ملحق الاشتقاق

قراءة خطوط بيانية وجداول تغيرات

اسئلة دورات

+

نماذج وزارية

+

نماذج خارجية

Math

Manal Alshrbaji

أ. منال الشربجي

0957474873

Manal Alsherbaji

قراءة جدول التغييرات

((السؤال الأول في الامتحان : 40 درجة))

أولاً: قراءة جدول التغيرات:

يتم إعطاء جدول تغيرات من الشكل:

x	مجموعة تعريف f – قيم x التي تعدم $f'(x)$
$f'(x)$	أصفار تحت القيم التي تعدم $f'(x)$ - (||) شلمونة قصيرة عند القيم التي يكون عندها f غير اشتقاقي – الإشارات
$f(x)$	النهايات والصور – أسهم تدل على الاطراد (||) شلمونة طويلة عند القيم التي تجعل f غير معرف .

وتطلب طلبات مما يأتي:

1. إيجاد مجموعة التعريف
2. إيجاد المستقر الفعلي
3. قابلية الاشتقاق وإيجاد مجال اشتقاقية التابع
4. إيجاد الصور والنهايات
5. القيم الحدية
6. المقاربات
7. المماسات
8. صورة مجال
9. حلول المعادلة $f(x) = c$
10. حلول المتراجحة
11. طلبات أخرى

آلية تحديد كل مما سبق:

1 مجموعة تعريف التابع D_f : نميز حالتين

((من سطر x))

الحالة الأولى: وجود قيم غير معرف عندها التابع (شلمونة طويلة) :

] أكبر قيمة في سطر x , أصغر قيمة في سطر x [$\in x$ / القيم التي يكون عندها (f غير معرف)

(ما عدا)

ثم نكتب ما سبق على شكل اجتماع مجالات .

الحالة الثانية : عدم وجود قيم غير معرف عندها التابع :

(أي لا يوجد شلمونة طويلة): عندئذٍ:

] أكبر قيمة في سطر x , أصغر قيمة في سطر x [$\in x$

ملاحظات:

1) القيم التي يكون فيها f غير معرف: هي القيم التي تقابل الشلمونة الطويلة .

2) نوع المجالات في الحالتين السابقتين تحدد كما يأتي:

مفتوح:
-1 عند $\pm\infty$
-2 عند القيم التي يكون فيها التابع غير معرف.

مغلق:
جميع الحالات ما عدا الحالتين التي يكون فيها مفتوح.

3) الشلمونة القصيرة توجد في سطر $f'(x)$ فقط أما الطويلة فتوجد في سطر $f'(x)$ و $f(x)$ معاً .

4) الشلمونة القصيرة: (الموجودة في $f'(x)$ فقط) لا تُحذف القيم من مجموعة التعريف .

ملحق الاشتقاق

تطبيقات:

تأمل جداول التغيرات الآتية ثم أوجد مجموعة تعريف تابع كل منهما:

1)

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	7	$\searrow$	4	$\nearrow$	6	$\nearrow$	10

2)

x	-2		0		3		5		12
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	2

3)

x	0		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	2	$-$	$\parallel$	$+$	
$f(x)$	$\parallel -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	4	$\searrow$	$-\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	7

الحل:

$1)\ \ x \in]-\infty , +\infty[$

(ما في شلمونات ⇐ من أصغر قيمة في سطر x لأكبر قيمة في سطر x)

$2)\ \ D_f \in [-2 , 12\ ]\ / \{5\}$

$\Rightarrow x \in [-2 , 5\ [\ \cup\ ]5, 12\ ]$

ملاحظات للجدول الثاني:

- في شلمونة **طويلة** عند الـ 5 (فنحذفها من مجال التعريف)
- عند 3 (**الشلمونة قصيرة**) أي f معرف عند 3 (لا نحذفها من مجال التعريف) .
- بما أن -2 و 12 (ما في عندهن شلمونات طويلة) فهما تنتميان لمجموعة التعريف .
- الـ 0 ما عنده شلمونة طويلة ⇐ لا نحذفه من مجموعة التعريف .

$3)\ \ x \in]0, -3\ [\ \cup] -3,3[\ \cup]3, +\infty[$

ملاحظات للجدول الثالث:

⇦ حذفنا $3\ , -3\ , 0$ لأن جميعها لا تنتمي لمجموعة التعريف وفتحنا عندها المجالات .

⇦ الـ 1 لم نحذفها لأنها تنتمي لمجموعة التعريف .

2 إيجاد المستقر الفعلي

اتجاه المستقر الفعلي $f(D_f)$ (صورة مجموعة التعريف) ... يتم تحديده من سطر $f(x)$

المستقر الفعلي : هو قيم الدالة , أي ما هي القيم التي تأخذها الـ y $(f(x))$ عندما يكون لـ x قيم .

" تم شرحها بشكل مفصّل في دراسة التغيرات "

المستقر الفعلي

إذا وجد شلمونة طويلة أي (شلمونة في سطر $f(x)$)	إذا لم يوجد شلمونة طويلة أي (شلمونة في سطر $f(x)$)
الحل: نقوم بتصوير مجموعة التعريف على شكل اجتماع مجالات	**الحل:** نأخذ من سطر $f(x)$ من أصغر قيمة إلى أكبر قيمة

3 قابلية الاشتقاق وإيجاد مجال اشتقاقية التابع

⇦ وجود شلمونة قصيرة أو طويلة في سطر $f'(x)$ تعني أن f غير قابل للاشتقاق عند القيمة المقابلة للشلمونة الموجودة في سطر x .

⇦ **والتعليل يكون :** في حال وجود شلمونة قصيرة تحت a (العدد المطلوب دراسة الاشتقاق عنده):

لأنه يقبل مماساً شاقولياً

⇦ في حال وجود عددين يمين ويسار الشلمونة

فالتعليل: لأن النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار أو: لأنه يقبل معادلتي نصفي مماس .

⇦ أما وجود 0 أو إشارة في سطر $f'(x)$ مقابل لأي قيمة موجودة في سطر x ولتكن: a

⇐ f اشتقاقي عند a .

ملحق الاشتقاق

مجال اشتقاقية التابع

نجزأ أسطر x إلى مجالات بحيث نحذف منه القيم التي يكون عندا التابع غير اشتقاقي (أي نفتح المجالات عندها).

تمرين:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$			‖		0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2 ‖ $+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	4

هل التابع f اشتقاقي عند 1 ؟

هل التابع f اشتقاقي عند 3 ؟

هل التابع f اشتقاقي عند 0 ؟

مجال اشتقاقية التابع:

التابع اشتقاقي على كل من المجالات:

$]-\infty,-1[\,,\,]-1,3[\,,\,]3,+\infty[$

4 إيجاد الصور والنهايات

نقوم بتحديد :

1- x 2- صورتها أو نهايتها .

وفق الآتي:

- **من سطر x :** يتم تحديد قيمة x (أو القيمة التي تسعى إليها x)
- **من سطر $f(x)$:** صورة x المقابلة لها (أو نهايتها)

تمرين: تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	5	↘	$-\infty$

1) أوجد مجموعة تعريف التابع

2) أوجد المستقر الفعلي

3) أوجد النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف

4) أوجد $f(3), f(-1)$

الحل:

1) $D_f=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

2)
$$f(D_f)=f(]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[)$$
$$=f(]-\infty,-2[)\cup f(]-2,+\infty[)$$
$$=]-\infty,4[\cup]-\infty,+\infty[=]-\infty,+\infty[$$

3)
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=4$$
$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

4)
$$f(-1)=3$$
$$f(3)=5$$

5 القيم الحدية

إذا غير المشتق إشارته من $+ \rightleftarrows -$ عندئذ يوجد قيمة حدية بحيث يكون لها إحدى الأشكال الآتية:

❖ أشكال القيم الحدية الكبرى والصغرى:

الحالة الأولى: f' ينعدم ويغير إشارته عند x_0 الموافقة للقيم الحدية وهنا يكون C الخط البياني للتابع يقبل مماساً عند x_0

1- التابع ليس اشتقاقياً عند x_0 :

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	‖	$-$
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

$f(x_0)$ قيمة كبرى محلياً

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗

$f(x_0)$ قيمة صغرى محلياً

2- التابع اشتقاقياً عند x_0 :

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

$f(x_0)$ قيمة كبرى محلياً

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗

$f(x_0)$ قيمة صغرى محلياً

ملحق الاشتقاق

الحالة الثانية: تشمل صورة الطرف المغلق لمجموعة التعريف سواء كان f اشتقاقي عند x_0 أو غير اشتقاقي

1- **القيمة الكبرى والصغرى محلياً (الطرفية):**

x	x_0	
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	$f(x_0)$	↗

$f(x_0)$ **قيمة صغرى محلياً**

x	x_0	
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	$f(x_0)$	↘

$f(x_0)$ **قيمة كبرى محلياً**

x		x_0
$f'(x)$	$+$	‖
$f(x)$	↗	$f(x_0)$

قيمة حدية كبرى محلياً

x		x_0
$f'(x)$	$-$	‖
$f(x)$	↘	$f(x_0)$

قيمة حدية صغرى محلياً

عند قيم عدم التعريف لا يوجد قيم حدية ((عند الشلمونات الطويلة))
وفي جميع الحالات صحيحة إذا كان اشتقاقي عند x_0

إذا طلب التحقق من $f(a) = b$ قيمة حدية: في حال لم تكن حدية يكون التعليل لأن المشتق لم يغير إشارته.

تمارين:

تمرين (1): تأمل جدول التغيرات الآتي وحدد القيم الحدية محلياً :

x	-1		3		5
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	2	↗	4	↘	1

تمرين (2): تأمل جدول التغيرات الآتي وحدد القيم الحدية محلياً :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-3	↗	$-\infty$

تمرين (3): تأمل جدول التغيرات الآتي وحدد القيم الحدية محلياً :

x	3		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ 4	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

الحل:

تمرين (1): قيمة حدية صغرى $f(5) = 1$

قيمة حدية كبرى $f(3) = 4$

قيمة حدية صغرى $f(-1) = 2$

تمرين (2): قيمة كبرى محلياً: $f(1) = 2$

قيمة صغرى محلياً: $f(4) = -3$

تمرين (3): لا توجد قيمة حدية لأن المشتق لم يغير إشارته.

6 تحديد المقاربات (الشاقولي والأفقي والمائل)

نميز أربع حالات:

الحالة الأولى :
لا يوجد مقاربات
إذا كان عدد في سطر x ويقابله عدد في سطر $f(x)$

الحالة الثانية :
وجود مقارب شاقولي
ويتحقق ذلك إذا وُجِدَ في سطر x عدد وليكن a ويقابله $\pm\infty$ في سطر $f(x)$ .. و عندها يكون المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب شاقولي نحو $oy^{\mp}$

الحالة الثالثة :
وجود مقارب أفقي
ويتحقق ذلك إذا وُجِدَ: في سطر x : $\pm\infty$ ويقابله عدد وليكن b في سطر $f(x)$ وعندها يكون المستقيم الذي معادلته: $y = b$ مقارب أفقي في جوار $\pm\infty$.

الحالة الرابعة :
وجود مقارب مائل

ملحق الاشتقاق

وهنا يتم السؤال : هل يوجد مقارب مائل للخط البياني في جوار $\pm\infty$ مع التعليل (دون طلب معادلته) ؟

يجب أن تتوفر لدينا حالة $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ **مع التأكيد إلى أن:**

- إن وجود مقارب أفقي في جوار $+\infty$ يعني لا يوجد مقارب مائل في جوار $+\infty$.
- إن وجود مقارب أفقي في جوار $-\infty$ يعني لا يوجد مقارب مائل في جوار $-\infty$.
- إن عدم وجود مقارب أفقي في جوار $+\infty$ يعني **إمكانية** وجود مقارب مائل في جوار $+\infty$
- إن عدم وجود مقارب أفقي في جوار $-\infty$ يعني **إمكانية** وجود مقارب مائل في جوار $-\infty$

((أي لا يمكن أن يجتمع مقارب أفقي ومقارب مائل معاً في نفس الجوار))

تمرين: تأمل الجدول الآتي:

x	$-\infty$	-2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow 5$	

1) أوجد مجموعة تعريف التابع
2) أوجد النهايات عند الأطراف المفتوحة واكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي أوجدته.
3) هل يوجد مقارب مائل في جوار $-\infty$ علل إجابتك ؟

الحل:

1) $D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 3[\cup]3, +\infty[$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$

$y = 5$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$.

$\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$

$x = -2$ مقارب شاقولي نحو oy^+

$\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$

$x = -2$ مقارب شاقولي نحو oy^+

$\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$

$x = 3$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$\lim_{x\to3^+} f(x) = -\infty$

$x = 3$ مقارب شاقولي نحو oy^-

3) لا يوجد مقارب مائل في جوار $-\infty$ بسبب وجود المقارب الأفقي في جوار $-\infty$.

7 تحديد المماسات وكتابة معادلتها

تتواجد المماسات فقط عند القيم المعرف عندها التابع ((يلي ما عندها شلمونة طويلة))

القيم يلي عندها شلمونة طويلة لا يوجد عندها مماسات.

ونعلم أنه لكتابة معادلة مماس نحتاج نقطة وميل:

1) **تحديد النقطة:** ولتكن (x_0, y_0)

الفواصل: x_0
من سطر x

التراتيب: y_0
من سطر $f(x)$

2) **تحديد الميل:**

الحالة الأولى: عند القيم التي يكون عندها المشتق معدوم أي: $f'(x) = 0$
نعلم أن: $m = f'(x_0)$
الميل معدوم ⇐ يوجد مماس أفقي معادلته:
$y = y_0$
y_0 : العدد المقابل لـ x_0 (الموجود تحت الصفر).

الحالة الثانية: في حال وجود عدد a في حقل $f'(x)$ (مختلف عن الصفر) إذاً يوجد مماس ميله هذا العدد
نقطة التماس: العدد الذي فوق a (الموجود في حقل x)
فاصلة الميل: العدد الذي تحت a (الموجود في حقل $f(x)$).

الحالة الثالثة: عند القيم التي يكون عندها التابع غير اشتقاقي: (أي عند وجود شلمونة قصيرة) وهنا يوجد مماس شاقولي معادلته: $x = x_0$
x_0 : العدد الموجود فوق الشلمونة.

اشتقاق

بالمشتق : فوق الشلمونة القصيرة شاقولي تحت الصفر أفقي.

ملاحظة هامة: في حال طُلِبَ معادلة نصف المماس في نقطة فاصلتها a :

1) نكتب المعادلة بالشكل:

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

حيث: $m = f'(a)$, $x_0 = a$, $y_0 = f(a)$

2) $f(a)$: من سطر $f(x)$ وهو صورة a

$f'(a)$: من سطر $f'(x)$ وهو القيمة المقابلة لـ a

مع الانتباه :

إذا كان الطلب: نصف مماس من اليسار , نأخذ الأعداد التي على يسار الـ ‖ القصيرة

إذا كان الطلب: نصف مماس من اليمين , نأخذ الأعداد التي على يمين الـ ‖ القصيرة

تمرين: تأمل جدول التغيرات وأجب عن المطلوب:

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	4

اكتب معادلة كل مماس وجدته.

الحل:

$y = -1$
مماس أفقي

$x = -2$
مماس شاقولي

تمرين (2): اكتب معادلة نصف المماس من اليمين في نقطة فاصلتها $a = 3$ وهل f اشتقاقي عند 3

x	-2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		-1 ‖ $+1$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

الحل: $f'(3) = 1$, $f(3) = 0$

$$y = 1(x-3)+0$$
$$y = x-3$$

ليس اشتقاقي عند الـ 3 لأن النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار .

8 صورة مجال I

$f(I)$: تم شرحها بشكل مفصل في التغيرات .

9 حلول المعادلة $f(x) = c$ (مبرهنة القيمة الوسطى)

تم شرحها بشكل مفصل في التغيرات .

10 إيجاد حلول متراجحة

((إيجاد قيم x)) نأخذها من سطر (x) ونميز حالتين:

الحالة الأولى: إيجاد حلول متراجحات طرفها المشتق:

$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f'(x) \geq 0$	$f'(x) \leq 0$

- **في حال طُلِبَ:** 🙂 $f'(x) \geq 0$, $f'(x) > 0$ نحدد من سطر $f'(x)$ حالات التزايد [الأماكن التي يتواجد فيها إشارة الـ +] ثم نأخذ من سطر x قيم x المقابلة لها على شكل مجالات.
- **في حال طُلِبَ:** 🙂 $f'(x) \leq 0$, $f'(x) < 0$ نحدد من سطر $f'(x)$ حالات التناقص [الأماكن التي يتواجد فيها إشارة الـ −] ثم نأخذ من سطر x قيم x المقابلة لها على شكل مجالات .

نوع المجالات

- **عند** $\pm\infty$ المجالات طبعاً مفتوحة دوماً
- **عند القيم:** في حال وجود تساوي في المتراجحة نغلق المجالات عند القيم وفي حال عدم وجود تساوي نفتح المجالات عند القيم .

مع الانتباااه إلى أن: القيم التي يكون عندها التابع غير معرف (في شلمونة طويلة عندها) فالمجالات عندها تكون مفتوحة دوماً)

الحالة الثانية: إيجاد حلول متراجحة طرفها $f(x)$ **((وقد يطلب بصيغة دراسة إشارة f))** نختبر صحة المتراجحة من سطر $f(x)$ فرضاً: $f(x) > a$

نختبر متى تكون هذه المتراجحة محققة ونأخذ الجواب من سطر الـ x على شكل اجتماع مجالات .

وذلك عن طريق إضافة سطر جديد (مسودة) على الجدول وهو (**إشارة $f(x)$**) ونحدد متى تكون المتراجحة محققة ومتى لا تكون محققة **((إن طول المتراجحة المطلوبة تؤخذ من سطر x وهي المجالات التي تقابل المجالات المحقق عندها المتراجحة))**

تمرين (1): في جدول التغيرات المعطى جد إشارة $f(x)$

x	$-\infty$	5		α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$		
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$		$-\infty \nearrow$	0	$+\infty$
إشارة $f(x)$	$\overset{+}{f(x)} > 0$		$\overset{-}{f(x)} < 0$		$\overset{+}{f(x)} > 0$

الحل: دراسة إشارة تابع تعتمد على قيم التابع الموجودة في السطر الثالث لجدول التغيرات وليس له علاقة بإطراد التابع .

نلاحظ على المجال $]-\infty, 5[$ قيم التابع $]0, +\infty[$ و هذه القيم موجبة ومنه $f(x) > 0$,على المجال $]5, +\infty[$ قيم التابع $]-\infty, +\infty[$ لا يمكننا تحديد إشارة $f(x)$ لأن قيم التابع تحوي صفر لا بد من إظهاره ومنه نجزء المجال إلى جزئين على المجال من $]5, \alpha[$ يكون $f(x) < 0$ على المجال من $]\alpha, +\infty[$ يكون $f(x) > 0$.

تمرين(2): تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

1) أوجد حلول المتراجحات

❶ $f(x) > 0$, ❷ $f(x) \leq 0$, ❸ $f(x) < 0$

الحل:

x	-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
إشارة $f(x)$		$f(x) > 0$		$f(x) > 0$	

1. إذاً أياً كانت $x \in]-3, +\infty[$ فإن $f(x) \geq 0$
2. $x \in]-3, +\infty[$
3. $S = \Phi$
4. $S = \Phi$

تمرين (3): ليكن التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 8$$

ادرس إطراد f واستنتج إشارة f على R

الحل: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

f اشتقاقي على R حيث:

$$f'(x) = 4x - 8$$
$$f'(x) = 4x - 8 = 0 \to \ x = 2$$
$$f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 8$$
$$f(2) = 8 - 16 + 8 = 0$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
إشارة $f(x)$		$\overset{+}{f(x)} \geq 0$		$\overset{+}{f(x)} \geq 0$	

إذاً منه: $f(x) \geq 0$ أياً كان $x \in R$

"يبقى الطريق هو الطريق
وإنما تتفاوت الأقدام في الإقدام"

ملحق الاشتقاق

قد يطلب الطلب السابق بطريقة مخفية على شكل:

11	إيجاد مجموعة تعريف تابع مكتوب بدلالة $f'(x)$ أو $f(x)$

1) إيجاد مجموعة تعريف التابع $g(x)$:

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$

مجموعة تعريف التابع الجذري: ما تحت الجذر موجب تماماً..

أي المطلوب هنا إيجاد حلول المتراجحة:

$$f(x) \geq 0$$

ثم نكمل كما في طلب (10) الحالة الثانية.

2) مجموعة تعريف التابع $g(x)$:

$$g(x) = \ln(f(x))$$

نعلم أن مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي: أن يكون مضمونه أكبر تماماً من الصفر..

أي المطلوب هنا حل المتراجحة $f(x) > 0$ ثم نكمل كما في طلب (10) الحالة الثانية.

3) إيجاد مجموعة تعريف التابع $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$$\Rightarrow D_g = R \backslash \{S\}$$

حيث S هي القيم التي تعدم المقام وهي حل المعادلة: $f(x) = 0$ ثم نكمل كما في طلب (10)

4) إيجاد مجموعة تعريف التابع $g(x)$:

$$g(x) = e^{f(x)}$$

نعلم أن مجموعة تعريف التابع الأسي هي مجموعة تعريف الأس.

هنا تكون مجموعة تعريف $g(x)$ نفسها مجموعة تعريف $f(x)$ أي: $D_g = D_f$

تمرين: تأمل الجدول:

x	$-\infty$	-2		0		4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-1	↘ -5

1. أوجد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$
2. أوجد حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$
3. أوجد مجموعة تعريف كل من التوابع:

$A)\ g(x) = \sqrt{f(x)}$

$B)\ h(x) = \ln(f(x))$

$C)\ K(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

$D)\ L(x) = e^{f(x)}$

الحل:

1. حلول المتراجحة $f'(x) > 0$ هي :
$x \in]0,4[$

2.

x	$-\infty$ -2		0	4 $+\infty$	
$f'(x)$	$-$ 0	$-$	‖	$+$ 0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ -1	↘ -5
$f(x) \geq 0$	محققة 😊	غ. محققة ☹	‖	غ. محققة ☹	غ. محققة ☹

((لا تهمنا إشارة المشتق نهتم بالقيم الموجودة في $f(x)$ هل هي موجبة أم سالبة))

حلول المتراجحة: $f(x) \geq 0$

$$f(x) \in [0, +\infty[\Leftrightarrow f(I) =]-\infty, -2]$$

وهي حلول المتراجحة .

3. **مجموعة تعريف** $A)\ \sqrt{f(x)}$

تكافئ حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$

(وذلك لأن مجموعة تعريف التابع الجذري : ما تحت الجذر أكبر أو يساوي الصفر)

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \in [0, +\infty[$$
$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2]$$

مجموعة تعريف $B)\ \ln(f(x))$

تكافئ حلول المتراجحة $f(x) > 0$

(وذلك لأن مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي مضمونه أكبر تماماً من الصفر ومنه)

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \in]0, +\infty[$$
$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[$$

مجموعة تعريف $C)\ \frac{1}{f(x)}$

يكافئ: $R \setminus \{f(x) = 0\}$

(وذلك لأن مجموعة تعريف التابع الكسري R ما عدا القيم التي تعدم المقام)

$$x \in]-\infty, -2[\cup = -2,0[\cup]0, +\infty[$$

مجموعة تعريف $D)\ L(x) = e^{f(x)}$

مجموعة تعريف التابع الأسي هي نفسها مجموعة تعريف الأس

$$D_L(x) = D_{f(x)}$$
$$D_{f(x)} =]-\infty, +\infty[\ / \{0\}$$
$$D_{L(x)} =]-\infty, +\infty[\ / \{0\}$$
$$= \mathbb{R} \backslash \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

طلبات متفرّقة :

12 إيجاد $\lim_{x\to a} f(f(x))$

خطوات الحل:

أولاً: نوجد $\lim_{x\to a} f(x) = b$

نوجد $\lim_{x\to b} f(x) = c$ (حيث المسعى b هو جواب النهاية السابقة)

فيكون: $\lim_{x\to a} f(f(x)) = c$

تمرين (1):

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$	↗	3

1) $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(f(f(x)))$

الحل:

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

$\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = -\infty$

بما أن:

2) $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(f(x)) = 2$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(f(f(x))) = 2$

تمرين (2):

x	2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	7	↗	4

أوجد $\lim_{x\to 2} f(f(f(x)))$

الحل: لدينا: $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$

$\lim_{x\to 4} f(x) = 7$

$\lim_{x\to 2} f\left(f(f(x))\right) = 7$

13 إيجاد نهاية كسر

أولاً: من الشكل $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

تذكر: إن هذا الكسر المطلوبة نهايته هو العدد المشتق: $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

حيث: نحدد $f'(a)$ من السطر الثاني القيمة الموجودة تحت a .

انتبه:

- في هذه الحالة المسعى لعدد والبسط مؤلف من $f(x)$ و صورة العدد الذي تسعى له x .
- المقام مؤلف من x والعدد الذي تسعى له x

ثانياً: من الشكل $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

نميز حالتين: (انتبه المسعى إلى $+\infty$)

1) وجود مقارب أفقي عند $\pm\infty$ (أي $\pm\infty$ عند x وعدد عند الـ $f(x)$) عندئذٍ يكون:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

(لأن عدد على $+\infty$ يساوي 0)

2) عدم وجود مقارب أفقي عند $\pm\infty$: لا تُذكر في سؤال الجدول وتؤجل إلى الرسمة

((أي عندما يذكر هذا السؤال بهذا الشكل في الجدول يكون الجواب 0 دوماً))

تمرين: تأمل الجدول:

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$f'(x)$		-2	‖	$+2$	0		
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	5

أوجد:

1) $\lim_{\substack{x\to-5 \\ <}} \frac{f(x)}{x+5}$

2) $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-1}{x-4}$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

الحل: 1) لدينا $f(-5) = 0$

ونعلم أن:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\lim_{\substack{x\to-5 \\ <}} \frac{f(x)-f(-5)}{x-(-5)} = f'(-5)$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to-5 \\ <}} \frac{f(x)}{x+5} = -2$$

2) لدينا $f(4) = 1$ ونعلم أن:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-1}{x-4} = 0$$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

14 المقارنة بين $f(a)$ ، $f(b)$

⟪ سهل جداً ⟫

1) نحدد المجال الذي تنتمي إليه a,b وليكن I
2) نكتب $a<b$ أو $a>b$

أ- إذا كان التابع متزايد على I : نميز حالتين:
- ♣ إذا كان $a>b$ يكون $f(a)>f(b)$
- ♣ وإذا كان $a<b$ يكون $f(a)<f(b)$

ب- إذا كان التابع متناقص على I نميز حالتين:
- ♣ إذا كان $a>b$ يكون $f(a)<f(b)$
- ♣ إذا كان $a<b$ يكون: $f(a)>f(b)$

15 دراسة اطراد متتالية

إذا تم تعريف متتالية وطلب إطرادها :
- ♥ إذا كان التابع متناقص ⇐ المتتالية متناقصة أو متناقصة تماماً .
- ♥ إذا كان التابع متزايد ⇐ المتتالية متزايدة أو متزايدة تماماً .

تمرينات في قراءة جدول التغيرات

أسئلة دورات – نماذج وزارية – تمارين إضافية

⟪ سأقوم بإيراد بعض أسئلة الدورات كما وردت في سلم التصحيح تماماً ⟫.

❖ **التمرين الأول :** (دورة أولى 2022)

تأمل جانباً جدول تغيرات التابع f المعرّف على $R\backslash\{1\}$ خطه البياني C .

x	$-\infty$		1			2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+2$	↘	0	↗	

المطلوب :

1. جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C
3. ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟
4. ما هي حلول المتراجحة $f'(x)<0$ ؟

الحل :

الدرجة	الإجابة
5+5 5	$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$
5 5	معادلة المقارب الشاقولي $x=1$ معادلة المقارب الأفقي $y=2$
5	حلان
10	حلول المتراجحة $x\in]-\infty,1[\cup]1,2[$
40	**المجموع**

❖ **التمرين الثاني :** (دورة ثانية 2021)

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ خطه البياني C.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

المطلوب :

1) جد $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واكتب معادلة المقارب الأفقي
2) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟
3) ما دل على القيمة المحلية وبين نوعها
4) جد مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)>0$

الحل :

الدرجة	الإجابة
5+5	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$
5	المقارب الأفقي $y=0$
5	عدد حلول المعادلة : حل وحيد
5+5	القيمة الكبرى محلياً $f(1)=\frac{1}{e}$
10	مجموعة حلول المتراجحة المجال $]0,+1[$
40	المجموع

ملحق الاشتقاق

❖ التمرين الثالث : (دورة أولى 2019)

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرّف على R خطه البياني C.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

المطلوب :

1. جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C
3. دل على القيمة الحدّية الصغرى للتابع f
4. احسب $f(]-1,2[)$

الحل :

الرقم	الإجابة	الدرجة
1	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ أو فقط $(+\infty)$	8
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +3$ أو فقط $(+3)$	8
2	المقارب الأفقي $y = 3$	8
3	$f(-1) = -2$ أو فقط (-2)	8
4	$f(]-1,2[) =]2,4[$ أو فقط $(]2,4[)$	8+8
	المجموع	40

❖ التمرين الخامس : (النموذج الوزاري السادس 2017)

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرّف على $R\setminus\{-1,1\}$ خطه البياني C.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

المطلوب :

1. اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C
2. هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C ؟
3. هل يوجد للخط C مماسات أفقية ؟
4. أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$

قم بحله أولا قبل معرفة الإجابة

الحل :

1) $x = 1$ مقارب شاقولي نحو oy^+ من اليمين

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو oy^- من اليسار

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو oy^+ من اليمين

$y = 3$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

2) لا: من شروط وجود مقارب مائل $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

3) لا بسبب عدم وجود قيم حدية

4) f مستمر ومتناقص على $]-1,1[$

$0 \in f(]-1,1[) =]-\infty,+\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

❖ التمرين الرابع : (النموذج الوزاري الرابع)

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

المطلوب :

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟
2) ما عدد القيم الحدية محلياً
3) اكتب معادلة المماس في نقطة فاصلتها 1

الحل :

1. حل وحيد
2. قيمة واحدة

$f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى محلياً

3. $x = 1 \Rightarrow y = 1$

$f'(1) = 0$

مماس أفقي معادلته $y = 1$

ملحق الاشتقاق

❖ **التمرين الخامس :**

(النموذج الوزاري الأول 2020 مع تعديل)

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرّف على R

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	6

المطلوب :

1. **عين مجموعة تعريف التابع ثم حدد المستقر الفعلي**
2. **جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**
3. **اذكر قيمة حدية للتابع وبين نوعها**
4. **أوجد عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ و $f(x)-1=0$**
5. **أوجد حلول كل من المتراجحات : 1) $f'(x)\geq 0$**
   2) $f(x)>0$
6. **اكتب معادلة كل مماس أفقي للخط البياني**
7. **اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني**
8. **ادرس الوضع النسبي للخط البياني والمقارب $y=6$**
9. **هل $f(5)=4$ قيمة حدية للتابع $f(x)$ ؟**
10. **اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x)=\ln(f(x))$**

الحل :

1- مجموعة التعريف: $x\in]-\infty,+\infty[$

المستقر الفعلي: $f(D_f)=[0,6[$

2- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=6$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

3- $f(2)=0$ قيمة صغرى

4- يوجد للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد هو $x=2$

وللمعادلة $f(x)-1=0$ أي $f(x)=1$ حلان على D_f.

يوجد حل $1\in f(]-\infty,2[)=]0,2[$

يوجد حل $1\in f(]2,5[)=]2,4[$

$1\notin f(]5,+\infty[)=]4,6[$

5- *) $f'(x)\geq 0$

$x\in[2,+\infty[$

*) $f(x)>0$

$x\in]-\infty,+\infty[\setminus\{2\}$

$]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

6- المماس الأفقي الأول : $(y=0)$

المماس الأفقي الثاني : $(y=4)$

7- $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2}$

$(y=2)$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=6}$

$(y=6)$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

8- $g(x)=f(x)-y_\Delta$

$g(x)=f(x)-6$

نشكل سطر جديد بالجدول :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	6
$f(x)-6$	-4	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0

نلاحظ من السطر الأخير بالجدول : $g(x)<0$

الخط البياني تحت المقارب $(y_\Delta=6)$

شرح : دوماً المقارنة بالجدول لازم تكون مع الصفر وهاد السبب يلي خلانا ننشئ سطر جديد بالجدول لحتى نقدر نقارن قيموا مع الصفر مو مع (6)

9- $f(5)=4$ ليست قيمة حدية للتابع وذلك بسبب عدم تغير إشارة $f'(x)$

10- $g(x)=\ln(f(x))$

D_g : $f(x)>0$

$D_g=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

❖ **التمرين السادس :**

بفرض f تابع معرف على D وجدول تغيراته معطى كما يلي:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+4$

المطلوب :

1) **عين D_f و $D_{f'}$ و $f(D_f)$**
2) **أوجد $f(]0,1[)$**
3) **أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه**
4) **جد معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي**
5) **جد معادلة كل مماس أفقي**
6) **دل على كل قيمة حدية وبين نوعها**
7) **هل يقبل c_f مقارب مائل بجوار $+\infty$**
8) **احسب $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-2}{x+1}$**
9) **استنتج حلول المعادلة $f(x)=1$**
10) **ناقش بحسب قيم k حلول المعادلة $f(x)=k$**
11) **احسب $\lim\limits_{x\to+1} f(f(x))$**
12) **أوجد حلول المتراجحة $f'(x)>0$ ثم أوجد مجموعة تعريف التابع: $g(x)=\sqrt{f'(x)}$**
13) **ارسم الخط البياني c_f**

الحل :

1. $D_f = R \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$D_{f'} = R \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$f(D_f) =]-\infty, 2] \cup [-1, +\infty[$

$\Rightarrow f(D_f) =]-\infty, +\infty[$

2. $f(\,]0,1[\,) =]-1, +\infty[$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$

4. $x = 0$ مقارب شاقولي

$y = 4$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

5. $y = 2$ و $y = -1$

6. $f(-1) = 2$ قيمة كبرى محلياً

$f(1) = -1$ قيمة صغرى محلياً

7. ليس للخط c_f مقارب مائل بجوار $+\infty$ وذلك لوجود المقارب الأفقي $y = 4$

8. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{f(x)-2}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1) = 0$

9. f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty, -1[$

$1 \in f(\,]-\infty, -1[\,) =]-\infty, 2[$

ومنه للمعادلة $f(x) = 1$ حل وحيد ينتمي للمجال $]-\infty, -1[$

f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $[-1, 0[$

$1 \in f(\,[-1, 0[\,) =]-\infty, 2[$

ومنه للمعادلة $f(x) = 1$ حل وحيد ينتمي للمجال $[-1, 0[$

f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]0, 1]$

$1 \in f(\,]0, 1]\,) = [-1, +\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x) = 1$ حل وحيد ينتمي للمجال $]0, 1]$

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]1, +\infty[$

$1 \in f(\,]1, +\infty[\,) =]-1, 4[$

ومنه للمعادلة $f(x) = 1$ حل وحيد ينتمي للمجال $]1, +\infty[$

ومنه نجد أن للمعادلة $f(x) = 1$ أربع حلول في D_f

10. عندما $k \in]-\infty, -1[$ للمعادلة $f(x) = k$ حلين

عندما $k = -1$ للمعادلة ثلاث حلول

عندما $k \in]-1, 2[$ للمعادلة أربعة حلول

عندما $k = 2$ للمعادلة ثلاث حلول

عندما $k \in]2, 4[$ للمعادلة حلين

عندما $k \in [4, +\infty[$ للمعادلة حل وحيد

11. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to-1} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{t\to-1} f(x) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+1} f(f(x)) = 2$

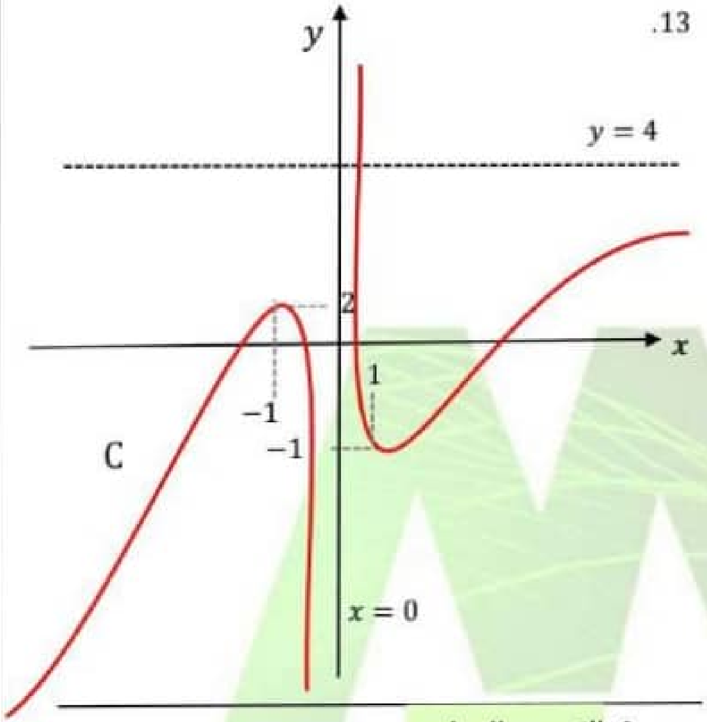
12. عندما $f'(x) > 0$:

$x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ (أي مجال التزايد)

مجموعة تعريف التابع g: $f'(x) \geq 0$ $\Leftarrow$

$x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

13.



❖ التمرين السابع :

ليكن لدينا الجدول الآتي :

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	3 ‖ -1	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	2

المطلوب :

1. عين D_f و $D_{f'}$ و $f(D_f)$
2. أوجد $f(\,]1,2[\,)$
3. أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه
4. أوجد المقاربات الأفقية و الشاقولية
5. أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]0,1[$
6. هل f اشتقاقي عند $x = 1$ ولماذا ؟
7. اكتب معادلة نصف المماس للتابع عند (1) من اليمين ومعادلة نصف المماس للتابع عند (1) من اليسار
8. هل يقبل الخط c مقارباً مائلاً عند $+\infty$ ولماذا ؟
9. هل يمكن رسم مماس أفقي للخط c في إحدى نقاطه ولماذا؟

ملحق الاشتقاق

10. أوجد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$
11. ما عدد حلول المعادلة $f(x) + 1 = 0$ ؟
12. هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أم صغرى للتابع .. علل ذلك
13. احسب $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-2}{x+1}$
14. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$
15. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{1}{x+2})$
16. ناقش بحسب قيم الوسيط الحقيقي k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$
17. ارسم ما وجدته من مستقيمات متقاربة للخط c ثم ارسم الخط c

الحل :

1) $D_f =]0,2[\cup]2,+\infty[$

$D_{f'} =]0,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$

$f(D_f) =]-\infty,1]\cup]2,+\infty[$

2) $f(\,]1,2[\,) =]-\infty,1[$

3) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

4) $x = 0$ مقارب شاقولي

$x = 2$ مقارب شاقولي

$y = 2$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

5) f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0,1[$

$0 \in f(\,]0,1[\,) =]-\infty,1[$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد ينتمي للمجال $]0,1[$

6) f غير اشتقاقي عند $x = 1$ لأن :

$f'(1^-) \neq f'(1^+)$

$3 \neq -1$

7) **معادلة نصف المماس من اليمين:**

$m = f'(1^+) = -1 \quad , y_0 = f(x_0) = f(1) = 1$

$y = f'(1^+)(x-1) + f(1)$

$\boldsymbol{y = m(x - x_0) + y_0}$

$y = -1(x-1) + 1$

$y = -x + 2$

معادلة نصف المماس من اليسار:

$m = f'(1^-) = 3 \quad , y_0 = f(x_0) = f(1) = 1$

$y = f'(1^-)(x-1) + f(1)$

$\boldsymbol{y = m(x - x_0) + y_0}$

$y = 3(x-1) + 1$

$y = 3x - 2$

8) لا يقبل لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

« أي بسبب وجود المقارب الأفقي »

9) لا يمكن رسم مماس أفقي للخط c في أي نقطة من نقاطه لأن ميل المماس الأفقي (0) والمشتق لا ينعدم في جدول التغيرات

10) $f'(x) < 0$ ((**متناقص**)) عندما :

$x \in]1,2[\cup]2,+\infty[$

11) $f(x) + 1 = 0$

$f(x) = -1$

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0,1[$

$1 \in f(\,]0,1[\,) =]-\infty,1[$

ومنه للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد ينتمي للمجال $]0,1[$

f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]1,2[$

$1 \in f(\,]1,2[\,) =]-\infty,1[$

ومنه للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد ينتمي للمجال $]1,2[$

f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]2,+\infty[$

$1 \notin f(\,]2,+\infty[\,) =]2,+\infty[$

ليس للمعادلة $f(x) = -1$ حلول في المجال $]2,+\infty[$

ومنه نجد أن للمعادلة $f(x) = -1$ حلان في D_f

12) $f(1) = 1$ قيمة كبرى محلياً لأن :

إذا أخذنا المجال المفتوح $I =]0,2[$

إن $1 \in]0,2[$ ومهما تكن $x \in I \cap D_f$ فإن $f(x) \leq f(1)$

وبالتالي فالقيمة $f(1)$ هي قيمة كبرى محلياً

13) $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-2}{x+1} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x+1} = f'(1^-) = 3$

14) إن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2^+$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty$

15) إن $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x+2}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x+2}\right) = -\infty$

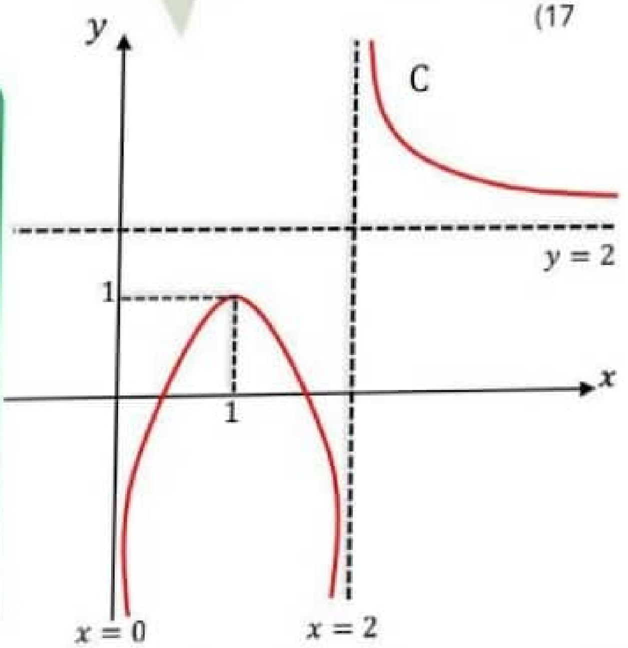
16) عندما $k \in]0,1[$ للمعادلة حلين مختلفين

عندما $k = 1$ للمعادلة حل وحيد

عندما $k \in]1,2]$ ليس للمعادلة حلول

عندما $k \in]2,+\infty[$ للمعادلة حل وحيد

17)



❖ **التمرين الثامن :**

لدينا جدول التغيرات التابع f

x	-1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert\ -4$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

المطلوب :

1. هل $f(-1)$ قيمة حدية ؟ علل ؟
2. هل $f(2)$ قيمة حدية ؟ علل ؟
3. أوجد معادلة نصف المماس من اليمين، ثم أوجد معادلة المماس الأفقي وادرس وضع C النسبي معه.
4. ما هي حلول المتراجحة $f(x) < 0$
5. أوجد مجموعة تعريف التابع $g(x) = \sqrt{f(x)}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
6. أوجد مجموعة تعريف التابع $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$
7. بفرض أن $f(0) = -1$ ارسم C الخط البياني للتابع f

وأن يتوّج مسعانا بالوصول.. اللهم آمين

الحل :

1. نعم $f(-1)$، قيمة حدية (صغرى محلياً) لأنه يوجد جوار مفتوح مثل $D_1 =]-\infty,2[$ يضم (-1) ويحقق الشرط مهما يكن
$$x \in D \cap D_1$$
$$f(x) \geq f(-1)$$
2. لا ليست قيمة حدية لأنه لا يغير إشارة المشتق
3. يملك C مماسات **(نصف مماس شاقولي)** في النقطة $(-1,-4)$ ومعادلته $x = -1$ لأن f غير اشتقاقي عند النقطة -1 من اليمين

C يملك مماس أفقي في النقطة $(2,0)$

ومعادلته $y = 0$ لأن $f'(2)$ يساوي الصفر

الوضع النسبي بين C والمماس $y = 0$ نشكل التابع $h(x)$

$$h(x) = f(x) - y_T = f(x) - 0 = 0$$

C تحت المماس في المجال $]-1,2[$

C فوق المماس في المجال $]2,+\infty[$

ونقطة التماس هي $(2,0)$

4. حلول المتراجحة $f(x) < 0$ هي $x \in]-1,2[$
5. $g(x)$ معرف عندما :
$$f(x) \geq 0$$
$$x \in [2,+\infty[$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

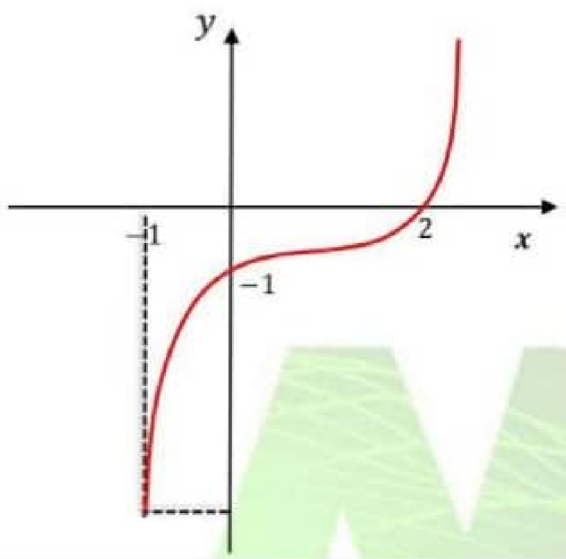
فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

.6

$h(x) = \frac{1}{f(x)}$ معرف عندما $f(x) \neq 0$

$$D_h = [-1,2[\cup]2,+\infty[$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

.7



❖ **التمرين التاسع**

ليكن لدينا الجدول الآتي :

x	0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$		$-$	-2	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$

المطلوب :

1. عين D_f و $D_{f'}$ و $f(D_f)$
2. احسب $f(1)$, $f(2)$, $f'(3)$
3. أو احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
4. أثبت أن $f(1)$ قيمة حدية
5. هل $f(3)$ قيمة حدية
6. هل f اشتقاقي عند $x = 1$
7. أوجد حل المتراجحة $f(x) < 0$ والمتراجحة $f(x) \geq 4$
8. اكتب معادلة المماس عند $x = 3$
9. هل التابع $f(x)$ تقابل ؟
10. ما حلول المعادلة $f(x) = 0$
11. أوجد مجموعة تعريف التابع g و h المعرفان وفق
$$g(x) = \ln(f(x))$$
$$h(x) = e^{f(x)}$$
12. قارن بين: ① $f(2.5)$ و $f(2.1)$ ② $f(0.7)$ و $f(0.3)$

ملحق الاشتقاق

الحل :

1) $D_f = [0, +\infty[$

$D_{f'} =]0, +\infty[\setminus \{1\}$

$f(D_f) =]-\infty, 3]$

2) $f(1) = 3$

$f(2) = 0$

$f'(3) = -2$

3) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

«لا يوجد مقارب أفقي ومن الممكن وجود مقارب مائل»

4) نأخذ مجال مفتوح يحوي $x = 1$ وليكن $I =]0,2[$

ونلاحظ أنه مهما تكن : $x \in I \cap D = [1,2[$

فإن $f(x) \leq f(1)$

ومنه $f(1) = 3$ قيمة كبرى محلياً

5) $f(3)$ ليست قيمة حدية لأن $f'(x) < 0$ ولا يغير إشارته على طرفي العدد $x = 3$

6) f غير اشتقاقي عند $x = 1$ لأن f' غير معروف عند $x = 1$

7) $f(x) < 0$ عندما $x \in]2, +\infty[$

وحلول المتراجحة $f'(x) \geq 4$ هي : $s = \emptyset$

---

8) $T: y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$T: y = -2(x-3) + (-5)$

$T: y = -2x + 1$

---

9) f مستمر ومتناقص تماماً على $D = [1, +\infty[$

وبالتالي فإن $f(x)$ تقابل

---

10) f مستمر ومتناقص تماماً على $[1, +\infty[$

$0 \in f([1, +\infty[) =]-\infty, 3]$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

---

11) $(*)$ $D_g: f(x) > 0$

$D_g =]1,2[$

$(*)$ $D_h = D_f = [0, +\infty[$

---

12) لدينا: 2.1 و $2.5 \in]2,3[$ ①

وبما أنّ هنا المجال متناقص و $2.1 < 2.5$

إذاً: $f(2.1) > f(2.5)$

لدينا: 0.3 و $0.7 \in]0,1[$ ②

وبما أنّ هنا المجال متزايد و $0.3 < 0.7$

إذاً: $f(0.3) < f(0.7)$

❖ التمرين العاشر :

ليكن لدينا الجدول الآتي :

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-4 \parallel 2$	$+$	$\parallel$	$-$	$-4 \parallel 2$	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	1

المطلوب :

1) هل يوجد نقطة من c المماس فيها أفقي ؟
2) هل f تابع زوجي ؟ علل إجابتك
3) احسب $\lim_{x \to -1} \left(\frac{f(x)-3}{x-1}\right)$ فسر إجابتك
4) احسب $\lim_{x \to -\infty} f(f(x))$
5) هل النقطة $A(2, -1)$ تنتمي للخط البياني c ؟
6) وازن بين $f(2)$ و $f(3)$
7) اكتب معادلة نصف المماس من اليمين في نقطة فاصلتها -3

الحل :

1. لا ,لأنه مهما يكن : $x \in R \setminus \{-2\} = D$

فإن : $f'(x) \neq 0$

2. لا ,لأنه مهما يكن : $x \in R \setminus \{-2\} = D$

فإن : $-x \in R \setminus \{+2\} \neq D$

الشرط غير محقق

3. $\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{f(x)-3}{x-1}\right) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) = -4$

إذاً f اشتقاقي عند (1) من اليسار وبالتالي c يقبل نصف المماس في النقطة $(1,3)$ وميله $m = -4$ ومعادلته:

$$\boxed{y - 3 = -4(x-1)}$$

4.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 3$

$\lim_{x \to -\infty} f(f(x)) = 3$

5. نلاحظ أن $x_A = 2 \in D$ ولكن

$f(2) \notin f(D) =]1, \infty[$

فإذاً $A \notin C$

6. نلاحظ أن $2,3 \in]1, \infty[$ و f متناقض تماما على المجال $]1, \infty[$ وبما أن : $2 < 3$ نستنتج أن :

$2 < 3 \rightarrow f(2) > f(3)$

7.

$m = 2$

$y_0 = 3, x_0 = 3$

$\Rightarrow y = 2(x-3) - 3$

$y = 2x - 9$

ملحق الاشتقاق

❖ **التمرين الحادي عشر :**

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

بفرض أن عبارة $f(x)$ من الشكل :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$$

1) احسب عبارة $f'(x)$ بدلالة (a) وَ (c) وَ (d)

2) باستعمال الجدول السابق عين قيمة كل من (a) وَ (b) وَ (c) وَ (d)

3) بيّن أن المنحني (c_f) يقبل مقارباً مائلاً يطلب تعيين ثم ادرس الوضع النسبي بين (c_f) والمقارب المائل

الحل :

1) التابع اشتقاقي عل كل من المجالين :

$]-\infty,-1[\quad , \quad]-1,+\infty[$

$$f'(x) = a + \frac{0-1.(c)}{(x+d)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = a - \frac{c}{(x+d)^2}}$$

2) **إيجاد الثوابت (a) وَ (b) وَ (c) وَ (d) :**

ملاحظة : دوماً عدد المعادلات يجب أن يكون من عدد المجاهيل المطلوبة

مجموعة التعريف من الجدول : $R\setminus\{-1\}$

مجموعة تعريف علاقة $f(x)$: $R\setminus\{-1\}$

بالمقارنة نجد أن : $d = 1$

$$\boxed{f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}}$$

ملاحظة : بقيان ثلاث مجاهيل بدنا ثلاث معادلات

① $f'(-2) = 0$

$a - \frac{c}{(-2+1)^2} = 0 \Rightarrow a = c$

② $f(0) = 2$

$a(0) + b + \frac{c}{1} = 2 \Rightarrow b + c = 2$

③ $f(-2) = -2$

$a(-2) + b + \frac{c}{-2+1} = -2$

$\Rightarrow -2a + b - c = -2$

نعوض ① في ③:

④ $-2c + b - c = -2 \Rightarrow b = 3c - 2$

نعوض ④ في ②:

$3c - 2 + c = 2 \Rightarrow 4c = 4 \Rightarrow c = 1$

نعوض قيمة (c) في ④.

$b = 3(1) - 2 = 1 \Rightarrow b = 1$

وأيضاً لدينا من المعادلة ①:

$a = c \Rightarrow a = 1$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}}$$

3) نخمن معادلة المقارب المائل : $y_\Delta = x + 1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{1}{x+1} - (x+1)\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x+1}\right) = 0$$

$y_\Delta = x + 1$ مقارب مائل في جوار $\pm\infty$

دراسة الوضع النسبي :

$$g(x) = f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x+1}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
البسط	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
المقام	$-$	$-$	0	$+$	$+$
الكسر	$-$ y_Δ فوق المقارب c		‖	$+$ y_Δ تحت المقارب c	

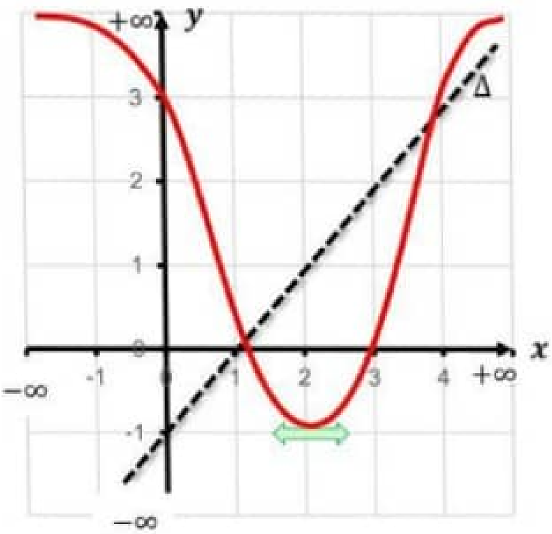
قراءة الخطوط البيانية

ملاحظة مهمة قال يعني: الخط البياني يبدأ من اليسار إلى اليمين

الشكل A :

في الشكل المجاور C هو الخط البياني للتابع f وفق :

<<يوجد بعض الأسئلة مدرجة في النظري عن هذا الخط البياني أجب عليها >>



ملحق الاشتقاق