المتجهات

المتجهات الأساسية :	• متجه الموضع : هو المتجه الذي بدايته نقطة الأصل و نهايته موضع الجسم. • متجه الوحدة : هو المتجه الذي معيارة يساوي الوحدة مثل (١ ، ٠)
معيار المتجه	إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{س} ، \text{ص})$ فإن معيار المتجه أ هو طول القطعة المستقيمة التي تمثل المتجه و يرمز له بالرمز $\Vert\overrightarrow{\text{أ}}\Vert$ حيث $\Vert\overrightarrow{\text{أ}}\Vert = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$
الصورة الاحداثية للمتجه	نكتب المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في صورة (س، ص) حيث $\text{س} = \Vert\overrightarrow{\text{أ}}\Vert \text{ حتا } \theta$ ، $\text{ص} = \Vert\overrightarrow{\text{أ}}\Vert \text{ حا } \theta$ ، θ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
الصورة القطبية للمتجه	نكتب المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في صورة $(\Vert\overrightarrow{\text{أ}}\Vert ، \theta)$ حيث $\Vert\overrightarrow{\text{أ}}\Vert = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ ، $\text{طا } \theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، θ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
تساوي متجهين	إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ و كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}}$ ، فإن : $\text{س}_1 = \text{س}_2$ ، $\text{ص}_1 = \text{ص}_2$
العلاقة بين متجهين	التوازي: إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ إذا كان : $\text{س}_1 \text{ص}_2 - \text{س}_2 \text{ص}_1 = 0$
	التعامد: إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ إذا كان : $\text{س}_1 \text{س}_2 + \text{ص}_1 \text{ص}_2 = 0$
جمع المتجهات هندسيًا (قاعدة المثلث - قاعدة المتوازي - نتيجة)	قاعدة المثلث : في أي مثلث أ ب ح يكون : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بح}} = \overrightarrow{\text{أح}}$ • ملاحظة : في أي مثلث أ ب ح يكون : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بح}} + \overrightarrow{\text{حأ}} = \overrightarrow{\text{و}}$
	قاعدة المتوازي : في متوازي الأضلاع أ ب ح ء يكون : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{أح}}$ • ملاحظة : في متوازي الأضلاع أ ب ح ء يكون : $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءح}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{بح}}$
	نتيجة : إذا كان $\overline{\text{أء}}$ متوسط في المثلث أ ب ح ، فإن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أح}} = 2\overrightarrow{\text{أء}}$ • ملاحظة : في أي مضلع أ ب ح ء يكون : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بح}} + \overrightarrow{\text{حء}} = \overrightarrow{\text{أء}}$
ملاحظات	• $\overrightarrow{\text{أب}} = -\overrightarrow{\text{بأ}}$ و بالتالي فإن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بأ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ • إذا كانت : أ $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، ب $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ فإن : $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$
نقطة تلاقي متوسطات المثلث	نقطة تلاقي متوسطات المثلث أ ب ح حيث أ $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، ب $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ ، ح $(\text{س}_3 ، \text{ص}_3)$ = $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3}{3} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3}{3}\right)$
الاثباتات الهندسية (متوازي الأضلاع - المستطيل - المعين - المربع – شبه المنحرف)	متوازي أضلاع نثبت أن : • $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءح}}$ أو $\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{بح}}$
	المستطيل نثبت أن : • أ ب ح ء متوازي أضلاع $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءح}}$ أو $\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{بح}}$ • القطران متساويان في الطول $\Vert\overrightarrow{\text{أح}}\Vert = \Vert\overrightarrow{\text{بء}}\Vert$
	المعين نثبت أن : • أ ب ح ء متوازي أضلاع $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءح}}$ أو $\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{بح}}$ • ضلعان متجاوران متساويان في الطول $\Vert\overrightarrow{\text{أب}}\Vert = \Vert\overrightarrow{\text{بح}}\Vert$
	المربع نثبت أن : • أ ب ح ء متوازي أضلاع $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءح}}$ أو $\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{بح}}$ • ضلعان متجاوران متساويان في الطول $\Vert\overrightarrow{\text{أب}}\Vert = \Vert\overrightarrow{\text{بح}}\Vert$ • القطران متساويان في الطول $\Vert\overrightarrow{\text{أح}}\Vert = \Vert\overrightarrow{\text{بء}}\Vert$
	شبه المنحرف نثبت أن : • $\overrightarrow{\text{أب}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ءح}}$ أو $\overrightarrow{\text{أء}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{بح}}$

محصلة عدة قوى	• إذا كانت القوى $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_3$ تؤثر في جسم ما فإن محصلة القوى يرمز لها بالرمز $\overrightarrow{\text{ح}}$ وتكون $\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ق}}_1 + \overrightarrow{\text{ق}}_2 + \overrightarrow{\text{ق}}_3 + \dots$ • ملاحظة : إذا كانت مجموعة القوى متزنة فإن : $\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{0}$
السرعة النسبية	إذا كانت $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أ}}$ هي السرعة الفعلية للجسم أ ، $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب}}$ هي السرعة الفعلية للجسم ب فإن : سرعة الجسم أ بالنسبة للجسم ب هي $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أب}}$ حيث $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب}}$ • ملاحظة : إذا كانا الجسمان لهما نفس الاتجاه فإن : $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب}}$ و إذا كانا متضادان في الاتجاه فإن : $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب}} = -\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أ}}$ وتكون $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب}}$

تقسيم قطعة مستقيمة

- إذا كانت : أ ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$) فإن إحداثيي نقطة حـ التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة $ل_2$ ، $ل_1$ تتعين من العلاقة : $\left(\dfrac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_1 + ل_2} ، \dfrac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_1 + ل_2}\right)$

- إذا كان التقسيم من الداخل فإن : $\dfrac{ل_2}{ل_1} >$ صفر ، و إذا كان التقسيم من الخارج فإن $\dfrac{ل_2}{ل_1} <$ صفر

- لايجاد النقطة التي يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ نضع $\dfrac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_1 + ل_2} =$ صفر
- لايجاد النقطة التي تقسم بها محور الصادات نضع $\dfrac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_1 + ل_2} =$ صفر

- احداثيي منتصف قطعة مستقيمة يتعين من العلاقة : $\left(\dfrac{س_1 + س_2}{2} ، \dfrac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$
- طول قطعة مستقيمة يتعين من العلاقة : $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

- إذا كان : أ ب حـ ء متوازي أضلاع فإن احداثيي منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ = احداثيي منتصف $\overline{\text{ب ء}}$.
- إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة م فإن احداثيي مركز الدائرة م = منتصف $\overline{\text{أب}}$.

ميل الخط المستقيم

- ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين أ ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$) = $\dfrac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$
- ميل الخط المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية θ هو ظا θ

- ميل الخط المستقيم الذي معادلته أ ص + ب س + حـ = ٠ يساوي $\dfrac{\text{سالب معامل س}}{\text{معامل ص}}$
- ميل الخط المستقيم الذي معادلته ص = م س + حـ يساوي م

- ميل محور السينات أو ميل الخط المستقيم الذي يوازي محور السينات يساوي صفر
- ميل محور الصادات أو ميل الخط المستقيم الذي يوازي محور السينات غير معرف

- إذا كان : $ل_1 \perp ل_2$ ، فإن : $م_1 \times م_2 = -1$ و العكس صحيح .
- إذا كان : $ل_1 // ل_2$ ، فإن : $م_1 = م_2$ و العكس صحيح .

- إذا كان ميل خط مستقيم = م ، فإن متجه الاتجاه للمستقيم يكون على الصورة $\overrightarrow{ى} =$ (١ ، م)
- إذا كان : $\overrightarrow{ى} =$ (أ ، ب) متجه اتجاه للمستقيم ، فإن ميل المستقيم = $\dfrac{ب}{أ}$

- إذا كان : $\overline{ى} = (أ ، ب)$ متجه اتجاه للمستقيم ، فإن كل المتجهات على الصورة ك $(ب ، -أ)$ تكون متجه وحدة عمودي على $\overline{ى}$.

معادلة الخط المستقيم

- معادلة المستقيم الذي ميله أ و يقطع من محور الصادات جزءًا موجبًا طوله حـ هي ص = أ س + حـ ، و إذا كان المستقيم يمر بالنقطة ($س_1$ ، $ص_1$) فإن **المعادلة العامة** هي $\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = أ$
- **المعادلة المتجهة للخط المستقيم** : المستقيم المار بالنقطة و ($س_1$ ، $ص_1$) و المتجه $\overline{ى} = (أ ، ب)$ متجه اتجاه له تكون معادلته المتجهة : $\overline{ر} = \overline{و} + ك\,\overline{ى}$
- **المعادلتان الوسيطيتان (البارمترية)** :

يمكن المعادلة المتجهة $\overline{ر} = \overline{و} + ك\,\overline{ى}$ في الصورة : (س ، ص) = ($س_1$ ، $ص_1$) + ك (أ ، ب) و تكون المعادلتان الوسيطيتان هما : س = $س_1$ + ك أ ، ص = $ص_1$ + ك ب

- **معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين** : معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : $أ_1$ س + $ب_1$ ص + $حـ_1$ = ٠ ، $أ_2$ س + $ب_2$ ص + $حـ_2$ = ٠

هي $أ_1$ س + $ب_1$ ص + $حـ_1$ + ك ($أ_2$ س + $ب_2$ ص + $حـ_2$) = ٠ ثم التعويض بالنقطة المعطاة لايجاد قيمة ك .

- **معادلة المستقيم بدلالة الأجزاء المقطوعة** : معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الاحداثيات السيني و الصادي جزءين أ ، ب تكون على الصورة : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$
- معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل تكون على الصورة : ص = أ س
- معادلة المستقيم المار بالنقطة (ل ، م) موازيًا محور الصادات تكون على الصورة : س = ل
- معادلة المستقيم المار بالنقطة (ل ، م) موازيًا محور السينات تكون على الصورة : ص = م
- المستقيم : أ ص + ب س + حـ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءًا طوله $\left|\frac{\text{سالب الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}\right|$
- لايجاد الجزء المقطوع من محور الصادات نضع : س = ٠
- لايجاد الجزء المقطوع من محور السينات نضع : ص = ٠

قياس الزاوية بين مستقيمين

- قياس الزاوية هـ بين المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ اللذا ميلاهما $م_1$ ، $م_2$ يتعين من العلاقة : ظا هـ = $\left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}\right|$ و تكون منفرجة إذا كانت ظا هـ > ٠ و تكون حادة إذا كانت ظا هـ > ٠

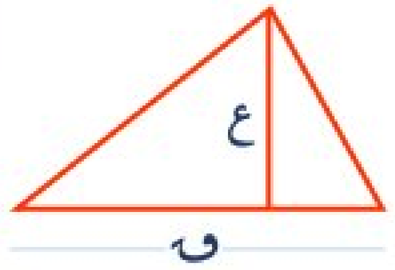
طول العمود الساقط من نقطة على خط مستقيم

- طول العمود الساقط من النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) على المستقيم أ س + ب ص + حـ = ٠ يساوي $\frac{|أ س + ب ص + حـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$
- طول نصف قطر الدائرة يساوي طول العمود الساقط من المركز على أي مماس للدائرة.
- طول العمود الساقط من النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) على محور السينات يساوي | $ص_1$ |

- لايجاد البعد العمودي بين مستقيمين متوازيين نفرض أي نقطة على أحد المستقيمين ثم نحسب طول العمود الساقط منها على المستقيم الأخر.

مساحة المثلث

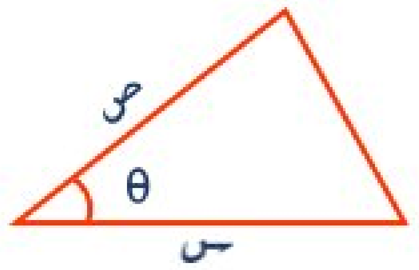
- إذا علم طول قاعدته و ارتفاعه المناظر لها :



المساحة = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × الارتفاع المناظر لها

= $\frac{١}{٢}$ ق ع

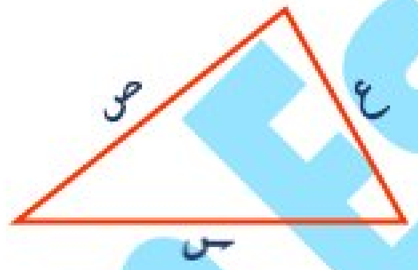
- إذا علم طولا ضلعين و قياس الزاوية المحصورة بينهما :



المساحة = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{١}{٢}$ س ص حا θ

- إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة :



المساحة = $\sqrt{\text{ح (ح - س) (ح - ص) (ح - ع)}}$

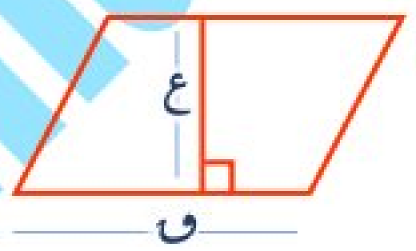
حيث ح = $\frac{١}{٢}$ المحيط ، س ، ص ، ع أطوال أضلاع المثلث

- مساحة المثلث المتساوي الأضلاع الذي طول ضلعه ل :

المساحة = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ × مربع طول ضلعه = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل^{٢} ، ارتفاعه = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل

حساب مساحة الأشكال الرباعية

- مساحة متوازي الأضلاع إذا علم طول قاعدته و ارتفاعه المناظر لها :



المساحة = طول القاعدة × الارتفاع

= ق ع

- مساحة متوازي الأضلاع أو أي شكل رباعي إذا علم طولا قطريه :

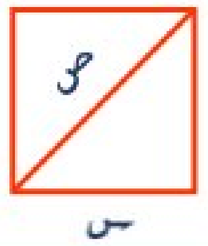
المساحة = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه في جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{١}{٢}$ س ص حا θ

- مساحة المستطيل :

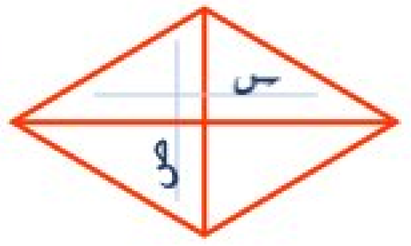
المساحة = الطول × العرض = س ص

- مساحة المستطيل :



المساحة = طول الضلع في نفسه = س^{٢} = $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره = $\frac{١}{٢}$ ص^{٢}

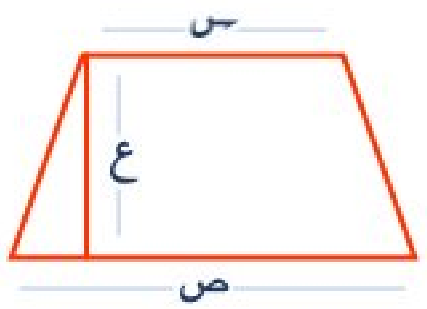
- مساحة المستطيل :



المساحة = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه

= $\frac{١}{٢}$ س ص

- مساحة شبه المنحرف :



المساحة = $\frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ (س + ص) ع

المضلعات المنتظم

- قياس الزاوية الداخلة : قياس الزاوية الداخلة للمضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه ن = $\frac{\text{(ن - ٢)} \times ١٨٠}{\text{ن}}$
- قياس الزاوية الداخلة : قياس الزاوية الخارجة للمضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه ن = $\frac{٣٦٠}{\text{ن}}$
- لأي مضلع منتظم عدد أضلاعه ن و طول ضلعه س تكونه :

مساحته = $\frac{\text{ن}}{٤}$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$ ، محيطه = ن س

- مساحة السدس المنتظم الذي عدد أضلاعه ن و طول ضلعه س = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ س^{٢}

الدائرة و أجزائها

- **الدائرة :**

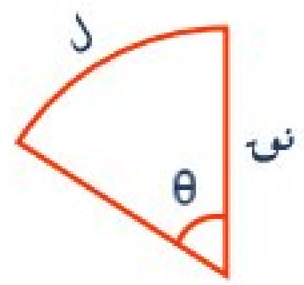
المساحة = π نق^2

المحيط = ٢ π نق

- **القطاع الدائري :**

المحيط = ٢ نق + ل

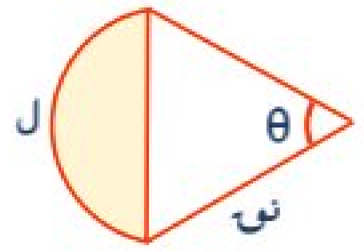
المساحة = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ نق^2



- **القطعة الدائرية :**

المساحة = $\frac{1}{2}$ نق^2 ($\theta^{ء}$ − حا θ)

$\theta^{ء}$ القياس الدائري للزاوية المركزية



المتطابقات المثلثية

- **الدوال المثلثية :**
  - دالة الجيب : حا θ و مقلوبها دالة قاطع التمام : قتا θ
  - دالة جيب التمام : حتا θ و مقلوبها دالة القاطع : قا θ
  - دالة الظل : ظا θ و مقلوبها دالة ظل التمام : ظتا θ

- **ملاحظات على الدوال :**
  - حا θ × قتا θ = حتا θ × قا θ = ظا θ × ظتا θ = ١
  - ظا θ = $\frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta}$ ، ظتا θ = $\frac{\text{حتا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta}$

- **علاقات هامة :**
  - حا^2 θ + حتا^2 θ = ١
  - ١ − حتا^2 θ = حا^2 θ
  - ١ + ظا^2 θ = قا^2 θ
  - قا^2 θ − ظا^2 θ = ١
  - ١ + ظتا^2 θ = قتا^2 θ
  - قتا^2 θ − ظتا^2 θ = ١

الحل العام للمعادلات المثلثية

- **الحل العام :**
  - حا α = حتا β ⇐ الحل العام : $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2}$ + ٢ π ن
  - قا α = قتا β ⇐ الحل العام : $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2}$ + ٢ π ن
  - ظا α = ظتا β ⇐ الحل العام : $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ + π ن

- **الحالات الخاصة :**
  - حا α = ١ ⇐ الحل العام : $\alpha = \frac{\pi}{2}$ + ٢ π ن
  - حا α = −١ ⇐ الحل العام : $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ + ٢ π ن
  - حتا α = ١ ⇐ الحل العام : α = ٢ π ن
  - حتا α = صفر ⇐ الحل العام : $\alpha = \frac{\pi}{2}$ + π ن
  - حتا α = −١ ⇐ الحل العام : $\alpha = \pi$ + ٢ π ن
  - ظا α = صفر ⇐ الحل العام : $\alpha = \pi$ ن

Best wishes, mr.Abdelrahman Essam