التمرين الأول "النموذج الوزاري الأول"

ليكن المثلث ABC في المستوي ننشئ على ضلعيه $[BC],[AC]$ وخارجه المربعين $ACEA'$, $CBB'D$ كما في الشكل المجاور .

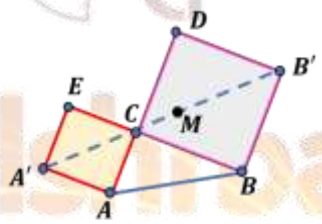
تمثل الاعداد العقدية a,b,c,a',b' النقاط A,B,C,A',B'

1) B' هي صورة C وفق دوران مركزه B عينه واكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b,c

2) اثبت أن $a' = i(c-a)+a$

3) عين العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$

4) كيف تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي ؟



الحل

1) B' هي صورة C وفق دوران غير مباشر مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالتالي:

$$z'-w=+e^{i\theta}(z-w)\Rightarrow b'-b=+e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}(c-b)\Rightarrow b'=b-i(c-b)$$

2) $A'AC$ مثلث قائم في A ومتساوي الساقين ومنه فإن $AC=AA'$

و A' هي صورة C وفق دوران مباشر مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ وبالتالي حسب الصيغة العقدية للدوران يكون:

$$z'=w+e^{i\theta}(z-w)\Rightarrow a'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)$$
$$\Rightarrow a'=a+i(c-a)$$

3) M منتصف $A'B'$ إذاً حسب الصيغة العقدية لمنتصف قطعة مستقيمة

$$m=\frac{a'+b'}{2}=\frac{a+i(c-a)+b-i(c-b)}{2}$$
$$=\frac{a+ic-ia+b-ic+ib}{2}\rightarrow$$
$$m=\frac{a+b+i(b-a)}{2}\rightarrow m=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}i$$

4) بما أن العدد العقدي m الممثل للنقطة M لا يتعلق بالعدد العقدي c الممثل للنقطة C فإن النقطة M ثابتة مهما تحولت C في المستوي

التمرين الثاني : "النموذج الوزاري الثاني"

نتأمل في المستوي مثلثا ABC مباشر التوجيه كيفياً.

لتكن M منتصف $[BC]$

وليكن AEB , ACD مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين .

نختار معلما مباشراً مبدؤه النقطة A

ونرمز بالرمزين b , c الى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B , C

1) احسب بدلالة b , c الاعداد العقدية e , d , m الممثلة للنقاط E , D , M بالترتيب

2) احسب $\frac{d-e}{m-a}$

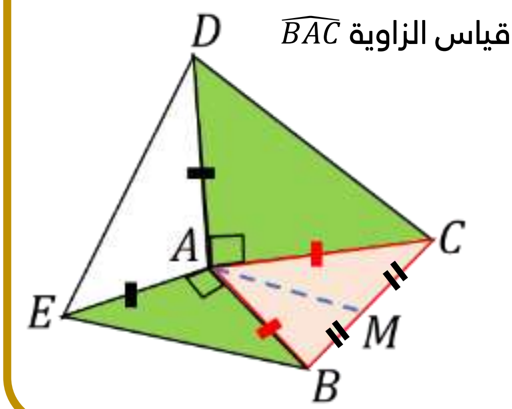
العقدية

ثم استنتج ان (AM) هو ارتفاع المثلث AED وأن $ED = 2AM$

3) نفترض أن A هي مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1),(C,1),(E,3),(D,2)$

❖ احسب $\frac{c-a}{b-a}$

❖ استنتج قياس الزاوية $\widehat{BAC}$



الحل

1) بما أن BAE مثلث قائم في A عندئذ يكون:

E صورة B وفق دوران غير مباشر مركزه A إذا

حسب الصيغة العقدية للدوران:

$$e-a=e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-a)$$

وبما أن A مبدأ المعلم فإن $a=0$ ومنه يكون:

$$e=e^{-i\frac{\pi}{2}}b \quad \rightarrow \quad e=-ib$$

وبما أن CAD مثلث قائم في A عندئذ يكون: D صورة C وفق دوران مباشر مركزه A وحسب الصيغة العقدية للدوران فإن:

$$d-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a) \quad \rightarrow \quad d=ic$$

M منتصف BC ومنه $m=\frac{b+c}{2}$

2) $\frac{d-e}{m-a}=\frac{ic+ib}{\frac{b+c}{2}-0}=\frac{2(ic+ib)}{b+c}=\frac{2i(b+c)}{(b+c)}=2i$

- حتى يكون AM ارتفاع في AED يجب أن يتحقق أن $AM \perp ED$ أي يجب أن يكون $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{ED})=\frac{\pi}{2}$

$$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{ED})=\arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$$

ومنه فإن $AM \perp ED$ أي أن: AM ارتفاع في المثلث AED

- بما أن $\frac{d-e}{m-a}=2i$

$$\Rightarrow \left|\frac{d-e}{m-a}\right|=2i \quad \Rightarrow \frac{ED}{AM}=2 \quad \Rightarrow \quad ED=2AM$$

3) بما أن A مركز أبعاد فيكون:

$$a=\frac{2d+3e+c+b}{7}=\frac{2ic-3ib+c+b}{7}$$
$$=\frac{(1+2i)c+(1-3i)b}{7}=0$$
$$\rightarrow (1+2i)c+(1-3i)b=0$$
$$\rightarrow c=-\frac{1-3i}{1+2i}b$$
$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{c}{b}=-\frac{1-3i}{1+2i}=-\frac{(1-3i)(1-2i)}{5}$$
$$=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

ولدينا $\widehat{BAC}=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\Rightarrow \widehat{BAC}=\frac{\pi}{4}}$$

التمرين الثالث : (النموذج الوزاري الثالث)

عيّن العددين z_1 و z_2 حيث :

$$\begin{cases} 2z_1-z_2=-3 & (1) \\ 2\overline{z_1}+\overline{z_2}=-3+i2\sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

الحل

$$2z_1-z_2=-3 \quad \dots (1)$$
$$2\bar{z}_1+\bar{z}_2=-3+i2\sqrt{3} \dots (2)$$

بأخذ مرافق (2) نجد:

$$2z_1-z_2=-3$$
$$2z_1+z_2=-3-i2\sqrt{3}$$

بالجمع:

$$4z_1=-6-i2\sqrt{2}$$

$$z_1=\frac{-6-i2\sqrt{3}}{4}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$$

ومنه بالتعويض في (1) نجد :

$$2\left(\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right)-z_2=-3$$
$$-3-i\sqrt{3}-z_2=-3$$
$$\boxed{z_2=-i\sqrt{3}}$$

التمرين الرابع : (النموذج الوزاري الرابع)

حل المعادلة في $\mathbb{C}$: $Z^2 = 1 + i2\sqrt{2}$

الحل

لنبحث عن عدد $z = x + iy$

بحيث $z^2 = 1 + i2\sqrt{2}$

$x^2 + y^2 = 3 \ ...(1)$
$x^2 - y^2 = 1 \ ...(2)$
$x.y = 2\sqrt{2} > 0 \ ...(3)$

x, y من إشارة واحدة بجمع (1) و (2) نجد:

$2x^2 = 4 \to x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2}$
$\to y^2 = 1 \to y = \pm 1$
$z_1 = \sqrt{2} + i$
$z_2 = -\sqrt{2} - i$

التمرين الخامس : (النموذج الوزاري الخامس)

اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

الحل

نفرض أن:

$$Z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

$Z_1 = 1 - i\sqrt{3} \quad \to \quad r = \sqrt{1+3} = 2$

$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\to \theta = -\frac{\pi}{3}$

$\to \boxed{z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}$

وبنفس الطريقة نجد أن:

$$\boxed{z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

ومنه فإن:

$$Z = \frac{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$$

التمرين السادس: "النموذج الوزاري الخامس"

ليكن كثير الحدود $P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$

1) عين عددين a , b يحققان:

$P(z) = (z^2 + az + a)(z^2 + bz + a)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

الحل

1) $P(z) = (z^2 + az + a)(z^2 + bz + a)$

بالنشر وإخراج عامل مشترك نجد:

$= z^4 + (a+b)z^3 + (2a+ab)z^2 + (a^2+ab)z + a^2$

بالمطابقة نجد أن:

$a + b = 5 \,..(1) \quad , \quad 2a + ab = 10 \,..(2)$

$a^2 + ab = 10 \,..(3) \quad , \quad a^2 = 4 \,..(4)$

$a^2 = 4$

إما : $a = 2$

وبالتعويض في (1) يكون:

$b = 3$

لنختبر هل تحقق هذه

الحلول كلاً من (2) و (3)

نعوض في (2):

$2(2) + 2(3) \overset{?}{=} 10$

$10 = 10$ محققة

نعوض في (3):

$(-2)^2 + (2)(3) = 10$

$10 = 10$ محققة

فالحلول: $\boxed{a = 2, b = 3}$

أو $a = -2$

وبالتعويض في (1) يكون

$b = 7$

لنختبر هل تحقق هذه

الحلول كلاً من المعادلتين

(2) و (3)، نعوض في (2):

$2(-2) + (-2)(7) \overset{?}{=} 10$

$-14 \neq 10$

غير محققة فالحلول

مرفوضة

العقدية

2) $P(z) = (z^2+2z+2)(z^2+3z+2)$

$P(z) = 0 \Longrightarrow (z^2+2z+2)(z^2+3z+2) = 0$

إما: $z^2+2z+2=0$

$\Delta = b^2-4ac$

$= 4-4(1)(2) = -4$

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2-2i}{2} = -1-i$$

بما أن الأمثال حقيقية: $z_2 = \overline{z_1} = -1+i$

أو:

$$z^2+3z+2=0 \Longrightarrow (z+2)(z+1)=0 \begin{cases} z_3=-1 \\ z_4=-2 \end{cases}$$

التمرين السابع: (النموذج الوزاري السادس)

اكتب العدد العقدي بالشكل الأسي.

$$\boldsymbol{Z = (1-\sqrt{2})\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]}$$

الحل:

$$Z = (1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

نلاحظ أن $1-\sqrt{2} < 0$

$$\rightarrow Z = (\sqrt{2}-1)\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= (\sqrt{2}-1)\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$= (\sqrt{2}-1)\, e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

التمرين الثامن "النموذج الوزاري 2019"

لتكن النقطتان $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ الممثلة للأعداد العقدية

بالترتيب $\boldsymbol{z_B = -2i}$, $\boldsymbol{z_A = -\sqrt{3}+i}$

1) أثبت أن النقطتان $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ تنتميان الى دائرة مركزها $\boldsymbol{O}$ ونصف قطرها يساوي 2

2) اكتب $\boldsymbol{z_A}$ بالشكل الأسي ثم جد العدد العقدي $\boldsymbol{z_C}$ الممثل للنقطة $\boldsymbol{C}$ التي تجعل المبدأ مركز ثقل المثلث $\boldsymbol{ABC}$

3) أثبت أن $\boldsymbol{z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $\boldsymbol{ABC}$

الحل

1) حتى ينتميان إلى دائرة واحدة يجب أن يتحقق:

$$OA = OB = r$$

لدينا:

$OB = |z_{OB}| = |B-O| = |-2| = 2$

$OA = |z_{OA}| = |A-O| = |-\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$

"ومنه فإن A , B تنتميان الى دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي 2 "

2)

$r = \sqrt{3+1} = 2$

$$\cos x = \frac{a}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$z_A = 2\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

❖ $z_O = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} \Longrightarrow$

$$O = \frac{-\sqrt{3}+i-2i+z_C}{3} \Longrightarrow z_c - \sqrt{3} - i = 0$$

$$\Longrightarrow z_C = \sqrt{3}+i$$

3)

$l_1 = z_C - z_A = +\sqrt{3}+i+\sqrt{3}-i = 2\sqrt{3}$

$l_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) = \left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)(-2i+\sqrt{3}-i)$

$$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}-3i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2} + i\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$= 2\sqrt{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{l_1 = l_2}$

نلاحظ أن الصيغة المعطاة هي الصيغة العقدية للدوران أي أن النقطة C هي صورة النقطة B وفق الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $(+\frac{\pi}{3})$

والمثلث متساوي الاضلاع ABC.

التمرين التاسع: "النموذج الوزاري الأول 2020"

في الشكل المجاور المثلثان ACC' , ABB' كل منهما قائم في A ومتساوي الساقين

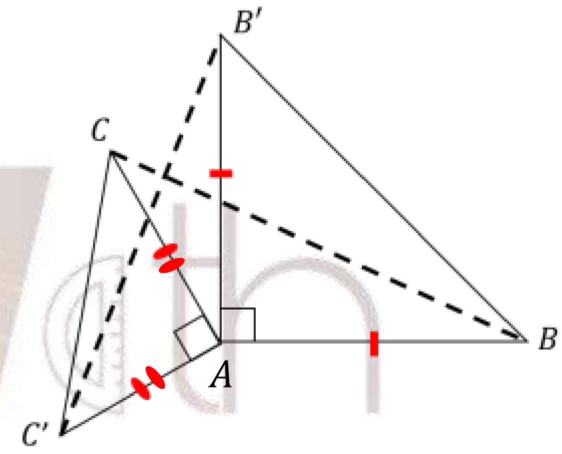
تأمل المعلم المتجانس والمباشر $(A;\vec{u},\vec{v})$

والمطلوب:

1) اكتب $Z_{B'}$ بدلالة Z_B , $Z_{C'}$ وبدلالة Z_C

2) احسب $\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}$

3) استنتج ان $(BC)\perp(B'C')$, $BC = B'C'$



الحل

1) بما أن ABB' قائم في A ومتساوي الساقين

فإن: النقطة B' صورة B وفق دوران مركزه

A زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$Z_{B'} - Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_A)$$

وبما أن المعلم مبدؤه A فإن $Z_A = 0$ ومنه يكون :

$$Z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{2}} Z_B \qquad (e^{i\frac{\pi}{2}} = i)$$

$$\Rightarrow Z_{B'} = iZ_B$$

وبما أن ACC' قائم في A ومتساوي الساقين فإن:

النقطة C' صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

بنفس الطريقة نجد: $Z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{2}} Z_C$

$$\Rightarrow Z_{C'} = iZ_C$$

2) $\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C} = \frac{iZ_B-iZ_C}{Z_B-Z_C} = \frac{i(Z_B-Z_C)}{Z_B-Z_C}$

$$\Rightarrow \frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C} = i$$

لدينا $\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C} = i$

استنتاج أن $BC \perp B'C'$:

$$arg\left(\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{C'B'}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow CB \perp C'B'$$

استنتاج ان $BC = B'C'$:

$$\left|\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}\right| = |i|$$

$$\frac{C'B'}{CB} = 1 \qquad \Rightarrow C'B' = CB$$

التمرين العاشر: "النموذج الوزاري الثاني 2020"

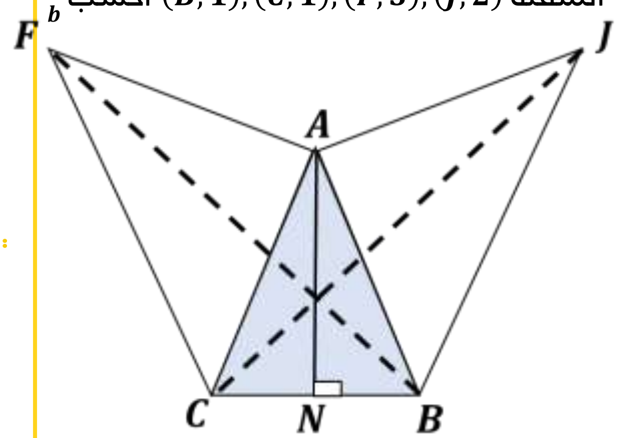
ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين رأسه A ننشئ خارجه مثلثين قائمين في A ومتساويا الساقين ACF , ABJ ، لتكن الاعداد الحقيقية a,b,c,j,f الممثلة للنقاط A,B,C,J,F بالترتيب

1) جد بدلالة b,c العددين j,f

2) اكتب العدد $\frac{f-b}{c-j}$ بالشكل الجبري

3) أثبت ان $JC = BF$ وأن المستقيمين $(BF),(CJ)$ متعامدان .

4) نفترض ان A مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1),(C,1),(F,3),(J,2)$ احسب $\frac{c}{b}$



الحل

نختار معلم متجانس $(A;\vec{u},\vec{v})$

1) بما أن ABJ قائم في A يكون:

J صورة B وفق دوران مباشر مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

A مركز المعلم المختار أي أن $(a=0)$ ومنه يكون

حسب الصيغة العقدية للدوران :

$$j-a=e^{\frac{\pi}{2}i}(b-a)$$

$$\Rightarrow j=ib$$ لأن $\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)=i$

وبما أن CAF قائم في A يكون :

F صورة C وفق دوران غير مباشر مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$f-a=e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-a)\Rightarrow f=-ic$$

لأن $(e^{-\frac{\pi}{2}}=-i)$

2)
$$\frac{f-b}{c-j}=\frac{-ic-b}{c-ib}\,\frac{\times c+ib}{\times c+ib}=\frac{-c^2i+cb-cb-b^2i}{c^2+b^2}$$
$$=\frac{-c^2I-b^2i}{c^2+b^2}=-\frac{-i(c^2+b^2)}{c^2+b^2}=-i$$
$$\boxed{\Rightarrow\frac{f-b}{c-j}=-i}$$

3)
$$\arg\left(\frac{f-b}{c-j}\right)=\arg(-i)\Rightarrow\left(\overrightarrow{JC},\overrightarrow{BF}\right)=-\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{JC}\perp\overrightarrow{BF}$$

اذا المستقيمان $(BF)(JC)$ متعامدان

$$\left|\frac{f-b}{c-j}\right|=|-i|\rightarrow\frac{BF}{JC}=1\rightarrow BF=JC$$

4) A مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(B,1),(C,1),(F,3),(J,2)$

$$a=\frac{b+c+3f+2j}{1+1+3+2}$$
$$\frac{b+c-3ci+2bi}{7}=0$$
$$b+c-3ci+2bi=0$$
$$c-3ci=-b-2bi$$
$$c(1-3i)=b(-1-2i)$$
$$\frac{c}{b}=\frac{-1-2i}{1-3i}.\frac{1+3i}{1+3i}=\frac{-1-3i-2i+6}{1+9}$$
$$=\frac{5-5i}{10}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

التمرين الحادي عشر: (الاختبار الأول)

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$\boldsymbol{z^2-(1+2i)z+3+3i=0}$$

الحل

$\Delta= b^2--4ac$

$\Delta= (1+2i)^2-4(1)(3+3i)$

$\Delta= 1+4i-4-12-12i=-15-8i$

أن $w=a+bi$ الجذر التربيعي لـ Δ عندئذ:

$$a^2+b^2=\sqrt{225+64}=\sqrt{289}=17\quad ..(1)$$
$$a^2-b^2=-15\quad ..(2)$$
$$2a.b=-8\quad(3)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2a^2=2\ \Rightarrow\ a^2=1\ \Rightarrow a=\pm1$$

بطرح (1) من (2) نجد :

$$2b^2=32\ \Rightarrow\ b^2=16\ \Rightarrow b=\pm4$$

من (3) نجد أن b , a من اشارتين مختلفتين

$\boxed{w_1=1-4i}$, $\boxed{w_2=-1+4i}$

$$z_1=\frac{-b+w_1}{2a}=\frac{(1+2i)+1-4i}{2}=\frac{2-2i}{2}$$
$$\boxed{z_1=1-i}$$
$$z_2=\frac{-b-w_2}{2a}=\frac{1+2i-1+4i}{2}=\frac{0+6i}{2}$$
$$\boxed{z_2=3i}$$

التمرين الثاني عشر: "الاختبار الثاني"

1) حل في مجموعة الاعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول التالية:

$$z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$$

(لاحظ ان $(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$)

2) في المستوي المنسوب الى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

لتكن النقطتان B, A الممثلتان بالعددين العقدين

$$z_B=\overline{z_A}\quad,\quad z_A=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i$$

بين أن: $\frac{z_A}{z_B}=e^{\frac{\pi}{6}i}$ واستنتج زاوية العدد العقدي z_A

ثم استنتج: $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

الحل

1) $a=1\,,b=-2(1-\sqrt{3})\,,c=8$

$$\Delta=4(1-\sqrt{3})^2-32=16-8\sqrt{3}-32$$
$$=-16-8\sqrt{3}=-4(4+2\sqrt{3})=4i^2(1+\sqrt{3})^2$$
$$\Longrightarrow \sqrt{\Delta}=2i(1+\sqrt{3})$$
$$z_1=\frac{2(1-\sqrt{3})+2(1+\sqrt{3})i}{2}=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$$
$$z_2=\frac{2(1-\sqrt{3})-2(1+\sqrt{3})i}{2}$$
$$=(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i=\overline{z_1}$$

2) $$\frac{z_A}{z_B}=\frac{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i}{(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)i}$$

نضرب بمرافق المقام: $=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+4i-(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}$

$$=\frac{4\sqrt{3}+4i}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{\pi}{6}i}$$

وذلك لأن: $r=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta&=\frac{b}{r}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{\pi}{6}i}$$

نلاحظ أن z_B و z_A مترافقين وبالتالي لهما زاويتين متساويتين بالقيمة المطلقة ومتعاكستين بالإشارة وبالتالي يكون قياس كل منهما:

$$\theta=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$
$$z_A=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i$$
$$r=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$
$$Z_A=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$
$$Z_A=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\;i$$

بالمقانة مع الشكل الجبري نجد أن:

$$2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{3}+1$$
$$\rightarrow\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\;\frac{\times\sqrt{2}}{\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2

$$2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{3}-1$$
$$\rightarrow\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\;\frac{\times\sqrt{2}}{\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

التمرين الثالث عشر: "الاختبار الثالث"

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، لدينا النقاط C,B,A التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$z_A=\sqrt{3}+i\,,z_B=\sqrt{3}-i\,,z_C=3\sqrt{3}+i$$

1- اكتب العدد العقدي $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC

2- عين (ε) مجموعة النقاط $M\neq B$ التي تجعل $\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}$ تخيلياً بحتاً.

3- عين $(\mathcal{F})$ مجموعة النقاط $M\neq B$ التي تجعل $\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}$ تخيلياً حقيقياً.

الحل

-1

الشكل الجبري:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3\sqrt{3} + i - (\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} - i - (\sqrt{3} + i)} = \frac{2\sqrt{3}}{-2i} = -\sqrt{3}i$$

الشكل الأسي:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$$

بما أن $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ فالمثلث ABC قائم في A

-2

بما أن $\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}$ تخيلاً بحتاً عندئذ:

$$\arg\left(\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}\right) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}) = \pm\frac{\pi}{2}$$

أي (ε) هي الدائرة التي قطرها $[BC]$ ومركزها منتصف $[BC]$ محذوفاً منها النقطة B

-3

بما أن $\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}$ حقيقياً بحتاً عندئذٍ:

$$\arg\left(\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}\right) = 0 \quad \rightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}) = 0$$

أو $\arg\left(\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}\right) = \pi \rightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}) = \pi$

إذاً فالشعاعان $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}$ مرتبطان خطياً أي النقاط M, C, B تقع على استقامة واحدة باستثناء B ، إذاً $(\mathcal{F})$ هي نقاط المستقيم (BC) عدا B.

التمرين الرابع عشر: "الاختبار الرابع "

نتأمل النقاط D , C , B , A الممثلة للأعداد العقدية

$d = 3$, $c = 2 - i\sqrt{3}$ و $b = 2 + i\sqrt{3}$, $a = -1$

بالترتيب المطلوب.

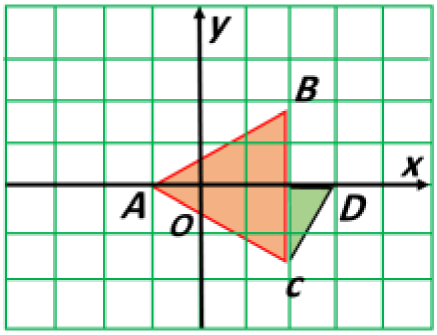
1) **ارسم النقاط D , C , B , A ثم احسب AC , BC , AB واستنتج طبيعة المثلث ABC**

2) **عين $arg\,\frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC**

3) **اثبت ان D هو مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(C,2)$, $(B,2)$, $(A,-1)$**

الحل

1) $A(-1,0), B(2,\sqrt{3}), C(2,-\sqrt{3}), D(3,0)$



$$AB = |b - a| = |2 + i\sqrt{3} + 1|$$
$$= |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$$
$$BC = |c - b| = |2 - i\sqrt{3} - 2 - i\sqrt{3}|$$
$$= |-2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$$
$$AC = |c - a| = |2 - i\sqrt{3} + 1|$$
$$= |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$$

$AB = BC = AC$ نستنتج ان المثلث ABC متساوي الاضلاع.

2) $\frac{a-c}{d-c} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام:

$\frac{a-c}{d-c} = \sqrt{3}i$ فهو تخيلي بحت موجب

$\rightarrow \arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث DAC قائم في C

3) $\frac{-1a+2b+2c}{-1+2+2} = \frac{1+4+2\sqrt{3}i+4-2\sqrt{3}i}{3} = \frac{9}{3} = 3 = d$

- اذا D هي مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(C,2)$, $(B,2)$, $(A,-1)$

العقدية

التمرين الخامس عشر : (الدورة الأولى 2017)

ليكن العددان العقديان

$z_2 = 1 + i \,, z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ والمطلوب:

1- اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد

z_1 و z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$

2- اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$ واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$

الحل

1- $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$

$r_1 = \sqrt{3+1} = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \to \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$z_2 = 1 + i$

$r_2 = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \to \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i}{2}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}}$$

-2

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$$

ومنه يكون : $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \to \cos\frac{\pi}{12} =$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\frac{\times\sqrt{2}}{\times\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

التمرين السادس عشر: (الدورة الثانية 2017)

لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي

$z = -1 + i$ والمطلوب:

1- أثبت أن z^8 عدداً حقيقياً.

2- جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' وفق دوران مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ واكتبه بالشكل الأسي.

الحل

-1

$$z^8 = (z^2)^4 = ((-1+i)^2)^4$$

$$i^2 = 1 \to \quad z^8 = (1-2i-1)^4$$

$$z^8 = (-2i)^4 = 16i^4 = 16$$

-2

$$z' - a = e^{\frac{\pi}{4}i}(z - a)$$

$$z' = e^{\frac{\pi}{4}i}(-1+i-1-i) + 1 + i$$

$$z' = e^{\frac{\pi}{4}i}(-2) + 1 + i$$

$$z' = -2e^{\frac{\pi}{4}i} + \sqrt{2}\ e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z' = (-2+\sqrt{2})e^{\frac{\pi}{4}i}$$

(r سالبة نضربها بسالب) ونضيف π للزاوية

$$z' = -(2-\sqrt{2})e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z' = (2-\sqrt{2})e^{\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)i} \quad \to \quad z' = (2-\sqrt{2})\,e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

التمرين السابع عشر: " الدورة الأولى 2018 "

في المستوي العقدي المنسوب الى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط M, C, B, A التي تمثلها على الترتيب الاعداد العقدية

$m = -1 + i \ , \ c = 2i \ , \ b = 1 - i \ , \ a = -1 - i$

(1) مثل الاعداد:

$m = -1 + i \,, c = 2i \ , \ b = 1 - i \,, \ a = -1 - i$

(2) احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

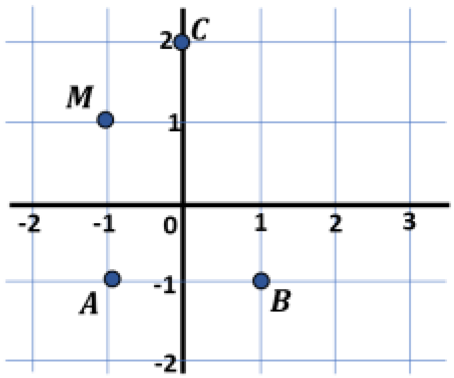
(3) اثبت ان النقاط B, O, M تقع على استقامة واحدة

(4) احسب $arg\frac{c-d}{m}$ واستنتج ان $(DC), (OM)$ متعامدان

الحل

1) $A(-1,-1), B(1,-1), C(0,2), M(-1,1)$

الرسم



2) $Z_D - Z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_C - Z_O)$

$\to d = e^{i\frac{\pi}{2}} c \to d = ic = i \times 2i = -2$

3) حتى تقع النقاط على استقامة واحدة يجب أن يتحقق:

$\arg\left(\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OB}}\right) = (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}) = 0$ أو π

$\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{M-O}{B-O} = \frac{-1+i}{1-i} = \frac{-(1-i)}{(1-i)} = -1$

حقيقي بحت سالب $\Leftarrow \arg(-1) = \pi$

وبالتالي $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}$ مرتبطان خطيا ومنه النقاط

B, O, M تقع على استقامة واحدة

4)

$$\frac{c-d}{m} = \frac{c-d}{m-O} = \frac{Z_{\overrightarrow{DC}}}{Z_{\overrightarrow{OM}}} = \frac{2+2i}{-1+i}$$

$$= \frac{(2+2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-4i}{2} = -2i$$

$$= (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{DC})$$

ومنه $arg\left(\frac{c-d}{m}\right) = (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{DC}) = -\frac{\pi}{2}$

ومنه $(DC),(OM)$ متعامدان

نرجوا جبرك، ولا نعول ولا نؤمل إلا فيك هبنا الرضا
وألبسنا السكينة، نعوذ بعزتك من بلية تزلزل يقيننا بك أو حزن
يثنينا عن جنابك، وأفرغ اللهم على قلوبنا السلوى ما بقينا..

التمرين الثامن عشر: (الدورة الثانية 2018)

في المستوي العقدي إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين العقديين $z_A = 4 , z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ ولتكن I منتصف $[AB]$ والمطلوب:

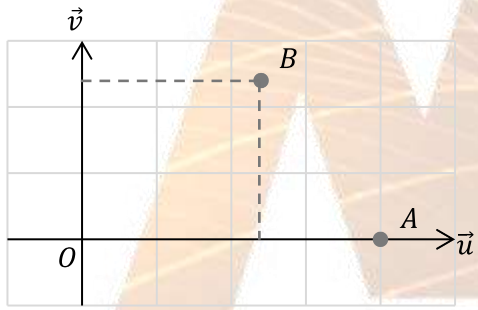
1- مثل النقطتين A و B في المعلم المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ واكتب z_B بالشكل الأسي.

2- بين طبيعة المثلث OAB وأثبت أن قياس الزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$ هو $\frac{\pi}{8}$

3- اكتب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بالصيغة الجبرية والأسية واستنتج $\sin\frac{\pi}{8}$

الحل

-1



$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \to \theta = \frac{\pi}{4}$$

ومنه $z_B = 4\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

-2

طبيعة المثلث:

$OB = |b-o| = |2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i|$

$\to OB = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$

$OA = |a-o| = |4| \to \quad OA = 4$

$AB = |b - -a| = |2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i+4|$

أي أن $AB \neq OA = OB$ وبالتالي المثلث متساوي الساقين فيه $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{4}$

العقدية

بما أن المثلث AOB متساوي الساقين و $[OI]$ متوسط متعلق بالقاعدة فهو منصف لزاوية الرأس وبالتالي فإن قياس الزاوية $(\vec{u},\vec{OI}) = \frac{\pi}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}$.

-3

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2}$$
$$= (2+\sqrt{2}) + \sqrt{2}i$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + 2}$$
$$= \sqrt{4+4\sqrt{2}+2+2} = \sqrt{8+4\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{4(2+\sqrt{2})} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ومن الطلب السابق لدينا: $(\vec{u},\vec{OI}) = \frac{\pi}{8}$ أي زاوية العدد العقدي I هي $\frac{\pi}{8}$

ومنه: $z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\ e^{i\frac{\pi}{8}}$

بالمقارنة بين الشكلين الجبري والمثلثي نجد:

$$z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$$
$$= 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$
$$= (2+\sqrt{2}) + \sqrt{2}i$$
$$2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}$$
$$\to \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

التمرين التاسع عشر: "الدورة الأولى 2019"

لتكن النقطتان A, B اللتان يمثلهما على الترتيب العددان العقديان $z_A = -1 + i$, $z_B = -3i$

وليكن: $p(z) = z^2 + (1+2i)z + 3 + 3i$

1) أثبت أن z_A حلاً للمعادلة $p(z) = 0$ ثم استنتج الحل الآخر للمعادلة

2) جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة A' صورة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) اكتب z_A بالشكل الأسي

الحل

1) نعوض z_A في المعادلة

$$(-1+i)^2 + (1+2i)(-1+i) + 3 + 3i$$
$$= 1 - 2i + i^2 - 1 + i - 2i + 2i^2 + 3 + 3i$$
$$= -2i - 1 + i - 2i - 2 + 3 + 3i = 0$$

ومنه z_A حل للمعادلة

نعوض في المعادلة

$$(-3i)^2 + (1+2i)(-3i) + 3 + 3i$$
$$= -9 - 3i + 6 + 3 + 3i = 0$$

z_B جذر للمعادلة (قمت بحلها بطريقة أخرى في البحث)

2) حسب الصيغة العقدية للدوران :

نفرض أن النقطة الممثلة للعدد العقدي z_A هي z :

$$Z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$$
$$Z' - Z_B = e^{\frac{\pi}{2}i}(Z_A - Z_B)$$
$$Z' + 3i = i(-1 + i + 3i) \Rightarrow Z' = -4 - 4i$$

3) $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\ ,\ sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$
$$Z_A = r.e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

التمرين العشرون: "الدورة الثانية 2019"

في المستوي العقدي المنسوب الى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط C, B, A التي تمثلها على الترتيب الاعداد العقدية

$b = -6 + 3i$, $a = 6 - i$, $c = -18 + 7i$

1) احسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ احسب واستنتج ان النقاط C, B, A تقع على استقامة واحدة

2) بفرض ان $d = 1 + 6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته θ احسب θ

3) جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربعاً

الحل

1) $\frac{b-a}{c-a} = \frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i} = \frac{-12+4i}{-24+8i}$

$$= \frac{-12+4i}{2(-12+4i)} = \frac{1}{2}$$

$$arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = arg\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

⟸النقاط A, B, C على استقامة واحدة

2) حسب الصيغة العقدية للدوران يكون :

$$d - 0 = e^{i\theta}(a - 0)$$

$$d = e^{i\theta} a \Rightarrow \frac{d}{a} = e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \theta = arg\left(\frac{d}{a}\right)$$

$$\frac{d}{a} = \frac{(1+6i)(6+i)}{(6-i)(6+i)} = \frac{6+i+36i-6}{36+1}$$

$$= \frac{37i}{37} = i \quad \rightarrow \theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

3) $z_{OA} = z_{DN} \Rightarrow a - o = n - d$

$n = a + d \ \Rightarrow\ n = 6 - i + 1 + 6i = 7 + 5i$

التمرين الواحد والعشرون: " الدورة الاولى 2020"

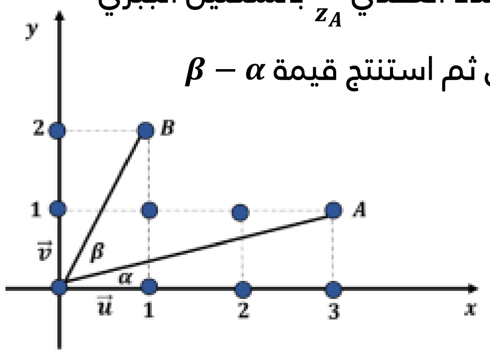
تأمل في المستوي العقدي المزود بالمعلم المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

بفرض أن α القياس الاساسي للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{oA})$

و β القياس الأساسي للزاوية$(\vec{u}, \overrightarrow{oB})$

1) اكتب بالشكل الجبري العددين العقديين z_B, z_Aاللذين يمثلان النقطتين B , A

2) اكتب العدد العقدي $\frac{z_B}{z_A}$ بالشكلين الجبري والأسي ثم استنتج قيمة $\beta - \alpha$



الحل

(1 $A(3,1) \Rightarrow z_A = 3 + i$

$B(1,2) \Rightarrow z_B = 1 + 2i$

(2 $\frac{z_B}{z_A} = \frac{1+2i}{3+i} = \frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{5+5i}{10}$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{z_B}{z_A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\beta - \alpha = \arg(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

$$= \arg\left(\frac{b-o}{a-o}\right) = \arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right) = \frac{\pi}{4}$$

التمرين الثاني والعشرون:"الدورة الثانية 2020"

ليكن العدد العقدي $w = \frac{-\sqrt{2}}{i+1} e^{i\frac{\pi}{3}}$ والمطلوب:

1) بين ان $|w| = 1$ ثم اكتب العدد w بالشكل الأسي

2) ليكن z عدد عقدي ما اثبت ان $z = \frac{z - \bar{z}w}{1-w}$ عدد حقيقي

الحل

1) $|w| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i}\right| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| = 1$

بما أن r في w ليس حقيقي بحت فالعدد غير مكتوب بالشكل الأسي لنكتب كلاً من البسط والمقام بالشكل الأسي

نفرض:

$Z_1 = -\sqrt{2}$

لتحويله إلى أسي $\quad r = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \\ \sin\theta = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \pi$$

العقدية

$$\Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi}$$

$Z_2 = 1 + i$ بنفس الطريقة نجد:

$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}$$

ومنه يكون :

$$w = \frac{-\sqrt{2}}{i+1}\, e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{z_1}{z_2}\, e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\pi}}{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}} \,.\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\boxed{\Rightarrow w = e^{i\frac{13\pi}{12}}}$$

2) حتى يكون z حقيقي يجب أن يتحقق $\bar{Z} = Z$

وبما أن $|w| = 1$ $\Leftarrow$ $\bar{w} = \frac{1}{w}$

$$\bar{Z} = \overline{\left[\frac{z - \bar{z}w}{1-w}\right]} = \frac{\bar{z} - z\bar{w}}{1 - \bar{w}} = \frac{\bar{z} - z\left(\frac{1}{w}\right)}{1 - \frac{1}{w}} = \frac{\frac{\bar{z}w - z}{w}}{\frac{w-1}{w}}$$

$$= \frac{\bar{z}w - z}{w - 1} = \frac{-(z - \bar{z}w)}{-(1-w)} = \frac{z - \bar{z}w}{1 - w} = z$$

بما أن $\bar{Z} = Z$ فإن Z حقيقي

التمرين الثالث والعشرون: "الدورة الاولى 2021"

تأمل في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقاط A , B , C التي تمثلها الاعداد العقدية $a = 8$ و $b = -4 + 4i$ و $c = -4i$ بالترتيب المطلوب:

1) احسب العدد $\frac{b-c}{a-c}$ واستنتج ان المثلث قائم ومتساوي الساقين

2) جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$

3) جد العدد العقدي e الممثل للنقطة E ليكون الرباعي $ACBE$ مربعاً.

الحل

1)
$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4+4i+4i}{8+4i} = \frac{-4+8i}{8+4i} = \frac{4(-1+2i)}{4(2+i)} = \frac{-1+2i}{2+i}$$

$$= \frac{(-1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-2+i+4i+2}{4+1} = \frac{5i}{5} = i$$

$$arg\frac{b-c}{a-c} = arg\, i = \frac{\pi}{2} \to [BC] \perp [AC]$$

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = |i| = 1 \to \frac{BC}{AC} = 1 \to BC = AC$$

أي المثلث ABC هو مثلث قائم ومتساوي الساقين.

2) حسب الصيغة العقدية للدوران:

$$d - 0 = e^{i\frac{\pi}{4}}(a - 0) \to d = a\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$$

$$= 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} i$$

3) لدينا $BC = AC$ و $[BC] \perp [AC]$ لكي يكون الرباعي $ACBE$ مربعا يجب ان يكون $Z_{\overline{AE}} = Z_{\overline{CB}}$

$$Z_{\overline{AE}} = Z_{\overline{CB}} \to e - a = b - c \to e = a + b - c$$
$$\to e = 8 - 4 + 4i + 4i \to e = 4 + 8i$$

التمرين الرابع والعشرون: "الدورة الثانية 2021"

أولاً: ليكن $P(z)$ كثير حدود معرف بالصيغة

$$\boldsymbol{P(z) = z^3 - 2(\alpha + i\sqrt{3})z^2 - 4(\alpha - i\sqrt{3})z + 8}$$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ والمطلوب:

1) **احسب العدد α لكي يكون $z = 2$ حلاً للمعادلة $P(z) = 0$**

2) **بفرض $\alpha = 1$ جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق $P(z) = (z-2)Q(z)$ ثم استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$**

العقدية

<u>ثانياً:</u> لتكن C , B , A نقاط المستوي التي تمثل الاعداد العقدية بالترتيب

$a = 2$, $b = 1 + i\sqrt{3}$, $c = -1 + i\sqrt{3}$ والمطلوب

1) اثبت ان $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

2) ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل عين a' , b' , c' التي تمثلها نقاط المستوي A' , B' , C' على الترتيب

الحل

1) <u>حساب العدد a:</u>

$P(2) = 0 \to (2)^3 - 2(a + i\sqrt{3})(2)^2 - 4(a - i\sqrt{3})(2) + 8 = 0 \to 8 - 8(a + i\sqrt{3}) - 8(a - i\sqrt{3}) + 8 = 0$

$\to 1 - (a + i\sqrt{3}) - (a - i\sqrt{3}) + 1 = 0 \to$

$-a - i\sqrt{3} - a + i\sqrt{3} + 2 = 0 \to -2a + 2 = 0$

$\to a = 1$

2) <u>استنتاج حلول المعادلة $P(z) = 0$</u>

$P(z) = (z-2)Q(2)$

$\to P(z) = z^3 - 2(1 + i\sqrt{3})z^2 - 4(1 - i\sqrt{3})z + 8(z-2)Q(z)$

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 2z^2 - 2i\sqrt{3}z^2 - 4z + 4\sqrt{3}iz + 8 & z-2 \\ \hline \mp z^3 \pm 2z^2 & z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 \\ -2\sqrt{3}iz^2 - 4z + 4\sqrt{3}iz + 8 & \\ \pm 2\sqrt{3}iz^2 \quad \mp 4\sqrt{3}iz & \\ -4z \quad +8 & \\ \pm 4z \quad \mp 8 & \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

ومنه نجد $\mathrm{P(z)} = (z-2)(z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4)$

$\to Q(z) = z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4$

(كما يمكن إيجاده بالنشر ثم المقارنه).

$\mathrm{P(z)} = 0 \to (z-2)(z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4)$

$\to$ اما $z - 2 = 0 \to z = 2$

او $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-2\sqrt{3}i\right)^2 - 4(+1)(-4)$
$= -12 + 16 = 4 > 0$

$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{3}i+2}{2} \to z_1 = 1 + \sqrt{3}i$

$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{3}i-2}{2} \to z_2 = -1 + \sqrt{3}i$

ثانياً:

1) اثبات أن $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ واستنتاج طبيعة المثلث ABC

$\frac{a-b}{c-b} = \frac{2-1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\cos\frac{a}{r} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\sqrt{3}}{2} \to \theta = \pi - \frac{\pi}{3} \to \theta = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\to \begin{cases} 1) \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = 1 \to \frac{BA}{BC} = 1 \to AB = BC \\ 2) \arg\frac{a-b}{c-b} = \frac{2\pi}{3} \to (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{2\pi}{3} \to \hat{B} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

وبالتالي المثلث ABC متساوي الساقين وفيه زاوية الرأس $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$

❖ تعيين a' , b' , c'

إذا كان z' نظير z بالنسبة لمحور الفواصل فإن $z' = \bar{z}$ وبالتالي نجد :

$a' = \bar{a} = 2$

$b' = \bar{b} = 1 - i\sqrt{3}$

$c' = \bar{c} = -1 - i\sqrt{3}$

العقدية

التمرين الخامس والعشرون: "الدورة الأولى 2022"

1) جد الجذرين التربيعين للعدد العقدي $w=-3+4i$

2) ثم حل في C المعادلة الاتية:

$$z^2+2(1+i)z+i+\frac{3}{4}=0$$

الحل

1) نفرض أن $z=x+iy$ جذر تربيعي للعدد $w=-3+4i$

لدينا $x=-3, y=4$ وبالتالي نستنتج أن:

$$x^2+y^2=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5 \qquad (1)$$
$$x^2-y^2=|Re\, w|=-3 \qquad (2)$$
$$2xy=|Im\, w|=4 \qquad (3)$$

نجمع (1) , (2) نجد: $2x^2=2\to x^2=1\to x=\pm1$

بطرح(1) من(2) نجد: $2y^2=8\to y^2=4$

$\to y=\pm2$

وبما أن $xy>0$ فيجب أن يكون المقداران x,y من إشارة واحدة وبالتالي يكون إما $(x,y)=$ $(1,2)$ أو $(-1,-2)$ $=(x,y)$

فالجذران التربيعيان للعدد العقدي السابق هما :

$Z_1=1+2i\ ,Z_2=-1-2i$

2) $a=1, b=2+2i\ ,\ c=i+\frac{3}{4}$

$$\Delta=b^2-4ac=(2+2i)^2-4(1)\left(i+\frac{3}{4}\right)$$
$$=4+8i-4-4i-3=-3+4i$$

من الطلب السابق نجد أن : $\sqrt{\Delta}=\mp1\mp2i$

$$Z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-2i+1+2i}{2}=\frac{-1}{2}$$

$$Z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-2i-1-2i}{2}=\frac{-3-4i}{2}$$
$$=-\frac{3}{2}-2i$$

وبالتالي حلا المعادلة: $Z_1=-\frac{1}{2}\ ,Z_2=-\frac{3}{2}-2i$

التمرين السادس والعشرون: "الدورة الثانية 2022"

أجب عن الأسئلة الثلاث الاتية:

1) جد كل عدد عقدي يحقق $j^3=1$ واكتبه بالشكل الجبري.

2) اذا كان β عدداً حقيقياً وكان العدد العقدي $\omega=\frac{\beta+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\beta}$

a. اثبت ان $|w|=1$

b. من أجل $\beta=1$ أثبت أن $\omega^{12}=1$

3) عين مجموعة نقاط المستوي $M(Z)$ التي تحقق $|Z-2+i|=5$

الحل

1) نفرض أن $j=re^{i\theta}$

عندئذ المعادلة $j^3=1$ تكافئ $r^3e^{3i\theta}=1.e^{0i}$

ومنه $r^3=1$ و $3\theta=0+2\pi k$

$\Leftarrow$ $r=1\ ,\ \theta=\frac{2\pi}{3}k$ (k عدد صحيح)

- من أجل $k=0$ نجد أن $\theta=0$ ومنه $i_1=1e^{i0}=1$
- من اجل $k=1$ نجد أن $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ومنه
$$i_2=1e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
- من اجل $k=2$ نجد أن $\theta=\frac{4\pi}{3}$ ومنه
$$i_3=1e^{i\frac{4\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2)

a. أيا كان β من $\mathbb{R}$ لدينا: $\omega=\frac{i(-i\beta+\sqrt{3})}{\sqrt{3}-i\beta}=i$

(أو نضرب بمرافق المقام)

ومنه $|\omega|=|i|=1$

b. $\omega^{12}=i^{12}=(i^2)^6=(-1)^6=1$

العقدية

3) $|z-(2-i)|=5$

$\Leftarrow$ $a=2-i$ هو العدد العقدي الممثل

للنقطة A عندئذ

المعادلة $|Z-2+i|=5$ تكافئ $|Z-a|=5$

ومنه فإن مجموعة النقاط $M(Z)$ هي الدائرة

التي مركزها $A(-2,1)$ ونصف قطرها 5

الرياضيات تحت السيطرة..!!

لا والله أنا والسيطرة تحت الرياضيات ...☹