\alpha = 1$

حل المعادلة :

$$z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0$$

$$(z-8)(z^2 - 4z + 16) = 0$$

إما $z - 8 = 0$ ⇨ $z = 8$

أو $z^2 - 4z + 16 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 16 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (-4)^2 - 4(1)(16) = 16 - 64 \\ \Delta = -48 < 0 \end{array}$$

$$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{-(-48)} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

وللمعادلة جذران تخيليان مترافقان :

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 - 4\sqrt{3}\,i}{2} = 2 - 2\sqrt{3}\,i$$

الجذر الثاني مرافق الجذر الأول

$$Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 + 4\sqrt{3}\,i}{2} = 2 + 2\sqrt{3}\,i$$

(2

.1 A **صورة العدد** $\boldsymbol{Z_A = 2 - 2i\sqrt{3}}$

$$Z_A = \sqrt{(2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \arg Z_A = \theta = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \quad (k \in Z) \\ Z_A = |Z_A| e^{i\theta} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{array}$$

B **صورة العدد** $\boldsymbol{Z_B = 2 + 2i\sqrt{3}}$

$$Z_B = \sqrt{(2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \arg Z_B = \theta = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \quad (k \in Z) \\ Z_B = |Z_B| e^{i\theta} = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \end{array}$$

أو يمكن القول بما أن Z_B هو مرافق Z_A إذاً $|Z_B| = |Z_A|$ وأيضاً

$\arg Z_B = -\arg Z_A = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad (k \in Z)$ ومنه : $Z_B = |Z_B| e^{i\theta} = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$

C **صورة العدد** $\boldsymbol{Z_C = 8}$

نجد وضوحاً $\boldsymbol{Z_C = 8}$ عدد حقيقي وبالتالي $|Z_C| = 8$

$\arg Z_C = 0 + 2\pi k \quad (k \in Z)$ إذاً $Z_C = |Z_C| e^{i\theta} = 8e^{i0}$

.2

$$Z=\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}$$

$$Z=\frac{2-2i\sqrt{3}-8}{2+2i\sqrt{3}-8}=\frac{-6-2i\sqrt{3}}{-6+2i\sqrt{3}}=\frac{(-6-2i\sqrt{3})(-6-2i\sqrt{3})}{(-6+2i\sqrt{3})(-6-2i\sqrt{3})}$$

$$Z=\frac{36+12\sqrt{3}i+12\sqrt{3}i-12}{36+12}=\frac{24+24\sqrt{3}i}{48}=\frac{24(1+\sqrt{3}i)}{48}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$Z=\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$|Z|=\left|\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$arg(Z)=arg\left(\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}cos\theta&=\frac{1}{2}\\ sin\theta&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\}\quad \theta=\frac{\pi}{3}+2\pi k\quad (k\epsilon\, Z)$$

$$arg(Z)=\frac{\pi}{3}\quad(2\pi)$$

$$arg\left(\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}\right)=\frac{\pi}{3}\qquad\qquad \left|\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}\right|=1$$

$$\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{3}\qquad\qquad \frac{CA}{CB}=1$$

أي أن: $CA=CB$

أي أن المثلث ABC متساوي الساقين فيه زاوية $\frac{\pi}{3}$ فهو متساوي الأضلاع

.3 إنشاء G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(C,|Z_C|)$ $(B,|Z_B|)$ $(A,|Z_A|)$

$(C;8)$ $(B;4)$ $(A;4)$

لتكن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B;4)$ و $(A;4)$ فتكون H منتصف $[AB]$

لأن لهما نفس التثقيل .

وحسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,8)$ و $(H,8)$

إذاً G منتصف $[CH]$

.4 $(A;4)$ $(B;4)$ $(C;8)$

أوجد مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|$$

الحل :

لدينا من الطلب السابق أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C;8)$ و $(B;4)$ و $(A;4)$

وبالتالي (حسب تجانس مركز الأبعاد المتناسبة)

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C;2)$ و $(B;1)$ و $(A;1)$

ومن أجل نقطة M من الفراغ نجد (حسب مبرهنة)

$(\alpha+\beta+\gamma\neq 0)$ $\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}+\gamma\,\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

❖ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\,\overrightarrow{MC}=(1+2+3)\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\,\overrightarrow{MC}=4\,\overrightarrow{MG}$

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\,\overrightarrow{MC}\|=\|4\,\overrightarrow{MG}\|$

❖ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}}\underbrace{-2\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MC}}=(1+1+2)\overrightarrow{MG}-4\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}-4\overrightarrow{MC}=4\left(\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MC}\right)=4\overrightarrow{CG}$

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|=\|4\overrightarrow{CG}\|$

❖ $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|$

$\|4\,\overrightarrow{MG}\|=\|4\overrightarrow{CG}\|$

$4\,\|\overrightarrow{MG}\|=4\|\overrightarrow{CG}\|$

$\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{CG}\|$

$MG=CG$

إذاً مجموعة النقاط M هي كرة S مركزها G ونصف قطرها $[CG]$

المسألة الثانية : ليكن الخط البياني C للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x) = 1 + \frac{2lnx}{x}$

1) احسب نهاية التابع f عند الصفر و $+\infty$ واستنتج ماله من مقاربات توازي المحورين الإحداثيين ثم ادرس وضع C مع مقاربه الأفقي Δ

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

3) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$

4) باستخدام التقريب التآلفي المحلي احسب قيمة تقريبية لـ $f(1.1)$

5) ارسم Δ ثم ارسم C

6) احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين $x = e$, $x = 1$

الحل :

1) $I =]0,+\infty[$

$$f(x) = 1 + \frac{2lnx}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي لـ C

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1 + 0 = 1$$

$\Delta: y = 0$ مقارب أفقي لـ C بجوار $+\infty$

دراسة وضع C مع مقاربه الأفقي Δ ندرس إشارة الفرق $: x > 0$

$$f(x) - (1) = \frac{2lnx}{x}$$

- عندما $0 < x < 1$ يكون $ln(x) < 0$ وبالتالي C تحت Δ
- عندما $x = 1$ يكون $ln(x) = 0$ وبالتالي C يتقاطع مع Δ
- عندما $x > 1$ يكون $ln(x) > 0$ وبالتالي C فوق Δ

2) دراسة تغيرات f على المجال $I =]0,+\infty[$

التابع f اشتقاقي على I ومشتقه :

$$f'(x) = 2\frac{(lnx)'(x) - (x)'(lnx)}{x^2} = 2\frac{\frac{1}{x}\times x - lnx}{x^2} = 2\frac{1 - lnx}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1 - lnx)$ ينعدم المشتق عندما :

$$1 - lnx = 0$$

$$lnx = 1 \Rightarrow x = e$$

$$f(e) = 1 + \frac{2}{e} = \frac{e+2}{e}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$\frac{e+2}{e} \approx 1.7$	↘	1

3) التابع f مستمر ومتزايد تماماً على $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$

$$\left\{\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2\frac{ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 + 2\frac{-ln2}{\frac{1}{2}} = 1 - 4ln2 < 0 \\ f(1) = 1 + 2\frac{ln1}{1} = 1 + 2(0) = 1 > 0 \end{array}\right. \qquad f\left(\frac{1}{2}\right).f(1) < 0$$

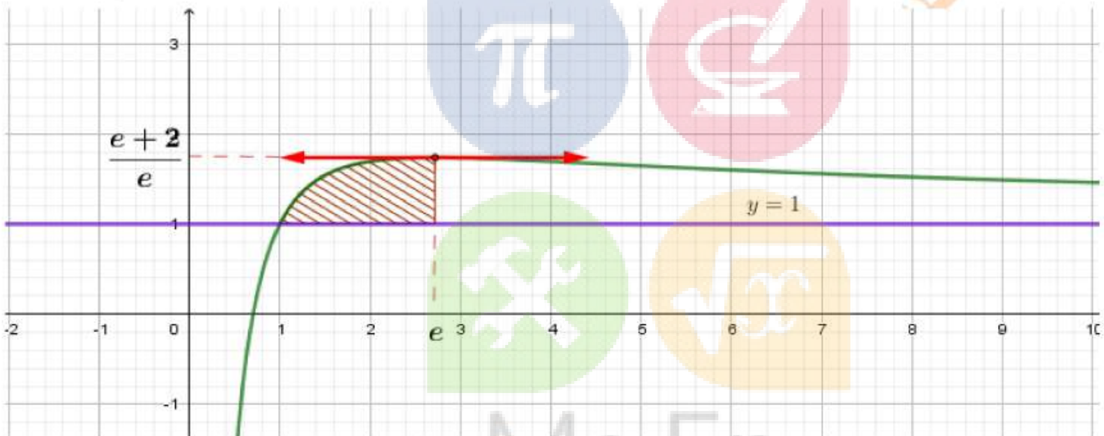
إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

4) $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a) \times h$

$f(1.1) = f(1 + 0.1) \simeq f(1) + f'(1) \times 0.1$

$f(1.1) = f(1 + 0.1) \simeq 1 + 2 \times 0.1 = 1.2$

5)



6) $S = \int_1^e (f(x) - y_\Delta)\, dx$

$S = \int_1^e \left(1 + 2\frac{lnx}{x} - 1\right) dx = 2\int_1^e \left(\frac{lnx}{x}\right) dx = 2\int_1^e \left(\frac{1}{x}\right) lnx\, dx$

$S = 2\left[\frac{1}{2}(lnx)^2\right]_1^e = 2\left(\left(\frac{1}{2}(lne)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(ln1)^2\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$