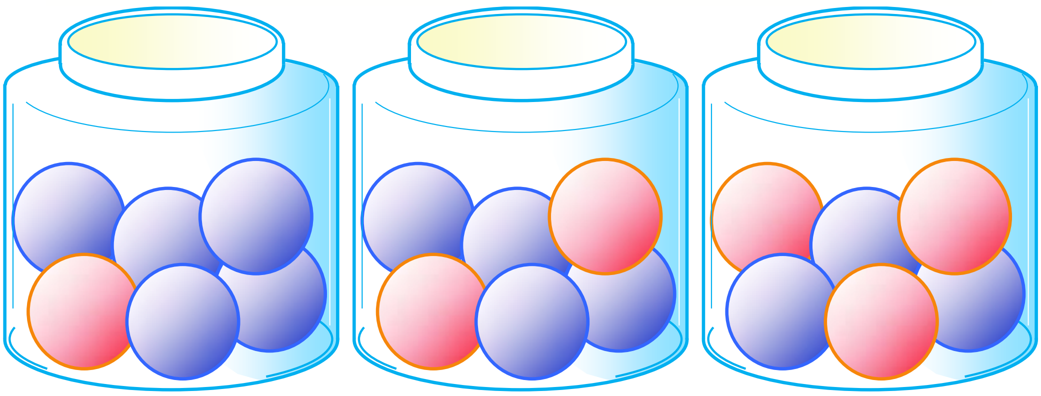
ورقة عمل

الاحتمالات



① ② ③

الصف الثالث الثانوي العلمي

تمارين إضافية في الاحتمالات

التمرين الأول: صندوق يحتوي على أربع بطاقات مرقّمة بالأرقام 1 و 2 و 3 و 4 . نسحب من الصندوق بطاقتين على التتالي مع الإعادة

S متحوّل عشوائي يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين .

X متحوّل عشوائي يدل على باقي قسمة S على 2 ، Y متحول عشوائي يدل على باقي قسمة S على 3 .

1) عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S .
2) عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X ، و احسب $\mathbb{E}(X)$.
3) عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y ، و احسب $\mathbb{E}(Y)$.
4) عيّن القانون الاحتمالي للزّوج (X,Y) .
5) هل المتحولان العشوائيان X و Y مستقلان احتمالياً ؟

الحل

(1

s_i	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(S=s_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

(2

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{2} x_i p_i = (0)(\frac{1}{2})+(1)(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

(3

y_i	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=y_i)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{i=1}^{3} y_i p_i$$

$$=(0)(\frac{5}{16})+(1)(\frac{5}{16})+(2)(\frac{6}{16})=\frac{17}{16}$$

(4

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{2}$
قانون Y	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	

5) المتحولان العشوائيان X و Y غير مستقلين احتمالياً لأنّ:

$$\mathbb{P}(X=0,Y=0)=\frac{3}{16}$$

$$\mathbb{P}(X=0).\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{16}=\frac{5}{32}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=0,Y=0)\neq \mathbb{P}(X=0).\mathbb{P}(Y=0)$$

التمرين الثاني: صندوق يحتوي على خمس كرات مرقمة بالأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 . نسحب من الصندوق كرتين معاً .

S متحوّل عشوائي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .

X متحوّل عشوائي يدل على باقي قسمة S على 2 ، Y متحول عشوائي يدل على باقي قسمة S على 3 .

1) عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S .
2) عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X ، و احسب $\mathbb{E}(X)$.
3) عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y ، و احسب $\mathbb{E}(Y)$.
4) عيّن القانون الاحتمالي للزّوج (X,Y) .
5) هل المتحولان العشوائيان X و Y مستقلان احتمالياً ؟

تمارين إضافية في الاحتمالات

الحل

(1

s_i	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbb{P}(S=s_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(2

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{2} x_i p_i=(0)(\frac{2}{5})+(1)(\frac{3}{5})=\frac{3}{5}$$

(3

y_i	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=y_i)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{i=1}^{3} y_i p_i$$
$$=(0)(\frac{4}{10})+(1)(\frac{3}{10})+(2)(\frac{3}{10})=\frac{9}{10}$$

(4

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{5}$
قانون Y	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	

(5

المتحولان العشوائيان X و Y غير مستقلين احتمالياً لأنّ:

$$\mathbb{P}(X=0,Y=0)=\frac{2}{10}$$

$$\mathbb{P}(X=0).\mathbb{P}(Y=0)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{10}=\frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=0,Y=0)\neq \mathbb{P}(X=0).\mathbb{P}(Y=0)$$

التمرين الثالث: صندوق يحتوي على 9 كرات : كرتان بيضاوان W و ثلاث كرات سوداء B و أربع كرات حمراء R .

نسحب عشوائيّاً كرة من الصندوق ، نسجل لونها ثم نزيل جميع الكرات التي لها نفس لون الكرة المسحوبة ، ثم نسحب كرة أخرى . **المطلوب:**

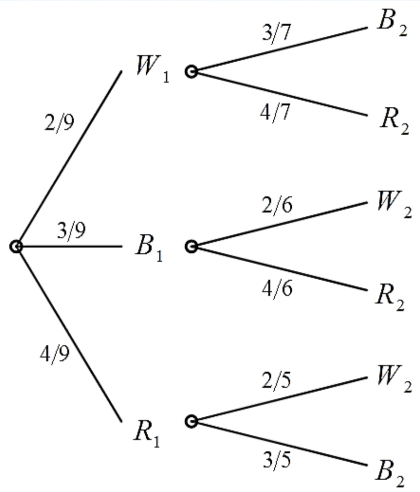
1) أعطِ تمثيلاً شجرياً للتجربة.

2) احسب احتمال الحدث B_2 : " الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية " .

3) إذا علمت أنّ الكرة المسحوبة في السحبة الثانية سوداء ، فما احتمال أن تكون الأولى بيضاء ؟

الحل

(1



(2

$$\mathbb{P}(B_2)=\mathbb{P}(B_2\cap W_1)+\mathbb{P}(B_2\cap R_1)$$
$$=\frac{2}{9}\times\frac{3}{7}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{5}=\frac{38}{105}$$

(3

$$\mathbb{P}(W_1|B_2)=\frac{\mathbb{P}(W_1\cap B_2)}{\mathbb{P}(B_2)}=\frac{\frac{2}{9}\times\frac{3}{7}}{\frac{38}{105}}=\frac{5}{19}$$

تمارين إضافية في الاحتمالات

التمرين الرابع: صندوق يحتوي على خمس كرات : كرتان بيضاوان مرقمتان بالرقمين 1 و 2 ، و ثلاث كرات سوداء مرقمة بالأرقام (-1) و 1 و 2 . نسحب من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة . نتأمل الحدثين :

A : " الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين " $\qquad$ B : " للكرتين المسحوبتين نفس الرقم "

1) عيّن $\mathbb{P}(A)$ و $\mathbb{P}(B)$.
2) إذا علمت أنّ الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين فما احتمال أن تحملا نفس الرقم ؟
3) ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين ، عيّن قانون X و احسب توقّعه الرياضي .
4) احسب احتمال الحدث C : "مجموع رقمي الكرتين يساوي 2 على الأكثر" .

الحل

(1

$$\mathbb{P}(A)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times 2=\frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

(2

$$\mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}$$

(3

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$$

x_i	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{5}x_i\,p_i$$

$$=(0)(\frac{2}{10})+(1)(\frac{2}{10})+(2)(\frac{1}{10})+(3)(\frac{4}{10})+(4)(\frac{1}{10})=2$$

(4

$$\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(X\le 2)$$
$$=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)$$
$$=\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$$

طريقة ثانية:

$$\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(X\le 2)=1-\mathbb{P}(X>2)$$
$$=1-\left[\mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=4)\right]$$
$$=1-\left[\frac{4}{10}+\frac{1}{10}\right]=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

التمرين الخامس: نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الخمس الآتية بأحد العددين $+1$ أو -1

ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع الأعداد في الخانات الخمس بعد ملئها .

1) عيّن مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي .
2) احسب توقّعه الرياضي .

الحل

(1

$$X(\Omega)=\{-5,-3,-1,1,3,5\}$$

x_i	-5	-3	-1	1	3	5
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

(2

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i\,p_i$$

$$=(-5)(\frac{1}{32})+(-3)(\frac{5}{32})+(-1)(\frac{10}{32})+(1)(\frac{10}{32})+(3)(\frac{5}{32})+(5)(\frac{1}{32})$$

$$\mathbb{E}(X)=0$$

تمارين إضافية في الاحتمالات

التمرين السادس: نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الأربع الآتية بأحد العددين 0 أو 1

ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع الأعداد في الخانات الأربع بعد ملئها .

1) اكتب مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي .
2) احسب توقعه الرياضي و تباينه .

الحل

1) X متحول عشوائي حداني حيث $n=4\ ,\ p=\frac{1}{2}$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\quad ,\quad 0\le k\le n$$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{4}{k}(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{4-k}\quad ,\quad 0\le k\le 4$$

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

(2

$$\mathbb{E}(X)=np=(4)(\frac{1}{2})=2$$

$$\mathbb{V}(X)=npq=(4)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})=1$$

التمرين السابع: نملأ عشوائياً ستين خانة بأحد العددين 0 أو 1 . X متحول عشوائي يمثّل مجموع الأعداد في الخانات بعد ملئها .

1) اكتب مجموعة قيم X .
2) احسب توقعه الرياضي و تباينه .

الحل

1) X متحول عشوائي حداني حيث $n=60\ ,\ p=\frac{1}{2}$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,\dots,60\}$$

(2

$$\mathbb{E}(X)=np=(60)(\frac{1}{2})=30$$

$$\mathbb{V}(X)=npq=(60)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})=15$$

التمرين الثامن: في أحد الاختبارات المؤتمتة ، يتضمن الاختبار خمسة أسئلة كل منها مزود بثلاث إجابات مقترحة منها واحدة صحيحة فقط .
يقرّر أحد المتقدمين الإجابة عشوائياً عن هذه الأسئلة . X متحول عشوائي يدل على عدد الإجابات الصحيحة التي يحققها الطالب . **المطلوب:**

1) اكتب مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي .
2) ينجح الطالب في الاختبار إذا حقّق إجابتين صحيحتين على الأقل . احسب احتمال الحدث A الذي يمثل نجاح الطالب في الاختبار .
3) إذا علمت أنّ الطالب نجح في الاختبار ، فما احتمال أن يكون قد حقّق خمسة إجابات صحيحة ؟

الحل

1) X متحول عشوائي حداني حيث $n=5\ ,\ p=\frac{1}{3}$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5\}$$

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

(2

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(X\ge 2)&=1-\mathbb{P}(X<2)\\&=1-\left[\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)\right]\\&=1-\left[\frac{32}{243}+\frac{80}{243}\right]=\frac{131}{243}\end{aligned}$$

(3

$$\mathbb{P}(X=5\,|A)=\frac{\mathbb{P}(X=5\cap A)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\frac{1}{243}}{\frac{131}{243}}=\frac{1}{131}$$

تمارين إضافية في الاحتمالات

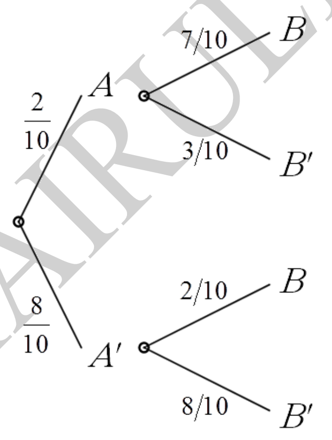
التمرين التاسع: في أحد المجتمعات تظهر أعراض مرض سرطان الرئة على 20% من الأشخاص ، 70% منهم يدخّنون ، و 80% من الأشخاص الذين لا تظهر عليهم علائم المرض لا يدخّنون . نختار عشوائياً شخصاً من هذا المجتمع و نعتبر الحدثين :

A : " الشخص المختار تظهر عليه الأعراض " B : " الشخص المختار مدخّن "

1) أعطِ تمثيلاً شجرياً للتجربة .
2) احسب احتمال أن يكون الشخص المختار مدخّن .
3) إذا علمت أنّ الشخص المختار مدخّن ، فما احتمال أن تظهر عليه أعراض سرطان الرئة ؟

الحل

1)



2)

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(B\cap A)+\mathbb{P}(B\cap A')$$
$$=\frac{2}{10}\times\frac{7}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{3}{10}$$

3)

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\frac{2}{10}\times\frac{7}{10}}{\frac{30}{100}}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$$

التمرين العاشر: في تجربة إلقاء حجر نرد مثالي ، ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثّل باقي قسمة العدد الظاهر على 2 و ليكن Y المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة العدد الظاهر على 3 . **المطلوب**:

1) عيّن قيم X و جدول قانونه الاحتمالي .
2) عيّن قيم Y و جدول قانونه الاحتمالي .
3) عيّن جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) . أيكون المتحولان X و Y مستقلان احتمالياً ؟

الحل

1)

$$X(\Omega)=\{0,1\}$$

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2)

$$Y(\Omega)=\{0,1,2\}$$

y_j	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=y_j)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

3)

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
قانون Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

المتحولان العشوائيان X و Y مستقلان احتمالياً لأنّ:

$$\mathbb{P}(X=x_i,Y=y_j)=\mathbb{P}(X=x_i).\mathbb{P}(Y=y_j)$$

تمارين إضافية في الاحتمالات

التمرين الحادي عشر: صندوق يحتوي على خمس بطاقات مرقمة بالأرقام 0 و 1 و 2 و 3 و 4 . نسحب من الصندوق أربع بطاقات على التتالي مع الإعادة ، و ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور عدد فردي .

1) اكتب مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي .

2) احسب توقعه الرياضي و تباينه .

الحل

1) X متحول عشوائي حداني حيث $n=4\ ,\ p=\frac{2}{5}$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\quad ,\quad 0\le k\le n$$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{4}{k}(\frac{2}{5})^k(\frac{3}{5})^{4-k}\quad ,\quad 0\le k\le 4$$

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

2)

$$\mathbb{E}(X)=np=(4)(\frac{2}{5})=\frac{8}{5}$$

$$\mathbb{V}(X)=npq=(4)(\frac{2}{5})(\frac{3}{5})=\frac{24}{25}$$

التمرين الثاني عشر: يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء . عدد الكرات الحمراء يساوي ضعفَي عدد الكرات البيضاء .

A- نسحب عشوائياً كرة . ما احتمال أن تكون حمراء ؟

B- نسحب من الصندوق أربع كرات على التتالي مع الإعادة . و ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

1) عيّن مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي .

2) احسب $\mathbb{E}(X)$ و $\mathbb{V}(X)$.

الحل

A- نفترض أنّ عدد الكرات البيضاء يساوي n

فيكون عدد الكرات الحمراء $2n$

$$p=\frac{2n}{3n}=\frac{2}{3}$$

B-

1) X متحول عشوائي حداني حيث $n=4\ ,\ p=\frac{2}{3}$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{4}{k}(\frac{2}{3})^k(\frac{1}{3})^{4-k}\quad ,\quad 0\le k\le 4$$

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

2)

$$\mathbb{E}(X)=np=(4)(\frac{2}{3})=\frac{8}{3}$$

$$\mathbb{V}(X)=npq=(4)(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})=\frac{8}{9}$$

التمرين الثالث عشر: يتواجه فريقان A و B في لعبة كرة القدم في مباراة مكوّنة من ثلاثة أدوار . يكسب الفريق A الدور الواحد باحتمال يساوي $\frac{2}{5}$. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الأدوار التي يكسبها الفريق A .

1) عيّن قيم X و قانونه الاحتمالي .

2) يربح المباراة الفريق الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار . ما احتمال أن يربح الفريق A المباراة ؟

3) احسب توقّع X و انحرافه المعياري .

تمارين إضافية في الاحتمالات

الحل

1) X متحول عشوائي حداني حيث $n=3\ ,\ p=\frac{2}{5}$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\quad ,\ 0\le k\le n$$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{3}{k}(\frac{2}{5})^k(\frac{3}{5})^{3-k}\quad ,\ 0\le k\le 3$$

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

2) ليكن A حدث فوز الفريق A في المباراة

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(X\ge 2)=\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)$$
$$=\frac{36}{125}+\frac{8}{125}=\frac{44}{125}$$

3)

$$\mathbb{E}(X)=np=(3)(\frac{2}{5})=\frac{6}{5}$$

$$\mathbb{V}(X)=npq=(3)(\frac{2}{5})(\frac{3}{5})=\frac{18}{25}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}(X)}=\sqrt{\frac{18}{25}}=\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

التمرين الرابع عشر: يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء W و كرتين سوداوين B و كرة حمراء R .

نسحب من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً ، و ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة .

1) اكتب مجموعة قيم X .

2) احسب $\mathbb{P}(X=1)$ و $\mathbb{P}(X=3)$ و استنتج $\mathbb{P}(X=2)$.

3) احسب $\mathbb{E}(X)$.

الحل

1) $X(\Omega)=\{1,2,3\}$

2)

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{20}$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{6}{20}$$

$$\mathbb{P}(X=2)=1-\left[\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=3)\right]$$
$$=1-\left[\frac{1}{20}+\frac{6}{20}\right]=\frac{13}{20}$$

3)

x_i	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{6}{20}$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i p_i$$
$$=(1)(\frac{1}{20})+(2)(\frac{13}{20})+(3)(\frac{6}{20})$$
$$=\frac{45}{20}=\frac{9}{4}$$

التمرين الخامس عشر: تتألّف عائلة من خمسة أطفال . نقبل أنه عند كل ولادة احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة طفلة أنثى .

نفترض أنّ الولادات المتتالية هي أحداث مستقلة احتمالياً . ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الأطفال الذكور في العائلة .

1) اكتب مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي .

2) احسب توقعه الرياضي و تباينه .

تمارين إضافية في الاحتمالات

الحل

1) X متحول عشوائي حداني حيث $n=5\ ,\ p=\frac{1}{2}$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\quad ,\ 0\le k\le n$$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{5}{k}(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{5-k}\quad ,\ 0\le k\le 5$$

2)

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

3)

$$\mathbb{E}(X)=np=(5)(\frac{1}{2})=\frac{5}{2}$$

$$\mathbb{V}(X)=npq=(5)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$$

التمرين السادس عشر: صندوق يحتوي 4 بطاقات مرقّمة بالأرقام 1 و 2 و 3 و 4 . نسحب من الصندوق بطاقة واحدة و نتأمّل الحدثين :

A : "العدد الظاهر زوجي"　　　　B: "العدد الظاهر أولي"

المطلوب: أثبت أنّ الحدثين A و B مستقلان احتمالياً .

الحل

$$\mathbb{P}(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

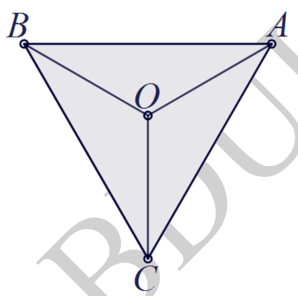
$$\mathbb{P}(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

نلاحظ أنّ $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$

فالحدثان A و B مستقلان احتمالياً .

التمرين السابع عشر: نتأمّل مثلثاً ABC مركزه O . تقفز جزيئة عشوائياً من إحدى هذه النقاط الأربع إلى نقطة أخرى وفق القواعد الآتية :



- إذا كانت الجزيئة في O فإنها تقفز إلى أحد رؤوس المثلث باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$.
- إذا كانت الجزيئة عند أحد رؤوس المثلث فإنّها تقفز إلى O باحتمال يساوي $\frac{1}{2}$.
- في البدء كانت الجزيئة في A .

ليكن في حالة $n\ge 1$ الحدث E_n : " الجزيئة في O بعد القفزة رقم n " و نضع $p_n=\mathbb{P}(E_n)$.

1) عيّن p_1 ثم احسب p_2 بالاستفادة من مخطّط شجري .

2) عبّر عن p_{n+1} بدلالة p_n .

3) لتكن المتتالية التي حدّها العام $t_n=p_n-\frac{1}{3}$. أثبت أنّ المتتالية $(t_n)_{n\ge1}$ هندسيّة ، و اكتب عبارة t_n بدلالة n .

4) استنتج عبارة p_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n$.

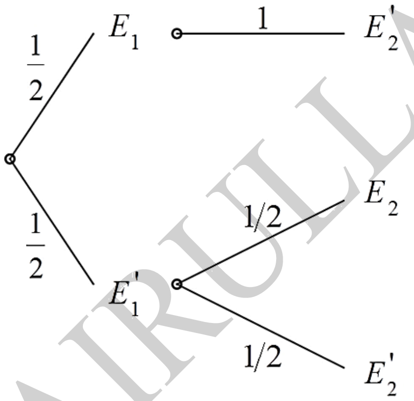
تمارين إضافية في الاحتمالات

الحل

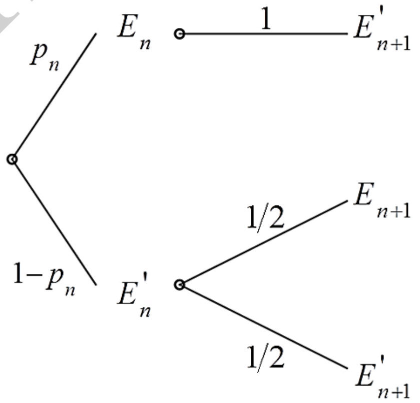
1)

بما أنّ الجزيئة كانت عند A فإنّها تقفز إلى O باحتمال يساوي $\frac{1}{2}$

أي إنّ $p_1=\frac{1}{2}$.



$$p_2=\mathbb{P}(E_2)=\mathbb{P}(E_2\cap E'_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$



2)

$$p_{n+1}=\mathbb{P}(E_{n+1})=\mathbb{P}(E_{n+1}\cap E'_n)=\frac{1}{2}(1-p_n)$$

3)

$$t_{n+1}=p_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}(1-p_n)-\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}(p_n-\frac{1}{3})$$

$$\Rightarrow t_{n+1}=-\frac{1}{2}t_n$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ هندسيّة أساسها $q=-\frac{1}{2}$ و حدّها الأوّل :

$$t_1=p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$t_n=t_1.q^{n-1}$$

$$t_n=(\frac{1}{6}).(-\frac{1}{2})^{n-1}$$

$$\boxed{t_n=(\frac{-1}{3}).(-\frac{1}{2})^n}$$

$$t_n=p_n-\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ p_n=t_n+\frac{1}{3}$$

$$\boxed{p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(0)=\frac{1}{3}$$

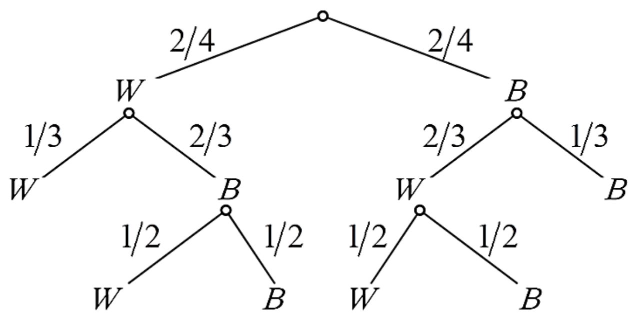
$$\lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{2})^n=0\quad;\quad |q|<1$$

التمرين الثامن عشر: نتأمّل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين و كرتين بيضاوين . نكرّر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته . ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثّل عدد مرّات السحب اللازمة .

1) عيّن مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي .

2) احسب توقعه الرياضي و تباينه .

الحل



x_i	2	3
$\mathbb{P}(X=x_i)$	1/3	2/3

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{2}x_ip_i=(2)(\frac{1}{3})+(3)(\frac{2}{3})=\frac{8}{3}$$

$$\mathbb{E}(X^2)=\sum_{i=1}^{2}x_i^2p_i=(2)^2(\frac{1}{3})+(3)^2(\frac{2}{3})=\frac{22}{3}$$

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-[\mathbb{E}(X)]^2=\frac{66}{9}-\frac{64}{9}=\frac{2}{9}$$

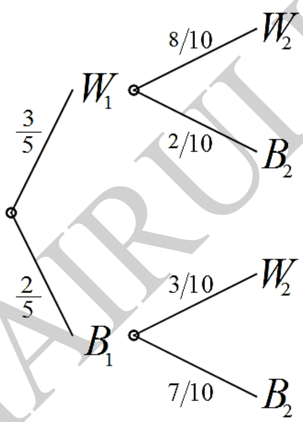
تمارين إضافية في الاحتمالات

التمرين التاسع عشر: صندوق يحتوي 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء . نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ثم نعيدها إلى الصندوق بعد إضافة 10 كرات من اللون ذاته (من لون الكرة المسحوبة) ثم نسحب كرةً أخرى . **المطلوب:**

1) أعطِ تمثيلاً شجرياً للتجربة .
2) احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في السحبة الثانية بيضاء .
3) إذا علمت أنّ الكرة المسحوبة في السحبة الثانية بيضاء ، فما احتمال أن تكون الأولى سوداء ؟

الحل

(1



(2

$$\mathbb{P}(W_2)=\mathbb{P}(W_2\cap W_1)+\mathbb{P}(W_2\cap B_1)$$
$$=\frac{8}{10}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

(3

$$\mathbb{P}(B_1|W_2)=\frac{\mathbb{P}(B_1\cap W_2)}{\mathbb{P}(W_2)}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{5}$$

التمرين العشرون: نجد في الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج (X,Y) من المتحولات العشوائية . **المطلوب:**

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	0.1	0.2	0.1	
1	0.15	0.3		
قانون Y				

1) أكمل الجدول المجاور .
2) هل X و Y مستقلان احتمالياً ؟
3) احسب $\mathbb{E}(X)$ و $\mathbb{E}(Y)$.

الحل

(1

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	0.1	0.2	0.1	0.4
1	0.15	0.3	0.15	0.6
قانون Y	0.25	0.5	0.25	

2) المتحولان العشوائيان X و Y مستقلان احتمالياً لأنّ

$$\mathbb{P}(X=x_i,Y=y_j)=\mathbb{P}(X=x_i).\mathbb{P}(Y=y_j)$$

(3

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{2}x_i p_i=(0)(0.4)+(1)(0.6)=0.6$$

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{j=1}^{3}y_j p_j=(0)(0.25)+(1)(0.5)+(2)(0.25)=1$$

التمرين الحادي و العشرون : نتأمّل جانباً جدول القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي X .

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{\alpha}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{\beta}{27}$

المطلوب:

1) عيّن العددين الطبيعيّين α و β إذا علمت أنّ $\mathbb{E}(X)=2$.
2) من أجل $\alpha=6$ و $\beta=8$ احسب تباين المتحول العشوائي $\mathbb{V}(X)$.

تمارين إضافية في الاحتمالات

الحل

(1

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i p_i$$

$$=(0)(\frac{1}{27})+(1)(\frac{\alpha}{27})+(2)(\frac{12}{27})+(3)(\frac{\beta}{27})$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha+24+3\beta}{27}=2 \Rightarrow \boxed{\alpha+3\beta=30}......\boxed{1}$$

$$\sum_{i=1}^{4}p_i=1 \Rightarrow \frac{1}{27}+\frac{\alpha}{27}+\frac{12}{27}+\frac{\beta}{27}=1$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+13=27 \Rightarrow \boxed{\alpha+\beta=14}......\boxed{2}$$

بحل جملة المعادلتين نجد $\alpha=6$ و $\beta=8$

(2

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

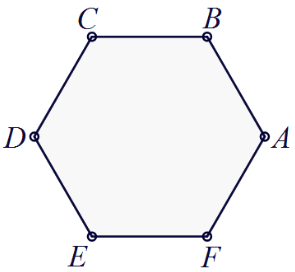
$$\mathbb{E}(X^2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2 p_i$$

$$=(0)^2(\frac{1}{27})+(1)^2(\frac{6}{27})+(2)^2(\frac{12}{27})+(3)^2(\frac{8}{27})$$

$$\mathbb{E}(X^2)=\frac{6+48+72}{27}=\frac{126}{27}=\frac{14}{3}$$

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-[\mathbb{E}(X)]^2=\frac{14}{3}-4=\frac{2}{3}$$

التمرين الثاني و العشرون: نتأمل مسدساً (سداسي منتظم)



$A-$ نصل عشوائياً بين رأسين من رؤوس المسدس . ما احتمال الحصول على قطر ؟

$B-$ نصل عشوائياً بين ثلاثة رؤوس من رؤوس المسدس .

1) ما احتمال الحصول على مثلث قائم الزاوية ؟

2) ما احتمال الحصول على مثلث منفرج الزاوية ؟

3) ما احتمال الحصول على مثلث حاد الزوايا ؟

$C-$ ليكن X المتحول العشوائي الذي يأخذ القيمة 0 عند الحصول على مثلث قائم و 1 عند الحصول على مثلث منفرج الزاوية و 2 عند الحصول على مثلث حاد الزوايا . عين قانون X و احسب توقعه الرياضي .

الحل

$A-$

عدد أقطار المسدّس $\binom{6}{2}-6=15-6=9$

احتمال الحصول على قطر $\frac{9}{\binom{6}{2}}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

$B-$ (1

عدد المثلثات قائمة الزاوية $4\times3=12$

احتمال الحصول على مثلث قائم $\frac{12}{\binom{6}{3}}=\frac{12}{20}$

(2

عدد المثلثات منفرجة الزاوية $6\times1=6$

احتمال الحصول على مثلث منفرج الزاوية $\frac{6}{\binom{6}{3}}=\frac{6}{20}$

(3 عدد المثلثات حادة الزوايا 2

احتمال الحصول على مثلث حاد الزوايا $\frac{2}{\binom{6}{3}}=\frac{2}{20}$

x	0	1	2
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i p_i$$

$$=(0)(\frac{6}{10})+(1)(\frac{3}{10})+(2)(\frac{1}{10})=\frac{1}{2}$$

تمارين إضافية في الاحتمالات

التمرين الثالث و العشرون: ليكن $ABCDEF$ مسدس (سداسي منتظم)

1) نصل عشوائياً بين ثلاثة رؤوس من رؤوس المسدس . ما احتمال الحصول على مثلث قائم ؟

2) نكرّر عملية وصل عشوائي بين ثلاثة رؤوس من رؤوس المسدس ثلاث مرات ، و ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل عدد المثلثات القائمة التي نحصل عليها . اكتب مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي و احسب $\mathbb{E}(X)$.

الحل

(1
$$p=\frac{3\times 4}{\binom{6}{3}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

(2 X متحول عشوائي حداني حيث $n=3\ ,\ p=\frac{3}{5}$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\quad ,\ 0\le k\le n$$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{5}\right)^{3-k}\quad ,\ 0\le k\le 3$$

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

$$\mathbb{E}(X)=np=(3)\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{9}{5}$$

التمرين الرابع و العشرون: صندوق يحتوي على 6 كرات : كرتان حمراوان R و كرة سوداء B و ثلاث كرات بيضاء W .

نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة . نتأمّل المتحولات العشوائيّة : X يمثل عدد الكرات الحمراء التي نحصل عليها Y يمثل عدد الكرات البيضاء التي نحصل عليها ، Z يمثل عدد الكرات السوداء التي نحصل عليها . **المطلوب:**

1) عيّن قانون X ثم قانون Y .

2) عيّن القانون الاحتمالي للزوج (X,Y).

3) عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Z .

الحل (للتدريب فقط ، غير امتحاني)

(1 X متحول عشوائي حداني حيث $n=3\ ,\ p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

Y متحول عشوائي حداني حيث $n=3\ ,\ p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$$Y(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(2

X \ Y	0	1	2	3	قانون X
0	1/216	9/216	27/216	27/216	8/27
1	6/216	36/216	54/216	0	12/27
2	12/216	36/216	0	0	6/27
3	8/216	0	0	0	1/27
قانون Y	1/8	3/8	3/8	1/8	

(3 Z متحول عشوائي حداني حيث $n=3\ ,\ p=\frac{1}{6}$

$$Z(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Z=k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

تمارين إضافية في الاحتمالات

التمرين الخامس و العشرون: صندوق يحتوي على 6 بطاقات مرقمة بالأرقام 0 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 .

نسحب من الصندوق 4 بطاقات على التتالي مع الإعادة ، وليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور رقم فردي .

1) اكتب مجموعة قيم X و قانونه الاحتمالي .

2) احسب توقّعه الرياضي و تباينه و انحرافه المعياري .

الحل

1) X متحول عشوائي حداني حيث $n=4\ ,\ p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\quad ,\quad 0\le k\le n$$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{4}{k}(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{4-k}\quad ,\quad 0\le k\le 4$$

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

2)

$$\mathbb{E}(X)=np=(4)(\frac{1}{3})=\frac{4}{3}$$

$$\mathbb{V}(X)=npq=(4)(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})=\frac{8}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}(X)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

التمرين السادس و العشرون: نتأمّل صندوقاً يحتوي على ثلاثة أحجار نرد : حجران ملوّنان بالأحمر ، و حجر ملوّن بالأسود .

نسحب عشوائياً حجر نرد من الصندوق ثم نلقيه . نتأمّل الأحداث :

R : "الحجر المختار أحمر"　　B : "الحجر المختار أسود"　　E : "الرقم الظاهر زوجي"

1) أعطِ تمثيلاً شجرياً للتجربة .

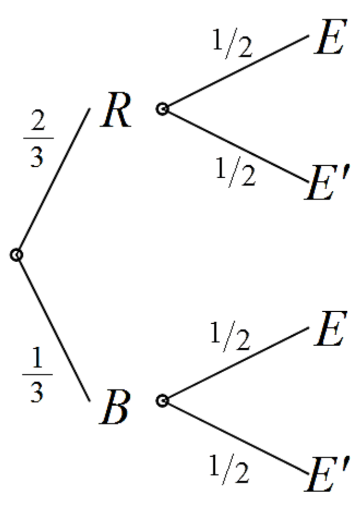
2) احسب احتمال أن يكون الرقم الظاهر زوجي .

3) إذا علمت أنّ الرقم الظاهر زوجي ، فما احتمال أن يكون الحجر المختار أحمر اللون ؟

4) هل الحدثان R و E مستقلان احتمالياً ؟

الحل

1)



2)

$$\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}(E\cap R)+\mathbb{P}(E\cap B)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

3)

$$\mathbb{P}(R|E)=\frac{\mathbb{P}(R\cap E)}{\mathbb{P}(E)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

4) الحدثان E و R مستقلان احتمالياً لأنّ

$$\begin{cases}\mathbb{P}(E\cap R)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\\ \mathbb{P}(E).\mathbb{P}(R)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\ \mathbb{P}(E\cap R)=\mathbb{P}(E).\mathbb{P}(R)$$

تمارين إضافية في الاحتمالات

التمرين السابع و العشرون: في تجربة إلقاء حجر نرد مرّتين ، X المتحول العشوائي الذي يمثّل فرق العددين الظاهرين بالقيمة المطلقة .

1) اكتب مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي .

2) احسب توقّعه الرياضي .

الحل

1) $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5\}$

x	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$

2)

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i p_i$$

$$=(0)(\frac{3}{18})+(1)(\frac{5}{18})+(2)(\frac{4}{18})+(3)(\frac{3}{18})+(4)(\frac{2}{18})+(5)(\frac{1}{18})$$

$$=\frac{35}{18}$$

التمرين الثامن و العشرون: غالباً ما يعقُب الزلازلَ هزّات ارتداديّة . نفترض أنّ احتمال حدوث هزّة ارتدادية في الساعة الأولى بعد الزلزال يساوي $2/3$. إذا حدثت هزّة ارتدادية في الساعة n كان احتمال أن تحدث هزّة ارتداديّة في الساعة التي تليها يساوي $4/5$.

إذا لم تحدث هزّة ارتداديّة في الساعة n فإنّ احتمال أن تحدث هزّة ارتداديّة في الساعة التي تليها يساوي $1/2$.

ليكن A_n حدث وقوع هزّة ارتداديّة في الساعة n ، و B_n حدث عدم وقوع هزّة ارتداديّة في الساعة n .

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n\geq 1$: $p_n=\mathbb{P}(A_n)$ و $q_n=\mathbb{P}(B_n)$. **المطلوب :**

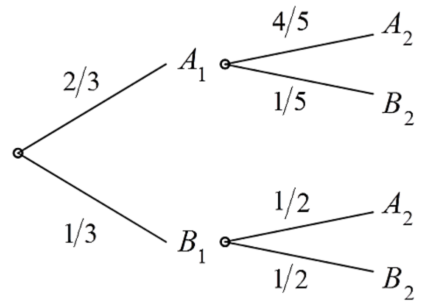
1) احسب p_2 .　　2) عبّر عن p_{n+1} بدلالة p_n .

3) لتكن المتتالية التي حدّها العام $u_n=p_n-\frac{5}{7}$ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ هندسيّة ، ثم اكتب عبارة u_n بدلالة n .

4) استنتج p_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n$.

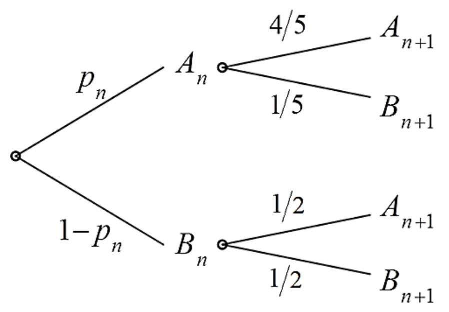
الحل

1)



$$p_2=\mathbb{P}(A_2)=\mathbb{P}(A_2\cap A_1)+\mathbb{P}(A_2\cap B_1)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{7}{10}}$$

2)



$$p_{n+1}=\mathbb{P}(A_{n+1})=\mathbb{P}(A_{n+1}\cap A_n)+\mathbb{P}(A_{n+1}\cap B_n)$$

$$=\frac{4}{5}p_n+\frac{1}{2}(1-p_n)=\frac{3}{10}p_n+\frac{1}{2}$$

3)

$$u_{n+1}=p_{n+1}-\frac{5}{7}=\left[\frac{3}{10}p_n+\frac{1}{2}\right]-\frac{5}{7}=\frac{3}{10}p_n-\frac{3}{14}$$

$$u_{n+1}=\frac{3}{10}\left[p_n-\frac{5}{7}\right]\Rightarrow\boxed{u_{n+1}=\frac{3}{10}u_n}$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ هندسية أساسها $q=\frac{3}{10}$ و حدها الأول

$$u_1=p_1-\frac{5}{7}=\frac{2}{3}-\frac{5}{7}=\frac{-1}{21}$$

$$u_n=u_1q^{n-1}=\frac{-1}{21}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}\Rightarrow\boxed{u_n=\frac{-10}{63}\left(\frac{3}{10}\right)^n}$$

4)

$$p_n=u_n+\frac{5}{7}\Rightarrow\boxed{p_n=\frac{-10}{63}\left(\frac{3}{10}\right)^n+\frac{5}{7}}\ ,\ \lim_{n\to\infty}p_n=\frac{5}{7}\ ;|q|<1$$

تمارين إضافية في الاحتمالات

التمرين التاسع و العشرون: صندوق يحتوي على 6 كرات : كرتان بيضاوان W و أربع كرات سوداء B .

نسحب عشوائياً كرة من الصندوق ، نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق ثمّ نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق ، ثم نسحب كرة أخرى .

المطلوب:

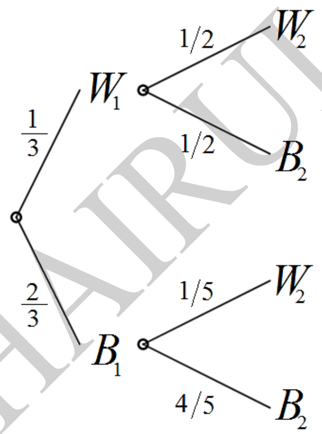
1) أعطِ تمثيلاً شجرياً للتجربة .

2) احسب احتمال الحدث B_2 : " الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية " .

3) إذا علمت أنّ الكرة المسحوبة في المرّة الثانية سوداء ، فما احتمال أن تكون الأولى بيضاء ؟

الحل

1)



2)

$$\mathbb{P}(B_2)=\mathbb{P}(B_2\cap W_1)+\mathbb{P}(B_2\cap B_1)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{10}$$

3)

$$\mathbb{P}(W_1|B_2)=\frac{\mathbb{P}(W_1\cap B_2)}{\mathbb{P}(B_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{7}{10}}=\frac{5}{21}$$

التمرين الثلاثون: إذا كان $\mathbb{P}(A)=\frac{2}{3}$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{1}{6}$ و $\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1}{9}$ فاحسب :

1) $\mathbb{P}(A\cup B)$.

2) $\mathbb{P}(A|B)$ و $\mathbb{P}(B|A)$.

3) هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً ؟

الحل

1)

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{12+3-2}{18}=\frac{13}{18}$$

2)

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{1/9}{1/6}=\frac{2}{3}$$
$$\mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{1/9}{2/3}=\frac{1}{6}$$

3) الحدثان A و B مستقلان احتمالياً لأنّ

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

– **انتهى الحل** –

إعداد : عبد الملك خير الله 0964621810