السؤال الأول: (**70** درجة)

ليكن العددان العقديان $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ و $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$. **المطلوب:**

1) اكتب z_2 بالشكل الأسي.

2) اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري و الأسي، واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$.

الحل :

أ. رامزعنيزان (0982399409)

(1

$$\boldsymbol{z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i}$$

$$r_2 = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$$

(2

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$$

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$$

$$z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \frac{(1+\sqrt{3}\,i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i+\sqrt{6}\,i+\sqrt{6}}{2+2}$$

الشكل الجبري

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,i}{4}$$

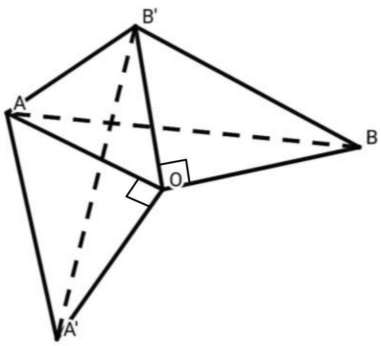
لكتابة العدد العقدي $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الأسّي ، نقسّم العددين بالشكل الأسّي :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\cancel{2}e^{\frac{\pi}{3}i}}{\cancel{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} = e^{\frac{\pi}{3}i}\,.\,e^{-\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{\pi}{12}i}$$

استنتاج $\cos\frac{\pi}{12}$:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

السؤال الثاني: (30 درجة)



نتأمل في المستوي العقدي المزود بالمعلم المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ OBB' و OAA' مثلثان قائمان ومتساويي الساقين. تمثل الأعداد a,b,a',b' النقاط A,B,A',B' على الترتيب. **المطلوب:**

- اكتب b' بدلالة b واكتب a' بدلالة a.

الحل : أ. رامزعنيزان (0982399409)

1)

نعرّف دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$: $z'-\omega=e^{\frac{\pi}{2}i}(z-\omega)$

B' صورة B :

$$b'-o=e^{\frac{\pi}{2}i}(b-o)$$

$$b'=bi$$

A' صورة A :

$$a'-o=e^{\frac{\pi}{2}i}(a-o)$$

$$a'=ai$$

السؤال الثالث: (40 درجة)

ليكن z عدداً حقيقياً ما، وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد. أثبت أنّ $\frac{w.\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت.

الحل : **مفتاح الحل $z=\bar{z}$. (لأنَّ z عدد حقيقي)**

أ. رامزعنيزان (0982399409)

$$\frac{w.\bar{z}-z}{iw-i}=\frac{w.z-z}{iw-i}$$

$$=\frac{z(w-1)}{i(w-1)}$$

$$=\frac{z}{i}$$

نضرب بالمرافق :

$$=\frac{-zi}{(i)(-i)}=\frac{-zi}{1}=-zi$$

وهو عدد تخيلي بحت .

السؤال الرابع: (60 درجة)

ليكن $\alpha = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. نضع $S = 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6$. **المطلوب:**

1) أثبت أنّ $S = 0$.

2) أثبت أنّ $\alpha^8 = \alpha$، واكتب العدد $1-\alpha$ بالشكل الأسي.

الحل : أ. رامزعنيزان (0982399409)

1) S متتالية هندسية أساسها $q = \alpha$ ، عدد الحدود $n = 7$ ، الحد الأول $a = 1$

الآن نكتب قانون مجموع متتالية هندسية :

$$S = a \cdot \frac{(1-q^n)}{1-q}$$

$$S = 1 \times \frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}$$

$$S = \frac{1-\left(e^{\frac{2\pi}{7}i}\right)^7}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}} = \frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}} = \frac{0}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}} = 0$$

$$S = 0$$

2) $\alpha = e^{\frac{2\pi}{7}i}$:

$$\alpha^8 = \left(e^{\frac{2\pi}{7}i}\right)^8 = e^{\frac{16\pi}{7}i} = e^{\frac{14\pi}{7}i} \cdot e^{\frac{2\pi}{7}i}$$

$$\alpha^8 = e^{2\pi i} \cdot e^{\frac{2\pi}{7}i}$$

$$\alpha^8 = 1 \times \alpha = \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^8 = \alpha$$

2)

$$\mathbf{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}} = e^{\frac{\pi}{7}i}\left(e^{\frac{-\pi}{7}i} - e^{\frac{\pi}{7}i}\right) = -e^{\frac{\pi}{7}i}\left(e^{\frac{\pi}{7}i} - e^{\frac{-\pi}{7}i}\right)$$

نعلم أنَّ $\left(e^{\frac{\pi}{7}i} - e^{\frac{-\pi}{7}i}\right) = 2i\sin\frac{\pi}{7}$ حسب القاعدة : $e^{\theta i} - e^{-\theta i} = 2i\sin\theta$.

$$= e^{\frac{\pi}{7}i}\left(-2\,i\sin\frac{\pi}{7}\right)$$

$$= e^{\frac{\pi}{7}i}\left(2 \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} \cdot \sin\frac{\pi}{7}\right)$$

$$= e^{\frac{\pi}{7}i}\left(2\,e^{-\frac{\pi}{2}i} \cdot \sin\frac{\pi}{7}\right) = 2e^{\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{2}\right)i} \cdot \sin\frac{\pi}{7}$$

$$= 2\,e^{-\frac{5\pi}{14}i} \cdot \sin\frac{\pi}{7}$$

السؤال الخامس: (**100** درجة)

أولاً: ليكن $P(z)$ كثير حدود معرف بالصيغة $P(z) = z^3 - (1+6i)z^2 + (-11+4i)z + 3 + 6i$. المطلوب:

1) جد الجذور التربيعية للعدد العقدي $\omega = -2i$ بالشكل الجبري.

2) جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ الذي يحقق: $P(z) = (z-i)Q(z)$.

3) حل المعادلة $Q(z) = 0$، ثمّ استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$.

ثانياً: لتكن A و B و C و D نقاط المستوي التي تمثل الأعداد العقدية بالترتيب $a = 1+2i$ و $b = 3i$ و $c = i$ و $d = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$. المطلوب:

1) أثبت أنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

2) أثبت أنّ النقاط A و B و D تقع على استقامة واحدة.

3) أوجد العدد ε الذي يجعل $ABCE$ مربعاً.

4) جد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة D' صورة النقطة D وفق تحاكي مركزه A ونسبته 2.

5) عين مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق $|z - a| = 1$.

الحل : أ. رامزعنيزان (0982399409)

أولاً : 1) نفرض العدد العقدي $w = x + yi$:

- نكتب المعادلات الثلاث :

$x^2 + y^2 = 2$ .... (1)

$x^2 - y^2 = 0$ .... (2) بالجمع

$2x \cdot y = -2$ .... (3)

من المعادلة رقم (1) ومن المعادلة رقم (2) **بالجمع** :

$2x^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1$

نعوض في المعادلة رقم (2) نجد :

$y^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm 1$

بحسب المعادلة رقم (3) نجد جذور العدد العقدي w :

$w_1 = -1 + i$

$w_2 = 1 - i$

(2

$z^2 - 5iz - 6 - z + 3i$ (القاسم $z - i$)

$z^3 - z^2 - 6iz^2 - 11z + 4iz + 3 + 6i$

$\mp z^3 \pm iz^2$

$-z^2 - 5iz^2 - 11z + 4iz + 3 + 6i$

$\pm 5iz^2 \pm 5z$

$-z^2 - 6z + 4iz + 3 + 6i$

$\pm 6z \mp 6i$

$-z^2 + 4iz + 3$

$\pm z^2 \mp iz$

$3iz + 3$

$\mp 3iz \mp 3$

$0 \quad 0$

$$P(z) = (z - i)(z^2 - 5iz - z + 3i - 6)$$

ومنه كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ هو :

$$Q(z) = z^2 - 5iz - z + 3i - 6$$

(3 إما : $z^2 - 5iz - z + 3i - 6 = 0$

$z^2 + z(-1 - 5i) - 6 + 3i = 0$

$\Delta = (-1 - 5i)^2 - 4(1)(-6 + 3i)$

$\Delta = 1 + 10i - 25 + 24 - 12i$

$\Delta = -2i < 0$ حلّين عقديين

وجدنا أنَّ $\sqrt{\Delta}$ هو :

$w_1 = -1 + i$

$w_2 = 1 - i$

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2} = \frac{1 + 5i - 1 + i}{2} = \frac{6i}{2}$$

$z_1 = 3i$

$$z_2 = \frac{-b + w_2}{2} = \frac{1 + 5i + 1 - i}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

أو : $z - i = 0$

$z_3 = i$

أصبحت حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي :

$z_1 = 3i$

$z_2 = 1 + 2i$

$z_3 = i$

أ. رامزعنيزان (0982399409)

ثانياً :

1)

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{b-a}{c-a} = \frac{3i-1-2i}{i-1-2i} = \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{(-1+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{1-i-i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}} = -i$$

إذاً المثلث ABC مثلث قائم الزاوية في A ومتساوي الساقين .

2)

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AD}}} = \frac{b-a}{d-a} = \frac{3i-1-2i}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i-1-2i} = \frac{-1+i}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i} = \frac{(-1+i)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AD}}} = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AD}}} = -2$$

إذاً النقاط A و B و D تقع على استقامة واحدة.

3) نفرض ε العدد العقدي الممثل للنقطة E ، حيث : $\varepsilon = x + yi$:

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{EC}} \implies b-a = c-\varepsilon \implies -1+i = i-\varepsilon$$

$$\varepsilon = 1+i-i = 1 \implies \varepsilon = 1$$

4)

$$Z' - \omega = K(Z-\omega) \implies Z' - a = 2(d-a) \implies$$

$$Z' - 1 - 2i = 2\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i-1-2i\right) \implies Z' = 1+2i+3+3i-2-4i$$

$$Z' = 2+i$$

5) مجموعة النقاط هي دائرة مركزها $A(1,2)$ ، ونصف قطرها $r = 1$.

– انتهت الحلول –