حل الاختبارات والنماذج الوزارية وأسئلة الدورات 2017-2022 الخاصة ببحثي المتتاليات ونهاية متتالية

التمرين الأول (النموذج الوزاري الأول)

لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق

$$x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2 \ , \qquad x_0=4$$

في حالة $n \geq 0$ نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة:

$$y_n = x_n - 8$$

أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية، واكتب y_n بدلالة n، واحسب $\lim\limits_{n\to\infty} y^n$

الحل:

إثبات أن المتتالية هندسية :

$$y_{n+1} = x_{n+1} - 8$$

$$y_{n+1} = \left(\frac{3}{4}x_n + 2\right) - 8$$

$$y_{n+1} = \frac{3}{4}x_n - 6 = \frac{3}{4}x_n - \frac{24}{4}$$

$$y_{n+1} = \frac{3}{4}(x_n - 8)$$

$$y_{n+1} = \frac{3}{4}y_n \Longrightarrow \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{3}{4}$$

ومنه فالمتتالية y_n هي متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$

- وحدها الأول:

$$y_0 = x_0 - 8 = 4 - 8 = -4$$

- حدها العام بدلالة n هو:

$$y_n = y_{n}.\, q^n$$

$$y_n = (-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} y^n = \lim_{n\to\infty} (-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

$$\left(\text{لأن } \left|\frac{3}{4}\right| < 1\right)$$

التمرين ثاني (نموذج وزاري ثاني)

لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة

$$x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \ , \qquad x_0=5$$

1) احسب x_1, x_2, x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية.

2) نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$. أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية.

3) اكتب y_n بدلالة n . ثم احسب $y_2 + y_3 + \cdots + y_{10}$ بدلالة قوة للعدد $\frac{6}{5}$

الحل 1)

$$x_1 = \frac{6}{5}\times 5 + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$$
$$x_2 = \frac{6}{5}\left(6 + \frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{224}{25}$$
$$x_3 = \frac{6}{5}\left(\frac{224}{25}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1444}{125}$$

نلاحظ أن المتتالية x_n متزايدة وسنثبت ذلك بالتدريج أي :

$$E(n): x_n \leq x_{n+1}$$

نثبت صحة القضية $E(0)$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 5 \\ x_1 &= \frac{34}{5} = 6.8 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x_0 < x_1$$

لنفرض صحة القضية $E(n): x_n \leq x_{n+1}$ بالتالي:

$$x_n \leq x_{n+1}$$

لنثبت صحة القضية: $E(n+1): x_{n+1} \leq x_{n+2}$

من الفرض نضرب الطرفين ب $\frac{6}{5}$

$$\frac{6}{5}x_n \leq \frac{6}{5}x_{n+1}$$

نجمع للطرفين $\frac{4}{5}$

$$\frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \leq \frac{6}{5}x_{n+1} + \frac{4}{5}$$
$$x_{n+1} \leq x_{n+2}$$

إذا حسب البرهان بالتدريج فإن:

$$x_n \leq x_{n+1}$$

أياً كان العدد الطبيعي n فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

المتتاليات

طريقة ثانية:

لنثبت أن $x_{n+2}-x_{n+1}\ge 0$

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{6}{5}x_{n+1}+\frac{4}{5}-(\frac{6}{5}x_n+\frac{4}{5})$$

$$=\frac{6}{5}x_{n+1}+\frac{4}{5}-\frac{6}{5}x_n-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}(x_{n+1}-x_n)$$

وحسب الفرض نجد أن :

$$\frac{6}{5}(x_{n+1}-x_n)\ge 0$$

إذاً المتتالية متزايدة .

الحل 2)

$$y_{n+1}=x_{n+1}+4=\frac{6}{5}x_n+\frac{4}{5}+4$$

$$=\frac{6}{5}x_n+\frac{24}{5}=\frac{6}{5}(x_n+4)$$

$$\Rightarrow y_{n+1}=\frac{6}{5}y_n\Rightarrow\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{6}{5}$$

❖ فالمتتالية y_n هندسية:

- أساسها $q=\frac{6}{5}$
- وحدها الأول: $y_0=x_0+4=5+4=9$

الحل 3)

❖ كتابة y_n بدلالة n بما أن y_n هندسية يكون :

$$\Rightarrow y_n=y_0.q^n$$

$$y_n=9\left(\frac{6}{5}\right)^n$$

$$y_2=9\left(\frac{6}{5}\right)^2=9\times\frac{36}{25}$$

❖ حساب المجموع :

عدد الحدود $=10-2+1=9$

$S_n=$ الحد الأول $.\frac{1-q^n}{1-q}$

$$y_2+y_3+\dots+y_{10}=9\times\frac{36}{25}\frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^9}{1-\frac{6}{5}}$$

$$=\frac{324}{5}\times\frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^{10}}{1-\frac{6}{5}}$$

التمرين الثالث النموذج الوزاري الثالث

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية:

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{2-u_n}\quad,\quad u_0=\frac{1}{2}$$

1) **أثبت أن $0<u_n<1$ أياً كان n من N**
2) **نعرّف $(v_n)_{n\ge0}$ حيث $v_n=\frac{1}{u_n}-1$ أثبت أن $(v_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n**
3) **اكتب u_n بدلالة n. واحسب $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$**

الحل 1)

سنبرهن بالتدريج أن $E(n): 0<u_n<1$ أياً كان n من N كما يلي:

❖ لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي $0<u_n<1$

❖ لنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي:

نعرف التابع:

$$f(x)=\frac{x}{2-x}$$

ولدينا:

$$f'(x)=\frac{2}{(2-x)^2}>0$$

من الفرض لدينا: $E(n): 0<u_n<1$

وبما أن f متزايد فإن:

$$f(0)<f(u_n)<f(1)$$
$$1<u_{n+1}<2$$
$$\Rightarrow 0<1<\frac{u_n}{2-u_n}<2$$
$$\Rightarrow\quad 0<u_{n+1}<2$$

إذا فحسب التدريج فإن $0<u_n<1$ أياً كان n من N

توضيح الأسطورة

كيف عرفنا أنو متزايد ؟؟؟

التابع $f(x)=\frac{x}{2-x}$ متزايد لأن:

$$f'(x)=\frac{2}{(2-x)^2}>0$$

المتتاليات

طريقة ثانية للإثبات:

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n واحدة فقط

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 2 + 2}{2 - u_n} = \frac{-(u_n + 2) + 2}{-u_n + 2}$$
$$= -1 + \frac{2}{-u_n + 2}$$

من الفرض:

$$0 < u_n < 1$$
$$0 > -u_n > -1$$
$$2 > 2 - u_n > 2 - 1$$
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2 - u_n} < 1$$

نضرب ب 2 :

$$1 < \frac{2}{2 - u_n} < 2$$

نضيف -1

$$0 < -1 + \frac{2}{2 - u_n} < 1 \Rightarrow \quad 0 < u_{n+1} < 1$$

الحل 2)

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\frac{u_n}{2 - u_n}} - 1$$
$$= \frac{2 - u_n}{u_n} - 1 = \frac{2 - u_n - u_n}{u_n}$$
$$= \frac{2(1 - u_n)}{u_n} = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$$
$$\Rightarrow v_{n+1} = 2v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 2$$

إذا v_n متتالية هندسية:

- أساسها 2
- وحدها الأول

$$v_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$v_n = v_0 . q^n$$
$$\Rightarrow v_n = 2^n$$

الحل 3)

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow 2^n = \frac{1}{u_n} - 1$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{2^n + 1}$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n + 1} = 0$$

حيث $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$

التمرين الرابع النموذج الوزاري الرابع

لتكن المتتالية $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$, $u_0 = e^3$ و v_n
متتالية معرفة بالشكل $v_n = \ln(u_n) - 2$
والمطلوب:

1) **أثبت أن v_n هندسية وعين q , v_0**
2) **اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n**
3) **أثبت أن $\lim_{n\to\infty} u_n = e^2$**

الحل 1)

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$$
$$= \ln e + \ln(\sqrt{u_n}) - 2 = 1 + \ln(u_n)^{\frac{1}{2}} - 2$$
$$= \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2)$$
$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$$

- ❖ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية:
  - أساسها $\frac{1}{2}$
  - وحدها الأول :

$$v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(e^3) - 2$$
$$= 3\ln -2 = 3 - 2 = 1$$

الحل 2)

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$\ln(u_n) = v_n + 2$$
$$u_n = e^{v_n + 2}$$
$$u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$$

المتتاليات

الحل 3)

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2} = e^{0+2} = e^2$$

حيث:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

لأن $-1 < q < 1$

$$-1 < \frac{1}{2} < 1$$

التمرين خامس (نموذج وزاري خامس)

لتكن $u_n = 4n + 1$

1) **أثبت أن المتتالية حسابية**
2) **عين أساسها**
3) **احسب $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$**

الحل 1-2)

$$u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 1 - (4n+1)$$
$$= 4n + 5 - 4n - 1 = 4$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ حسابية

- أساسها $r = 4$
- وحدها الأول $u_0 = 1$

الحل 3)

$$S = \text{عدد الحدود} \cdot \frac{(\text{الحد الأول} + \text{الأخير})}{2}$$

$$\text{الحد الأخير} = u_{10} = u_0 + 10q = 1 + 10 \times 4 = 41$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$$
$$= (10 - 0 + 1)\frac{1 + 41}{2} = 231$$

التمرين سادس (النموذج الوزاري الخامس)

لتكن المتتاليتين $(y_n)_{n\ge0}$ ، $(x_n)_{n\ge0}$ المعرفتين وفق :

$$y_n = \frac{4n+1}{n+2} \qquad x_n = \frac{4n+5}{n+1}$$

برهن أنهما متجاورتين

الحل:

دراسة إطراد المتتالية $(x_n)_{n\ge0}$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4(n+1)+5}{(n+1)+2} - \frac{4n+5}{n+1}$$
$$= \frac{4n^2 + 13n + 9 - (4n^2 + 13n + 10)}{(n+2)(n+1)}$$
$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\ge0}$ متناقصة

دراسة إطراد المتتالية $(y_n)_{n\ge0}$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{4(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{4n+1}{n+2}$$
$$= \frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+1}{n+2}$$
$$= \frac{4n^2 + 13n + 10 - (4n^2 + 13n + 3)}{(n+3)(n+2)}$$
$$= \frac{7}{(n+3)(n+2)} > 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\ge0}$ متزايدة

$$x_n - y_n = \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2}$$
$$= \frac{(4n+5)(n+2) - (4n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{4n^2 + 8n + 5n + 10 - (4n^2 + 4n + n + 1)}{(n+1)(n+2)}$$
$$x_n - y_n = \frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}\right) = 0$$

اذاً فالمتتاليتان $(x_n)_{n\ge0}$ و $(y_n)_{n\ge0}$ متجاورتان

التمرين سابع (نموذج وزاري سادس)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يأتي:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \quad , \quad u_0 = 0$$

1) أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$

2) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

3) علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها

الحل 1)

لنثبت صحة العلاقة $0 \leq u_n \leq 1$ بالتدريج

نثبت أولا صحة القضية $E(0)$ كما يلي:

$0 \leq u_0 = 0 \leq 1$ فالعلاقة صحيحة

لنفرض صحة العلاقة $E(n)$:

$E(n): 0 \leq u_n \leq 1$

ولنثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ كما يلي:

نعرف التابع:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

نلاحظ أن f متزايد لأن

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{3}{(x+2)^2} > 0$$

لدينا

$$0 \leq u_n \leq 1$$

وبما أن f متزايد فإن:

$$f(0) < f(u_n) < f(1)$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} < 1$$

$$0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

$$f(1) = \frac{2(1)+1}{1+2} = 1$$

$$f(0) = \frac{2(0)+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

طريقة ثانية :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} = \frac{2u_n+4-4+1}{u_n+2}$$

$$= \frac{2(u_n+2)-3}{u_n+2} = 2 - \frac{3}{u_n+2}$$

لدينا من الفرض:

$$0 \leq u_n \leq 1$$
$$2 \leq u_{n+1} \leq 3$$
$$\frac{2}{3} \leq \frac{u_n+2}{3} \leq \frac{3}{3}$$

نأخذ المقلوب:

$$\frac{3}{2} \geq \frac{3}{u_n+2} \geq 1$$

نضرب ب -1

$$\frac{-3}{2} \leq \frac{-3}{u_n+2} \leq -1$$

نضيف 2 :

$$2 - \frac{3}{2} \leq 2 - \frac{3}{u_n+2} \leq 2-1$$
$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$
$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

$\Leftarrow E(n+1)$ محققة

الحل 2)

لنثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة أي لنثبت

$E(n): u_{n+1} > u_n$ بالتدريج

إن العلاقة $E(0)$ صحيحة لأن $u_2 > u_1$

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow u_1 > u_0$$

لنفرض صحة العلاقة $E(n)$

أي $u_{n+1} > u_n$ .....(*)

لنثبت صحة العلاقة $E(n+1)$

لدينا من الفرض :

التمرين ثامن (نموذج وزاري 2018)

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{3u_n+2}{2u_n+6} \end{aligned}\right\} n \geq 0 \text{ عند}$$

1) أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

الحل 1)

لدينا التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$

- معرف على $R/\{-3\}$
- اشتقاقي على المجالين $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$= \frac{6x+18-6x-4}{(2x+6)^2} = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

فالتابع f متزايد تماماً على كل من المجالين $]-\infty, -3[$ و $]-3, +\infty[$

❖ لتكن الخاصة : $E(n): \frac{1}{2} < u_n \leq 1 : \ n \geq 0$

- نثبت صحة الخاصة لأجل $n = 0$

$$E(0): \frac{1}{2} < u_0 = 1 \leq 1$$

- نفرض الخاصة صحيحة لأجل n

$$E(n): \frac{1}{2} < u_n \leq 1 : \ n \geq 0$$

- نثبت صحة الخاصة لأجل $n+1$

$$E(n+1): \frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$$

- لدينا من الفرض

$$\frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

$$u_{n+1} > u_n$$

نضيف 2:

$$2 + u_{n+1} > 2 + u_n$$

نأخذ المقلوب :

$$\frac{1}{2+u_{n+1}} < \frac{1}{2+u_n}$$

نضرب ب -3 :

$$\frac{-3}{2+u_{n+1}} > \frac{-3}{2+u_n}$$

نضيف 2:

$$2 - \frac{3}{2+u_{n+1}} > 2 - \frac{3}{2+u_n}$$

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

فالمتتالية متزايدة.

الحل 3)

بما أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة، ولإيجاد نهاية متتالية متقاربة ومُعرّفة بالتدريج.

نحل المعادلة $f(x) = x$

حل المعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x$$

$$\frac{2x+1}{x+2} = x$$

$$2x+1 = x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow \ x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 & \text{مقبول} \\ x = -1 & \text{مرفوض} \end{cases}$$

من حل المعادلة $l = 1$ إذاً $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

بما أن المتتالية من النمط $u_{n+1}=f(u_n)$

والتابع f متزايد تماماً على $]-3,+\infty[$ نستنتج أن:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)<f(u_n)\le f(1)$$

$$\frac{1}{2}<u_{n+1}\le\frac{5}{8}<1$$

إذاً $\frac{1}{2}<u_{n+1}\le 1$

وبالتالي $E(n+1)$ محققة و $E(n)$ صحيحة أيا كان العدد الطبيعي

الحل 2)

لتكن الخاصة $E'(n): u_{n+1}<u_n$

- نثبت صحة الخاصة لأجل $n=0$

$E'(0): u_1=\frac{5}{8}<u_0=1$ محققة

- نفرض الخاصة صحيحة لأجل n

$E'(n): u_{n+1}<u_n$

- نثبت صحة الخاصة لأجل $n+1$

$E'(n+1): u_{n+2}<u_{n+1}$

- نعلم أن

$u_{n+1}<u_n$

بما أن المتتالية من النمط $u_{n+1}=f(u_n)$

والتابع f متزايد تماماً على $]-3,+\infty[$ نستنتج أن:

$f(u_{n+1})<f(u_n)$

$u_{n+2}<u_{n+1}$

وبالتالي $E'(n+1)$ محققة و$E'(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n (فالمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً)

لا تيأس فما زال هناك متسع من الوقت ...إيماننا بأحلامنا والإصرار عليها يساعدنا في جعلها حقيقة..اركض نحوها

التمرين تاسع (نموذج وزاري 2019)

المتتالية $(U_n)_{n\ge1}$ معرفة عند كل $n\ge 1$ وفق

$$U_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

1) أثبت أن $\frac{1}{n+1!}\le\frac{1}{2^n}$

2) أثبت أن $U_n<2$ واستنتج أن U_n متقاربة

الحل 1)

لدينا المتتالية $(U_n)_{n\ge1}$:

$$U_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

- بفرض القضية

$$E(n)=\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$$

- نثبت صحة القضية من أجل $E(1)$

$$\left.\begin{aligned} l_1&=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}\\ l_2&=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow l_1\le l_2 \text{ محققة}$$

- نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$

$$E(n)=\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}\quad\text{صحيحة}$$

- نثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$

$$E(n+1)=\frac{1}{(n+2)!}\le\frac{1}{2^{n+1}}$$

- من الفرض

$$\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n+2}\times\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{n+2}$$

نضرب الطرف الأيسر ب $\frac{2}{2}$:

$$\frac{1}{(n+2)!}\le\frac{1}{2^{n+1}}\times\underbrace{\frac{2}{n+2}}_{\text{أصغر من 1 يهمل}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(n+2)!}\le\frac{1}{2^{n+1}}\qquad\text{محققة}$$

ومنه نجد أنها صحيحة من أجل $E(n+1)$ وبالتالي فهي صحيحة من أجل $E(n)$ أيا كان $n\ge1$

المتتاليات

الحل 2)

$$U_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$n = 0 \implies \frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$$

$$n = 1 \implies \frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$$

$$n = 2 \implies \frac{1}{3!} \leq \frac{1}{2^2}$$

$$n = 3 \implies \frac{1}{4!} \leq \frac{1}{2^3}$$

....

$$n - 1 \implies \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{(n-1)}}$$

بجمع المتراجحات طرفاً إلى طرف

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots + \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$U_n \leq \underbrace{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن مجموع حدود متتالية هندسية:

- أساسها $q = \frac{1}{2}$
- حدها الأول $U_0 = \frac{1}{2^0} = 1$
- عدد الحدود $(n-1) - 0 + 1 = n$

$$S_n = a\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right)$$

$u_0 = 0$

$$\Rightarrow S_n = 1\left(\frac{1 - \frac{1}{2}^n}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$u_1 = \frac{1}{2}$

$$S_n = 2\left(1 - \frac{1}{2}^n\right)$$

$$\Rightarrow S_n = 2 - 2\left(\frac{1}{2}^n\right)$$

$$U_n \leq 2 - \underbrace{2\left(\frac{1^n}{2}\right)}_{\text{سالب يهمل}}$$

$$\Rightarrow U_n \leq 2$$

وبالتالي فإن 2 راجح على المتتالية U_n

$$U_{n+1} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

ومنه فإن U_n متزايدة ، المتتالية U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 بالتالي هي متقاربة

التمرين العاشر (نموذج وزاري 2020)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق:

$$\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 4u_n} \quad , \quad u_0 = 2}$$

من أجل كل n من N

1) **أثبت بالتدريج أن $u_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n**
2) **أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n**
3) **ليكن S_n المجموع المعرف بالشكل $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ احسب S_n بدلالة n واستنتج $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$**

الحل 1)

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 4u_n} \quad , \quad u_0 = 2$$

- **نسمي القضية**

$$E(n) = u_n > 0$$

- **نثبت صحة الخاصة لأجل $E(0)$**

$l_1 = u_0 = 2 > 0 = l_2$ محققة

- **نفرض أن $E(n)$ صحيحة أي :**

$$E(n) = u_n > 0$$

- **نثبت صحة $E(n+1)$:**

$$E(n+1) = u_{n+1} > 0$$

- **لدينا من الفرض:**

$$u_n > 0$$

- **نضرب الطرفين ب 4:**

$$4u_n > 0 \Rightarrow 1 + 4u_n > 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1+4u_n} > 0$$
$$\Rightarrow \frac{u_n}{1+4u_n} > 0$$
$$u_{n+1} > 0$$

ومنه فإن $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي فإن $E(n)$ أياً كان $n > 0$

الحل 2) $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية ؟

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{1+4u_n}} = \frac{1+4u_n}{u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1+4u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{4u_n}{u_n} = 4 = r$$

ومنه فإن v_n متتالية حسابية أساسها $r = 4$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$

الحد العام:

$$v_n = v_0 + (n-0)r$$
$$v_n = \frac{1}{2} + 4n$$

ولدينا:

$$v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n}$$
$$u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + 4n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{\frac{1+8n}{2}}$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{1+8n}$$

الحل 3)

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

S_n متتالية حسابية

- حدها الأول $a = v_0 = \frac{1}{2}$
- حدها الأخير $l = v_n = \frac{1}{2} + 4n$
- عدد الحدود $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول} + \text{الأخير})$$

$$S_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4n\right)\frac{n+1}{2}$$

$$= \left(\frac{2+8n}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{2(1+4n)}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{(1+4n)(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n+1+4n^2+4n}{2} = \frac{4n^2+5n+1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

التمرين الحادي عشر (النموذج الوزاري الثالث 2020)

لتكن المتتاليتين $(u_n)_{\geq 1}$ ، $(v_n)_{\geq 1}$ المعرفتين وفق العلاقتين:

$$u_n = \frac{-1}{n} \qquad v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

1) ادرس اطراد كل من $(u_n)_{\geq 1}$ ، $(v_n)_{\geq 1}$

2) أثبت أن المتتاليتين $(u_n)_{\geq 1}$ ، $(v_n)_{\geq 1}$ متجاورتان

الحل 1) لدينا المتتاليتين

$$u_n = \frac{-1}{n} \qquad v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$u_{n+1} = \frac{-1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

u_n متزايدة تماماً

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < 0$$

وذلك لأن:

$$\sqrt{(n+1)^2+1} > \sqrt{n^2+1}$$
$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

v_n متناقصة تماماً

الحل 2) من الطلب السابق وجدنا أن :

$$\begin{cases} (u_n)_{\geq 1} \text{ متزايدة تماماً} \\ (v_n)_{\geq 1} \text{ متناقصة تماماً} \end{cases}$$ الشرط الأول محقق

$$\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{n}\right)$$
$$= 0 + 0 = 0$$

الشرط الثاني محقق فالمتتاليتان $(u_n)_{\geq 1}$ ، $(v_n)_{\geq 1}$ متجاورتان

التمرين الثاني عشر (النموذج الوزاري الثالث 2020)

1) جد المجموع:

$$S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^6 \text{ بدلالة } a$$

2) ليكن $a = e^{2i\pi/7}$ أثبت أن

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^6 = 0$$

الحل 1)

$$S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^6$$
$$= (a)^0 + (a)^1 + (a)^2 + \cdots + (a)^6$$

S مجموع حدود متتالية هندسية:

- أساسها $q = a$
- وحدها الأول $a = u_0 = (a)^0 = 1$
- وعدد الحدود $6 - 0 + 1 = 7$

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$
$$S = 1\left(\frac{1-a^7}{1-a}\right) = \frac{1-a^7}{1-a}$$

الحل 2) لدينا من الطلب السابق

$$S = 1\left(\frac{1-a^7}{1-a}\right) \underset{\text{هل يساوي 0؟؟}}{\overset{?}{=}} 0$$

$$S = 1\left(\frac{1-\left(e^{2i\pi/7}\right)^7}{1-e^{2i\pi/7}}\right) = \frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{2\pi i/7}}$$

$$\frac{1-1}{1-e^{2\pi i/7}} = 0$$ محققة

التمرين الثالث عشر (الاختبار الأول)

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات:

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}\ , \quad u_0 = 0$$

متزايدة تماماً.

الحل:

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}\ , \quad u_0 = 0$$

- نسمي القضية:

$E(n): u_{n+1} \geq u_n$

- نثبت صحة القضية لأجل $n = 0$

$$u_1 = \sqrt{1+u_0^2} = \sqrt{1+0} = 1$$

$E(0):\ u_1 \geq u_0 = 1 \geq 0$ محققة

- نفرض صحة القضية من أجل n

$u_{n+1} \geq u_n$

- نبرهن صحتها من أجل $n+1$

$E(n+1): u_{n+2} > u_{n+1}$

$$\sqrt{1+u_{n+1}^2} > \sqrt{1+u_n^2}$$

- **من الفرض**

$u_{n+1} > u_n$

$u_{n+1}^2 > u_n^2$

$1 + u_{n+1}^2 > 1 + u_n^2$

$\sqrt{1+u_{n+1}^2} \geq \sqrt{1+u_n^2}$

$u_{n+2} > u_{n+1}$

محققة من أجل $n+1$ و محققة من أجل n ومنه u_n متزايدة

ملاحظة من الأسطورة

يمكن الإثبات من أجل $n+1$ بطريقة التصوير:

1- نثبت تزايد التابع $f(x) = \sqrt{1+x^2}$
$f'(x) > 0$

2- ننطلق من الفرض ونصور أطراف المتراجحة ونصل للطلب

التمرين الرابع عشر (الاختبار الثاني)

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي :

$$u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} \ , \quad u_0 = 1$$

1) أثبت أن $0 < u_n \leq 4$ أياً كان العدد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

الحل 1)

$$u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} \ , \quad u_0 = 1$$

- **نسمي القضية**

$E(n): 0 \leq u_n \leq 4$

- **نثبت صحة القضية من أجل $n = 0$**

$E(0): 0 \leq u_n = 1 \leq 4$ محققة

- **نفرض صحة القضية من أجل n**

$E(n): 0 \leq u_n \leq 4$

- **نثبت صحة القضية من أجل $n + 1$**

$E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 4$

$0 \leq \sqrt{12 + u_n} \leq 4$

- **من الفرض:**

$0 \leq u_n \leq 4$

$12 \leq 12 + u_n \leq 16$

$\sqrt{12} \leq \sqrt{12 + u_n} \leq \sqrt{16}$

$0 < 2\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 4$

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4$

محققة من أجل $n + 1$ بالتالي محققة من أجل n

الحل 2) نسمي القضية

$E(n): u_{n+1} \geq u_n$

- **نثبت صحة القضية من أجل $n = 0$**

$E(0): u_1 \geq u_0$

$u_1 = \sqrt{12 + 1} = \sqrt{13}$

$\sqrt{13} \geq 1$ محققة

نفرض صحة القضية من أجل n

$E(n): u_{n+1} \geq u_n$

نثبت صحة القضية من أجل $n + 1$

$E(n+1): u_{n+2} \geq u_{n+1}$

$\sqrt{12 + u_{n+1}} \geq \sqrt{12 + u_n}$

من الفرض:

$u_{n+1} \geq u_n$

$12 + u_{n+1} \geq 12 + u_n$

$\sqrt{12 + u_{n+1}} \geq \sqrt{12 + u_n}$

$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$

ملاحظة (علل؟)

هنا المتتالية متقاربة /علل؟/ لأنها متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4ونهايتها هو حل المعادلة $f(x) = x$

التمرين الخامس عشر (الاختبار الثالث)

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n>0}$ ، $(v_n)_{n>0}$ المعرفتان كما يأتي:

$$v_n = u_n + \frac{1}{4n}$$

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \dots + \frac{1}{2n}$$

أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاورتان

الحل:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty - \infty$ عدم تعيين

بما أن $x \to -\infty$:

$\Rightarrow |x| = -x$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + x$

$= \dfrac{x^2 + 2x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x} = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x}$

$$\frac{x\left[2+\frac{3}{x}\right]}{x\left[-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right]}=\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1}$$

$$\sqrt{x^2}=|x|=-x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2}{-2}=-1$$

$$u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\dots+\frac{1}{2n}$$

$$v_n=u_n+\frac{1}{4n}$$

- ندرس اطراد u_n

$$u_{n+1}-u_n=$$

$$\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\dots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$$

u_nمتزايدة تماماً

- ندرس اطراد v_n

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}+\frac{1}{4n+4}-u_n-\frac{1}{4n}$$

$$=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{4n+4}-\frac{1}{4n}$$

$$=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\frac{4n-4n-4}{(4n+4)(4n)}$$

$$=\frac{16n-4\big(2(2n+1)\big)}{(2n+1)(2n+2)(16n)}$$

$$=\frac{16n-16n-8}{(2n+1)(2n+2)(16n)}$$

$$=\frac{-8}{(2n+1)(2n+2)(16n)}<0$$

v_nمتناقصة تماماً

- نأخذ نهاية الفرق

$$\lim_{n\to\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n}\right)=0$$

فالمتتاليتان متجاورتان

التمرين السادس عشر (الاختبار الرابع)

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ كما يأتي

$$u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}\quad,\quad u_0=\frac{1}{2}$$

1) **باستعمال الرسم مثل على محور الفواصل ودون حساب الحدود $u_0, u_1\ u_2\ u_3$**

2) **ضع تخميناً حول اطراد المتتالية وتقاربها**

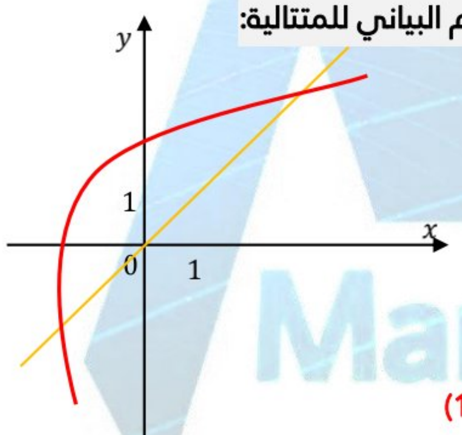
3) **نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة**

$$v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}$$

1. **بين أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية ، عين أساسها وحدها الأول**

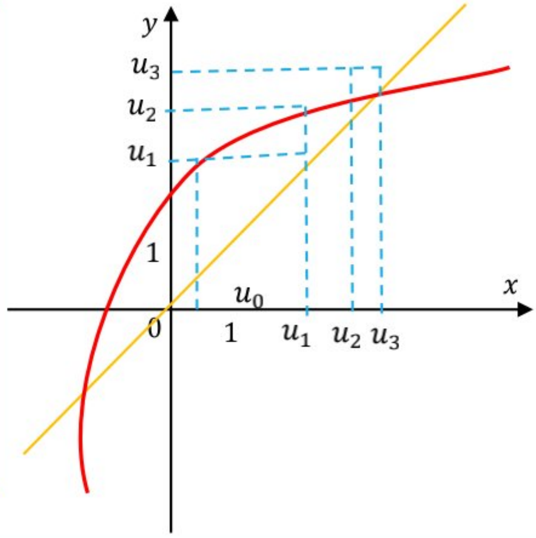
2. **اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n وعين نهاية المتتالية u_n**

الرسم البياني للمتتالية:



الحل 1)

$$u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}\quad,\quad u_0=\frac{1}{2}$$



المتتاليات

الحل 2)

نلاحظ أن المتتالية متزايدة وتتقارب نحو نقطة التقاطع بين $x = y$ و $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ أي نحو 4

الحل 3 – 1)

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{5u_n + 4}{u_n + 2} - 4}{\frac{5u_n + 4}{u_n + 2} + 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{5u_n + 4 - 4u_n - 8}{5u_n + 4 + u_n + 2}$$

$$\frac{u_n - 4}{6u_n + 6} = \frac{1}{6}\frac{u_n - 4}{u_n + 1}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{6}v_n$$

$(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{6}$

وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 + 1} = v_n = \frac{\frac{1}{2} - 4}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{-7}{3}$

الحل 3-2) v_n هندسية

$$\Rightarrow v_n = v_0 . q^n = \frac{-7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

لدينا

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1} \Rightarrow v_n(u_n + 1) = u_n - 4$$

$$\Rightarrow v_n . u_n + v_n = u_n - 4$$

$$\Rightarrow v_n . u_n - u_n = -v_n - 4$$

$$\Rightarrow u_n(v_n - 1) = -v_n - 4$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{-v_n - 4}{(v_n - 1)}$$

$$u_n = \frac{-\frac{-7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n - 4}{\left(\frac{-7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n - 1\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{-4}{-1} = 4$$

حيث:

$$-1 < r = \frac{1}{6} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$$

التمرين السابع عشر (2017 دورة أولى)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \ , \quad u_0 = 1$$

لتكن المتتالية $(v_n)_{n>0}$ المعرفة وفق:

$$v_n = u_n + 3$$

1) **أثبت أن $(v_n)_{n>0}$ متتالية هندسية ، وأوجد أساسها.**
2) **اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n ليكن في حالة عدد طبيعي n:**
$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
3) **عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n>0}$**

الحل 1)

لإثبات أن v_n هندسية

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3} = q$$

v_n متتالية هندسية

- أساسها $q = \frac{1}{3}$
- وحدها الأول: $v_0 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$
- إيجاد الحد العام لv_n

$$v_n = v_0 . q^n = 4.\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

- u_n بدلالة n لدينا:

$$v_n = u_n + 3$$

$$u_n = v_n - 3$$

$$u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

- حساب مجموع S_n

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

S_n مجموع متتالية هندسية لأن v_n هندسية

$$S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$a = v_0 = 4 \, , q = \frac{1}{3}$$

$$n = n - 0 + 1 = n + 1$$

$$S_n = 4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$S_n = 6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

استنتاج نهاية S_n

$$\lim_{n\to\infty} S_n =$$

$$-1 < q = \frac{1}{3} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} 6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = 6$$

التمرين الثامن عشر (2017 دورة ثانية)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق ما يأتي :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

1) أثبت أن المتتالية u_n متناقصة

2) أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها

الحل 1)

- لإثبات المتتالية u_n متناقصة

$$u_{n+1} - u_n < 0 \Longrightarrow u_{n+1} < u_n$$

$$u_{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

- نضرب بالمرافق

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

وهذا محقق لأن

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

للتوضيح :كلما كبر المقام صغر الكسر

$$u_{n+1} < u_n$$

$\Leftarrow$ u_n متناقصة

الحل 2)

- نعلم أن:

أياً كان $n \geq 0$ $\quad \sqrt{n+1} > \sqrt{n}$

(*)..... $\quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0$

- ونعلم أن:

$$\sqrt{n+1} \geq 1$$

ومنه $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 1$

نقلب (*) $\quad$ (*)... $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \leq 1$

- من * و ** نجد أن :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

- نهاية u_n:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

التمرين التاسع عشر (2018 دورة أولى)

ليكن لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n>0}$ ، $(v_n)_{n>0}$

المعرفتان وفق

$$v_n = 5 + \frac{1}{n^2} \qquad u_n = 5 - \frac{1}{n}$$

والمطلوب:

1) أثبت أن المتتالية u_n متزايدة

2) أثبت أن المتتالية v_n متناقصة

3) هل المتتاليتان u_n, v_n متجاورتان ؟علل إجابتك

الحل 1) لإثبات أن u_n متزايدة

$$u_n = 5 - \frac{1}{n}$$

- **بما أن u_n تابع نفرض**

$$u_n = f(x) = 5 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

u_n متتالية متزايدة

الحل 2) لإثبات أن v_n متناقصة

$$u_n = 5 + \frac{1}{n^2}$$

- **بما أن v_n تابع نفرض**

$$v_n = g(x) = 5 + \frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$$

v_n متتالية متناقصة

الحل 3) نعم لأن u_n متزايدة وv_n متناقصة

$$\lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right) = 0$$

التمرين العشرون (2018 دورة ثانية)

$(u_n)_{n>0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وفيها

$u_0 = 1$ والمطلوب:

1)احسب u_3

2)احسب المجموع : $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_7$

الحل 1) بما أن u_n هندسية، نوجد الحد العام

لدينا أساسها $u_0 = 1, q = 2$

$$u_n = u_0 . q^n$$

$$u_n = 2^n$$

- **حساب u_3:**

$$u_3 = 2^3 = 8$$

الحل 2) حسابS_n

$$S_n = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$$

- بما أن S_n مجموع متتالية هندسية

$$S_n = a\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right)$$

$$a = u_3 = 8 \,, q = 2 \,, n = 7 - 3 + 1 = 5$$

$$S_n = 8\left(\frac{1 - 2^5}{1 - 2}\right) = 8\left(\frac{1 - 32}{-1}\right)$$

$$= 8\left(\frac{-31}{-1}\right) = 248$$

التمرين الواحد و العشرون (2019 دورة أولى)

لتكن المتتالية $(S_n)_{n>0}$ المعرفة وفق:

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

والمطلوب:

1) أثبت أن المتتالية S_n متزايدة تماما
2) أثبت أن S_n تكتب بالشكل

$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

3) ثم استنتج عنصرا راجحاً على المتتالية S_n وبين أنها متقاربة.

الحل 1) لإثبات أن S_n متزايدة تماماً

$$S_{n+1} - S_n > 0$$

$$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$

S_n متزايدة تماماً

الحل 2) S_n مجموع متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$$S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$a = 1$$
$$q = \frac{1}{3}$$
$$n = n + 1$$

$$S_n = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$S_n = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{3}{3^n . 3}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

الحل 3)

$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

$$S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} \leq \frac{3}{2}$$

ومنه فإن :

$$S_n \leq \frac{3}{2}$$

فالعدد الراجح على المتتالية هو $\frac{3}{2}$ بما أن S_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

التمرين الثاني و العشرون (2019 دورة ثانية)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

1) ادرس اطراد المتتالية u_n
2) اثبت ان العدد 2 راجح على u_n
3) احسب $\lim_{n\to\infty} u_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كانت $n_0 < n$ كان u_n في المجال $]1.9, 2.1[$

الحل 1) ندرس اطراد u_n

$$u_n = f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

$$f'^{(x)} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

u_n متزايدة تماماً

الحل 2) لإثبات أن العدد 2 راجح على u_n

$$u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2 = -\frac{3}{n+1} < 0$$

$$u_n - 2 < 0$$

$$u_n < 2$$

فالعدد 2 راجح على المتتالية u_n

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 2$$

Manal Alsherbaji 0957474873 أ. منال الشربجي

لإيجاد n_0 عدد طبيعي $]1.9,2.1[$

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.9+2.1}{2} = 2$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1-1.9}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$$|u_n - c| < r$$

$$\left|\frac{-3}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10}$$

$$n+1 > 30$$

$$n > 29$$

$$n_0 = 29$$

التمرين الثالث و العشرون (2020 دورة أولى)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}\ , \qquad u_0 = 3$$

عند كل $n \geq 0$ والمطلوب:

1) **أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على $[2, +\infty[$**
2) **أثبت بالتدريج أن $2 < u_{n+1} < u_n$ أيا كان العدد الطبيعي n**
3) **استنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها.**

الحل 1)

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

$$f'^{(x)} = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$

$x = 2$.......مقبول

$x = -2$......مرفوض

- $f'(x) < 0$ على المجال $]0,2[$
- $f'(x) \geq 0$ على المجال $[2, +\infty[$

الحل 2) نرمز للقضية $E(n)$

$$E(n): 2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$u_1 = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6} \approx 2.15$$

$$2 \leq u_1 \leq u_0$$

$2 \leq \frac{13}{6} \leq 3$ محققة

فالقضية صحيحة من أجل $n = 0$

- **نفرض صحة القضية من أجل n**

(*).... $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

- **نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$**

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

- **بالاستفادة من f متزايد نأخذ f لـ(*)**

$$f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$f(2) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$$f(2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 2$$

$$\Rightarrow 2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

فالقضية صحيحة من أجل $n+1$ وبالتالي القضية صحيحة

الحل 3)

بما أن $u_{n+1} < u_n$ فالمتتالية u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بـ 2 فهي متقاربة

- **لحساب نهايتها نحل**

$$f(x) = x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x \Rightarrow 2x^2 = x^2 + 4$$

- **إما $x = -2$ مرفوض لأن**

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

- **أو $x = 2$ مقبول وبالتالي:**

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 2$$

التمرين الرابع و العشرون (2020 دورة ثانية)

لتكن المتتالية$(u_n)_{n>0}$ المعرفة وفق

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} \dots + \frac{n}{e^n}$$

المطلوب :

1) أثبت أن $n \le 2^n$ أيا كان العدد الطبيعي $n \ge 1$

2) استنتج أن$\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية$(u_n)_{n>0}$

3) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ متقاربة

الحل 1)

- نرمز للقضية $E(n)$

$E(n): n \le 2^n$

- نبرهن صحة القضية من أجل $n = 1$

$1 \le 2$

والقضية صحيحة من أجل $n = 1$

- نفرض صحة القضية من أجل n

$(*)\dots .\ n \le 2^n$

- نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$

$n + 1 \le 2^{n+1}$

- لدينا من الفرض :

$n \le 2^n$

$\Rightarrow 2n \le 2.\, 2^n$

$2n \le 2^{n+1}$

$n + 1 \le 2n \le 2^{n+1}$

فالقضية صحيحة من أجل $n + 1$

الحل 2)

- لدينا من الفرض:

$n \le 2^n$

$$\Rightarrow \frac{n}{e^n} \le \left(\frac{2}{e}\right)^n \Rightarrow \frac{n}{e^n} \le \frac{2^n}{e^n}$$

- من أجل $n = 1 \Leftarrow \frac{1}{e} \le \frac{2}{e}$
- من أجل $n = 2 \Leftarrow \frac{2}{e^2} \le \left(\frac{2}{e}\right)^2$
- من أجل $n = 3 \Leftarrow \frac{3}{e^3} \le \left(\frac{2}{e}\right)^3$
- من أجل $n \Leftarrow \frac{n}{e^n} \le \left(\frac{2}{e}\right)^n$

- نجمع المتراجحات طرفاً إلى طرف يكون:

$$\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} \dots + \frac{n}{e^n} \le \frac{2}{e} + \left(\frac{2}{e}\right)^2 + \left(\frac{2}{e}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن هو متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{e}$ والطرف اليساري هو المتتالية u_n

$$n = n\,,\, q = \frac{2}{e}$$

$$S_n = a\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right)$$

$$S_n = \frac{2}{e}\left(\frac{1 - \frac{2^n}{e}}{1 - \frac{2}{e}}\right)$$

$$S_n = \frac{2}{e - 2}\left[1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n\right] \le \frac{2}{e - 2}$$

- **ومنه**

$$u_n \le S_n < \frac{2}{e - 2} \Rightarrow u_n < \frac{2}{e - 2}$$

فالعدد$\frac{2}{e-2}$ راجح على المتتالية u_n

الحل 3) ندرس اطراد u_n

$$u_{n+1} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} \dots + \frac{n}{e^n} + \frac{n + 1}{e^{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n + 1}{e^{n+1}} > 0$$

u_nمتزايدة تماماً **وبما أن** المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $\frac{2}{e-2}$ فهي متقاربة

التمرين الخامس و العشرون (2021 دورة أولى)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3\,, \qquad u_0 = 2$$

ولنعرف المتتالية $(v_n)_{n>0}$

$$v_n = u_n + 6$$

والمطلوب:

1) أثبت أن المتتالية v_n هندسية عين أساسها واحسب v_n ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

2) لنعرف المتتالية $(w_n)_{n>0}$ وفق $w_n = \ln(v_n)$ أثبت أن المتتالية w_n حسابية واحسب w_0 ثم احسب المجموع:

$$S = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

الحل 1) لإثبات أن v_n هندسية يجب أن نبرهن:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}(u_n + 6)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2} = 1$$

v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ حدها الأول :

$$v_0 = u_0 + 6 = 2 + 6 = 8$$

- لإيجاد الحد العام لv_n:

$$v_n = v_m.\, q^{n-m}$$

$$v_n = 8.\frac{1}{2}^n$$

3) لإثبات أنw_n حسابية يجب أن نبرهن:

$$w_n = \ln(v_n)$$

$$w_{n+1} - w_n = r$$

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$$

$$w_{n+1} = \ln\left(8.\frac{1}{2}^{n+1}\right) = \ln\left(8.\frac{1}{2}^n.\frac{1}{2}\right)$$

- نعلم أن:

$$\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$w_{n+1} = \ln\left(8.\frac{1}{2}^n\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$w_{n+1} = \ln(v_n) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$w_{n+1} = w_n + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$w_{n+1} - w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

المتتالية w_n حسابية أساسها $r = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ و حدها الأول:

$$w_0 = \ln\left(8.\frac{1}{2}^0\right) = \ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2$$

حساب المجموع S_n:

$$S_n = \frac{(a+b)n}{2}\,, \quad n = 6$$

$$a = w_0 = 3\ln 2$$

$$b = w_5 = = \ln(v_5) = \ln\left(8.\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln(4) = -2\ln(2)$$

$$S_n = \frac{(3\ln(2) - 2\ln(2))6}{2} = 3\ln(2)$$

التمرين السادس و العشرون (2021 دورة ثانية)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة وأيا كان العدد الطبيعي n

$$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2 \ , \qquad u_0 = \frac{5}{2}$$

المطلوب :

1) أثبت بالتدريج أن $2 \le u_n \le 3$ وأيا كان العدد الطبيعي n

2) أثبت ان المتتالية u_n متناقصة

3) استنتج تقارب المتتالية u_n وجد $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

الحل 1)

- نرمز للقضية $E(n)$

$E(n): 2 \le u_n \le 3$

- نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$2 \le u_0 = \frac{5}{2} \le 3$ محققة

- نفرض صحة القضية من أجل n

$(*).....2 \le u_n \le 3$

- نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$2 \le u_n \le 3$

$2 \le (u_n - 2)^2 + 2 \le 3$

- من (*) نجد

$2 \le u_n \le 3$

- نطرح 2:

$0 \le u_n - 2 \le 1$

- نربع الأطراف

$0 \le (u_n - 2)^2 \le 1$

- نضيف 2

$2 \le (u_n - 2)^2 + 2 \le 3$

محقق والقضية صحيحة من أجل $n+1$

الحل 2) نرمز للقضية $E(n)$

$E(n): 2 \le u_n \le 3$

- نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$2 \le u_0 = \frac{5}{2} \le 3$ محققة

- نفرض صحة القضية من أجل n

$(*).....2 \le u_n \le 3$

- نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$2 \le u_n \le 3$

$2 \le (u_n - 2)^2 + 2 \le 3$

- من (*) نجد

$2 \le u_n \le 3$

- نطرح 2:

$0 \le u_n - 2 \le 1$

- نربع الأطراف

$0 \le (u_n - 2)^2 \le 1$

- نضيف 2

$2 \le (u_n - 2)^2 + 2 \le 3$

محققة والقضية صحيحة من أجل $n+1$

بالاعتماد على الاستقراء الرياضي نجد

u_nمتناقصة

<u>طريقة ثانية:</u>

$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)^2 + 2 - u_n$

$= {u_n}^2 - 4u_n + 4 + 2 - u_n$

$= {u_n}^2 - 5u_n + 6 = (u_n - 2)(u_n - 3)$

فالمتتاليةu_n متناقصة $u_{n+1} - u_n \le 0 \Longrightarrow$

الحل 3) المتتالية u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 2 فهي متقاربة.

لإيجاد نهايتها نحل المعادلة:

$f(x) = x$

حيث أن:

$f(x) = (x-2)^2 + 2$

$(x-2)^2 + 2 = x \leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 2 = x$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

- إما $x = 3$ (مرفوض، لأن المتتالية متناقصة)
- أو $x = 2$ مقبول

أي إنَّ:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

التمرين السابع و العشرون (2022 دورة أولى)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = u_n{}^2 - 4u_n + 6 \;, \qquad u_0 = \frac{5}{2}$$

المطلوب:

1) **أثبت مستعملا البرهان بالتدريج أن** $2 \le u_n \le 3$
2) **أثبت أن** $u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$
3) **استنتج ان المتتالية u_n متناقصة**
4) **بين أن المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها**

الحل 1)

$$u_{n+1} = u_n{}^2 - 4u_n + 4 + 2$$
$$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$$

نفس الطلب الأول دورة 2021 الثانية

ط2: يمكن الحل على تزايد f

الحل 2)

$$u_{n+1} - u_n = u_n{}^2 - 4u_n + 6$$
$$= (u_n - 3)(u_n - 2)$$

الحل 3) من الطلب السابق :

$$2 \le u_{n+1} \le 3$$

ومنه:

$$u_n - 2 \ge 0$$

ومنه:

$$u_n - 3 \le 0 \Rightarrow (u_n - 3)(u_n - 2) \le 0$$

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n \le 0$$

فالمتتالية متناقصة تماماً

الحل 4) بما أن u_n متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى بـ2 فهي متقاربة.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 2$$

التمرين الثامن و العشرون (2022 دورة ثانية)

ليكن المتتاليتان $(u_n)_{n>0}$ ، $(v_n)_{n>0}$

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} \dots + \frac{1}{5^n} \quad , \quad v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$$

والمطلوب:

1) **أثبت أن $(u_n)_{n>0}$ متتالية متزايدة و $(v_n)_{n>0}$ متتالية متناقصة.**
2) **استنتج أن المتتاليتين u_n و v_n متجاورتان**
3) **أثبت أن $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$ واحسب $\lim_{n\to\infty} u_n$ واستنتج $\lim_{n\to\infty} v_n$**

الحل 1)

$$u_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^1} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} \dots + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{5^{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$$

u_n متزايدة تماماً

$$v_{n+1} - v_n$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2^{n+1} - 5^{n+1}}{(5^{n+1})(2^{n+1})} < 0$$

v_n متناقصة

الحل 2) من الطلب السابق وجدنا u_n متزايدة

و v_n متناقصة فالشرط الأول محقق

$$\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

نهاية فرق المتتاليتين هو صفر ، فالشرط الثاني محقق وبالتالي المتتاليتان متجاورتان

الحل 3)

u_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

حدها الأول $a = \frac{1}{5}$

$$u_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$a = \frac{1}{5}, \quad q = \frac{1}{5}, \quad n = n$$

$$u_n = \frac{1}{5}\left(\frac{1-\frac{1}{5}^n}{1-\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

$$u_n = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right) = \frac{1}{4}$$

لأن $-1 < q = \frac{1}{2} < 1$

التمرين التاسع و العشرون (2023 دورة أولى)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$$

1) أثبت أن $2 \leq u_n \leq 5$ أيا كان $n \geq 5$

2) أثبت أن المتتالية متزايدة تماماً واستنتج تقاربها ثم احساب نهايتها.

الحل 1):

لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n): 2 \leq u_n \leq 5$$

1. نثبت صحة $E(0)$:

$$E(0): 2 \leq u_0 \leq 5$$

$2 \leq u_0 \leq 5$ محققة

2. إذا فرضنا صحة $E(n)$

3. لنثبت صحة $E(n+1)$

$$E(n+1): 2 \leq u_{n+1} \leq 5$$

ليكن التابع f المعرف وفق :

$$f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$$

ندرس اطراده.

لدينا f اشتقاقي على $]1, +\infty[$ فيكون:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$$

لدينا من الفرض:

$$2 \leq u_0 \leq 5$$
$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(5)$$

f متزايد تماماً فإنه يحافظ على جهة المتراجحة

$$3+\sqrt{2-1} \leq 3+\sqrt{u_n-1} \leq 3+\sqrt{5-1}$$

$$3+1 \leq u_{n+1} \leq 3+2$$

$$4 \leq u_{n+1} \leq 5$$

ولدينا : $2 < 4$

$2 \leq u_{n+1} \leq 5$ محققة

ومما سبق نستنتج أن القضية $E(n)$ صحيحة أياً كان $n \geq 0$ وبالتالي المتتالية محدودة.

الحل 2)

لتكن القضية $E'(n)$

$$E'(n): u_n < u_{n+1}$$

- نثبت صحة $E'(0)$

$E'(0)$: $u_0 < u_1$

$2 < 3 + \sqrt{2-1}$

$2 < 4$ محققة

- إذا فرضنا صحة $E(n)$
- لنثبت صحة $E(n+1)$
- لدينا من الفرض:

المتتاليات

$u_n < u_{n+1}$

f متزايد تماماً كما أثبتنا في الطلب السابق

$f(u_n) < f(u_{n+1})$

$u_{n+1} < u_{n+2}$

محققة فالقضية صحيحة

وبالتالي فالمتتالية متزايدة تماماً وبما أنها متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

- لحساب نهاية المتتالية نحل المعادلة :

$$f(x) = x$$
$$3 + \sqrt{x-1} = x$$
$$\sqrt{x-1} = x - 3$$

- نربع الطرفين بشرط $x \geq 3$

$$x - 1 = (x-3)^2$$
$$x - 1 = x^2 - 6x + 9$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x-5)(x-2) = 0$$

- إما $x = 5$ مقبول
- أو $x = 2 < 3$ مرفوض

- وبالتالي:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 5$$

لأجلك فقط عليك أن تستمر بثبات، حتى وإن أغضبك أو آلمك الواقع، لم تكن الدنيا هيّنة على أحد يوماً، هي دار السعي..لا استسلام

يعني وانت التاني كان فيك تكتفي بالروضة بس بتحبو التعب

المتتاليات