أسئلة الدورات والنماذج

التمرين الأول: النموذج الوزاري الأول.

ليكن f التابع المعرف على $I =]-1, +\infty[$ وفق العلاقة:

$$f(x) = \ln(\sqrt{x+1})$$

1- احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(1)$ واستنتج:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln\sqrt{2}}{x-1}$$

2- احسب نهاية التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x+\sin x}{x-2}$ عند $+\infty$

الحل:

1- $g(x) = \ln(\sqrt{x+1}) \to g(1) = \ln\sqrt{2}$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{x+1} \to \quad g'(1) = \frac{1}{4}$$

نعلم حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln\sqrt{2}}{x-1} = \frac{1}{4}$$

2- $f(x) = \frac{2x+\sin x}{x-2}$

نعلم أنه مهما يكن $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ فإن $-1 \le \sin x \le 1$

وبالتالي:

$$2x-1 \le 2x+sinx \le 2x+1$$

وفي حال $x > 2$ فإن $x-2>0$ وبالتالي:

$$\frac{2x-1}{x-2} \le \frac{2x+\sin x}{x-2} \le \frac{2x+1}{x-2}$$

وبما أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-2} = 2 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-2} = 2$

فحسب مبرهنة الإحاطة يكون:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin x}{x-2} = 2$$

التمرين الثاني: النموذج الوزاري الثالث

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية:

$$\ln(x-1) = \ln x - \ln(x+1)$$

الحل: شرط الحل هو $D_1:\ x-1>0 \Rightarrow x>1$

$$D_1 \Rightarrow x \in]1,+\infty[$$
$$D_2:\ x+1>0 \Rightarrow x>-1$$
$$D_2 \Rightarrow x\in]-1,+\infty[$$
$$D = D_1\cap D_2 =]1,+\infty[$$
$$\ln x - \ln(x+1) = \ln(x)$$
$$\ln(x-1)+\ln(x+1)$$
$$\Rightarrow \ln(x-1)(x+1) = \ln x$$

$$\ln(x^2-1) = \ln x$$
$$\Rightarrow x^2-1 = x$$
$$x^2-x-1=0 \quad , \quad \Delta = 1+4 = 5$$

إما $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ مرفوض

أو $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ مقبول

مجموعة الحلول $S = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

التمرين الثالث : النموذج الوزاري 2019

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$

وليكن C' الخط البياني للتابع g مقصور f على $]1,+\infty[$

1- أثبت أن f تابع فردي واستنتج الصفة التناظرية للخط C

2- ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها، واكتب معادلة مل مقارب للخط C'

3- ارسم كل مقارب وجدته وارسم C' واستنتج C

4- احسب مساحة السطح المحصور بين C' ومحور الفواصل والمستقيمين $x=3, x=2$

الحل:

1- $\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
$\to\ -x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

الشرط الأول محقق :

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{(x+1)^{-1}}{(x-1)^{-1}}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}$$
$$= -\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = -f(x)$$

الخط متناظر بالنسبة للمبدأ .

2- بما أن g مقصور f فلهما نفس قاعدة الربط على المجال المعطى $I =]1,+\infty[$

$$\Rightarrow g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) \quad , \quad D_g =]1,+\infty[$$

التابع g معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = +\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C'

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = \ln(1) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C' في جوار $+\infty$

$$g(x) = \ln(1+x) - \ln(x-1)$$

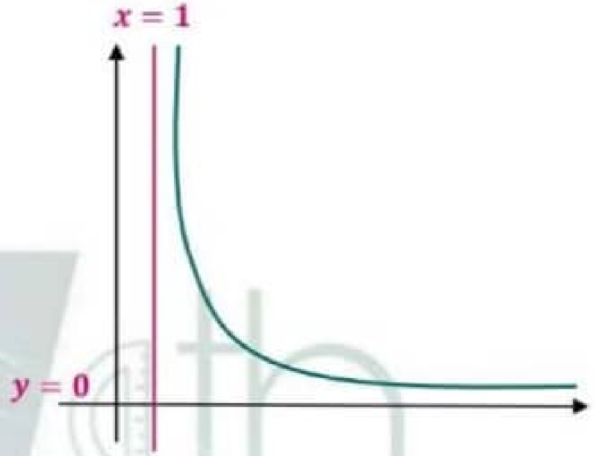
$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1} = \frac{-2}{(1+x)(x-1)} < 0$$

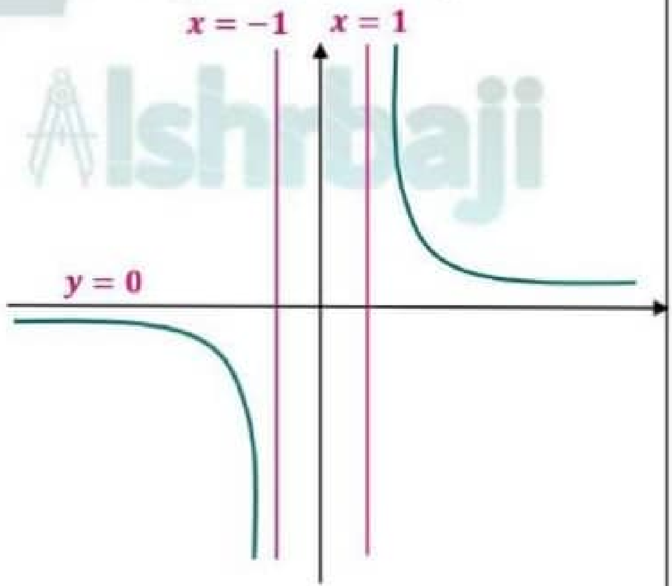
x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0

-3 الخط C هو اجتماع الخط C' ونظيره بالنسبة للمبدأ

لأن g مقصور على $]1, +\infty[$ و f تابع فردي خطه

البياني C متناظر بالنسبة للمبدأ O .





-4 المساحة:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_2^3 \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)dx$$

$$u(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) \quad \to \quad u'(x) = \frac{-2}{x^2-1}$$

$$v'(x) = 1 \quad \to \quad v(x) = x$$

$$S = \left[x\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx$$

$$S = \left[x\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]_2^3 + [\ln(x^2-1)]_2^3$$

$$= (3\ln 2 - 2\ln 3) + (\ln 8 - \ln 3)$$

$$= 3\ln 2 - 2\ln 3 + 3\ln 2 - \ln 3$$

$$= 6\ln 2 - 3\ln 3$$

التمرين الرابع : النموذج الوزاري الأول 2020

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

-1 أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ وفي جوار $-\infty$ ،وادرس الوضع النسبي للخط C_f بالنسبة للمقارب d .

-2 ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها. واكتب معادلات المقاربات الشاقولية للخط C_f

-3 أثبت أن $f(x) + f(-x) = -2$

-4 استنتج أن C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0, -1)$

-5 ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f

-6 استنتج رسم C_g للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = -2x + 1 - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

الحل:

-1 $\quad g(x) = f(x) - y_d$

$$= 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 2x + 1 = -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$$

$$= -\ln(1) = 0$$

إذاً Δ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$$

إذاً Δ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

دراسة الوضع النسبي: نعرف إشارة $g(x)$ من إشارة المضمون حيث إذا كان بسط مضمون اللوغاريتم أكبر من مقامه فالمضمون أكبر من الواحد واللوغاريتم موجب وإلا فهو سالب .

- **في حالة $x > 1$ فإن $x \in]1, +\infty[$:**

$$x+1 > x-1 \rightarrow \frac{x+1}{x-1} > 1$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0 \rightarrow -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 0$$

بالتالي $g(x) < 0$ ومنه فإن C يقع تحت d على المجال $]0, +\infty[$

- **في حالة $x < +1$ فإن $x \in]-\infty, 1[$**

$$x+1 < x-1 \rightarrow \frac{x+1}{x-1} < 1$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 0 \rightarrow -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$$

بالتالي $g(x) > 0$ وينتج أن C يقع فوق d على المجال $]0, +\infty[$

-2 $$f(x) = 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $+\infty$

$$\rightarrow \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = 2 + \frac{2}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= 2 + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2x^2}{x^2-1}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||		||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ||		|| $-\infty$	↗	$+\infty$

-3 $$f(x) + f(-x)$$

$$= 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 2x - 1 - \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$$

$$= -2 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)$$

لدينا $$\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$f(x) = -2 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= -2 - \left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]$$

$$= -2 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1} \times \frac{x-1}{x+1}\right) = -2 - \ln(1) = -2$$

-4 استنتج أن C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0,.-1)$

1) $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$\rightarrow -x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

2) $f\left(2\underbrace{x_g}_{=0} - x\right) + f(x) = f(x) + f(-x) = -2 = 2\underbrace{y_g}_{=-1}$

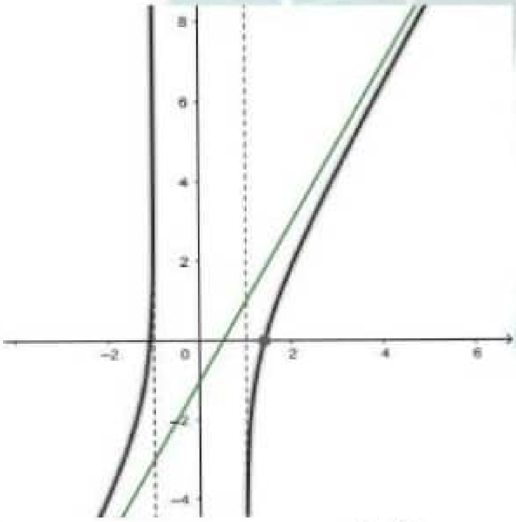
من الطلب السابق

بالتالي C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$ و I هي مركز تناظر للخط C .

-5 ارسم ما وجدنه من مقاربات ثم ارسم C_f:

$$d: y = 2x - 1$$

x	0	$\frac{1}{2}$
y	-1	0



-6 $$g(x) = -2x + 1 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = -\left(2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) = -f(x)$$

بالتالي C_g هو نظير C بالنسبة لمحور الفواصل

التابع اللوغاريتمي

التمرين الخامس: النموذج الوزاري الثاني 2020

ليكن التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ والمعطى بالعلاقة

$$f(x) = \sqrt{x}\ \ln(1+x)$$

1- أثبت أن f اشتقاقي عند 0 ثم استنتج مجموعة تعريف f'

2- جد $f'(x)$ على $[0,+\infty[$

3- استنتج مشتق التابع g المعرف على المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$ وفق $g(x) = \sqrt{\cos x}\ln(1+\cos x)$

الحل:

حسب تعريف العدد المشتق:

لدينا: $f(0) = 0$

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}\ln(1+x) - 0}{x-0}$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right) = 0\times 1 = 0$$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند الصفر و $f'(0) = 0$

بالتالي مجموعة تعريف f' هي $[0,+\infty[$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \frac{(1+x)(\ln(1+x))+2x}{2\sqrt{x}(1+x)} & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{\cos x}\ln(1+\cos x) = f(\cos x)$$

$$g'(x) = f'(\cos x)\times(\cos x)'$$

$$g'(x) = f'(\cos x)\times(-\sin x)$$

$$= \frac{(-\sin x)((1+\cos x)(\ln(1+\cos x)) + 2\cos x)}{2\sqrt{\cos x}\,(1+\cos x)}$$

التمرين السادس: النموذج الوزاري الثالث 2020

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-2,2[$ وفق $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)$ والمطلوب:

1- أثبت ان التابع f فردي ، ثم ادرس تغيرات التابع على المجال $[0,2[$

2- اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$

3- ادرس الوضع النسبي بين C_f و T

الحل:

1- $\forall x \in]-2,2[\to -x \in]-2,2[$

الشرط الأول محقق

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+2}{2+x}\right) = \ln\left(\frac{(2+x)^{-1}}{(2-x)^{-1}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right) = -f(x)$$

الشرط الثاني محقق .. وبالتالي التابع f فردي.

دراسة التغيرات:

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $[0,2[$

$$f(0) = \ln(1) = 0,\quad \lim_{x\to 2} f(x) = \ln\left(\frac{4}{0}\right) = +\infty$$

على المجال $[0,2[$ يمكن ان نكتب f باستخدام خواص اللوغاريتم بالشكل:

$$f(x) = \ln(x+2) - \ln(-x+2)$$

$$\to f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2-x}$$

$$(2-x)\qquad (x+2)$$

$$= \frac{2-x+x+2}{(2-x)(2+x)} = \frac{4}{(2-x)(2+x)} > 0$$

التابع f متزايد تماماً على المجال $[0,2[$

x	0	2
$f'(x)$	$+$	‖
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$ ‖

2- معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

$$f(0) = 0 \quad,\quad f'(0) = 1 = m$$

$$\to y = m(x-0) + f(0) = (1)(x-0) + (0)$$

$$T:\ y = x$$

-3

$$h(x) = f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right) - x$$

$$h(x) = \ln(x+2) - \ln(-x+2) - x$$

$$h'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} - 1$$

$$= \frac{4}{(2-x)(2+x)} - 1 = \frac{4-(4-x^2)}{(2-x)(2+x)} \geq 0$$

x	-2		0		2
$h(x)$	‖	$+$	0	$+$	‖
$h'(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

من جدول الإطراد نستنتج:

x	-2		0		2
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
الوضع النسبي		C يقع تحت المماس		C يقع فوق المماس	

التمرين السابع: الاختبار الأول

أثبت أن $\ln x \le x-1$ أياً كان $x>0$ باختيار $x=e^{\frac{1}{3}}$ و $x=e^{-\frac{1}{3}}$ احصر e

الحل: لدينا $\ln x \le x-1 \Rightarrow \ln x - x + 1 \le 0$

(معادلة مختلطة) نصطلح التابع $f(x)=\ln x + 1 - x$ المعرف والاشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ لذلك ندرس إطراد $f(x)$

$$f'(x)=\underset{(1)}{\frac{1}{x}}-\underset{(x)}{\frac{1}{1}}=\frac{1-x}{x}$$

المقام موجب على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=0$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

نلاحظ من جدول الإطراد أن $f(x)\le 0$ أياً كان $x\in]0,+\infty[$

أي أن: $\ln(x)\le x-1$

ومن المتراجحة نلاحظ أن:

$$\ln e^{\frac{1}{3}} \le e^{\frac{1}{3}}-1 \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{1}{3}}\ge 1+\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{3}}\ge \frac{4}{3} \quad \Rightarrow e \ge \frac{64}{27}$$

$$\ln e^{-\frac{1}{3}}\le e^{-\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{1}{3}}\ge 1-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{3}}\ge\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}\ge\frac{2}{3}$$

للتخلص من أس الـ e نكعب الطرفين .

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{e} \ge \frac{8}{27} \quad \Rightarrow \quad e\le\frac{27}{8}$$

ومنه نجد أن $\frac{64}{27}\le e\le\frac{27}{8}$

التمرين الثامن : الاختبار الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

1- أثبت أن المستقيم $\Delta: y=2x-1$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي لـ Δ, C

2- ادرس التابع f وعين المقارب الشاقولي لـ C وارسم كل مقارب وجدته ، ثم ارسم C

3- أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α واحصره في مجال طوله 0.5

الحل:

-1 $g(x)=f(x)-y_\Delta=\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)=\ln(1)=0$$

إذاً Δ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ على المجال $]0,+\infty[$

لدراسة الوضع النسبي ندرس مضمون اللوغاريتم فإذا كان أصغر من الواحد يكون المضمون سالب وإلا العكس :

$$x<1+x \to \frac{x}{1+x}<1 \quad \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)<0$$
$$\to g(x)<0$$

ومنه فإن C تحت Δ على المجال $]0,+\infty[$

-2 $f(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) \qquad x\in]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي للخط C نحو oy^-

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f(x)=2x-1+\ln x-\ln(1+x)$$

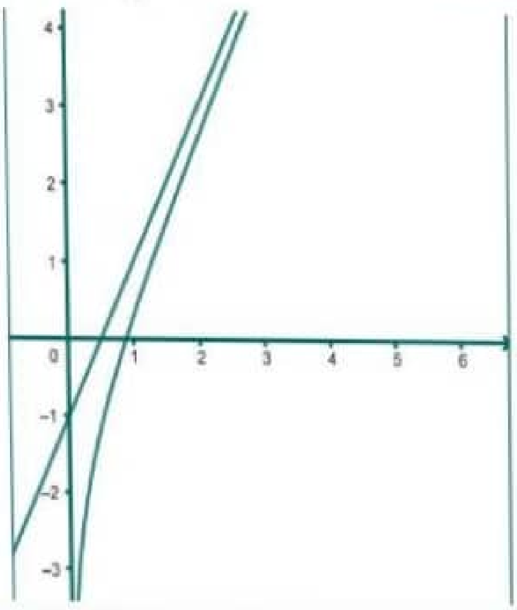
$$\Rightarrow f'(x)=2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x^2+2x+1}{x(x+1)}>0$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

رسم المستقيم

$d: y=2x-1$

x	0	$\frac{1}{2}$
y	-1	0



التابع اللوغاريتمي

3- من جدول التغيرات نلاحظ أن التابع مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$ وأن :

$$0 \in]-\infty,+\infty[= f(]0,+\infty[)$$

وبالتالي المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α: لنجرب الحل على المجال $[0.5,1]$

$$f(0.5)=1-1+\ln\frac{1}{3}=-\ln 3<0$$

$$f(1)=1+\ln\frac{1}{2}=1+\ln 2\approx 0.3>0$$

نلاحظ أن $f(1)\times f(0.5)<0$

$$\Rightarrow f(0.5)<0<f(1)$$

وبالتالي $0.5<\alpha<1$

التمرين التاسع : الاختبار الثاني

أثبت أنه أياً كانت x من $]-1,+\infty[$ كان $\frac{x}{1+x}\le\ln(x+1)$

الحل:

لدينا : $\frac{x}{x+1}\le\ln(x+1)\Rightarrow\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\le 0$

نصطنع التابع $f(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$

ولنثبت أن $f(x)\le 0$ وهي متراجحة مختلطة $f(x)\le 0$

لذلك ندرس إطراد التابع f:

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=\frac{-x}{(1+x)^2}$$

المقام موجب: $f'(x)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=0$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

نلاحظ من جدول الإطراد أن $f(x)\le 0$ أياً كان $x\in]-1,+\infty[$ أي أنه أياً كان $x\in]-1,+\infty[$ فإن $\frac{x}{x+1}\le\ln(x+1)$

التمرين العاشر : الاختبار الثالث

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$

1- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين. وعين قيمته الحدية مبيّناً نوعها.

2- ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم ارسم C

3- احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=\frac{1}{e}$ ، $x=\frac{1}{e^2}$

الحل:

1- f مستمر واشتقاقي على $]0,e[\cup]e,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x-x\ln x}=\frac{1}{0^+-0^-}=+\infty$$

المستقيم $x=0$ مقارب منطبق على $y'y$ عند $+\infty$

$$\lim_{x\to e^-}f(x)=\lim_{x\to e^-}\frac{1}{x(1-\ln x)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

المستقيم $x=e$ مقارب يوازي $y'y$ عند $+\infty$

$$\lim_{x\to e^+}f(x)=\lim_{x\to e^+}\frac{1}{x(1-\ln x)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

المستقيم $x=0$ مقارب منطبق على $y'y$ عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(1-\ln x)}=0$$

المستقيم $y=0$ مقارب منطبق على $x'x$ في جوار $+\infty$

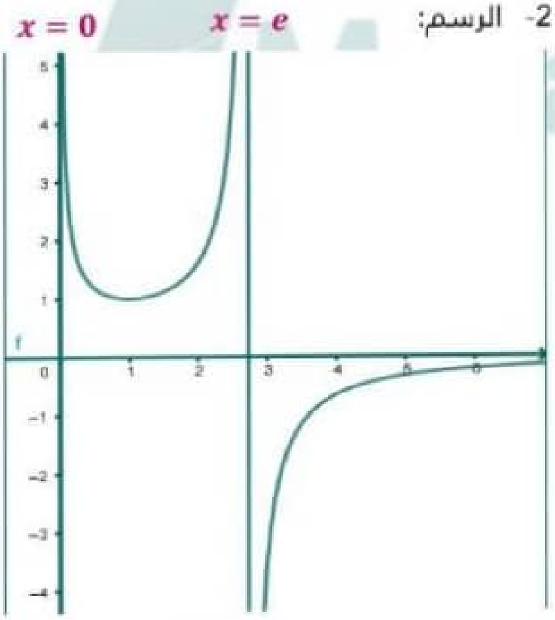
$$f'(x)=\frac{0-(1-\ln x)+1}{x^2(1-\ln x)^2}=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

المقام موجب : $f'(x)=0\Rightarrow\ln(x)=0$

$$x=1\Rightarrow f(1)=1$$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0		‖	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty\searrow$	1	$\nearrow+\infty$	‖	$-\infty\nearrow$	0

2- الرسم:



3- $S=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}f(x)dx=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}dx$

$$S=-\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}dx=-[\ln(1-\ln x)]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$S=-(\ln 2-\ln 3)=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{2}{3}$$

التمرين الحادي عشر : الاختبار الرابع

أولاً: ليكن C_f الخط البياني للتابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=x(\ln x)^2$

1- أثبت أن $f(x)$ يُكتب بالشكل $f(x)=4\left(\sqrt{x}.\ln\sqrt{x}\right)^2$

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

ثانياً: ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $g(x)=-2x\ln x$ أثبت أنه عند $x>1$ يكون: $f(x)-g(x)=xf'(x)$ واستنتج الوضع النسبي للخطين C_f , C_g

ثالثاً: ليكن x_0 من $]0,+\infty[$

1- بين أن معادلة المماس للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي $y=xf'(x_0)+g(x_0)$

2- ادرس تقاطع المماس T مع محور التراتيب ثم استنتج طريقة لإنشاء المماس للمنحني C_f عند النقطة التي فاصلتها x_0

الحل:

أولاً: $f(x)=x.(\ln x)^2$ ونعلم أن $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$

1- $f(x)=x(\ln x)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2 \Rightarrow$

$$=\left(\sqrt{x}\right)^2\left(2\ln\sqrt{x}\right)^2=4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2$$

2- f مستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2=0$$

علماً أن $\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln\sqrt{x}=0$

(0,0) نقطة مقاربة.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x.(\ln x)^2]=+\infty$$

$$f'(x)=(\ln x)^2+2x\frac{1}{x}\ln x=(\ln x)^2+2\ln x$$

$$f'(x)=\ln x\,(\ln x+2)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow$$

إما $\ln x=0 \to x=1 \to f(1)=0$

أو $\ln x=-2 \to x=e^{-2}$

$$\to x=\frac{1}{e^2} \to f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{4}{e^2}$$

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$h(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h'(x)$	‖ 0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗	$+\infty$

ثانياً:

$$f(x)-g(x)=x.(\ln x)^2+2x\ln x$$
$$=x[(\ln x)^2+2\ln x]=xf'(x)$$

نلاحظ أنه عند $0<x<\frac{1}{e^2}$ فإن $f'(x)>0$ وبالتالي C_f فوق C_g وعندما $\frac{1}{e^2}<x<1$ فإن $f'(x)<0$ وبالتالي C_f تحت C_g وعندما $x>1$ فإن $f'>0$ وبالتالي C_f فوق C_g

ثالثاً:

1- ليكن x_0 من $]0,+\infty[$

معادلة المماس T للمنحني C_f في x_0 :

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$=xf'(x_0)-x_0f'(x_0)+f(x_0)\quad ...(1)$$
$$f(x_0)-g(x_0)=xf'(x_0)$$

حسب ما سبق

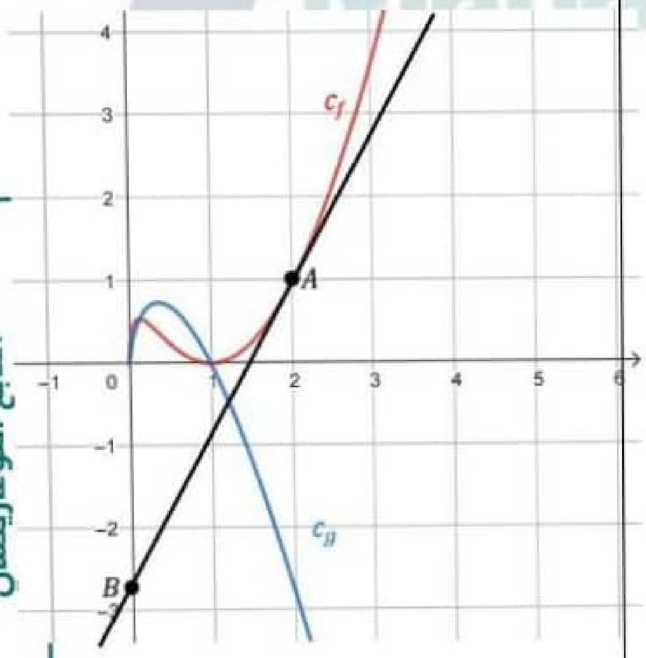
ومنه $f(x_0)-xf'(x_0)=g(x_0)$

نعوض في (1) فنجد : $y=xf'(x_0)+g(x_0)$

2- التقاطع: $x=0\Rightarrow y_0=g(x_0)=-2x_0\ln x_0$

حيث $x_0>0$ وبالتالي المماس T يقطع محور التراتيب بالنقطة $(0,-2x_0\ln x_0)$ ..

يتم إنشاء المماس T برسم مستقيم يمر من النقطتين $(0,-2x_0\ln x_0)$ و $(x_0,x_0(\ln x_0)^2)$



التمرين الثاني عشر: دورة 2017 الأولى

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ واستنتج معادلة المقارب الأفقي والشاقولي

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم بها جدولاً ثم دل على القيمة الحدية

3- جد معادلة المماس Δ في النقطة A من الخط C التس فاصلتها $x=0$

4- ارسم كل مقارب وجدته ، وارسم المماس Δ ثم ارسم C

5- احسب مساحة السطح المحور بين C والمحور $x'x$ والمستقيم الذي معادلته $x=e$

الحل:

-1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x}\right)=0$

المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\times\ln x\right)=-\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب شاقولي للخط C

-2 التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x^2)-2x(\ln x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

المقام موجب تماماً على مجموعة التعريف فإشارة المشتق تماثل اشارة البسط:

ينعدم المشتق عندما $1-2\ln x=0$ ومنه $\ln x=\frac{1}{2}$

وبالتالي $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ حيث $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$h(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h'(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

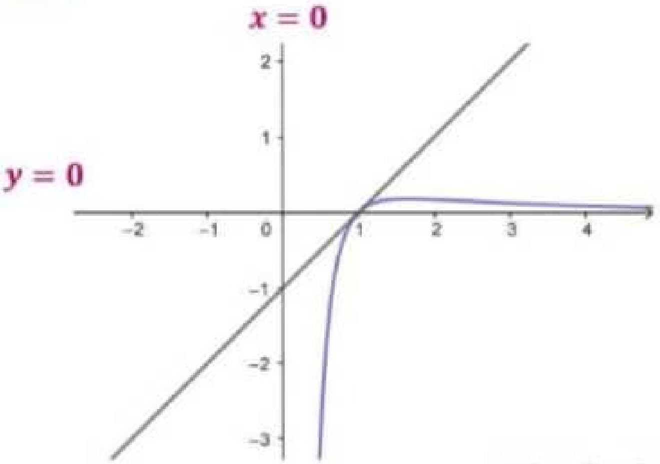
-3 لدينا $x=1 \Leftarrow f(1)=0\,, m=f'(1)=1$

صيغة معادلة المماس $y=f'(1)(x-1)+f(x)$:

$$y=f(1)+f'(1)(x-1)$$

إذن معادلة المماس Δ هي: $y=x-1$

-4 **الرسم:** $(0,-1)$ نقطة مساعدة لرسم المماس:



-5 **المساحة:**

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$$

$$u(x)=\ln x \quad , \quad u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$v'(x)=\frac{1}{x^2} \quad , \quad v(x)=-\frac{1}{x}$$

$$S=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e+\left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^e=\left[-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x^2}\right]_1^e$$

$$S=\left(-\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)-(0-1)=1-\frac{2}{e}=1-\frac{e-1}{e^2}$$

التمرين الثالث عشر : دورة 2017 الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)=x+x(\ln x)^2$ وليكن: $g(x)=(\ln(x)+1)^2$ والمطلوب:

1- أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$

2- أثبت أن $f'(x)=g(x)$

3- حل المعادلة $g(x)=0$

4- نظم جدول تغيرات f

5- اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x=\frac{1}{e}$ وارسم المماس Δ وارسم C

الحل:

-1 $f(x)=x+\left(\sqrt{x}\right)^2\left[\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right]^2$

$$f(x)=x+\left[2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}^2\right]^2$$

بما أن $\lim\limits_{u\to 0}(u\ln u)=0$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)=$ فإن :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0+0=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

-2 التابع f معرف واشتقاقي على $I=]0+\infty[$

$$f'(x)=1+(\ln x)^2+2\ln x\times\frac{1}{x}\times x$$

$$=(\ln x)^2+2\ln x+1=(\ln(x)+1)^2=g(x)$$

التابع اللوغاريتمي

-3 $g(x)=0$ ومنه $\ln x=-1$ وبالتالي :

$$x=e^{-1}\Rightarrow x=\frac{1}{e}$$

-4 $f'(x)=0$ يقتضي $g(x)=0$ ومنه $x=\frac{1}{e}$ وبالتالي:

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{2}{e}\right)$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f'(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

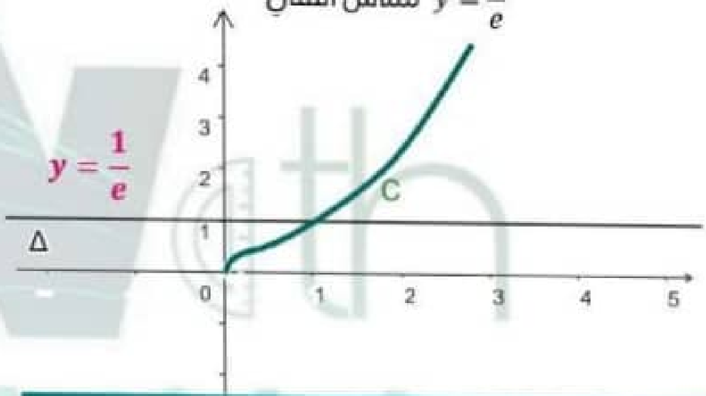
-5 من الجدول $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}$ و $m=f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$

ومنه $(0,0)$ نقطة مقاربة

معادلة المماس : $y=f\left(\frac{1}{e}\right)+f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right)$

$$y=y_0+m(x-x_0)$$

$y=\frac{2}{e}$ مماس أفقي



التمرين الرابع عشر: دورة 2018 الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق :

$f(x)=x^2-\ln x$ والمطلوب:

-1 جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

-2 ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بهت

-3 اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x=1$

-4 في معلم متجانس ارسم المماس T والخط البياني C

-5 احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$, $x=e$

-6 نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث: $u_n=n^2-\ln(n)$ أثبت أن المتتالية متزايدة

الحل:

-1 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب شاقولي للخط C

(لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\infty+\infty-$)

$$f(x)=x^2-\ln(x)=x^2\left(1-\frac{\ln x}{x^2}\right)$$
$$=x^2\left(1-\frac{1}{x}\,\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

حيث $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\right)$

-2 التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$$
$$f'(x)=0\ \to\ 2x^2-1=0\ \to\ x^2=\frac{1}{2}$$

إما: $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\notin\ ]0,+\infty[$ مرفوض

أو: $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cong 0.7$

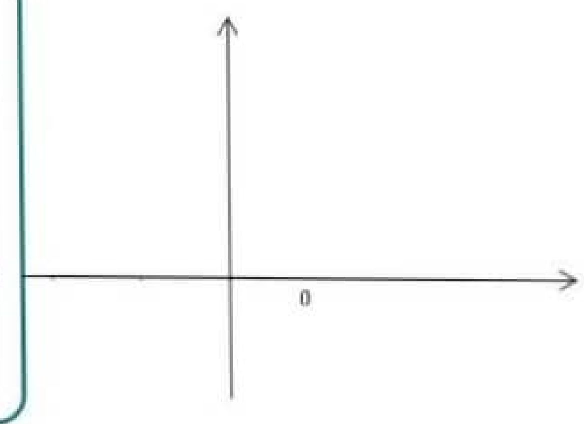
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}-(\ln 1-\ln\sqrt{2})$$
$$=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}\cong 0.8$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$h(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h'(x)$	‖	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

-3 $f(x)=x^2-\ln x\ \to\ f(1)=1^2-\ln 1=1$

$$f'(x)=\frac{2x^2-1}{x}\to f'(1)=\frac{2(1)-1}{1}=1$$
$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$y=1(x-1)+1\ \to\ y=x$$

-4 **الرسم البياني:** لرسم المماس هو منصف للربع الأول والثالث أو نرسمه عن طريق الجدول .



-5 حساب المساحة:

$$S=\int_1^e f(x)dx \;=\; \int_1^e (x^2-\ln x)dx$$

$$S=\int_1^e x^2dx-\int_1^e \ln x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e-\int_1^e \ln x\,dx$$

$$I=\int_a^b (u.v')=[u.v]_a^b-\int_a^b (u'.v)$$

$$u=\ln x \quad \to \quad u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$v'=1 \quad \to \quad v(x)=x$$

$$I=[x\ln x]_1^e-\int_1^e 1dx=[x\ln x]_1^e-[x]_1^e$$

$$=[x\ln x-x]_1^e=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)=1$$

$$S=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e-1=\left(\frac{e^3}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)-1=\frac{e^3-1-3}{3}$$

$$S=\frac{e^3-4}{3}$$

-6 نلاحظ أن $u_n=f(n)$ حيث : $f(x)=x^2-\ln x$ ومن جدول التغيرات نلاحظ أن التابع f مستمر ومتزايد على $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$ فهو متزايد على $[1,+\infty[$ وبالتالي فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

التمرين الخامس عشر: دورة 2019 الأولى

ليكن التابع f المعرف على $]e^1,+\infty[$ وفق العلاقة:

$$f(x)=\frac{2+\ln x}{1+\ln x}$$

-1 جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعط عدداً حقيقياً A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]0.9,1.1[$

-2 احسب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

الحل:

-1 حالة عدم تعيين من الشكل $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{+\infty}{+\infty}$ 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x.\left(\frac{2}{\ln x}+1\right)}{\ln x\,.\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{\ln x}+1\right)}{\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}=1$$

$$|f(x)-1|<0.1 \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{2+\ln x}{1+\ln x}-1\right|<0.1$$

نوحد المقامات داخل القيمة المطلقة :

$$\Rightarrow\left|\frac{1}{1+\ln x}\right|<0.1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{1+\ln x}<\frac{1}{10}$$

$$1+\ln x>10 \quad\Rightarrow \ln x>9 \quad\Rightarrow \boxed{x>e^9}$$

-2 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(f(x))=\lim_{x\to 1} f(x)=$ 2

التمرين السادس عشر: دورة 2019 الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}$$

-1 عين العددين الحقيقين a و b إذا علمت أن المماس للخط البياني C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم الذي معادلته $y=3x$

-2 من أجل $a=4$ و $b=-4$ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=4x-4$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

الحل:

-1 المماس يوازي المستقيم فلهما نفس الميل إذاً : $f'(1)=3$.. لنوجد المشتق عند (1) :

$$f'(x)=a-\frac{(\ln x)'.x-(x)'.\ln x}{x^2}$$

$$=a-\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=a-\frac{1-\ln x}{x^2}$$

نقطة التماس (1,0) إذاً:

$$f'(1)=3 \;\to a-\frac{1-\ln 1}{(1)^2}=3 \;\to a-1=3$$

$$\Rightarrow \boxed{a=4}$$

$$f(1)=0\to \quad a(1)+b-\frac{\ln 1}{1}=0\to \quad a+b=0..(1)$$

نعوض قيمة $a=4$ في المعادلة (1) نجد أن $\boxed{b=-4}$

-2 $f(x)=4x-4-\frac{\ln x}{x}$

$$\to g(x)=\;f(x)-y_\Delta$$

$$=\left(4x-x-\frac{\ln x}{x}\right)-4x-4=-\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

لدراسة الوضع النسبي بين C و Δ ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y_\Delta=-\frac{\ln x}{x}$

عندما $x\in]0,1[$ يكون $\ln x<0 \Leftarrow g(x)>0$

$f(x)-y_\Delta>0$ يكون C فوق Δ

عندما $x\in]1,+\infty[$ يكون $\ln x>0 \Leftarrow g(x)<0$

$f(x)-y_\Delta<0$ يكون C تحت Δ

عند النقطة $(1,0)$ يكون $f(x)-y_\Delta=0$ أي C يقطع Δ .

التمرين السابع عشر: دورة 2020 الأولى

أثبت أن $\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ أيا كان $x > -1$

الحل:

$$\ln(x+1) < \sqrt{x+1} \Rightarrow \ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$$

ليكن التابع f المعرف والمستمر والاشتقاقي على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق العلاقة التالية:

$$f(x) = \ln(x+1) - \sqrt{x+1}$$

لنثبت أن: $f(x) < 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2-\sqrt{x+1}}{2(x+1)}$$

$$f'(x) = 0 \to \ 2 - \sqrt{x+1} = 0$$

$$\to \ \sqrt{x+1} = 2 \ \Rightarrow x+1 = 4 \ \to \boxed{x = 3}$$

$$f(3) = \ln 4 - 2$$

x	-1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$\ln(4) - 2$	↘	

ومن جدول الاطراد نلاحظ أن $f(x) < 0$ وذلك مهما تكن $x \in I$ أي $\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$

ومنه $\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ محققة أياً كان $x > -1$

التمرين الثامن عشر: دورة 2020 الأولى

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-2, 2[$ وفق $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$ والمطلوب:

1- أثبت أن f تابع فردي

2- ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0, 2[$

3- اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x = 0.1$

4- في معلم متجانس ارسم الخط البياني C

5- استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x) = \ln(2-x) - \ln(x+2)$ على المجال $]-2, 2[$

الحل:

1- **الشرط الأول:** $\forall x \in]-2,2[$

محقق $\Rightarrow -x \in]-2,2[$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+2}{2+x}\right) = -\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right) = -f(x)$$

أي التابع f فردي

2- التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $[0,2[$

$$f(0) = \ln(1) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$$

أي $x = 2$ مقارب شاقولي للخط البياني C

$$f'(x) = \frac{\frac{(1)(2-x) - (-1)(x+2)}{(2-x)^2}}{\left(\frac{x+2}{2-x}\right)}$$

$$= \frac{2-x+x+2}{(2-x)^2} \times \frac{2-x}{x+2}$$

$$= \frac{4}{(2-x)(2+x)} > 0$$

x	0		2
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$+\infty$

3- معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$

$$f(0) = 0 \quad , \quad f'(0) = 1$$

$$T: \ y = f'(0)(x-0) + f(0) = (1)(x-0) + (0)$$

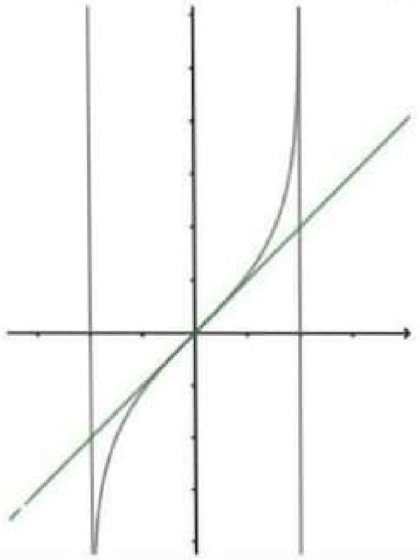
$$T: \ y = x$$

$$a = 0 \ , \ h = 0.1$$

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$

$$f(0+0.1) \approx f(0) + (0.1)f'(0) \to \ f(0.1) \approx 0.1$$

4- الرسم:



-5 $g(x) = \ln(2-x) - \ln(x+2) = \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right)$

$= -\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right) \Rightarrow g(x) = -f(x)$

C' نظير C بالنسبة لمحور الفواصل أو $g(x) = f(-x)$

و C' نظير C بالنسبة لمحور التراتيب

التمرين التاسع عشر: دورة 2020 الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$

وفق :

$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ والمطلوب:

-1 احسب نهايات التابع f عن أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي

-2 ادرس تغيرات التابع f ونظم بها جدولاً

-3 أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$

-4 في معلم متجانس ارسم الخط C

-5 استنتج C_f رسم الخط البياني للتابع:

$$g(x) = \frac{1 - x + \ln x}{x}$$

الحل:

-1 $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

فيكون $x = 0$ مقارب شاقولي

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

فيكون $y = 0$ مقارب أفقي

-2 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1-\ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow f(1) = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

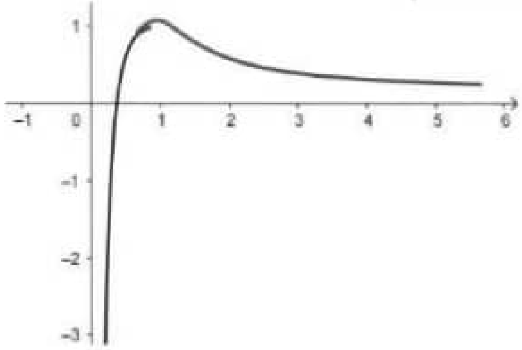
-3 التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln 2 > 0 \ , f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 - 3\ln 3 < 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) \times f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيدا في المجال $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$

-4 الرسم:



-5 $g(x) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} = f(x) - 1$

c' هو انسحاب للخط C بمقدار واحد للأسفل

التمرين العشرون: دورة 2021 الأولى

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$

وفق : $f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

-1 أثبت أن f تابع متزايد تماماً على $I =]0, +\infty[$ واستنتج $f(I)$

-2 أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب للخط C في جوار ال $+\infty$

-3 ادرس الوضع النسبي بين الخط C المستقيم d

الحل:

1) إن f تابع اشتقاقي على $I =]0, +\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = 1 + \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x}{x+1}\right)} = 1 + \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x}{x+1}\right)} = 1 + \frac{1}{x(x+1)} > 0$$

$: x \in]0, +\infty[$

أي أن f تابع متزايد تماماً على $I =]0, +\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = -\infty$

وذلك لأن :

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 \ , \ \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = +\infty$

وذلك لأن : $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x}{x+1}\right) = 0$

$f(I) =]\lim_{x\to 0^+} f(x) \ , \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[$

2) $f(x) - y_\Delta = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - (x - 4)$

$= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)-y_\Delta=\lim_{x\to0^+}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=\ln 1=0$$

أي أن المستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

3) ندرس إشارة $f(x)-y_\Delta=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

أياً كان $x\in I=]0,+\infty[$ فإن:

$$0<x<x+1$$
$$\to\frac{x}{x+1}<1$$
$$\to\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)<0$$
$$f(x)-y_\Delta=0$$

وبالتالي C تحت d

التمرين الواحد والعشرون: دورة 2021 الأولى

ليكن f تابعاً معرفاً على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-\ln x} & : x>0\\ 0 & : x=0\end{cases}$$

والمطلوب:

1- أثبت أن f مستمر عند الصفر

2- ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر وفسر النتيجة التي حصلت عليها هندسياً

3- بين أن الخط البياني C للتابع f يقبل مقارباً أفقياً عند $+\infty$ جد معادلته

4- اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها (1) واستعمل التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

الحل:

-1 $\lim_{x\to0} f(x)=\frac{0}{\infty}=0=f(0)$

f مستمر عند الصفر

-2 $T(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x}{x-\ln x}-0}{x-0}=\frac{x}{x(x-\ln x)}$

$$T(x)=\frac{1}{x-\ln x}$$
$$\lim_{x\to0} T(x)=\frac{1}{\infty}=0=f(0)$$

f اشتقاقي عند الصفر ويقبل عندها مماساً أفقياً معادلته $y=0$

-3 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}=1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

$y=1$ مقارب أفقي لـ C_f في جوار $+\infty$

حيث $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

-4 $x=1\ \to\ f(1)=1$

$(1,1)$ نقطة تماس

$$m=f'(1)$$
$$f'(x)=\frac{x-\ln x-\left(1-\frac{1}{x}\right)x}{(x-\ln x)^2}=\frac{x-\ln x-x+1}{(x-\ln x)^2}$$
$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$
$$f'(1)=\frac{1-0}{(1-0)^2}=1=m$$
$$y-y_0=m(x-x_0)$$
$$y-1=1(x-1)\ \to\ \boxed{y=x}$$

حساب قيمة تقريبية لـ $f(1.1)$

$$x=1.1=a+h\quad : a=1\ ,h=0.1$$
$$f(1.1)=f(a+h)\approx f(a)+h.f'(a)$$
$$\approx f(1)+(0.1)f'(1)=1+0.1=1.1$$
$$\to f(1.1)=1.1$$

التمرين الثاني والعشرون: دورة 2022 الثانية

ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x)=\ln(2+\sin x)$$

والمطلوب:

1- احسب $g'(x)$ و $g'(0)$

2- استنتج $\lim_{x\to0}\frac{\ln(2+\sin x)-\ln(2)}{x}$

الحل:

-1 $g'(x)=\frac{\cos x}{2+\sin x}$

$$g'(0)=\frac{\cos(0)}{2+\sin(0)}=\frac{1}{2}$$

-2 $\frac{\ln(2+\sin x)-\ln(2)}{x-0}=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

بما أن g اشتقاقي عند $x=0$ فحسب قاعدة العدد المشتق تكون:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(2+\sin x)-\ln(2)}{x}=g'(0)=\frac{1}{2}$$

التمرين الثالث والعشرون: دورة 2022 الثانية

جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases}\ln(x)+\ln(y)=\ln(6)\\ \ln(x+y)=\ln(5)\end{cases}$$

الحل: شرط الحل $x>0\ ,\ y>0$

$$\begin{cases}\ln(x.y)=\ln(6)\\ \ln(x+y)=\ln 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x.y=6\\ x+y=5\end{cases}$$

إما $y=2\ ,\ x=3$

أو $y=3\ ,\ x=2$