حل الاختبارات والنماذج الوزارية وأسئلة الدورات من (2023-2017)

السؤال الأول: الاختبار الأول:

$ABCD$ رباعي وجوه، مركز ثقله G، I منتصف $[AD]$، J منتصف $[BC]$ أثبت أن النقاط I وJ وG تقع على استقامة واحدة.

الحل:

- $\boxed{I \text{ منتصف } [AD]}$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$و$(D,1)$ ويكون $(I,2)$.
- $\boxed{J \text{ منتصف } [BC]}$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$و$(C,1)$ ويكون $(J,2)$.

بما أن G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)(B,1),(C,1),(D,1)$ وحسب الخاصة التجميعية فإن G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J,2)$و$(I,2)$ إذا I وJ و G على استقامة واحدة.

السؤال الثاني: الاختبار الثاني:

نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، النقاط

$A(1,5,4), B(10,4,3)\ C(4,3,5)D(0,4,5)$

1) بين أن النقاط A,B,C ليست على استقامةواحدة.
2) بين أن النقاط A,B,C,D تقع في مستو واحد.
3) استنتج أن النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,a),(B,b),(C,c)$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل: $\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(3,-2,1)$

$\left(\frac{9}{3} \neq \frac{-1}{-2}\right)$ المركبات غير متناسبة ← الشعاعان غير مرتبطان خطيا ← A,B,C ليست على استقامة واحدة.

2) $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطيا فيشكلان مستو:

وحتى تقع النقاط A,B,C,D في مستو واحد نبحث عن عددين حقيقين α,β يحققان:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$(-1,-1,1) = (9\alpha,-\alpha,-\alpha) + (3\beta,-2\beta,\beta)$$

$$-1 = 9\alpha + 3\beta \qquad (1)$$
$$-1 = -\alpha - 2\beta \qquad (2)$$
$$1 = -\alpha + \beta \qquad (3)$$
$$(2)-(3): = -2 = -3\beta$$
$$\rightarrow \beta = \frac{2}{3}$$

نعوض في (2): $-1 = -\alpha - \frac{4}{3}$

$$\alpha = -\frac{1}{3} \leftarrow$$

نعوض في (1): $-1 = -3 + 2 \leftarrow -1 = -1 \leftarrow$ محققة

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{4}\overrightarrow{AC}$$

والأشعة $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطيا ← A,B,C,D تقع في مستوي واحد.

طريقة ثانية: يمكننا إيجاد معادلة المستوي ABC والتحقق من أن D تنتمي للمستوي فتكون النقاط الأربعة تقه في مستوي واحد.

3) من العلاقة السابقة

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

بالمقارنة مع علاقة الإنشاء:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

نستنتج أن D مركز أبعاد ل$(A,3-(2-1)),(C,2),(B,-1)$ أي: مركز أبعاد ل $(A,2),(B,-1),(C,2)$

طريقة ثانية: نوجد العلاقة:

$$\alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} + \gamma\overrightarrow{DC} = 0$$

لدينا من الطلب السابق:

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

نزرع D في الشعاعين الذين في الطريف الثاني فيكون:

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$$
$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$$

بنقل $\overrightarrow{AD}$ إلى الطرف الثاني وجمع الأشعة المتشابهة:

$$-\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = 0$$
$$\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} \mp \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = 0$$
$$2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = 0$$

نلاحظ أن $2-1+2=3\neq 0$

إذا D مركز أبعاد متناسبة للنقاط:
$(A,2)(B,-1)(C,2)$

السؤال الثالث: الاختبار الثالث:

نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$.

1) أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته.

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (abc) واستنتج معادل المستوي (ABC).

3) احسب بعد النقطة D عن المستوي ABC ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.

الحل: 1)

$$\overrightarrow{AB}(1,2,4)$$
$$\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$$

فنجد أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

فالمثلث ABC قائم في A.

طريقة ثانية:

$$\overrightarrow{AB}(1,2,4) \to AB = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$
$$\overrightarrow{AC}(2,1,-1) \to \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$\overrightarrow{BC}(1,-1,-5) \to \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27}$$

حسب عكس فيثاغورث نلاحظ أن:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$S =$ نصف جداء الضلعين القائمتين

$$= \frac{1}{2}(AB).(AC) = \frac{1}{2}\sqrt{21}.\sqrt{6} = \frac{3}{2}\sqrt{14}$$

2)

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = (2)(1) + (-3)(2) + (1)(4)$$
$$= 2-6+4 = 0 \to \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = (2)(2) + (-3)(1) + (1)(-1)$$
$$= 4-3-1 = 0 \to \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$$

وبالتالي:

$$\to \vec{n} \perp (ABC)$$

لأنه يعامد ضلعين مرتبطين خطيا منه

معادلة المستوي (ABC) حيث:

$$A(1,0,-1), \vec{n}(2,-3,1)$$
$$\to (ABC): 2x-3y+z+d=0$$
$$\to 1+0-1+d=0$$
$$\to d=-1$$
$$\to (ABC): 2x-3y+z-1=0$$

3)

$$dist(D,(ABC)) = \frac{|2(-4)-3(2)+(1)*(1)-1|}{\sqrt{4+9+1}}$$
$$= \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

نعلم أن ارتفاع رباعي الوجوه هو بعد الرأس عن المستوي ولدينا: $h = dist(D,(ABC))$ تمثل ارتفاع رباعي الوجوه $DABC$ وتساوي: $\sqrt{14}$

حجم رباعي الوجوه = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.h = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{14}\right)(\sqrt{14}) = 7$$

السؤال الرابع: الاختبار الرابع: التمرين الأول:

في معلم متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(3,-2,2), B(6,1,5), C(6,-2,-1), D(0,4,-1)$

بين مع التعليل صحة أو خطأ كل من المقولات الآتية:

1) المثلث ABC قائم

2) المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

3) حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V = 81$

التعليل:

1) لدينا: $\overrightarrow{AB}(3,3,3) \to AB = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27}$

$$\overrightarrow{AC}(3,0,-3) \to AC = \sqrt{9+0+9} = \sqrt{18}$$
$$\overrightarrow{BC}(0,-3,-6) \to BC = \sqrt{0+9+36} = \sqrt{45}$$

إذا حسب عكس فيثاغورث:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

والمثلث قائم.

طريقة ثانية:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (3)(3) + (3)(0) + (3)(-3) = 0$$

فالمثلث ABC قائم في A **والمقولة صحيحة**

2) نلاحظ أن $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ولدينا:

$$\overrightarrow{AD}(-3,6,-3)$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = (-3)(3) + (6)(3) + (-3)(3) = -9 + 18 - 9 = 0$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = (-3)(3) + (6)(0) + (-3)(3) = -9 + 0 + 9 = 0$$

إذا $(\overrightarrow{AD})$ ناظم على المستوي (ABC) لأنه عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا وبالتالي المستقيم AD عمودي على المستوي.

والمقولة صحيحة.

3)

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC}.h$$
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{9+9+9}.\sqrt{9+0+9}$$
$$= \frac{1}{2}.3.\sqrt{3}.3.\sqrt{2} = \frac{9}{2}\sqrt{6}$$
$$h = AD = \sqrt{9+36+9} = 3\sqrt{6}$$

ومنه:

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\sqrt{6}\right)(3\sqrt{6})$$
$$V = 27$$

والمقولة خاطئة.

طريقة ثانية لإيجاد h:

ارتفاع رباعي الوجوه هو بعد D عن المستوي ABC بكتابة معادلة المستوي المار من A ويقبل $\overrightarrow{AD}$ ناظما يكون:

$$h = dist(D, ABC) = \frac{|0+24+3+27|}{\sqrt{9+36+9}} = \frac{54}{\sqrt{54}} = 3\sqrt{6}$$

الاختبار الرابع: التمرين الثاني:

المستقيمان $L, L^`$ معرفان وسيطيا وفق:

$$L: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad L^`: \begin{cases} x = 4 - 5s \\ y = 3 - 2s \\ z = -1 + 2s \end{cases}$$

1) أثبت أن $L, L^`$ متقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

2) أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين $L, L^`$.

الحل:

1)

$$\vec{u}(0,-1,-2), \vec{u^`}(-5,-2,2)$$
$$\frac{0}{-5} \neq -\frac{1}{-2} \neq -\frac{2}{2}$$

المركبات غير متناسبة والشعاعان غير مرتبطان خطيا

← (المستقيمان $L, L^`$ غير متوازيان هما إما متقاطعان أو متخالفان).

بالحل المشترك:

$$4 - 5s = -1 \quad (1)$$
$$3 - 2s = 1 - t \quad (2)$$
$$= 1 + 2s = 1 - 2t \quad (3)$$

من (1) نجد: $-5s = -5 \to s = 1$

نعوض في (2): $3 - 2 = 1 - t$

$\to t = 1 - 1 = 0 \to t = 0$

الأشعة في الفراغ (2)

نعوض في (3) للتحقق من التقاطع:

$-1+2=1-0 \rightarrow 1 = 1$ محققة

ومنه: $L, L^{`}$ متقاطعان.

لتعيين نقطة التقاطع نعوض $t=0$ في L

((أو $s=1$ في $L^{`}$))

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 1 \quad \rightarrow \quad I(-1,1,1) \\ z &= 1 \end{aligned}$$

نقطة تقاطع $L, L^{`}$.

2) $\vec{n}(a,b,c)$

$$\vec{n}.\vec{u}=0 \rightarrow (a,b,c)(0,-1,-2)=0$$
$$\rightarrow -b-2c=0 \quad (1)$$
$$\vec{n}.\vec{u}=0 \rightarrow (a,b,c)(-5,-2,2)=0$$
$$\rightarrow -5a-2b+2c=0 \quad (2)$$

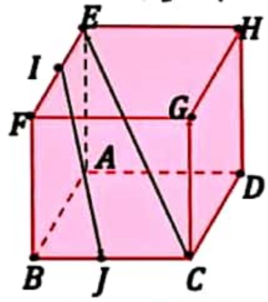
نفرض $c=-1$ لأن الناظم ليس وحيد:

نعوض في (1): $-b+2=0 \rightarrow b=2$

نعوض في (2): $-5a-4-2=0 \rightarrow a=-\frac{6}{5}$

السؤال الخامس: النموذج الوزاري الأول:

في الشكل المجاور مكعب I و J منتصفات $[EF]$ و $[BC]$.



1) أثبت أن $2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$

2) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطيا.

3) استنتج أن النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,a), (B,b), (C,c)$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل: 1) $2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$

$$l_1 = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}\right)=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FE}$$
$$=\overrightarrow{GE}$$
$$l_2=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{GE}$$
$$\rightarrow l_1 = l_2$$

(2

$$\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{CE}$$
$$\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{CE} \quad (*)$$

ومن الطلب الأول لدينا:

$$2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$
$$\rightarrow \overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG})$$

نعوض في (*) فيكون:

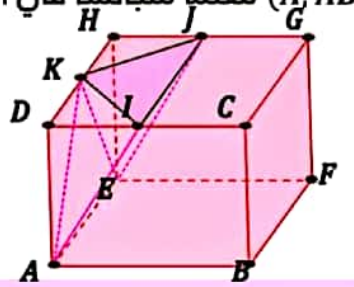
$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG})+\overrightarrow{JE}=\overrightarrow{CE}$$
$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{JE}-\overrightarrow{CE}=0$$
$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{JI}=0$$
$$\rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{JI}=0$$
$$\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$$

إذا $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CG}$ مرتبطة خطيا.

السؤال السادس: النموذج الوزاري الأول:

نتأمل مكعبا $ABCDEFGH$ لتكن K و J و I منتصفات أضلاعه $[DH]$ و$[HG]$ و $[DC]$ بالترتيب.

نتخذ $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ معلما متجانسا في الفراغ.



1) اوجد إحداثيات النقاط $A.I.E$.

2) اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$.

3) احسب بعد K عن المستوي $AIJE$ وحجم الهرم $KAIJE$.

4) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K.

5) احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$.

6) أثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(I,\beta),(E,\gamma)$ حيث: α,β,γ هي أمثال يطلب تعيينها.

الحل:

1) نلاحظ حسب الرسم أن:

$$E(0,1,0), I\left(\frac{1}{2},0,1\right), A(0,0,0)$$

$$\overrightarrow{AE}=(x_E-x_A,y_E-y_A,z_E-z_A)$$
$$=(0-0,1-0,0-0)=(0,1,0)$$
$$\overrightarrow{AI}=(x_I-x_A,y_I-y_A,z_I-z_A)$$
$$\left(\frac{1}{2}-0,0-0,1-0\right)=\left(\frac{1}{2},0,1\right)$$

2) لكتابة معادلة مستوي يمر ب 3 نقاط علمت إحداثياتها: نفرض شعاع ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ للمستوي $AIJE$.

لدينا $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AI}$ شعاعان غير مرتبطان خطيا عندئذ:

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AE}\to\ \vec{n}.\overrightarrow{AE}=0\to b=0$$
$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AI}-\ \vec{n}.\overrightarrow{AI}=0\to\frac{1}{2}a+c=0$$

نفرض $c=1$ (لأن للمستوي أكثر من ناظم):

$$\frac{1}{2}a+1=0\to a=-2$$

وبالتالي يكون: $\vec{n}(-2,0,1)$

معادلة المستوي $(AIJE)$: لنختار النقطة A

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$-2(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0$$
$$-2x+z=0$$

3)

نلاحظ أن إحداثيات K هي: $K(0,\frac{1}{2},1)$

$$h=dist(K,AIJE)=\frac{|(-2)(0)+0+1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

وهو ارتفاع الهرم.

لحساب حجم الهرم نحسب أولا مساحة القاعدة:

لمعرفة شكل القاعدة:

لدينا: $\overrightarrow{AI}(1,0,1)$ ومن الشكل: $\overrightarrow{IJ}(0,1,0)$

ومنه فإن: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AI}$ إذا الشكل متوازي أضلاع ونلاحظ أن: $\overrightarrow{IJ}-\overrightarrow{AI}=0$ فهو مستطيل.

$$S_{AIJE}=IJ\times AI=1\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$V=\frac{1}{3}S_{AIJE}.h=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{5}}{2}.\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{6}$$

4) بما أن المستقيم d عمودي على المستوي $(AIJE)$

$$\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_{AIJE}}=(-2,0,1)$$

وهو يمر ب: $K(0,\frac{1}{2},1)$

$$d:\begin{cases}x=-2t+0\\ y=0+\frac{1}{2}\\ z=t+1\end{cases};\ t\in\mathbb{R}\to d:\begin{cases}x=-2t\\ y=\frac{1}{2}\\ z=t+1\end{cases}$$

5) لحساب إحداثيات N نوجد الحل المشترك لمعادلة المستوي $(AIJE)$ والمستقيم d. أي نعوض معادلات d في معادلة المستوي:

$$P: -2x+z=0$$
$$\to -2(-2t)+0\left(\frac{1}{2}\right)+t+1=0$$
$$4t+t+1=0 \to t=-\frac{1}{5}$$

نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية فيكون:

$$x=-2\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\ , \qquad y=\frac{1}{2}$$
$$z=-\frac{1}{5}+1=\frac{4}{5}$$

ومنه إحداثيات N هي: $N\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$

وهي نقطة تقاطع d مع المستوي وهي نفسها المسقط القائم ل K على المستوي.

6) نلاحظ أن $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AI}$ غير مرتبطان خطيا: إذا:

$$\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AI}+y\overrightarrow{AE}$$
$$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)=x\left(\frac{1}{2},0,1\right)+y(0,1,0)$$
$$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{1}{2}x,y,x\right)\to \begin{cases}\frac{1}{2}x=\frac{2}{5}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$$
$$\to \begin{cases}x=\frac{4}{5}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$$
$$\to \overrightarrow{AN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$
$$\to 10\,\overrightarrow{AN}=8\overrightarrow{AI}+5\overrightarrow{AE}$$

نزرع N فيكون:

$$\to 10\,\overrightarrow{AN}=8\overrightarrow{AN}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{AN}+5\overrightarrow{NE}$$
$$\to 3\overrightarrow{AN}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{NE}=0$$
$$\to -3\overrightarrow{NA}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{NE}=0$$

إذا N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(A,-3),(I,8),(E,5)$$

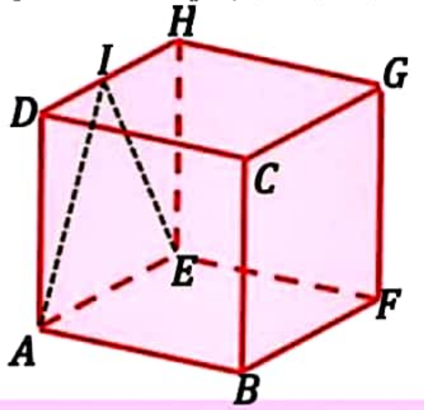
طريقة ثانية: بما أن: $\overrightarrow{AN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

N مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(I,x)(E,y)(A,1-x-y)$$
$$\to \left(I,\frac{4}{5}\right)\left(E,\frac{1}{2}\right)\left(A,-\frac{3}{10}\right)$$

السؤال السابع: النموذج الوزاري الثاني: التمرين

الأول: نجد دائما مكعبا طول ضلعه 1 مزودا بمعلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ حيث I منتصف $[DH]$.



1) أعط إحداثيات النقاط I,E,A.

2) جد إحداثيات O مركز ثقل المثلث AIE

3) أين تقع النقطة M التي تحقق
$$3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$$

4) احسب $\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IE}$

الحل: 1)

$$I\left(0,\frac{1}{2},1\right),\ E(0,1,0),\ A(0,0,0)$$

(2

$$O\left(\frac{x_A+x_E+x_I}{3},\frac{y_A+y_E+y_I}{3},\frac{z_A+z_E+z_I}{3}\right)$$

ومنه $O\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

3) $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FO}$

ومنه $\overrightarrow{FM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FO}$

4) $\overrightarrow{IA}\left(0,-\frac{1}{2},-1\right)$ $\quad$ $\overrightarrow{IE}\left(0,\frac{1}{2},-1\right)$

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}=0-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$

طريقة ثانية بدون معلم:

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}=(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HE})$$
$$\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{HE}$$
$$=\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{DI}+0+0+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DA}$$
$$=-ID^2+DA^2=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$
$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}=\frac{3}{4}$$

السؤال الثامن: النموذج الوزاري الثاني: التمرين الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$ والمستوي P الذي يقبل المعادلة: $2x-3y+z-5=0$

1) أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي P في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها.

2) اكتب معادلة للمستوي Q العمودي على P ويمر بالنقطتين A,B.

الحل: 1) وهو شعاع توجيه المستقيم

$$\begin{matrix}\overrightarrow{AB}(-3,4,5)\\ \overrightarrow{n_P}(2,-1,1)\end{matrix} \rightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AB} = -6-12+5$$
$$= -13 \neq 0$$

ومنه $\vec{n},\overrightarrow{AB}$ غير متعامدان، فالمستقيم لا يوازي المستوي أي أن (AB) يقطع P.

لإيجاد نقطة التقاطع نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB):

$$(AB):\begin{cases}x=-3t+2\\ y=4t-1\\ z=5t\end{cases};t\in R$$

بالحل المشترك بين P, (AB): (نعوض معادلات المستقيم في معادلة المستوي):

$$2(-3t+2)-3(4t-1)+5t-5=0$$
$$-6t+4-12t+3+5t-5=0$$
$$-13t=-2 \rightarrow t=\frac{2}{13}$$

نعوض في (AB):

$$x=-\frac{6}{13}+2 \rightarrow \boxed{x=\frac{20}{13}}$$

$$y=\frac{8}{13}-1 \rightarrow \boxed{y=-\frac{5}{13}}$$

$$z=5\left(\frac{2}{13}\right) \rightarrow \boxed{z=\frac{10}{13}}$$

وبالتالي نقطة التقاطع $I\left(\frac{20}{13},-\frac{5}{13},\frac{10}{13}\right)$

2) نقطة: $A(2,-1,0)$ ولدينا $\overrightarrow{n_P}(2,-3,1)$

ناظم: بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي Q بشرط أن a,b,c ليست جميعها أصفار

$$\vec{P}\perp\vec{Q}\rightarrow\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}\rightarrow\boxed{\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0}$$
$$2a-3b+c=0 \quad (1)$$
$$\boxed{\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n_Q}\rightarrow\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0}$$
$$-3a+4b+5c=0 \quad (2)$$

بالحل المشترك بين (1) و(2):

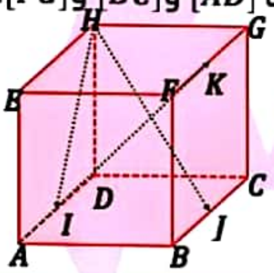
بأخذ $c=1$ نعوض في (1) و(2): فيكون:

$$2a-3b=-1$$
$$-3a+4b=-5$$

بضرب المعادلة (1) ب +3 والمعادلة (2) ب 2 والجمع يكون:

$$b=13\rightarrow a=19\rightarrow\vec{n}(19,13,1)$$
$$Q: 19(x-2)+13(y+1)+(z-0)=0$$
$$Q: 19x+13y+z-25=0$$

السؤال التاسع: النموذج الوزاري الرابع: التمرين الأول: $ABCDEFGH$ مكعب فيه I و J و K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$.



1) باختيار معلم متجانس $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$:

2) أوجد عددين حقيقيين a,b يحققان المساواة:

$$\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{HI}+b\overrightarrow{HJ}$$

ثم استنتج أن الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطيا.

الحل: 1)

$$A(1,0,0), H(0,0,1), K\left(\frac{1}{2},1,1\right), I\left(\frac{1}{2},0,0\right), J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$$
$$\overrightarrow{HJ}\left(\frac{1}{2},1,-1\right), \overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2},0,-1\right), \overrightarrow{AK}\left(-\frac{1}{2},1,1\right)$$

2)

$$\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ b \\ -a-b \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = -\frac{1}{2}$ (1)

$b = 1$ (2)

$-a - b = 1$ (3)

من (2) نعوض $b = 1$ نعوض في (3):

$$a = -2$$

نعوض في (1):

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}$$

محققة.

$$\rightarrow \overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HJ}$$

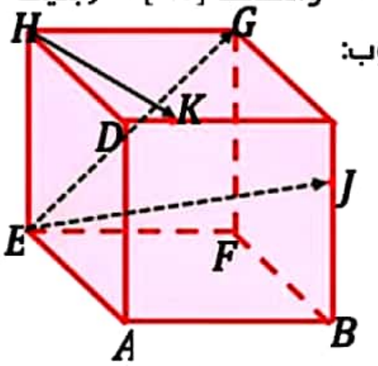
لدينا $\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}$ غير مرتبطان خطيا لأن المركبات غير متناسبة وأثبتنا أن

$$\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HJ}$$

ومنه فإن الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و$\overrightarrow{HI}$ و$\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطيا.

السؤال العاشر: النموذج الوزاري الرابع: التمرين الثاني:

$ABCDEFGH$ مكعب حيث K نقطة من $[CD]$ تحقق $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة $J \in [BC]$ بحيث $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$ والمطلوب:



1) جد إحداثيات النقط H, E, J, K, G في المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$

2) أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطيا.

3) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطيا.

4) أثبت أن المستقيم (HK) يوازي المستقيم (EGJ)

الحل: 1)

$E(0,1,0), J\left(1,0,\frac{3}{4}\right), K\left(\frac{1}{4},0,1\right), G(1,1,1)\ H(0,1,1)$

2) $\overrightarrow{EJ}\left(1,-1,\frac{3}{4}\right)$, $\overrightarrow{EG}(1,0,1)$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطيا لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1}\right)$

3) $\overrightarrow{HK}\left(\frac{1}{4}, -1, 0\right)$

لإثبات أن الأشعة $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطيا حيث الشعاعان $\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطيا

فيجب أن تتحقق العلاقة:

$\overrightarrow{HK} = a\overrightarrow{EG} + b\overrightarrow{EJ}$ ومنه:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$ ومنه:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ -b \\ a+\frac{3}{4}b \end{pmatrix}$$ وبالتالي:

الأشعة في الفراغ (2)

$$\begin{cases} a+b=\frac{1}{4} & (1) \\ -b=-1 & (2) \\ a+\frac{3}{4}b=0 & (3) \end{cases}$$

لنأخذ المعادلتين (2)و(1) من (2) نجد: $b=1$

نعوض في (1) فنجد $a=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$

نتحقق بالتعويض في (3) فنجد

محقق $-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}(1)=0$

ومنه: $\overrightarrow{HK}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EJ}$

والأشعة: $\overrightarrow{EJ}$,$\overrightarrow{EG}$,$\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطيا.

4) $\overrightarrow{HK}$ موجه المستقيم (HK)

$\overrightarrow{EJ}$ و $\overrightarrow{EG}$ شعاعا توجيه المستوي (EGJ) وهما غير مرتبطين خطيا.

وبما أن الأشعة $\overrightarrow{EJ}$,$\overrightarrow{EG}$,$\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطيا فتقع في مستويات متوازية لأنها تشترك بنقطة ومنه (HK) يوازي المستوي الحاوي على EG و EJ وهو (EGJ).

طريقة ثانية:

$$M(x,y,z)\in(EGJ)$$
$$\overrightarrow{EM}=a\overrightarrow{EJ}+b\overrightarrow{EG}$$
$$(x,y-1,z)=\left(a+b\,,-a\,,\frac{3}{4}a+b\right)$$
$$a+b=x \quad , \quad a=-y+1$$
$$\frac{3}{4}a+b=z \;\;, b=x+y-1$$
$$3a+4b=4z \rightarrow \;-3y+3+4x+4y-4=4z$$
$$4x+y-4z-1=0$$
$$\vec{n}(4,1,-4)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{HK}=(4,1,-4)\left(\frac{1}{4},-1,0\right)=1-1=0$$

ومنه: $\vec{n}\perp\overrightarrow{HK}$

وبالتالي: المستقيم HK يوازي (EGJ).

السؤال الحادي عشر: النموذج الوزاري الخامس:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(1,0,-1), B(2,2,3), C(3,1,-2), D(-4,2,1)$

والمطلوب:

1) أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته.

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC).

3) احسب بعد النقطة D عن المستوي ABC ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D,ABC)

الحل: 1)

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,,y_B-y_A\,,z_B-z_A)=(1,2,4)$$
$$\rightarrow AB=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$$
$$\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A\,,y_C-y_A\,,z_C-z_A)=(2,1,-1)$$
$$\rightarrow AB=\sqrt{2^2+1^2+-1^2}=\sqrt{6}$$
$$\overrightarrow{BC}=(x_C-x_B\,,y_C-y_B\,,z_C-z_B)=(1,-1,5)$$
$$\rightarrow AB=\sqrt{1^2+-1^2+5^2}=\sqrt{27}$$

نلاحظ أن $BC^2=AC^2+AB^2$ فحسب فيثاغورث المثلث ABC قائم.

طريقة ثانية:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(1)(2)+(2)(1)+(4)(-1)=0$$

فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ متعامدان والمثلث ABC قائم في A.

2) $\overrightarrow{AB}(1,2,4) \quad , \quad \overrightarrow{AC}(2,1,-1)$

$$\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}$$

المركبات غير متناسبة ومنه: $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا.

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=(2,-3,1)(1,2,4)=2-6+4=0$$
$$\rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$$
$$\vec{n}\,,\overrightarrow{AC}=(2,-3,1)(2,1,-1)=4-3-1=0$$
$$\rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$$

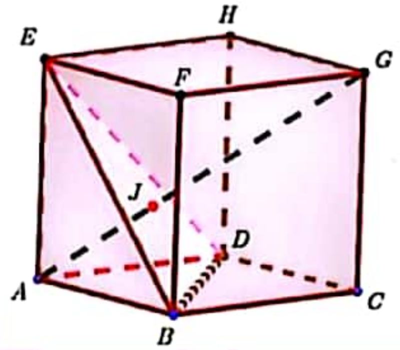
$\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من المستوي ومنه: $\vec{n}$ عمودي على المستوي

$$\vec{n}(2,-3,1)\ ,A(1,0,-1)$$
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_c)=0$$
$$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$$
$$2x-2-3y+z+1=0$$

معادلة المستوي ABC : $2x-3y+z-1=0$

السؤال الثاني عشر: النموذج الوزاري الخامس:

مكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه يساوي 3 في المعلم $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$:



1) عين إحداثيات النقاط D,B,E,G.

2) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AG).

3) أثبت أن المستقيم (AG) ناظم على المستوي (EDB).

4) المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي في نقطة j عين إحداثياتها.

5) أثبت أن j هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله.

6) احسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$.

الحل: 1)

$$D(0,3,0),B(3,0,0),E(0,0,3),G(3,3,3)$$

2)

إن المستقيم (AG) يقبل شعاع توجيه:

$$\overrightarrow{AG}=(x_G-x_A,y_G-y_A,z_G-z_A)=(3,3,3)$$
$$(AG):\begin{cases}x=at+x_0\\y=bt+y_0\\z=ct+z_0\end{cases};t\in R\rightarrow(AG):\begin{cases}x=3t\\y=3t\\z=3t\end{cases}$$

3)

$$\overrightarrow{EB}=(x_B-x_E,y_B-y_E,z_B-z_E)=(3,0,-3)$$
$$\overrightarrow{ED}=(x_D-x_E,y_D-y_E,z_D-z_E)=(0,3,-3)$$

نلاحظ أن الشعاعان غير مرتبطان خطيا، فهما شعاعا توجيه المستوي EDB.

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EB}=-3(3)+0(3)+3(-3)=0$$
$$\rightarrow\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{EB}$$
$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ED}=0(3)+(-3)(3)+3(-3)=0$$
$$\rightarrow\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{ED}$$

وبما أن $\overrightarrow{AG}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطان خطيا من المستوي عندئذ: المستقيم AG يعامد المستوي وهو ناظم له.

4) نوجد معادلة المستوي (EDB):

وجدنا أن AG يعامد (EDB) عندئذ:

$$\vec{n}=\overrightarrow{AG}=(3,3,3)$$
$$(EDB):a(x-x_E)+b(y-y_E)+c(z-z_E)=0$$
$$3(x-0)+3(y-0)+3(z-3)=0$$
$$3x+3y+3z-9=0$$
$$\rightarrow(EDB):x+y+z-3=0$$

بالحل المشترك وتعويض معادلات (AG) في معادلة المستوي نجد:

$$3t+3t+3t-3=0\rightarrow 9t=3\rightarrow t=\frac{1}{3}$$

نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية لـA فيكون:

ومنه إحداثيات نقطة التقاطع $j(1,1,1)$ لأن:

$$x=3\left(\frac{1}{3}\right)=1\ ,y=3\left(\frac{1}{3}\right)=1\ ,z=3\left(\frac{1}{3}\right)=1$$

5) إن المثلث EDB مثلث متساوي الأضلاع لأن EB,DB,ED هي أقطار لمربعات متطابقة فهي متساوية أي $EB=DB=ED$.

ونعلم أنه في المثلث متساوي الأضلاع نقطة تلاقي الارتفاعات هي نقطة تلاقي المتوسطات.

إذن نقطة تلاقي الارتفاعات هي مركز ثقل المثلث،

ومنه K مركز ثقل المثلث EDB:

$$K=\left(\frac{x_E+x_D+x_B}{3},\frac{y_E+y_D+y_B}{3},\frac{z_E+z_D+z_B}{3}\right)$$

2) بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (EIJ) :

$$\vec{n}.\overrightarrow{EI} = 0 \rightarrow (a,b,c)(2,0,-4) = 0$$
$$2a - 4c = 0 \quad (1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{EJ} = 0 \rightarrow (a,b,c)(0,3,-4) = 0$$
$$3b - 4c = 0 \quad (2)$$

بفرض $c = 1$ نعوض في (1) فنجد:

$$2a = 4 \rightarrow a = 2$$

نعوض في (2) فنجد:

$$3b - 4 = 0 \rightarrow b = \frac{4}{3}$$
$$\rightarrow \vec{n}\left(2, \frac{4}{3}, 1\right)$$
$$\rightarrow \vec{n}(3,4,3)$$

معادلة المستوي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

نختار النقطة $E(0,0,4)$

$$6(x - 0) + 4(y - 0) + 3(z - 4) = 0$$
$$6x + 4y + 3z - 12 = 0$$

أو نقوم بالحل كما في النموذج الوزاري الثاني.

3) بما أن المستقيم d عمودي على المستوي (EIJ) فإن شعاع توجيه المستقيم هو ناظم المستوي:

$$\overrightarrow{u_d} = \vec{n}(6,4,3)$$

مار بالنقطة $A(0,0,0)$:

$$d: \begin{cases} x = 6t \\ y = 4t \\ z = 3t \end{cases} \qquad t \in R$$

بالحل المشترك للتمثيل الوسيطي مع معادلة المستوي:

$$6(6t) + 4(4t) + 3(3t) - 12 = 0$$
$$36t + 16t + 9t = 12$$
$$61t = 12 \rightarrow t = \frac{12}{61}$$

نعوض في التمثيل الوسيطي:

$$x = \frac{72}{61}, \quad y = \frac{36}{61}, \quad z = \frac{48}{61} \quad \rightarrow k\left(\frac{72}{61}, \frac{48}{61}, \frac{36}{61}\right)$$

4)

$$S = \frac{\text{جداء الضلعين القائمتين}}{2} = \frac{4.3}{2} = 6$$
$$V = \frac{1}{3}.S.h = \frac{1}{3}.6.2 = 4$$

5)

$$dist(A, EIJ) = \frac{|ax + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-12|}{\sqrt{61}}$$

ومنه حجم رباعي الوجوه $IAEJ$:

$$V = \frac{1}{3}S_{EIJ}.h$$
$$V = \frac{1}{3}.S.\frac{12}{\sqrt{61}} = \frac{4}{\sqrt{61}}.S$$

ليكن لدينا $V = 4$:

$$4 = \frac{4}{\sqrt{61}}S$$

ومنه فإن: $S_{EIJ} = \frac{4\sqrt{61}}{4} = \sqrt{61}$

السؤال الرابع والعشرون: النموذج الوزاري الثالث (2020)

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4، فيه I منتصف $[CD]$.

1) وضع النقطة M المحققة للعلاقة:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BI}$$

2) احسب العدد $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

الحل: 1)

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BI}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{BI}$$
$$= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AI}) - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$$

نلاحظ أن النقطة M تنطبق على النقطة B.

2)

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.COS(CAB)$$
$$= 4.4.COS\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 4.4.\frac{1}{2} = 8$$

السؤال الخامس والعشرون.

لتكن النقاط $D(0,0,2)$ $C(2,3,-1)$ $B(2,1,0)$
$A(1,-1,2)$ والمطلوب:

1) عين إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,1)$ ، $(C,2)$ $(B,2)$ ، $(A,1)$

2) جد معادلة للمجموعة S.

الحل: 1) بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$
$$= \frac{|1(1) + 2(2) + 1(2) + 1(0)|}{1+2+2+1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$
$$= \frac{|1(-1) + 2(1) + 2(3) + 1(0)|}{1+2+2+1} = \frac{7}{6}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C + \delta z_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$
$$= \frac{|1(2) + 2(0) + 2(-1) + 1(2)|}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ومنه:

$$G\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

2)

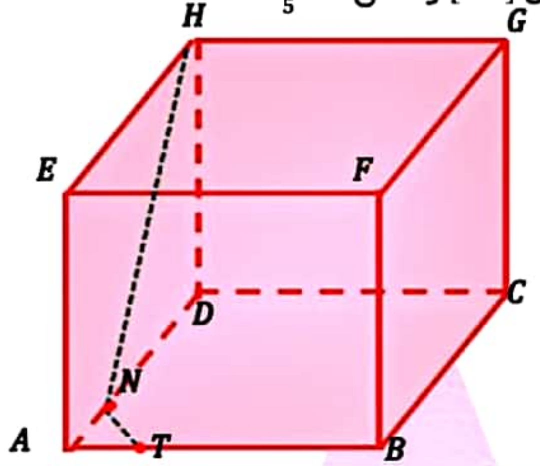
$$\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 6$$
$$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = 6$$
$$6MG = 6 \to MG = 1$$

ومنه فإن S مجموعة النقاط M التي تمثل معادلة كرة مركزها G ونصف قطرها $R = 1$.

$$S = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2$$

السؤال السادس والعشرون: النموذج الوزاري الثالث

2020 ليكن لدينا المكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 1، و T نقطة من $[AB]$ وتحقق $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ و N نقطة من $[AD]$ وتحقق $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$:



1) في المعلم المتجانس $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ جد إحداثيات النقاط H, F, N, T.

2) جد الشعاعين $\overrightarrow{NT}, \overrightarrow{NH}$ ثم جد معادلة المستوي (HNT).

3) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EF)

4) اذكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT) ما طبيعته؟

الحل: 1)

$$A(0,0,0)\ B(1,0,0)\ C(1,1,0)\ D(0,1,0)\ E(0,0,1)$$
$$F(1,0,1)\ G(1,1,1)\ H(0,1,1)$$

بفرض $T(x,y,z)$:

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$
$$(x,y,z) = \frac{2}{5}(1,0,0)$$
$$\to x = \frac{2}{5}\ ,\quad y = 0\ ,\quad z = 0$$

ويمكننا استنتاجها مباشرة $\to T\left(\frac{2}{5}, 0, 0\right)$

بفرض $N(x,y,z)$:

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$$
$$(x,y,z) = \frac{2}{5}(0,1,0)$$

الأشعة في الفراغ (2)

$$\to x=0 \quad , \quad y=\frac{2}{5} \quad , \quad z=0$$

$\to N\left(0,\frac{2}{5},0\right)$ ويمكننا استنتاجها مباشرة

(2

$$\overrightarrow{NT}\left(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},0\right)$$
$$\overrightarrow{NH}\left(0,\frac{3}{5},1\right)$$

الشعاعان غير مرتبطان خطيا.

بفرض ناظم المستوي (HNT) هو $\vec{n}(a,b,c)$

فإن:

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{NT} \to \vec{n}.\overrightarrow{NT}=0 \to \frac{2}{5}a-\frac{2}{5}b=0 \quad (1)$$
$$\vec{n} \perp \overrightarrow{NH}=0 \to \vec{n}.\overrightarrow{NH}=0 \to \frac{3}{5}a+c=0 \quad (2)$$

من (1) نجد:

$$a=b$$

نختار $c=1$ ونعوض في (2):

$$\to \frac{3}{5}a=-1 \to a=-\frac{5}{3}$$

ولدينا $b=a=-\frac{5}{3}$

$$\to \vec{n}\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{3},1\right)$$
$$\to (5,5,-3)$$
$$(HNT): 5x+5y-3z+d=0$$

نعوض النقطة $H(0,1,1)$.

$$\to 0+5-3+d=0 \to d=-2$$

ومنه: $(HNT): 5x+5y-3z-2=0$

3) لدينا: $\overrightarrow{u_{EF}}(1,0,0)$ والنقطة: $E(0,0,1)$

$$(EF): \begin{cases} x=t \\ y=0 \quad t \in R \\ z=1 \end{cases}$$

(4

$$\vec{u}(1,0,0) \quad \vec{n}(5,5,-3)$$
$$\vec{n}.\vec{u}=5(1)+5(0)+(-3)(0)=5+0$$

وبالتالي EF والمتسوي (HNT) متقاطعان.

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم (EF) في معادلة المستوي (HNT).

$$5t+5(0)-3(1)-2=0$$
$$5t-3-3=0 \to 5t-5=0 \to t=1$$

نعوض $t=1$ في المعادلات الوسيطية:

$$x=1 \quad , \quad y=0 \quad , \quad z=1$$

ومنه فإن نقطة التقاطع هي (1,0,1)

(5

F نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT)

إذا: (F نقطة من المقطع)

الحرف (NT) محتوى في المستوي $ABCD$ و

(HNT) مستوي يقطع الوجه $EFGH$ بفصل مشترك يوازي الحرف NT وهو HF

⇐ F نقطة تنتمي إلى المستويين: $(ABFE)$, (HNT)

⇐ T نقطة تنتمي إلى المستويين (HNT) و $(ABFE)$

إذا: FT هو الفصل المشترك لتقاطع المستويين.

إذا: المقطع هو $NTFH$

طبيعة المقطع: شبه منحرف متساوي الساقين لأن $NT//HF$ و $NT=HF=\frac{\sqrt{34}}{5}$

السؤال السابع والعشرون: دورة 2017

1) اكتب معادلة للكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$

2) تحقق أن المستوي الذي معادلته $P = x - y + z + 3 = 0$ يمس الكرة S

الحل:

$$1)\quad (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = R^2$$
$$\Rightarrow S: x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

ملاحظة هامة

حتى المستوي يمس الكرة يحب أن نبرهن أن نبرهن أن البعد بين مركز الكره والمستوي يساوي نصف قطر الكرة..

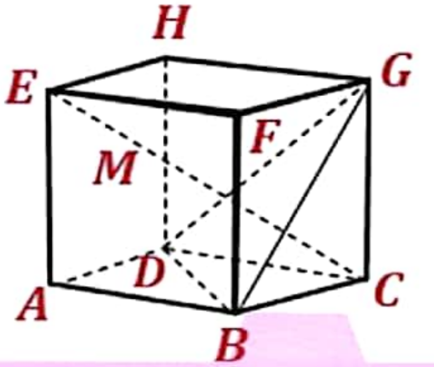
$$dist\,(O,P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$= \frac{|0+0+0+3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3} = R$$

فالمستوي يمس الكرة

السؤال الثامن والعشرون دورة 2017

في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 نتأمل المعلم المتجانس $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ حيث:

$$\vec{K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\ ,\vec{J} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\ ,\vec{I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$



1) اكتب معادلة المستوي (GBD)

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EC)

3) جد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD)

4) جد احداثيات النقطة M التي تحقق $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

5) اثبت تعامد المستقيمين (HM) , (EC)

الحل:

1) $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0)$

$D(0,2,0), E(0,0,2), F(2,0,2), G(2,2,2,), H(0,2,2)$

$\overrightarrow{GB}(0,-2,-2)\ ,\overrightarrow{GD}(-2,0,-2)$

نلاحظ أن الشعاعين غير مرتبطين خطيا

$\leftarrow B\ ,G\ ,D$ تعين مستوي.

وبفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (GBD)بالتالي:

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{GB} \to \vec{n}.\overrightarrow{GB} = 0$$
$$\to -2b - 2c = 0 \to b = -c \quad (1)$$
$$\vec{n} \perp \overrightarrow{GD} \to \vec{n}.\overrightarrow{GD} = 0$$
$$\to -2a - 2c = 0 \to a = -c \quad (2)$$

بفرض $\boxed{c = -1}$ بالتالي $\boxed{b = 1\ , a = 1}$ ومنه

$\vec{n}(1,1,-1)$ المستوي يمر من $B(2,0,0)$

$$1(x-2) + 1(y-0) - 1(z-0) = 0$$

السؤال الثلاثون دورة ثانية 2017

نتأمل في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$النقطتين $B(1,-2,1), A(2,0,1)$والمطلوب:

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة$[AB]$

الحل: طريقة أولى:

ليكن H منتصف $[AB]$ فيكون

$\overrightarrow{BA}(1,2,0)$ ، $H(\frac{3}{2},-1,1)$ فيكون:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-x_0)=0$$

$$1\left(x-\frac{3}{2}\right)+2(y+1)+0(z-1)=0$$

$$x+2y-\frac{3}{2}+2=0$$

$$\rightarrow 2x+4y+1=0$$

طريقة ثانية:

تنتمي $M(x,y,z)$ إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ إذا وفقط إذا كان:

$$AM=BM \leftrightarrow AM^2=BM^2$$

وهذا يكافئ:

$$(x-2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2$$

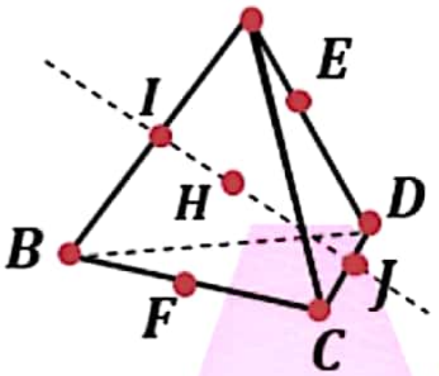
ومنه: $-4x+4=-2x+1+4y+4$

إذن معادلة المستوي المحوري المطلوبة:

$$2x+4y+1=0$$

السؤال الواحد والثلاثون: دورة ثانية 2017

$ABCD$ رباعي وجوه a عدد حقيقي I و J هما بالترتيب منتصفا $[AB],[CD]$، F ، E نقطتان تحققان العلاقتين $\overrightarrow{BF}=a\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AD}$ وأخيراً H هي منتصف $[EF]$ أثبت أن I ، J ، H تقع على استقامة واحدة



الحل: لدينا:

$$\overrightarrow{AE}=a\,\overrightarrow{AD}$$

$\leftarrow$ $(E,1)$ مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,1-\alpha)(D,\alpha)$

$$\overrightarrow{BF}=a\overrightarrow{BC}$$

$\leftarrow$ F مركز أبعاد متناسبة لـ $(B,1-\alpha)(C,\alpha)$

وبما أن H منتصف (EF)بالتالي H مركز أبعاد متناسبة لـ $(F,1)(E,1)$

فحسب الخاصة التجميعية تكون Hمركز الابعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,1-\alpha)(D,\alpha)(B,1-\alpha)(C,\alpha)$$

J منتصف (CD)وبالتالي J مركز الابعاد المتناسبة لـ$(D,\alpha)(C,\alpha)$

I منتصف (AB)وبالتالي Iمركز الابعاد المتناسبة لـ$(A,1-\alpha)(B,1-\alpha)$

بالتالي حسب الخاصة التجميعية النقطة H مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين$(I,2\alpha)(I,2-2\alpha)$

فإن النقاط I,J,H تقع على استقامة واحدة

السؤال التاسع والثلاثون

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$
$$Q: x + y + z - 1 = 0$$
$$R: x - z - 1 = 0$$

1) أثبت ان المستويين $Q.P$ متقاطعين بفصل مشترك Δ ، اكتب تمثيلاً وسيطياً له.

2) تحقق ان المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A

3) أثبت ان المستويات $R.Q.P$ تتقاطع بنقطة I يطلب تعيين إحداثياتها.

4) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ

الحل:

1- $\overrightarrow{n_P}(2,-1,2)\ \overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$: $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1}$

المركبات غير المتناسبة فالشعاعين $\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_P}$ غير مرتبطان خطياً والمستويان $Q.P$ متقاطعين بفصل مشترك لكتابة معادلة الفصل المشترك نحل معادلتي المستويين حلا مشتركا:

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$
$$Q: x + y + z - 1 = 0$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$3x + 3z - 3 = 0 \Rightarrow x = -z + 1$$

نعوض في المعادلة الثانية نجد:

$$-z + 1 + y + z - 1 = 0 \Rightarrow y = 0$$

نفرض $z = t$ بالتالي $x = -t + 1$:

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

2- شعاع توجيه Δ هو: $\overrightarrow{u_\Delta}(-1,0,1)$

وناظم R هو: $\overrightarrow{n_R}(1,0,-1)$

$\overrightarrow{u_\Delta} = -\overrightarrow{n_R}$ فالشعاعين $\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_R}$ مرتبطان خطياً والمستوي R يعامد Δ.

نعوض إحداثيات النقطة $A(1,2,0)$ في معادلة المستوي R نجد: $1 - 0 - 1 = 0 \rightarrow 0 = 0$ أي أن المعادلة محققة وبالتالي $A \in R$ أي أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A.

3- بما أن P, Q متقاطعان في الفصل المشترك Δ والمستوي R يعامد Δ وبالتالي المستويات P, R, Q تتقاطع بنقطة I هي نقطة تقاطع R مع Δ لذلك نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ في معادلة R نجد:

$$-t + 1 - t - 1 = 0 \rightarrow -2t = 0 \rightarrow t = 0$$

وبالتالي نجد نقطة التقاطع $I(1,0,0)$

4- بما أن المستوي R يمر من A ويعامد Δ فإن نقطة تقاطع R مع Δ هي المسقط القائم للنقطة A على Δ أي أن $I(1,0,0)$ هي المسقط القائم للنقطة A على Δ وبالتالي:

$$dist(A, \Delta) = AI$$
$$= \sqrt{(1-1)^2 + (0-2)^2 + (0-0)^2}$$
$$= \sqrt{0 + 4 + 0} = \sqrt{4} = 2$$

السؤال الأربعون: 2020 دورة أولى

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط:

$A(1, 0, 0,), B(4, 3, -3), C(-1, 1, 2), D(0, 0, 1)$

المطلوب:

1) أثبت أن $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

2) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً.

3) استنتج ان النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$ حيث $\gamma.\beta.\alpha$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل: 1-

$$\overrightarrow{AC}(-2,1,2), \overrightarrow{AB}(3,3.-3) : -\frac{2}{3} \neq \frac{1}{3}$$

الشعاعين $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما متناسبة.

الأشعة في الفراغ (2)

ولتكن: $c=1$ بالتالي $b=0, a=1$ ومنه

$\vec{n}(1,0,1)$ والمستوي مار من $E(0,0,3)$

$$(x-0)+0(y-0)+1(z-3)=0$$
$$\Rightarrow (EBC): x+z-3=0$$

3- المستقيم d يعامد المستوي بالتالي:

فإن ناظم المستوي هو شعاع توجيه المستقيم:

$\vec{n}(1,0,1)$ والمستقيم يمر من $A(0,,0,0)$ إذا:

$$d:\begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \\ z=ct+z_A \end{cases} \quad : t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow d:\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \quad : t\in\mathbb{R}$$

-4 $E(0,0,3)\,,B(3,0,0) \Rightarrow H(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2})$

بما أن المستقيم d يعامد المستوي (EBC)

فإن مسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC) هو نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (EBC) بالتالي نعوض معادلة المستقيم في المستوي:

$$t+t-3-0 \Rightarrow t=\frac{3}{2}$$

نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية للمستقيم فيكون $x=\frac{3}{2}\,, y=0\ ,z=\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow A'\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right) \Rightarrow A'=H$$

طريقة ثانية للاستنتاج:

تكون H هي المسقط القائم لـA على (ECB) إذا كان: $AH=dist(A,(EBC))$

$$AH=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-0\right)^2+(0-0)^2+\left(\frac{3}{2}-0\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{18}{4}}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$dist(A,(EBC))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$\to=\frac{|(0)+(0)+(0)-3|}{\sqrt{(1)^1+(0)^2+(1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

مما سبق نجد أن H هي المسقط القائم لـA على (ECB).

طريقة ثالثة للاستنتاج:

تكون H هي المسقط القائم لـA على (ECB) إذا كان $(AH)\perp(ECB)$

ولدينا $\overrightarrow{AH}\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$ و $\vec{n}(1,0,1)$ شعاع ناظم على المستوي: فنلاحظ أن $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{2}\vec{n}$ أي أن $\overrightarrow{AH}$ مرتبط مع الناظم $\vec{n}$ ومنه $(AH)\perp(ECB)$ وبالتالي نجد أن H هي المسقط القائم لـA على (ECB).

-5 **طريقة أولى:** المثلث EBC قائم في $\hat{B}$ (حسب نظرية الأعمدة الثلاث)

$$S=\frac{EB.BC}{2}$$
$$EB=|\overrightarrow{EB}|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2} \quad ,BC=3$$

بالتالي:

$$AH=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$S_{EBC}=\frac{EB\times BC}{2}=\frac{3\sqrt{2}\times BC}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$$
$$V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}\times 3}{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{9}{2}$$

طريقة ثانية لحساب الحجم:

حجم الهرم= ثلث مساحة القاعد × الارتفاع

$$V=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}S_{EBC}\times EA)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\times 3\times 3\times 3\right)=\frac{9}{2}$$

السؤال الثاني والاربعون دورة ثانية 2020:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي

$P: 2x + y - 3z + 2 = 0$ والنقطة $A(1, 1, -2)$

المطلوب:

1) أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P.

2) اكتب معادلة المستوي Q المار من A والموازي للمستوي P.

الحل:

-1 نعوض $A(1,1,-2)$ في معادلة المستوي P

$P: 2x + y - 3z + 2 = 0$

فنجد $2(1) + 1(1) - 3(-2) + 2 = 11 \neq 0$

ومنه: $A \notin P$

-2 بما أن المستويين $Q.P$ متوازيين فإن

$\overrightarrow{n_P}(2,1,-3) = \overrightarrow{n_Q}$ والمستوي مار من $A(1,1,-2)$

$Q: a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$Q: 2(x - 1) + 1(y - 1) - 3(z + 2) = 0$

$\Rightarrow Q: 2x + y - 3z - 9 = 0$

السؤال الثالث والأربعون: 2020 دورة ثانية

المستقيمان d و d' معرفان وسطياً وفق:

$$d: \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = s - 2 \\ z = 3s - 2 \end{cases} \quad : s \in \mathbb{R}$$

$$d^{`}: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t \end{cases} \quad : t \in \mathbb{R}$$

1) أثبت أن d و d' متقاطعان ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع:

2) جد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين d

الحل:

-1 $\vec{u}(1,2,-1)$ شعاع موجه للمستقيم d

و$\vec{u}'(2,1,3)$ شعاع موجه للمستقيم d'

نلاحظ أن: $\vec{u},\vec{u}^{`}$ غير مرتبطان خطياً لعدم تناسب المركبات حيث $(\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1})$ ومنه المستقيمان d و d' غير متوازيين فهما متقاطعان أو متخالفان، بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين نجد:

$$\begin{cases} t + 2 = 2s - 1 & (1) \\ 2t + 1 = s - 2 & (2) \\ -t = 3s - 2 & (3) \end{cases}$$

بجمع (1) مع (3) نجد أ $2 = 5s - 3 \rightarrow s = 1$ وبالتعويض في (1) نجد أن $t = -1$ بتعويض هاتين القيمتين في المعادلة (2) نجد $-2 + 1 = 1 - 2$ $-1 = -1$ محققة ومنه المستقيمان d و d' متقاطعان ويقعان في مستوٍ واحد. لإيجاد نقطة التقاطع نعوض $s = 1$ في d أو $t = -1$ في $d^{`}$ فنجد أن $x = 1 , y = -1 , z = 1$ إذا نقطة التقاطع هي $I(1,-1,1)$..

-2 المستوي P المحدد بالمستقيمين $d,d^{`}$ هو المستوي المار بالنقطة I والموجه ب: $\vec{u}(1,2,-1)$ $\vec{u}'(2,1,3)$ ونفرض ناظم المستوي المطلوب $\vec{n}(a,b,c)$

إن كلاً من الشعاعين $\vec{n}^{`} AB$ يوازي ناظم المستوي بالتالي:

$\vec{n} \perp \vec{u} \rightarrow \vec{n}.\vec{u} = 0 \Rightarrow (a,b,c)(1,2,-1) = 0$

$\boxed{a + 2b - c = 0 \quad ... \quad (1)}$

$\vec{n} \perp \vec{u}^{`} \rightarrow \vec{n}.\vec{u'} = 0 \Rightarrow (a,b,c)(2,1,3) = 0$

$\boxed{a + 2b + 3c = 0 \quad ... (2)}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 3a + 6b - 3c = 0 \\ 2a + b + 3c = 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{بالجمع}$$

$\Rightarrow 5a + 7b = 0 \Rightarrow -\frac{7}{5}b$

نفرض $b = -5 \Rightarrow a = 7$ نعوّض في المعادلة الأولى نجد $c = -3$ ومنه $\vec{n}(7,-5,-3)$

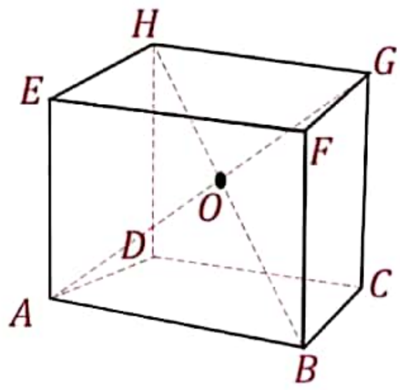
والمستوي مار بالنقطة $(1,-1,1)$ بالتالي:

$7(x - 1) - 5(y + 1) - 3(z - 1) = 0$

$\Rightarrow Q: 7x - 5y - 3z - 9 = 0$

السؤال الرابع والأربعون: 2020 دورة ثانية

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه $O,2$ نقطة تقاطع القطرين $[AG]$، $[HB]$.



نختار المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$

والمطلوب:

1) جد إحداثيات $O\,,H\,,G\,,B\,,A$

2) أعط معادلة المستوي (GOB)

3) احسب $\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OB}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$

4) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC)

5) أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB)

6) جد الأعداد الحقيقية γ,β,α لتكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المتمثلة d'g$(C,\gamma)(B,\beta)(A,\alpha)$

الحل:

1) $A(0,0,0)\ \ B(2,0,0)\ \ C(2,2,0)$
$D(0,2,0)\ \ E(0,0,2)\ \ F(2,0,2)$

$G(2,2,2)\ \ H(0,2,2)\ \ O(1,1,1) \rightarrow$ لأنها منتصف $\overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{OG}(1,1,1)$ ، $\overrightarrow{OB}(1,-1,-1)$ وبفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (GOB) بالتالي:

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{OG}\Longrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{OG}=0\Longrightarrow(a,b,c)(1,1,1)=0$$
$$\Longrightarrow a+b+c=0\qquad(1)$$
$$\vec{n}\perp\overrightarrow{OB}\Longrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{OB}=0\Longrightarrow(a,b,c)(1,-1,-1)=0$$
$$\Longrightarrow a-b-c=0\qquad(2)$$

بجمع المعادلتين نجد: $2a=0\boxed{\Longrightarrow a=0}$

نعوض في (1) نجد:

$c=-b$

بفرض $b=1$ بالتالي $\boxed{c=-1}$ ومنه $\vec{n}(0,1,-1)$

والمستوي يمر من $B(2,0,0)$

$$0(x-2)+1(y-0)-1(z-0)=0$$
$$\Longrightarrow(GBD): y-z=0$$

طريقة ثانية:

تعطى معادلة المستوي P بالشكل العام:

$$P: ax+by+cz+d-0$$

نعوض إحداثيات B فنجد: (1) ... $d=-2a$

نعوض إحداثيات O فنجد: (2) ... $a+b+c+d=$

نعوض إحداثيات G (3) ... $2a+2b+2c+d=0$

نعوض (1) في (2) فنجد: (4) ... $a=b+c$

نعوض (1) في (3) فنجد: (5) ... $b=-c$

نعوض (5) في (4) فنجد: $a=0$ ومن(1) نجد: $d=0$

من أجل $b=1$ نجد: $c=-1$ وبالتالي تصبح معادلة المستوي: $P: y-z=0$

3)
$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}=\left\|\overrightarrow{OG}\right\|.\left\|\overrightarrow{OB}\right\|.\cos\widehat{GOB}$$
$$\overrightarrow{OB}(1,-1,-1)\,,\overrightarrow{OG}(1,1,1)$$
$$\left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$
$$\left\|\overrightarrow{OG}\right\|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$
$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}=1-1-1=-1$$
$$\Longrightarrow\cos\widehat{GOB}=\frac{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}}{\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\left\|\overrightarrow{OG}\right\|}=-\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

4) المستقيم (DC) مار من $D(0,2,0)$ وشعاع توجيهه $\overrightarrow{DC}(2,0,0)$ بالتالي:

$$(DC):\begin{cases}x=2t\\ y=2\quad;t\in R\\ z=0\end{cases}$$

5) ندرس الوضع النسبي لناظم المستوي وشعاع توجيه المستقيم:

$$\vec{n}(0,1,-1)\,,\overrightarrow{DC}(2,0,0)$$
$$\Longrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{DC}=0+0+0=0$$

الشعاعين متعامدين بالتالي المستقيم يوازي المستوي أو محتوى فيه، نعوض التمثيلات الوسيطية

الأشعة في الفراغ (2)

$= 6 - 4 - 2 = 0 \rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$

وبما أن $\overrightarrow{AB}$و$\overrightarrow{AC}$ شعاعان غير مرتبطان خطيا لعدم تناسب مركباتهما

فبالتالي الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC)لأنه عمودي على شعاعان غير مرتبطان خطيا منه. ولدينا المستوي (ABC)مار من $B(2,1,1)$ وشعاع توجيهه $\vec{n}$ إذاً:

$$2(x-2)+4(y-1)+1(z-1)=0$$
$$\Rightarrow (ABC): 2x+4y+z-9=0$$

3)المستقيم d يعامد المستوي بالتالي:

ويمر من $D(3,-1,-2)$ $\vec{u}=\vec{n}(2,4,1)$

$$d: \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \; ; t \in R \\ z = ct + z \end{cases}$$
$$\Rightarrow d: \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 4t + 1 \; ; t \in R \\ z = t + 1 \end{cases}$$

4) $$dist\left(D.(ABC)\right) = \frac{|ax_D + by_D + cz_D + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$= \frac{|2(3)+4(1)+1-9|}{\sqrt{4+16+1}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$$
$$V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.h$$

لدينا ABC مثلث قائم:

$$S_{ABC} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}{2} = \frac{\sqrt{14}\times\sqrt{24}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{14}\times 2\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{21}$$

لدينا: h هو بعد D عن المستوي (ABC) :

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}\times h = \frac{1}{3}\times 2\sqrt{21}\times\frac{1}{\sqrt{21}} = \frac{4}{3}$$

5) G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)(B,1)(C,1)$ بالتالي:

$$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{GC}$$

الشعاعين $\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{GC}$ مرتبطين خطياً فالمستقيمين $(CG),(AB)$ متوازيان.

طريقة ثانية: نوجد إحداثيات G ثم مركبات الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CG}$ ثم نثبت الارتباط الخطي بينهما وفق الآتي:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{-1-2-6}{2} = -\frac{9}{2}$$
$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{2-1+8}{2} = \frac{9}{2}$$
$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{3-1-2}{2} = 0$$
$$G\left(-\frac{9}{2},\frac{9}{2},0\right), \overrightarrow{AB}(3,-1,2), \overrightarrow{CG}\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},1\right)$$

نلاحظ أن الشعاعان مرتبطان خطيا فالمستقيمان AB و CG متوازيان.

السؤال السابع والأربعون دورة ثانية 2021:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $A(2,1,-2)$ والمستوي $(P: 2x+y-2z-4=0)$

1) احسب بعد A عن المستوي P.

2) اكتب معادلة للكرة التي A مركزها وتمس المستوي P.

الحل: 1-

$$dist\,(A,P) = \frac{|2(2)+1-2(2)-4|}{\sqrt{4+1+4}}$$
$$= \frac{3}{3} = 1$$

2- مركز الكرة A ونصف قطرها هو بعد A عن P.

$R = dist\,(A,P) = 1$ ومعادلة الكرة:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$
$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 1$$

السؤال السابع والأربعون: 2021 دورة ثانية

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط

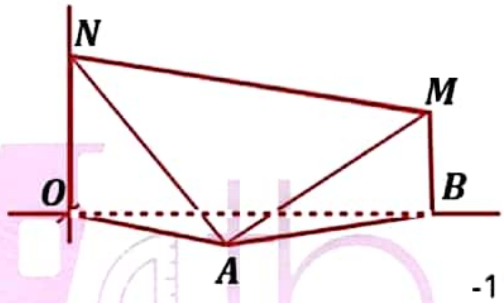
$A(1,3,0),\ B(0,6,0),\ N(0,0,3),\ M(0,6,2)$

والمطلوب:

1) اكتب معادلة المستوي (AMN).

2) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (AMN).

3) أثبت أن المستوي الذي معادلته $Z-1=0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيم $[BM]$



الحل: 1-

$O(0,0,0)\ A(1,3,0)\ B(0,6,0)\ N(0,0,3)\ M(0,6,2)$

$\overrightarrow{AN}(-1,-3,3)\ ,\quad \overrightarrow{AM}(-1,3,2)$

وبفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (AMN) بالتالي:

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AM}\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$$
$$\Rightarrow \boxed{-a+3b+2c=0\quad(1)}$$
$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AN}\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AN}=0$$
$$\Rightarrow \boxed{-a-3b+3c=0\quad(2)}$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$\Rightarrow -2a+5c=0\Rightarrow a=\frac{5}{2}c$$

بفرض $\boxed{c=2}$ بالتالي $\boxed{a=5}$ نعوض في (1) نجد:

$$\boxed{b=\frac{1}{3}}$$

للتخلص من الكسور نضرب المركبات ب 3 ومنه

$\vec{n}(15,1,6)$ والمستوي يمر من $N(0,0,3)$:

$$15(x-0)+1(y-0)+6(z-3)=0$$
$$\Rightarrow (AMN): 15x+y+6z-18=0$$

2- المستقيم Δ المار من $O(0,0,0)$ ويقبل

$\vec{n}(15,1,6)$ شعاع توجيه له بالتالي:

$$(\Delta):\begin{cases}x=15t\\ y=t\\ z=6t\end{cases}\quad ;t\in\mathbb{R}$$

3- المستوي مار من منتصف $[BA]$ ولتكن I :

$$I\left(\frac{0+0}{2},\frac{6+6}{2},\frac{0+2}{2}\right)\to I(0,6,1)$$

وناظمه $\vec{n}=\overrightarrow{BM}(0,0,2)$ معادلته:

$$0(x-0)+0(y-6)+2(z-1)=0\to 2z-2=6$$
$$\Rightarrow z-1=0$$

طريقة ثانية: بفرض: $M`(x,y,z)$ نقطة من

المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$ إذا:

$$M`B=M`M$$
$$(x-0)^2+(y-6)^2+z^2$$
$$=x^2+(y-6)^2+(z-2)^2$$
$$z^2=z^2-4z+4$$
$$\to\ -4z+4=0$$
$$\to z-1=0$$

السؤال الثامن والأربعون 2022 دورة أولى

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط

$C(0,0,1)\ B(0,1,0)\ A(2,0,0)$ والمطلوب:

1) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ واستنتج $cosBAC$.

2) اذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق العلاقة:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\|\overrightarrow{AB}\|$$

الحل: 1- $\overrightarrow{AB}(-2,1,0)\ ,\ \overrightarrow{AC}(-2.0.1)$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2,1,0).(-2.0.1)$$
$$=4+0+0=4$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-2)^2+(1)^2+0^2}$$
$$=\sqrt{4+1+0}=\sqrt{5}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(-2)^2+(0)^2+(1)^2}$$
$$=\sqrt{4+0+1}=\sqrt{5}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=$$
$$.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\cos\widehat{BAC}$$
$$\Rightarrow\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\frac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

2- بما أن G مركز ثقل المثلث ABC إذا نفرض G مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(G,3)\leftarrow(A,1),(B,1),(C,1)$

$$\to\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

نضرب ب 2 : $\Rightarrow 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$

$$\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$$

وبما أن: $\left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

$$\Rightarrow \left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

$$\Rightarrow 6\,MG = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow MG = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

مجموعة نقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{6}$

السؤال التاسع والأربعون: 2022 أولى

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,1,2)$ والمستويان $P{:}x-y+2z-1=0$ و $Q{:}2x+y+z+1=0$ والمطلوب:

1) أثبت أن المستويين P,Q متقاطعان بفصل مشترك d.
2) اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d.
3) اكتب معادلة المستوي R المار من A ويعامد كلاً من المستويين P,Q
4) جد إحداثيات النقطة B الناتجة من تقاطع المستقيم d والمستوي R.
5) احسب بعد A عن المستقيم d
6) اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q

الحل: 1- $\overrightarrow{n_Q}(2,1,1)\,,\overrightarrow{n_P}(1,-1,2)$ الشعاعان غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستويات P,Q متقاطعان بفصل مشترك d

-2

$$P{:}\,x-y+2z-1=0 \qquad (1)$$
$$Q{:}\,2x+y+z+1=0 \qquad (2)$$

لكتابة التمثيل الوسيطي للفصل المشترك نحل المعادلتين حلا مشتركا: بالجمع نجد:

$$3x+3z=0 \Rightarrow \boxed{x=-z}$$

نعوض في (2) نجد:

$$-2z+y+z+1=0 \Rightarrow \boxed{y=z-1}$$

نعوض $\boxed{z=t}$ وبالتالي: $x=-t\,,y=t-1$ ومنه:

$$d{:}\begin{cases} x=-t \\ y=t-1 \\ z=t \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$

-3 لدينا $\overrightarrow{n_Q}(2,1,1)\,,\overrightarrow{n_P}(1,-1,2)$ ولنفرض $\overrightarrow{n_R}(a,b,c)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_P}=0 \\ \overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_Q}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+2c=0 \\ 2a+b=c=0 \end{cases} \Rightarrow \text{بالجمع}$$

$$\Rightarrow 3a+3c=0 \Rightarrow a=-c$$

بفرض $c=-1$ وبالتالي $a-1$, $b=-1$ ومنه

$\overrightarrow{n_R}(1,-1,-1)$ والمستوي R المار بالنقطة $A(1,1,2)$

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$\Rightarrow (x-1)-1(y-1)-1(z-2)=0$$

$$\Rightarrow R{:}\,x-y-z+2=0$$

-4 نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي R نجد:

$$-t-t+1-t+2=0 \Rightarrow -3t+3=0$$
$$\Rightarrow \boxed{t=1}$$

نعوض $t=1$ في المعادلات الوسيطية فيكون $B(-1,0,1)$

-5 النقطة A تنتمي للمستوي R العمود على d بالتالي النقطة $B(-1,0,1)$ هي مسقط A على d لأنها نقطة تقاطع R مع d:

$$dist(A,d)=AB$$
$$=\sqrt{(-1-1)^2+(0-1)^2+(1-2)^2}$$
$$=\sqrt{6}$$

-6 بما أن الكرة تمس المستوي Q فإن بعد مركزها عنه هو نصف قطرها: مركز الكرة $A(1\,,1\,,2)$ونصف قطرها هو بعد A عن Q :

$$R=dist(A\,,Q)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|2(1)+1+2+1|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

معادلة الكرة:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$
$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6$$

السؤال الخمسون دورة ثانية 2022

في معلم متجانس $(O:\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0\,,1\,,-1)$ $B(1,-1,1)$والمطلوب:

أعط معادل للمجموعة S المكوّنة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة $MA=MB$ وما طبيعة المجموعة S ؟

الحل: بفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المحور فهي متساوية البعد عن A , B بالتالي:لدينا:

$$MA=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)62+(z-1)^2}$$
$$MB=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$$
$$MA=MB\Rightarrow MA^2=MB^2$$
$$(x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$$
$$=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2$$
$$=x^2+y^2-2y+1+z^2+2z+1$$
$$=x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2-2z+1$$
$$\Rightarrow 2x-4y+4z-1=0$$
$$\Rightarrow x+2y-4z-3=0$$

مجموعة النقاط S هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

السؤال الواحد والخمسون:

في المعلم المتجانس $(O:\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $B(1,1,0), A(2,-2,2), C(1,0,1), D(0,0,1)$ والمطلوب:

1) أثبت أن النقاط $D\,,C\,,B$ لا تقع على استقامة واحدة

2) أثبت أن $y+z-1=0$ هي معادلة المستوي (BCD)

3) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي (BCD)

4) عيّن احداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)

5) اكتب معادلة للكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً لها

الحل:

1) $\overrightarrow{BD}(-1,-1,1)$ $\overrightarrow{BC}(0,-1,1)$

الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مرتبطان خطياً لعدم تنتسب مركباتهما ومنه فإن النقاط $D\,,C\,,B$ لا تقع على استقامة واحدة

2) نعوّض احداثيات النقاط B,C,Dفي معادلة المستوي :

$$y+z-1=0$$
$$1+0-1=0\Rightarrow 0=0\Rightarrow B\in(BCD)$$
$$0+1-1=0\Rightarrow 0=0\Rightarrow C\in(BCD)$$
$$0+1-1=0\Rightarrow 0=0\Rightarrow D\in(BCD)$$

بالتالي $y+z-1=0$ هي معادلة للمستوي (BCD)

طريقة ثانية: إيجاد معادلة المستوي المطلوب بالطريقة التقليدية.

3) المستقيم Δ مار من $A(2,-2,2)$ ويقبل $\vec{n}(2,-2,2)$ شعاع توجيهه له وذلك لأن Δ عمودي على المستوي فناظم المستوي هو شعاع توجيه المستقيم:

$$\Delta:\begin{cases}x=2\\ y=t-2\,;t\in R\\ z=t+2\end{cases}$$

4) النقطة K هي نقطة تقاطع Δ مع المستوي (BCD)بالتالي نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي (BCD) فنجد:

$$t-2+t+2-1=0\Rightarrow t=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow K\left(2,-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$$

5) مركز الكرة هو منتصف $[AD]$ ومنه حسب إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة يكون:

$$I\left(\frac{x_A+x_D}{2},\frac{y_A+y_d}{2},\frac{z_A+y_D}{2}\right)\to I\left(2,-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$$

نصف قطر الكرة هو AD بالتالي

$$R=\frac{AD}{2}=\frac{\sqrt{4+4+1}}{2}=\frac{3}{2}$$
$$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=R^2$$
$$(x-1)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$