" ٢ "

مراجعة ليلة الإمتحان

في

الرياضيات

الصف الثالث الإعدادى

إعداد
أ/ محمد شحته

٠١٠٩٥٧٧٦٠٩٦

مراجعة نهائية

في

الجبر

الصف الثالث الاعدادى

اعداد

أ / محمد شحته شوقى
٠١٠٩٥٧٧٦٠٩٦

① حل المعادلات

⇐ أوجد جبريًا مجموعة حل المعادلات الآتية :

① ٢س − ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤

الحل

٢س − ص = ٣ ← ① بالضرب × ٢
س + ٢ص = ٤ ← ②

∴ ٤س − ~~٢ص~~ = ٦
س + ~~٢ص~~ = ٤ بالجمع

٥س/٥ = ١٠/٥ ⇐ ∴ $\boxed{س = ٢}$

بالتعويض في رقم ② ∴ ٢ + ٢ص = ٤

∴ ٢ص = ٤ − ٢ ⇐ ~~٢~~ص/~~٢~~ = ٢/٢

∴ $\boxed{ص = ١}$

∴ م.ح = {(٢ ، ١)} #

② ص + س = ٧ ، ص = ٢س + ١

الحل

ص + س = ٧ ← ① بالضرب × ٢
ص − ٢س = ١ ← ②

∴ ٢ص + ~~٢س~~ = ١٤
ص − ~~٢س~~ = ١ بالجمع

٣ص/٣ = ١٥/٣ ⇐ ∴ $\boxed{ص = ٥}$

بالتعويض في رقم ① ∴ ٥ + س = ٧

∴ س = ٧ − ٥ ⇐ $\boxed{س = ٢}$

∴ م.ح = {(٢ ، ٥)}

③ ٢س + ص = ١ ، س + ٢ص = ٥

الحل

٢س + ص = ١ ← ① بالضرب × −٢
س + ٢ص = ٥ ←

∴ −٤س − ~~٢ص~~ = −٢
س + ~~٢ص~~ = ٥ بالجمع

~~−٣~~س/~~−٣~~ = ٣/−٣ ⇐ $\boxed{س = −١}$

بالتعويض في رقم ① ∴ ٢ × −١ + ص = ١

∴ −٢ + ص = ١ ⇐ ص = ١ + ٢

$\boxed{ص = ٣}$ ∴ م.ح = {(−١ ، ٣)} #

④ س − ص = صفر ، س² + س ص + ص² = ٢٧

الحل

س − ص = صفر ← ∴ $\boxed{س = ص}$

∴ س² + س × س + س² = ٢٧

∴ س² + س² + س² = ٢٧

∴ ~~٣~~س²/~~٣~~ = ٢٧/٣ ⇐ س² = ٩

∴ س = ±√٩ ⇐ س = ±٣

عند س = ٣ ∴ ص = ٣

عند س = −٣ ∴ ص = −٣

∴ م.ح = {(٣ ، ٣) ، (−٣ ، −٣)}

⑤ س − ص = ١ ، س² + ص² = ٢٥

الحل

س − ص = ١ ⇐ ∴ $\boxed{س = ١ + ص}$

بالتعويض عن س في المعادلة الثانية

∴ (١ + ص)² + ص² = ٢٥

∴ ١ + ٢ص + ص² + ص² = ٢٥

٢ص² + ٢ص + ١ − ٢٥ = ٠

~~٢~~ص²/~~٢~~ + ~~٢~~ص/~~٢~~ − ٢٤/٢ = ٠

∴ ص² + ص − ١٢ = ٠

(ص − ٣)(ص + ٤) = ٠

∴ ص = ٣ | ∴ ص = $\boxed{−٤}$

∴ س = ١ + ٣ = ٤ | ∴ س = ١ − ٤ = $\boxed{−٣}$

∴ م.ح = {(٤ ، ٣) ، (−٣ ، −٤)}

⑥ س + ص = ٧ ، س ص = ١٢

الحل

س + ص = ٧ ← $\boxed{\text{س} = ٧ - \text{ص}}$

بالتعويض فى المعادلة الثانية:

∴ ص (٧ − ص) = ١٢

∴ ٧ ص − ص² − ١٢ = ٠

− ص² + ٧ ص − ١٢ = ٠ $\boxed{\times -1}$

∴ ص² − ٧ ص + ١٢ = ٠

(ص − ٣)(ص − ٤) = ٠

ص = ③ | ص = $\boxed{٤}$

∴ س = ٧ − ٣ = ④ | س = ٧ − ٤ = $\boxed{٣}$

∴ م.ح = {(٤ ، ٣) ، (٣ ، ٤)}

---

⑦ ص − س = ٢ ، س² + س ص − ٤ = ٠

الحل

ص − س = ٢ ← $\boxed{\text{ص} = ٢ + \text{س}}$

بالتعويض فى المعادلة الثانية:

∴ س² + س × (٢ + س) − ٤ = ٠

س² + ٢ س + س² − ٤ = ٠

$\frac{٢\text{س}^2}{٢} + \frac{٢}{٢}\text{س} - \frac{٤}{٢} = ٠$

∴ س² + س − ٢ = ٠

(س − ١)(س + ٢) = ٠

س = ① | س = $\boxed{-٢}$

ص = ٢ + ١ = ③ | ص = ٢ − ٢ = $\boxed{٠}$

∴ م.ح = {(١ ، ٣) ، (−٢ ، ٠)}

---

⑧ س + ص = ٤ ، $\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{ص}} = ١$

الحل

$\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{ص}} = ١$ ← بالضرب × س ص

∴ $\frac{١}{\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}}\,\text{ص} + \frac{١}{\cancel{\text{ص}}} \times \text{س}\,\cancel{\text{ص}} = ١ \times \text{س}\,\text{ص}$

∴ ص + س = س ص

∴ ص + س − س ص = ٠ ← ①

∵ س + ص = ٤ ⟸ ∴ $\boxed{\text{س} = ٤ - \text{ص}}$

بالتعويض فى رقم ①

∴ ص + (٤ − ص) − ص (٤ − ص) = ٠

$\cancel{\text{ص}}$ + ٤ − $\cancel{\text{ص}}$ − ٤ ص + ص² = ٠

∴ ص² − ٤ ص + ٤ = ٠

(ص − ٢)(ص − ٢) = ٠

∴ ص = $\boxed{٢}$

∴ س = ٤ − ٢ = $\boxed{٢}$

∴ م.ح = {(٢ ، ٢)} #

القانون العام

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}}$$

أوجد مجموعة الحل باستخدام القانون العام:

① ٢ س² − س − ٢ = ٠ ، حيث $\sqrt{١٧} = ٤{,}١٢$

الحل

$\boxed{\text{أ} = ٢}$ $\boxed{\text{ب} = -١}$ $\boxed{\text{جـ} = -٢}$

$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}} = \frac{١ \pm \sqrt{(-١)^2 - ٤ \times ٢ \times -٢}}{٢ \times ٢}$

∴ $\text{س} = \frac{١ \pm \sqrt{١ + ١٦}}{٤} = \frac{١ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$

∴ $\text{س} = \frac{١ + \sqrt{١٧}}{٤}$ ، $\text{س} = \frac{١ - \sqrt{١٧}}{٤}$

$\text{س} = \frac{١ + ٤{,}١٢}{٤}$ ، $\text{س} = \frac{١ - ٤{,}١٢}{٤}$

∴ س = ١,٢٨ ، س = −٠,٧٨

∴ م.ح = {١,٢٨ ، −٠,٧٨}

#

[أ / محمد شحتة 01095776096]

② $٣س^{٢} = ٥س - ١$ لأقرب رقمين عشريين

الحل

$٣س^{٢} - ٥س + ١ = ٠$

$\boxed{أ = ٣}$ $\boxed{ب = -٥}$ $\boxed{جـ = ١}$

$∴ س = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ٣ \times ١}}{٢ \times ٣}$

$س = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$

$∴ س = \frac{٥ + \sqrt{١٣}}{٦} = ١,٤٣٤ \simeq \boxed{١,٤٣}$

$س = \frac{٥ - \sqrt{١٣}}{٦} = ٠,٢٣٢ \simeq \boxed{٠,٢٣}$

$∴ م.ح = \{٠,٢٣ ، ١,٤٣\}$

---

③ $س^{٢} + ٣س + ٥ = صفر$

الحل

$\boxed{أ = ١}$ $\boxed{ب = ٣}$ $\boxed{جـ = ٥}$

$∴ س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢ \times ١}$

$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{-١١}}{٢} \notin ح$

$∴ م.ح = \emptyset$

---

⑤ $س + \frac{٤}{س} = ٦$

الحل

بالضرب × س

$س \times س + \frac{٤}{\cancel{س}} \times \cancel{س} = ٦ \times س$

$س^{٢} + ٤ = ٦س$

$س^{٢} - ٦س + ٤ = ٠$

$\boxed{أ = ١}$ $\boxed{ب = -٦}$ $\boxed{جـ = ٤}$

⇐ أكمل بنفسك

---

⑥ $س(س - ١) = ٤$

الحل

$س(س - ١) = ٤$

$∴ س^{٢} - س - ٤ = ٠$

أكمل بنفسك

الحل بيانيًا

① $س + ص = ٧$ ، $ص = ٢س + ١$

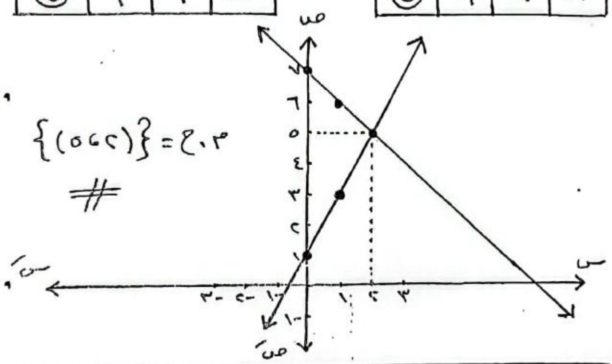
الحل

$ص = ٧ - س$

س	٠	١	٢
ص	٧	٦	٥

$ص = ٢س + ١$

س	٠	١	٢
ص	١	٣	٥



$م.ح = \{(٢ ، ٥)\}$

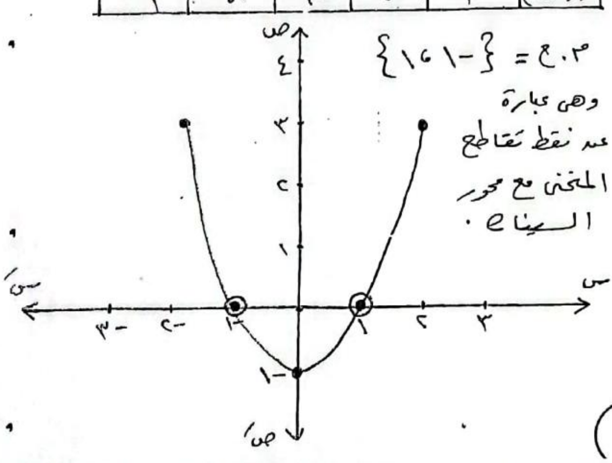
#

---

② مثّل بيانيًا $د(س) = س^{٢} - ١$ متخذًا $س \in [-٢ ، ٢]$ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $د(س) = صفر$

الحل

س	-٢	-١	٠	١	٢
د(س)	٣	٠	-١	٠	٣



$م.ح = \{-١ ، ١\}$

وهي عبارة عن نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات.

التطبيقات

① مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم أوجد مساحته؟

الحل

نفرض أن طوله = س ، عرضه = ص

∴ س − ص = ٤ ← ①

محيطه = (س + ص) × ٢ = ٢٨

∴ س + ص = ١٤ ← ②

∴ س − ص = ٤

س + ص = ١٤ بالجمع

٢س = ١٨ ∴ س = ٩

بالتعويض في رقم ②

∴ ٩ + ص = ١٤ ⇐ ص = ٥

∴ مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ٥ × ٩ = ٤٥ سم²

#

② زاويتان حادتان في مثلث قائم الفرق بين قياسيهما ٥٠°. أوجد قياس كل زاوية؟

الحل

نفرض أن الزاويتان هما س ، ص

∴ س − ص = ٥٠ ← ①

∵ الزاويتان حادتان و △ قائم

∴ س + ص = ٩٠ ← ②

أكمل بنفسك ....

الزاويتان هما ٧٠° ، ٢٠° #

③ مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ومساحته ٢٨ سم². أوجد محيطه؟

الحل

نفرض أن الطول = س العرض = ص

∴ س − ص = ٣ ⇐ س = ص + ٣ ← ①

مساحته = س × ص = ٢٨ ← ②

بالتعويض في رقم ②

∴ (ص + ٣) × ص = ٢٨

ص² + ٣ص − ٢٨ = ٠

ص² + ٣ص − ٢٨ = ٠

(ص − ٤)(ص + ٧) = ٠

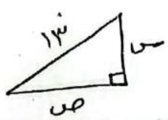
∴ ص = ٤ | ص = −٧ (مرفوض)

∴ س = ٣ + ٤ = ٧

∴ المحيط = (٧ + ٤) × ٢ = ٢٢ سم

④ مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ومحيطه = ٣٠ سم أوجد طول ضلعي القائمة؟

الحل



محيطه = س + ص + ١٣ = ٣٠

∴ س + ص = ٣٠ − ١٣

س + ص = ١٧ ← س = ١٧ − ص

↲ ①

∵ س² + ص² = (١٣)²

∴ س² + ص² = ١٦٩ ← ②

بالتعويض في رقم ②

∴ (١٧ − ص)² + ص² − ١٦٩ = ٠

٢٨٩ − ٣٤ص + ص² + ص² − ١٦٩ = ٠

∴ ٢ص²/٢ − ٣٤ص/٢ + ١٢٠/٢ = ٠

∴ ص² − ١٧ص + ٦٠ = ٠

(ص − ٥)(ص − ١٢) = ٠

∴ ص = ٥ | ص = ١٢

∴ س = ١٧ − ٥ = ١٢ | س = ١٧ − ١٢ = ٥

∴ طول ضلعي القائمة ٥ سم ، ١٢ سم

#

⑤ عددان حاصل ضربهما ١٠ ، والفرق بينهما ٣ ، أوجد العددين ؟

الحل

نفرض أن العددان هما س ، ص

∵ س × ص = ١٠ ← ①

س − ص = ٣ ← ②

أكمل الحل باستخدام التعويض....

---

⑥ عددان حقيقيان موجبان مجموعهما ٩ والفرق بين مربعيهما ٤٥ أوجد العددين ؟

الحل

نفرض أن العددان هما س ، ص

∵ س + ص = ٩ ← ①

س^2 − ص^2 = ٤٥ ← ②

أكمل الحل باستخدام التعويض....

---

⑦ أوجد قيمة أ ، ب علماً بأن (٣ ، −١) حلاً للمعادلتين :

أ س + ب ص − ٥ = ٠ ،

٣ أ س + ب ص = ١٧

الحل

∵ (٣ ، −١) حلاً للمعادلتين

بالتعويض :

∵ ٣ أ − ب = ٥ ← بالضرب × (−١)

٩ أ − ب = ١٧

∴ −٣ أ + ب = −٥

٩ أ − ب = ١٧ بالجمع

$\frac{٦ أ}{٦}$ = $\frac{١٢}{٦}$ ∴ $\boxed{أ = ٢}$

∵ ٣ × ٢ − ب = ٥

٦ − ب = ٥ ⇐ −ب = ٥ − ٦

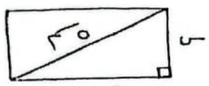
−ب = −١ ⇐ ∴ $\boxed{ب = ١}$

#

---

⑧ مستطيل طول قطره ٥ سم ومحيطه = ١٤ سم أوجد بعديه ؟

الحل



∵ محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

∴ محيطه = (س + ص) × $\frac{٢}{٢}$ = $\frac{١٤}{٢}$

∵ $\boxed{س + ص = ٧}$ ← ①

، س^2 + ص^2 = ٥^2

∵ $\boxed{س^2 + ص^2 = ٢٥}$ ← ②

أكمل الحل بالتعويض....

② الدوال الكسرية

⇐ أوجد مجموعة أصفار الدوال الآتية :

① د(س) = س^{٢} − س − ٦

الحل

س^{٢} − س − ٦ = ٠ ، مساواة الدالة بالصفر

∴ (س + ٢)(س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ | س = ٣

∴ ص(د) = {−٢ ، ٣} #

② د(س) = س^{٢} − ٢

الحل

س^{٢} − ٢ = ٠ ⇐ س^{٢} = ٢

∴ س = ± √٢

∴ ص(د) = {√٢ ، −√٢} #

③ اذا كان {−٣ ، ٣} هي مجموعة أصفار الدالة د(س) = س^{٢} + أ أوجد أ ؟

الحل

بالتعويض عن س = ٣

∴ ٣^{٢} + أ = صفر ∴ $\boxed{\text{أ} = -٩}$

④ اذا كان مجموعة أصفار الدالة : د(س) = س^{٢} + أ س + ٦ هي {٢ ، ٣}

أوجد قيمة أ ؟

الحل

س^{٢} + أ س + ٦ = ٠ ، بالتعويض عن س = ٢

∴ ٤ + ٢أ + ٦ = ٠

∴ ٢أ + ١٠ = ٠ ⇐ $\frac{٢\text{أ}}{٢} = \frac{-١٠}{٢}$

∴ $\boxed{\text{أ} = -٥}$ #

⑤ اذا كانت ص(د) = {٣} حيث د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + أ أوجد أ

الحل

س^{٣} − ٣س^{٢} + أ = ٠ ، بالتعويض

∴ ٢٧ − ٣ × ٩ + أ = ٠

∴ $\cancel{٢٧} - \cancel{٢٧}$ + أ = ٠

∴ $\boxed{\text{أ} = ٠}$. #

⑥ اذا كانت د(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} − ٧٥

فأثبت أن العدد ٥ هو أحد أصفارها ؟

الحل

بالتعويض عن س = ٥

∴ د(٥) = ٥^{٣} − ٢ × ٥^{٢} − ٧٥

= ٧٥ − ٧٥ = $\boxed{\text{صفر}}$

∴ ٥ أحد أصفار الدالة .

* أصفار الدالة الكسرية :

= {أصفار البسط} − {أصفار المقام}

⇐ أوجد أصفار الدالة :

① د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}$

حلل ← اختصر ← هات أصفار البسط

الحل

د(س) = $\frac{\cancel{(\text{س}+٢)}(\text{س}-٢)}{\cancel{(\text{س}+٢)}(\text{س}-٣)}$

∴ د(س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٣}$

∴ ص(د) = {٢} #

② أوجد المجال المشترك للدوال الآتية:

ن١(س) = (س² − ٤) / (س² − ٥س + ٦) ، ن٢(س) = (س − ٣) / (س² − س)

الحل

ن١ = (س − ٢)(س + ٢) / ((س − ٢)(س − ٣))

ن٢ = (س − ٣) / (س(س − ١))

المجال١ = ع − {٢ ، ٣}

المجال٢ = ع − {٠ ، ١}

∴ المجال المشترك = ع − {٢ ، ٣ ، ٠ ، ١}

---

③ اذا كان مجال الدالة: د(س) = (س − ٥) / (س² − أس + ٩) هو ع − {٣}

أوجد قيمة أ ؟

الحل

س² − أس + ٩ = ٠ عند س = ٣

∴ ٩ − ٣أ + ٩ = ٠

−٣أ + ١٨ = ٠ ⟸ −٣أ = −١٨ ⟸ أ = −١٨ / −٣

∴ $\boxed{\text{أ} = ٦}$

---

④ اذا كانت ن(س) = (س² − ١) / (س² + س)

أوجد د(س) في أبسط صورة موضحاً مجالها وأصفارها وأوجد د(٢) ، د(−١)

الحل

د(س) = (س − ١)$\cancel{(س + ١)}$ / (س$\cancel{(س + ١)}$)

المجال = ع − {٠ ، −١}

$\boxed{\text{د(س) = (س − ١) / س}}$ ص(د) = {١}

د(٢) = (٢ − ١) / ٢ = $\boxed{١/٢}$

د(−١) = غير معرفة #

---

⑤ اذا كانت د(س) = (س² − ٩) / (س + ب)

د(٤) = ١ أوجد قيمة ب ؟

الحل

د(٤) = (١٦ − ٩) / (٤ + ب) = ١

∴ ٧ / (٤ + ب) = ١ / ١ ∴ ٤ + ب = ٧

∴ $\boxed{\text{ب} = ٣}$

---

⑥ اذا كان مجال الدالة:

ن(س) = ب / س + ٩ / (س + أ)

هو ع − {٠ ، ٤} ، د(٥) = ٢

أوجد قيمتي أ ، ب ؟

الحل

∵ المجال = ع − {٠ ، ٤}

∴ س + أ = ٠ ⟸ ٤ + أ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{أ} = −٤}$

د(٥) = ب / ٥ + ٩ / (٥ − ٤) = ٢

∴ ب / ٥ + ٩ = ٢ ⟸ ب / ٥ = ٢ − ٩

∴ ب / ٥ = −٧ ⟸ $\boxed{\text{ب} = −٣٥}$

---

⑦ اذا كان: ن١(س) = ٢س / (٢س + ٨)

ن٢(س) = (س² + ٤س) / (س² + ٨س + ١٦) اثبت أن ن١ = ن٢

الحل

ن١ = $\cancel{٢}$س / ($\cancel{٢}$(س + ٤))

ن٢ = س$\cancel{(س + ٤)}$ / ($\cancel{(س + ٤)}$(س + ٤))

المجال١ = ع − {−٤}

مجال٢ = ع − {−٤}

ن١ = س / (س + ٤)

ن٢ = س / (س + ٤)

∴ $\boxed{\text{ن١ = ن٢}}$

(٨) إذا كان :

$ن_١(س) = ١ - \frac{١}{س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س - ١}{س}$

هل $ن_١ = ن_٢$ أم لا ؟

الحل

$ن_١(س) = \frac{١}{١} - \frac{١}{س}$

$ن_١(س) = \frac{س - ١}{س}$

$المجال_١ = ح - \{٠\}$

$ن_٢(س) = \frac{س - ١}{س}$

$المجال_٢ = ح - \{٠\}$

$\because ن_١(س) \neq ن_٢(س)$

$\therefore ن_١ \neq ن_٢$

---

(٩) أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتين : $ن_١$ ، $ن_٢$

$ن_١(س) = \frac{س^٢ + س - ١٢}{س^٢ + ٥س + ٤}$

$ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س^٢ + ٢س + ١}$

الحل

$ن_١(س) = \frac{(س - ٣)\cancel{(س + ٤)}}{(س + ١)\cancel{(س + ٤)}}$

$مجال_١ = ح - \{-١ ، -٤\}$

$ن_١(س) = \frac{س - ٣}{س + ١}$

$ن_٢(س) = \frac{(س - ٣)\cancel{(س + ١)}}{(س + ١)\cancel{(س + ١)}}$

$مجال_٢ = ح - \{-١\}$

$ن_٢(س) = \frac{س - ٣}{س + ١}$

$\therefore$ المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتين هو $ح - \{-١ ، -٤\}$

#

الجمع والطرح

⇐ أوجد فى أبسط صورة موضحًا المجال :

(١) $د(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{س^٢ - ٤} + \frac{٢س + ٦}{س^٢ + ٥س + ٦}$

ثم أوجد د(٣) ، د(٢) إن أمكن ؟

الحل

$د(س) = \frac{س\cancel{(س - ٢)}}{\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)} + \frac{٢\cancel{(س + ٣)}}{\cancel{(س + ٣)}(س + ٢)}$

$المجال = ح - \{٢ ، -٢ ، -٣\}$

$د(س) = \frac{س}{س + ٢} + \frac{٢}{س + ٢} = \frac{س + ٢}{س + ٢}$

$\therefore \boxed{د(س) = ١}$

$د(٣) = ١$ $د(٢) =$ غير معرفة .

---

(٢) $د(س) = \frac{س}{س - ٤} - \frac{س + ٤}{س^٢ - ١٦}$

أوجد : د(٥) ، د(−٤)

الحل

$د(س) = \frac{س}{س - ٤} - \frac{\cancel{س + ٤}}{\cancel{(س + ٤)}(س - ٤)}$

$المجال = ح - \{٤ ، -٤\}$

$\therefore د(س) = \frac{س}{س - ٤} - \frac{١}{س - ٤}$

$\boxed{د(س) = \frac{س - ١}{س - ٤}}$

$د(٥) = \frac{٥ - ١}{٥ - ٤} = \frac{٤}{١} = \boxed{٤}$

$د(-٤) =$ غير معرفة

الضرب والقسمة

① $د(س) = \frac{س^٢ - س}{س^٣ - ١} \times \frac{س^٢ + س + ١}{س}$

ثم أوجد د(٢) ، د(١) إن أمكن ؟

الحل

$د(س) = \frac{\cancel{س}\cancel{(س - ١)}}{\cancel{(س - ١)}\cancel{(س^٢ + س + ١)}} \times \frac{\cancel{س^٢ + س + ١}}{\cancel{س}}$

المجال = ح − {١ ، ٠}

$د(س) = ١ \times ١ = \boxed{١}$

$د(٢) = \boxed{١}$ ، د(١) = غير معرفة .

② $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٣ - ٢٧} \div \frac{س + ٢}{س^٢ + ٣س + ٩}$

ثم أوجد ن(٢) ، ن(−٢)

الحل

$ن(س) = \frac{س\cancel{(س + ٢)}}{(س - ٣)\cancel{(س^٢ + ٣س + ٩)}} \times \frac{\cancel{س^٢ + ٣س + ٩}}{\cancel{س + ٢}}$

المجال = ح − {٣ ، −٢}

$ن(س) = \boxed{\frac{س}{س - ٣}}$

$ن(٢) = \frac{٢}{٢ - ٣} = \frac{٢}{-١} = \boxed{-٢}$

ن(−٢) = غير معرفة .

③ $ن(س) = \frac{٣س - ١٥}{س + ٣} \div \frac{٥س - ٢٥}{٤س + ١٢}$

الحل

$ن(س) = \frac{٣\cancel{(س - ٥)}}{\cancel{س + ٣}} \times \frac{٤\cancel{(س + ٣)}}{٥\cancel{(س - ٥)}}$

المجال = ح − {−٣ ، ٥}

$ن(س) = \frac{٣}{١} \times \frac{٤}{٥} = \boxed{\frac{١٢}{٥}}$

③ $ن(س) = \frac{س^٣ + س}{س^٢ + ١} + \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س^٣ - ٨}$

الحل

$ن(س) = \frac{س\cancel{(س^٢ + ١)}}{\cancel{س^٢ + ١}} + \frac{\cancel{س^٢ + ٢س + ٤}}{(س - ٢)\cancel{(س^٢ + ٢س + ٤)}}$

المجال = ح − {٢}

$ن(س) = \frac{س}{١} + \frac{١}{(س - ٢)}$

$ن(س) = \frac{س(س - ٢) + ١}{(س - ٢)}$

$ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س + ١}{س - ٢}$

$ن(س) = \frac{(س - ١)(س - ١)}{س - ٢} = \boxed{\frac{(س - ١)^٢}{س - ٢}}$

④ $د(س) = \frac{٣س}{س^٢ - س - ٢} + \frac{س - ١}{١ - س^٢}$

الحل

$د(س) = \frac{٣س}{س^٢ - س - ٢} + \frac{س - ١}{-(س^٢ - ١)}$

$= \frac{٣س}{(س - ٢)(س + ١)} - \frac{\cancel{س - ١}}{\cancel{(س - ١)}(س + ١)}$

المجال = ح − {−١ ، ٢ ، ١}

$= \frac{٣س}{(س - ٢)(س + ١)} - \frac{١ \times (س - ٢)}{(س - ٢)(س + ١)}$

$= \frac{٣س - (س - ٢)}{(س - ٢)(س + ١)}$

$= \frac{٣س - س + ٢}{(س - ٢)(س + ١)}$

$= \frac{٢س + ٢}{(س - ٢)(س + ١)} = \frac{٢\cancel{(س + ١)}}{(س - ٢)\cancel{(س + ١)}}$

$\therefore \boxed{د(س) = \frac{٢}{س - ٢}}$

④ $ن(س) = \frac{س^2 - 3س}{س^2 - 9} \div \frac{2س}{س + 3}$

الحل

$ن(س) = \frac{\cancel{س}(\cancel{س-3})}{(\cancel{س+3})(\cancel{س-3})} \times \frac{\cancel{س+3}}{2\cancel{س}}$

المجال = ح − {3 ، −3 ، 0}

$ن(س) = 1 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

⑤ $ن(س) = \frac{س^2 - 2س - 15}{س^2 - 9} \div \frac{10 - 2س}{س^2 - 6س + 9}$

الحل

$ن(س) = \frac{(\cancel{س-5})(\cancel{س+3})}{(\cancel{س+3})(\cancel{س-3})} \times \frac{(س-3)(\cancel{س-3})}{-2(\cancel{س-5})}$

المجال = ح − {3 ، −3 ، 5}

$ن(س) = \frac{س-3}{-2} = \frac{-(س-3)}{2}$

$\therefore ن(س) = \boxed{\frac{3-س}{2}}$

المعكوس الضربي

① اذا كان : $ن(س) = \frac{س^2 - 2س}{س^2 - 3س + 2}$

أوجد :

[أ] $ن^{-1}(س)$ فى أبسط صورة ومجاله .

[ب] قيمة س اذا كان : $ن^{-1}(س) = 3$

الحل

$ن^{-1}(س) = \frac{س^2 - 3س + 2}{س^2 - 2س}$

$ن^{-1}(س) = \frac{(س-1)(\cancel{س-2})}{س(\cancel{س-2})}$

المجال = ح − {1 ، 2 ، 0}

$\therefore ن^{-1}(س) = \boxed{\frac{س-1}{س}}$

$\therefore \frac{س-1}{س} = \frac{3}{1}$

$\therefore 3س = س - 1$

$3س - س = -1 \Leftarrow \cancel{2}س = \frac{-1}{2}$

$\therefore س = \boxed{\frac{-1}{2}}$

#

② اذا كان : $ن(س) = \frac{س^2 - 2س}{(س-2)(س^2+2)}$

أوجد $ن^{-1}(س)$ فى أبسط صورة وعين مجاله . واذا كان $ن^{-1}(س) = 3$

أوجد قيمة س ؟

الحل

$ن^{-1}(س) = \frac{(س^2+2)(\cancel{س-2})}{س(\cancel{س-2})}$

المجال = ح − {2 ، 0}

$ن^{-1}(س) = \boxed{\frac{س^2+2}{س}}$

$\because ن^{-1}(س) = 3 \quad \therefore \frac{س^2+2}{س} = \frac{3}{1}$

$\therefore س^2 + 2 = 3س \Leftarrow س^2 - 3س + 2 = 0$

$(س-1)(س-2) = 0$

$\therefore \boxed{س = 1}$ | $س = 2$ مرفوض

#

[أ / محمد شحتة 01095776096]

الاحتمالات

أ/ محمد شحتة

القوانين

* ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
* ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

* ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)
* ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

* ل(أ') = ١ − ل(أ)   * ل(ب') = ١ − ل(ب)

اذا كان: أ ⊂ ب فإن:

* ل(أ ∪ ب) = ل(ب)   * ل(أ ∩ ب) = ل(أ)   * ل(أ − ب) = صفر

اذا كان أ ، ب حدثان متنافيان (مفيش تقاطع)

* أ ∩ ب = ∅   * ل(أ ∩ ب) = صفر
* ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)
* ل(أ − ب) = ل(أ)   * ل(ب − أ) = ل(ب)

ملاحظة

١) احتمال وقوع أ أو ب / احدهما على الأقل / أياً من الحدثين ← ل(أ ∪ ب)
٢) احتمال وقوع أ و ب معاً ← ل(أ ∩ ب)
٣) احتمال وقوع أ فقط / وقوع أ وعدم وقوع ب ← ل(أ − ب)
٤) احتمال وقوع ب فقط / وقوع ب وعدم وقوع أ ← ل(ب − أ)
٥) احتمال عدم وقوع أ ← ل(أ')
٦) احتمال عدم وقوع ب ← ل(ب')
٧) احتمال عدم وقوع أياً من الحدثين ← ل(أ ∪ ب)'
٨) احتمال وقوع أحد الحدثين دون وقوع الآخر ← ل(أ − ب) + ل(ب − أ)

ل(أ) + ل(أ') = ١	أ ∩ أ' = ∅	أ ∪ أ' = ف
• ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١ ، ل(أ) ∈ [٠ ، ١]	ل(أ ∩ أ') = صفر	ل(أ ∪ أ') = ١
	احتمال الحدث المستحيل = صفر	احتمال الحدث المؤكد = ١

الاحتمال

① في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر إذا كان:

أ : حدث الحصول على عدد زوجي

ب : حدث الحصول على عدد أولي.

أوجد: ل(أ) ، ل(ب) ، ل(أ ∪ ب)

الحل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

أ = {٢ ، ٤ ، ٦}

ب = {٢ ، ٣ ، ٥}

ل(أ) = ٣/٦ = ١/٢

ل(ب) = ٣/٦ = ١/٢

أ ∪ ب = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٣ ، ٥}

ل(أ ∪ ب) = ٥/٦ #

② إذا كان: ل(أ) = ٧و٠ ، ل(ب) = ٢و٠ . أوجد ل(أ ∪ ب) إذا كان:

[أ] ل(أ ∩ ب) = ٤و٠

[ب] أ ، ب حدثان متنافيان

[جـ] ب ⊂ أ

الحل

① ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٧و٠ + ٢و٠ − ٤و٠ = ٥و٠

② أ ، ب حدثان متنافيان:

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

= ٧و٠ + ٢و٠ = ٩و٠

③ ب ⊂ أ :

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) = ٧و٠

③ إذا كان ل(أ) = ٧و٠ ، ل(ب) = ٦و٠ ، ل(أ ∩ ب) = ٥و٠

أوجد:

① احتمال عدم وقوع أ .

② احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب

③ احتمال وقوع أ أو ب .

الحل

① ل(أ') = ١ − ل(أ)

= ١ − ٧و٠ = ٣و٠

② ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

= ٧و٠ − ٥و٠ = ٢و٠

③ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٧و٠ + ٦و٠ − ٥و٠

= ٨و٠

④ إذا كان ل(أ) = ٥و٠ ، ل(أ ∪ ب) = ٨و٠ ، ل(أ ∩ ب) = ١و٠

أوجد ل(ب) ؟

الحل

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٨و٠ = ٥و٠ + ل(ب) − ١و٠

∴ ل(ب) = ٨و٠ − ٤و٠

= ٤و٠

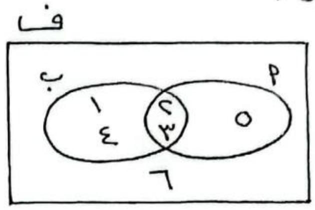
⑤ في الشكل المقابل :

أوجد :

① ل (أ ∩ ب)

② ل (أ − ب)

③ احتمال عدم وقوع أ =



الحل

① أ ∩ ب = {٢ ، ٣} ⟸ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٦}$

∴ ل (أ ∩ ب) = $\boxed{\frac{١}{٣}}$

② أ − ب = {٥} ⟸ ل (أ − ب) = $\boxed{\frac{١}{٦}}$

③ أَ = {١ ، ٤ ، ٦}

∴ ل (أَ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\boxed{\frac{١}{٢}}$

مسائل أكمل هامة

① س ص − ٤ = ٠ ، من الدرجة الثانية

② المعادلتين س = ٤ ، ص − ٣ = ٠ تتقاطعان في (٤ ، ٣)

③ نقطة تقاطع المستقيمين س = −١ ، ص + ٢ = ٠ تقع في الربع الثالث

④ اذا كانت س − ١ = ٠ ، س + ص = ٥ فإن المستقيمان يكونان متقاطعان

⑤ اذا كان س + ٢ص = ٣ ، ٢س + ٤ص = ٥ فإن المستقيمان يكونان متوازيان

⑥ المستقيمان : ٣س + ٥ص = ٠ ، ٥س − ٣ص = ٠ يتقاطعان في نقطة الأصل (٠ ، ٠)

⑦ مجموعة حل المعادلتين س = ص ، س² + ص² = ٢ هي {(١ ، ١) ، (−١ ، −١)}

⑧ اذا كان س + ص = ٠ ، س² = ٢٥ فإن ص = ٥ ، −٥

⑨ اذا كان س² − ص² = ١٨ ، س + ص = ٣ فإن س − ص = ٦

⑩ اذا كان س² − ص² = ٢(س + ص) فإن س − ص = ٢

⑪ اذا كان س − ٣ = ٠ ، ص² = س + ٦ فإن ص = ±٣

⑫ اذا كان المستقيمان : س + ٢ص = ٤ ، ٢س + ك ص = ١١ متوازيان فإن ك = ٤

⑬ اذا كان س + ٤ص = ٧ ، ٣س + ك ص = ٢١ لها عدد لانهائي من الحلول فإن ك = ١٢

⑭ مجموعة حل المعادلتين ص = س ، س ص = ٩ هي {(٣ ، ٣) ، (−٣ ، −٣)}

⑮ اذا كان أ ب = ٣ ، أ ب² = ١٢ فإن ب = ٤

⑯ اذا كان منحنى الدالة د(س) = س² − أ يمر بالنقطة (٢ ، ٠) فإن أ = ٤

⑰ اذا كان ب² − ٤ أ جـ > صفر فإن عدد جذور المعادلة = ٢

⑱ اذا كان ٢⁵ × ٣⁵ = ٦^ك فإن ك = ٥

⑲ اذا كان د(س) = $\frac{س + ٧}{س − ٢}$ فإن : مجالها = ح − {٢} واصفارها = {−٧}

⑳ اصفار الدالة :

د(س) = صفر هي ح

د(س) = س² + ٩ هي ∅

د(س) = ٥ هي ∅

د(س) = ٢س + ٦ هي {−٣}

د(س) = (س − ٣)² هي {٣}

(٢١) اذا كان مجال الكسر الجبري ن(س) هو ع - {٢ ، ٣ ، ٤} فإن ن(٣) = غير معرفة / ليس لها وجود

(٢٢) اذا كان للدالة $د(س) = \frac{س-٥}{س+٣}$ معكوساً ضربياً فإن مجاله = ع - {٥ ، -٣}

(٢٣) مجال الدالة $د(س) = \frac{٣}{س} + \frac{س}{٣}$ هو ع - {٠}

(٢٤) اذا كان $\frac{١+أ}{س-٢}$ ، $\frac{٤}{س-٢}$ دالتان متساويتان فإن أ = ٣

(٢٥) أبسط صورة للمقدار $\frac{٢-س}{س-٢}$ هي -١

(٢٦) اذا كان ص(د) = {٢} ، $د(س) = س^٣ - م$ فإن م = ٨

(٢٧) مجموعة أصفار الدالة $د(س) = \frac{٢س+٦}{س^٢-٩}$ هي ∅ ومجالها ع - {٣ ، -٣}

الحل

$د(س) = \frac{٢\cancel{(س+٣)}}{(س-٣)\cancel{(س+٣)}}$

المجال = ع - {٣ ، -٣} ← المقام

$د(س) = \frac{٢}{س-٣}$ ص(د) = ∅ ← البسط

(٢٨) اذا كان منحنى الدالة التربيعية يمر بالنقاط (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٣) ، (٥ ، ٠) فإن مجموعة حل المعادلة د(س) = صفر هي {٢ ، ٥}

اذا كان منحنى الدالة التربيعية لا يقطع محور السينات فإن مجموعة حل د(س) = ٠ هي ∅

اذا كان $\sqrt{س^٢} = ٢٥$ فإن س = ±٢٥

(٢٩) اذا كان س عدد سالباً فإن أكبر الأعداد هي .....
[٥+س ، ٥-س ، ٥س ، $\frac{٥}{س}$]

(٣٠) اذا كان $٢^{ك-٣} = ١$ فإن ك = ٣

(٣١) اذا كان $٦^س = ١٢$ فإن $٦^{س+١} = ...$

الحل $٦^س \times ٦^١ = ١٢ \times ٦ = \boxed{٧٢}$

(٣٢) اذا كان |س| = ٧ فإن س = ±٧

(٣٣) اذا كان $\sqrt{١٠٠-٣٦} = ١٠ - أ$ فإن أ = ٢

(٣٤) اذا كان $٤^{١٥} + ٤^{١٥} = ...$
[$٤^{٣٠}$ ، $٤^{صفر}$ ، $٨^{١٥}$ ، $٢^{٣١}$]

(٣٥) نصف العدد $٤^٦ = ...$

الحل $\frac{(٢^٢)^٦}{٢} = \frac{٢^{١٢}}{٢} = ٢^{١١}$

(٣٦) $\frac{٥^{س+١}}{٥^{س+١}} = ١$

(٣٧) $س^٢ + ك س - ٢١ = (س-٣)(س+٧)$ فإن ك = ٤

(٣٨) $٣^ص \times ٥^ص = ٢٢٥$ فإن ص = ...

الحل $(٣\times٥)^ص = ١٥^٢$ ∴ ص = ٢

(٣٩) اذا كان $\frac{١}{٣}س = ٢$ فإن $\frac{١}{٢}س = ٣$

الحل س = ٦ ∴ $\frac{١}{٢} \times ٦ = ٣$

(٤٠) معادلة محور تماثل $د(س) = س^٢ - ٤$ هي س = ٠

(٤١) مجموعة حل المعادلة $س^٢ + ٩ = ٠$ هي ∅

(٤٢) المعادلة $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ٠$ من الدرجة .....

مراجعة

هندسة

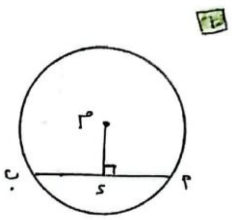
الصف الثالث الإعدادى

إعداد

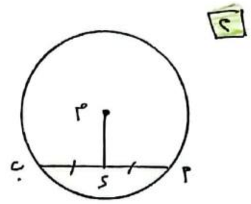
أ / محمد شحتة شوقى
٠١٠٩٥٧٧٦٠٩٦

إعداد
م/ محمد شحتة
٠١٠٩٥٧٧٦٠٩٦

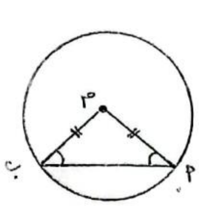
أولاً النظريات والنتائج



∵ م د ⊥ أ ب
∴ د منتصف أ ب



∵ د منتصف أ ب
∴ م د ⊥ أ ب



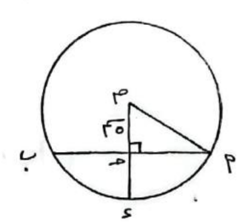
أنصاف الأقطار متساوية
∵ م أ = م ب = نق
∴ ق(أ̂) = ق(ب̂)

أكمل

① المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على وتر فيها ينصف الوتر
② المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أي وتر فيها عمودي على هذا الوتر
③ المستقيم العمودي على أي وتر من منتصفه يكون مار بالمركز.

* مار بالمركز
* عمودي على الوتر
* ينصف الوتر

١ في الشكل المقابل



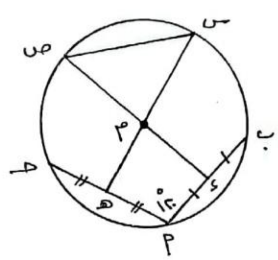
الدائرة طول نصف قطرها = ١٣ سم

أكمل:

هـ د = ... سم

أ ب = ... سم

٢ في الشكل المقابل

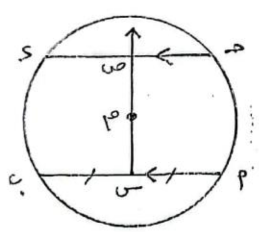


اثبت أن:
△ م س ص متساوي الأضلاع.

الحل

∵ د منتصف أ ب ∴ م د ⊥ أ ب
∴ ق(∠م د أ) = ٩٠°
∵ هـ منتصف أ جـ ∴ م هـ ⊥ أ جـ
∴ ق(∠م هـ أ) = ٩٠°
∵ مجموع زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°
∴ ق(∠د م هـ) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠) = ٦٠°
∴ ق(∠س م ص) = ق(∠د م هـ) = $\boxed{٦٠}$ بالتقابل بالرأس
∵ م س = م ص = نق ∴ ق(∠س) = ق(∠ص)
∴ ق(∠س) = ق(∠ص) = $\frac{١٨٠ - ٦٠}{٢}$ = $\boxed{٦٠}$
∴ △ م س ص متساوي الأضلاع #

٣ في الشكل المقابل



اثبت أن:
ص منتصف جـ د

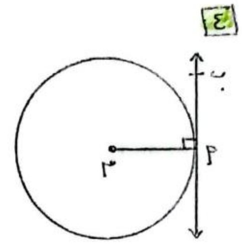
الحل

∵ س منتصف أ ب
∴ م س ⊥ أ ب
∴ ق(∠م س أ) = ٩٠°
∵ جـ د // أ ب
∴ ق(∠م ص د) = ق(∠م س أ) = ٩٠° بالتبادل
∴ م ص ⊥ جـ د
∴ ص منتصف جـ د

#

[أ / محمد شحتة 01095776096]

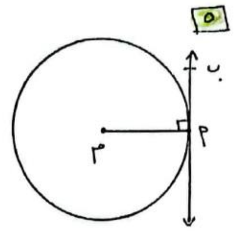
④



∵ أب مماس

∴ أب ⊥ م أ

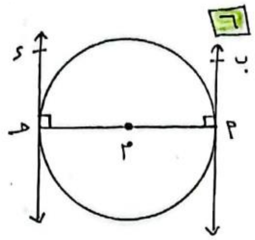
⑤



∵ أب ⊥ م أ

∴ أب مماس

⑥

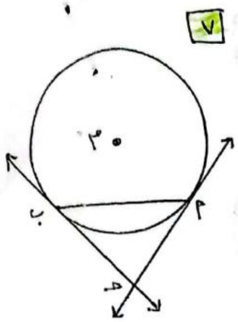


∵ أب ، جـ د مماسان

∵ أجـ قطر

∴ أب // جـ د

⑦



أكمل

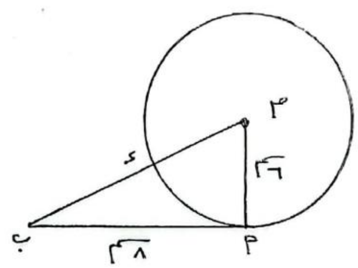
① المماس يكون ...... على نصف القطر المرسوم ......

② المستقيم العمودي على قطر الدائرة من احدى نهايتيه يكون .... للدائرة .

③ المماسان المرسومان من نهايتي قطر في الدائرة يكونان ......

④ المماسان المرسومان من نهايتي وتر في الدائرة يكونان ......

مثال ① في الشكل المقابل :



أب مماس للدائرة عند أ ،

أوجد : طول د ب ؟

الحل

∵ أب مماس ∴ م أ ⊥ أب

∴ ق(∠أ) = ٩٠°

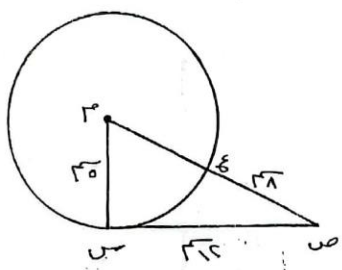
∴ م ب = $\sqrt{٦^٢ + ٨^٢}$ = ١٠ سم

∵ م أ = م د = نق = ٦ سم

∴ د ب = ١٠ − ٦ = ٤ سم

#

مثال ② في الشكل المقابل :



اثبت أن :

س ص مماس للدائرة عند

الحل

∵ م ع = م س = نق = ٥ سم

∴ م ص = ٨ + ٥ = ١٣ سم

∵ (م ص)^٢ = (١٣)^٢ = ١٦٩

∵ (م س)^٢ + (س ص)^٢ =

١٢^٢ + ٥^٢ = ١٦٩

∴ (م ص)^٢ = (م س)^٢ + (س ص)^٢

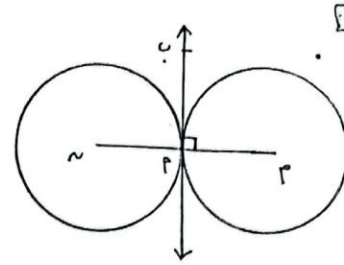
∴ ق(∠س) = ٩٠°

∴ م س ⊥ س ص

∴ س ص مماس للدائرة .

#

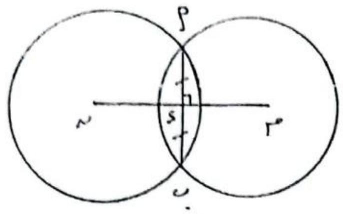
٨



∵ م ن خط المركزين ، أب مماس مشترك

∴ م ن ⊥ أب

٩



∵ م ن خط المركزين ، أب وتر مشترك

∴ م ن ⊥ أب ، ء منتصف أب

أكمل

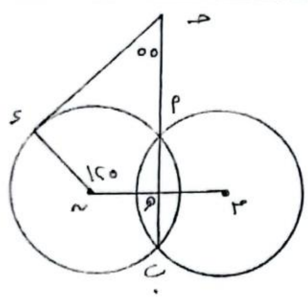
١) خط المركزين لدائرتين متماستين يكون ...... على المماس المشترك ويمر بنقطة ......

٢) خط المركزين لدائرتين متقاطعتين تكون ...... على الوتر المشترك و ......

٣) خط المركزين هو ...... الوتر المشترك.

مثال:

اثبت أن: هـ ء مماس للدائرة عند ء ؟



الحل

∵ م ن خط المركزين ، أب وتر مشترك

∵ م ن ⊥ أب ∴ ق(∠أ هـ ن) = ٩٠°

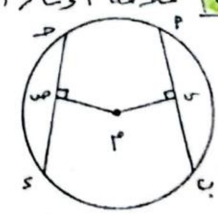
∵ مجموع زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠

∴ ق(∠ء) = ٣٦٠ − (٩٠ + ١٢٥ + ٥٥) = ٩٠°

∴ ن ء ⊥ هـ ء ∴ هـ ء مماس للدائرة #

---

١٠ علاقة أوتار الدائرة بمركزها:

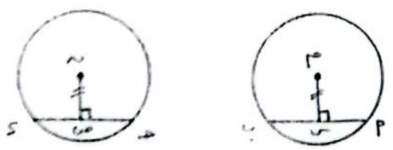


∵ وتر = وتر

∴ بعد = بعد

∵ أب = ء هـ ∴ $\boxed{\text{م س = م ص}}$

"في الدوائر المتطابقة"



∵ م س = ن ص ⟸ ∴ $\boxed{\text{أب = هـ ء}}$

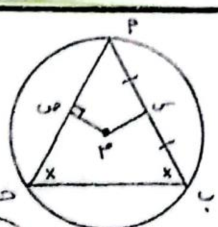
أكمل:

١) الأوتار المتساوية في الطول في الدائرة تكون على أبعاد ...... من مركزها.

٢) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من مركز الدائرة فإنها تكون ......

مثال / في الشكل المقابل:

اثبت أن: م س = م ص ؟



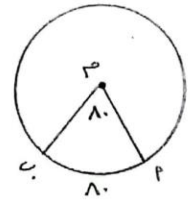
الحل

∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

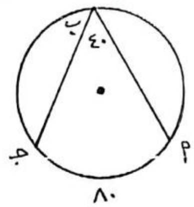
∵ ق(∠ب) = ق(∠جـ) ∴ أب = أجـ

∴ م س = م ص #

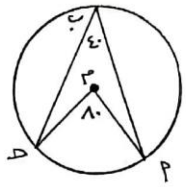
11 المركزية = القوس



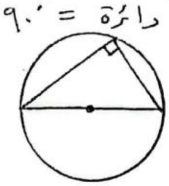
12 المحيطية = $\frac{1}{2}$ القوس



13 المحيطية = $\frac{1}{2}$ المركزية



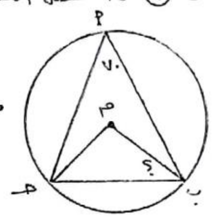
14 محيطية في نصف دائرة = 90°



أكمل

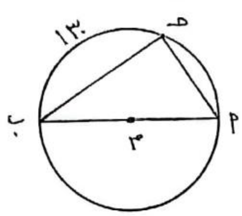
1. قياس القوس = قياس الزاوية المركزية المقابلة له.
2. قياس الزاوية المحيطية = ... قياس القوس المقابل لها.
3. قياس الزاوية المحيطية = ... قياس المركزية المشتركة معها في نفس القوس.
4. الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون ......

مثال 1 في الشكل المقابل:



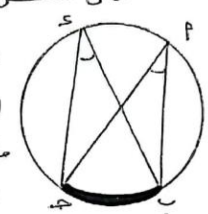
ق(∠أ ب جـ) = ...

مثال 2 في الشكل المقابل:



ق(∠ب) = ...

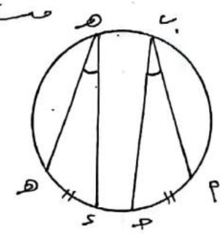
15 الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس.



ق(∠أ) = ق(∠د)

لأنهما محيطيتان مشتركتان في القوس ب جـ

16 الزوايا المحيطية التي تحصر أقواساً متساوية.



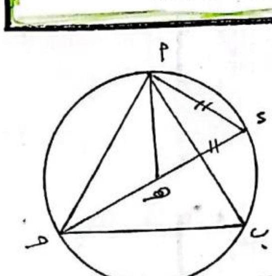
∵ ق(أ جـ) = ق(هـ د)

∴ ق(∠ب) = ق(∠هـ)

أكمل

1. الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس تكون ......
2. الزاوية المحيطية التي تحصر أقواساً متساوية في القياس تكون ......

مثال / في الشكل المقابل:



△ أ ب جـ متساوي الأضلاع ، أ د = د هـ

أثبت أن: △ أ د هـ متساوي الأضلاع.

الحل

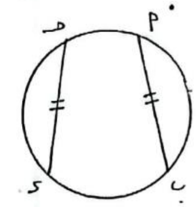
∵ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع ∴ ق(∠ب) = 60°

∵ ق(∠ب) = ق(∠د) = $\boxed{60}$ محيطيتان مشتركتان في أ جـ

∵ أ د = د هـ ∴ ق(∠د أ هـ) = ق(∠د هـ أ) = $\frac{180 - 60}{2}$ = $\boxed{60}$

∴ △ أ د هـ متساوي الأضلاع #

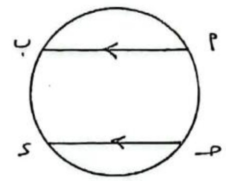
[١٧] أوتار متساوية



∵ أ ب = جـ د

∴ م(أ ب) = م(جـ د)

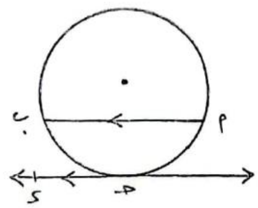
[١٨] أوتار متوازية



∵ أ ب // جـ د

∴ م(أ جـ) = م(ب د)

[١٩] وتر ومماس



∵ أ ب // جـ د (مستقيم)

∴ م(أ جـ) = م(جـ ب)

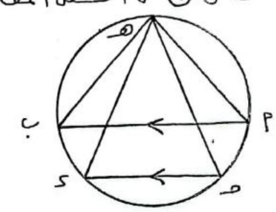
الحل

① الاقواس المتساوية فى القياس أوتارها تكون ....

② الوتران المتوازيان يحصران قوسين ....

③ القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه ....

مثال ① فى الشكل المقابل:



اثبت أن: م(أ هـ جـ) = م(د هـ ب)

الحل

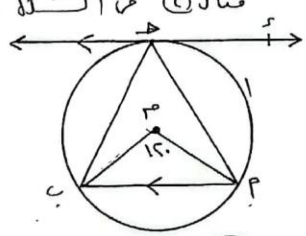
∵ أ ب // جـ د

∴ م(أ جـ) = م(ب د)

∴ م(أ هـ جـ) = م(د هـ ب)

#

مثال ② فى الشكل المقابل:



اثبت أن: △ أ ب جـ متساوى الأضلاع.

الحل

∵ م(أ جـ ب) = $\frac{1}{2}$ م(أ م ب) = $\boxed{60}^\circ$

∵ جـ د (مستقيم) // أ ب ∴ م(أ جـ) = م(ب جـ)

∴ أ جـ = ب جـ ∴ م(أ) = م(ب)

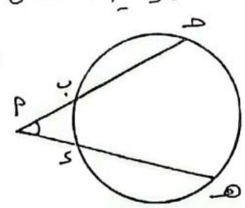
∴ م(أ) = م(ب) = $\frac{180 - 60}{2}$ = $\boxed{60}$

∴ △ أ ب جـ متساوى الأضلاع.

[٢٠] تمرين مشهور ①

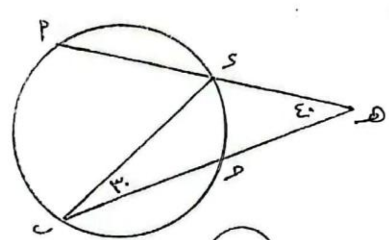
م(هـ) = $\frac{1}{2}$ [م(ب د) + م(أ جـ)]

تمرين مشهور ②



م(أ) = $\frac{1}{2}$ [م(جـ هـ) − م(ب د)]

مثال / فى الشكل المقابل:



أوجد م(أ ب) ؟

الحل

∵ م(ب) = $\frac{1}{2}$ م(جـ د) ∴ م(جـ د) = 60°

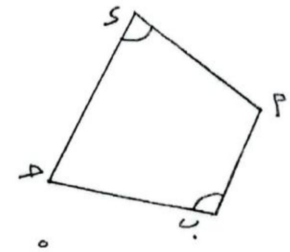
∴ م(هـ) = $\frac{1}{2}$ [م(أ ب) − م(جـ د)]

∴ 40 = $\frac{1}{2}$ [م(أ ب) − 60]

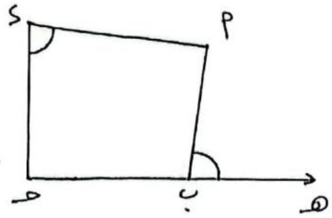
∴ م(أ ب) = 80 + 60 = $\boxed{140}$

#

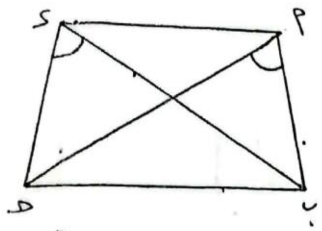
٢١ الشكل الرباعي الدائري :



م(ب̂) + م(د̂) = ١٨٠°



م(هـ ب̂ أ) = م(د̂)



م(ب أ̂ هـ) = م(ب د̂ هـ)
مرسومتان على القاعدة $\overline{ب هـ}$

أكمل

إذا كان الشكل الرباعي دائري فإن :

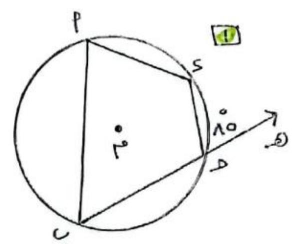
① كل زاويتان متقابلتان ....

② الزاوية الخارجة تساوي ....

③ كل زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها ....

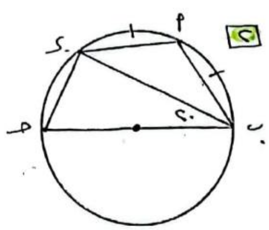
مثال ① أكمل :

(١)



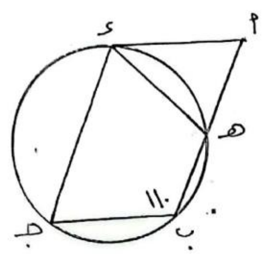
م(أ̂) = ...

(٢)



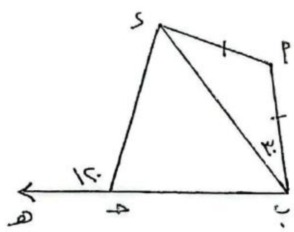
م(ج̂) = ...
م(أ ب̂ د) = ...

(٣)



أ ب جـ د متوازي أضلاع
م(هـ د̂ جـ) = ...
م(أ هـ̂ د) = ... م(أ̂) = ...

مثال ②

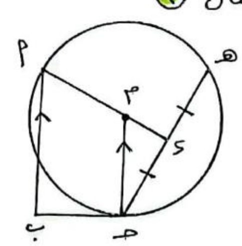


أثبت أن أ ب جـ د رباعي دائري.

الحل

∵ أ ب = أ د
∴ م(أ ب̂ د) = م(أ د̂ ب) = ٣٠
∴ م(أ̂) = ١٨٠ − (٣٠ + ٣٠) = ١٢٠
∵ م(أ̂) = م(د جـ̂ هـ) = ١٢٠
∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري. #

مثال ③

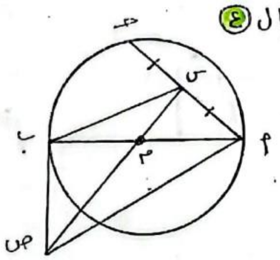


أثبت أن أ ب جـ د رباعي دائري.

الحل

∵ د منتصف $\overline{هـ جـ}$ ∴ م(م د̂ جـ) = ٩٠°
∵ $\overline{جـ ب}$ مماس ∴ م(م جـ̂ ب) = ٩٠
∵ $\overline{م جـ}$ // $\overline{أ ب}$ ∴ م(م جـ̂ ب) + م(ب̂) = ١٨٠
∴ م(ب̂) = ٩٠°
∴ م(أ د̂ جـ) = م(ب̂) = ٩٠
وهما متقابلتان
∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري #

مثال ④

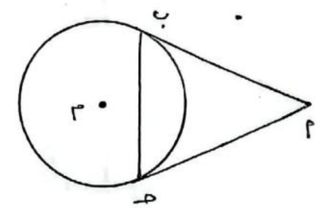


أثبت أن م س ب ص رباعي دائري.

الحل

∵ س منتصف $\overline{أ جـ}$ ∴ م(م س̂ أ) = ٩٠
∵ $\overline{ب ص}$ مماس ∴ م(م ب̂ ص) = ٩٠
∵ م(م س̂ ص) = م(م ب̂ ص)
وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{م ص}$
وفي جهة واحدة منها
∴ الشكل م س ب ص رباعي دائري.

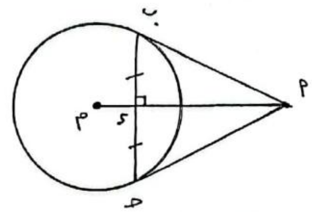
٢٢ العلاقة بين مماسات الدائرة :



∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان

∴ أب = أجـ

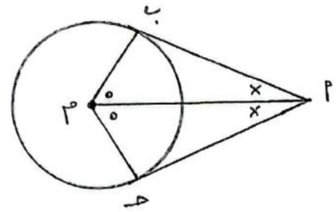
، ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{جـ}$)



∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان

∴ م أ ⊥ ب جـ

، د منتصف ب جـ



∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان

∴ أ م ينصف ($\hat{أ}$)

وينصف ($\hat{م}$)

الحل

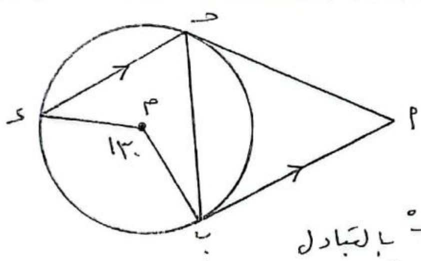
① القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة ....

② المستقيم المار بالمركز ونقطة تقاطع مماسين يكون .... لوتر التماس

③ المستقيم المار بالمركز ونقطة تقاطع مماسين ...... الزاوية بين المماسين

و .... الزاوية بين نصفي القطرين .

مثال ① / في الشكل المقابل :



اثبت أن ① جـب ينصف ($\hat{أجـد}$)

② أوجد ق($\hat{أ}$)

الحل

∵ ق($\hat{بجـد}$) = $\frac{1}{2}$ ق($\hat{م}$) = ٦٥°

∵ جـد // أب ∴ ق($\hat{بجـد}$) = ق($\hat{أبجـ}$) = ٦٥° بالتبادل

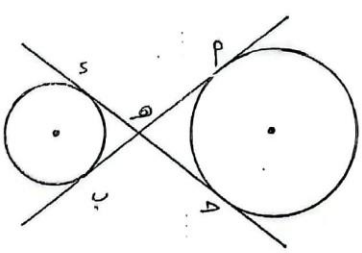
∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان مرسومتان من أ .

∴ أجـ = أب ∴ ق($\hat{أجـب}$) = ق($\hat{أبجـ}$) = ٦٥°

∴ ق($\hat{أجـب}$) = ق($\hat{بجـد}$) = ٦٥° ∴ جـب ينصف ($\hat{أجـد}$) # أولاً

∴ ق($\hat{أ}$) = ١٨٠ − (٦٥ + ٦٥) = $\boxed{٥٠}$ # ثانياً

مثال ② في الشكل المقابل :



اثبت أن أب = جـد

الحل ∵ أهـ ، جـهـ قطعتان مماستان من هـ

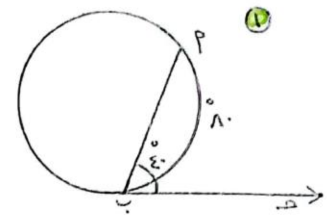
∴ أهـ = جـهـ ← ①

∵ هـب ، هـد قطعتان مماستان من هـ

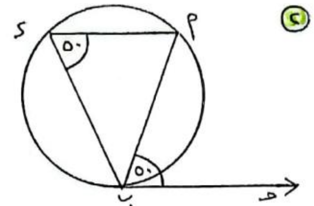
∴ هـب = هـد ← ②

بجمع ① ، ② ينتج أن : أب = جـد #

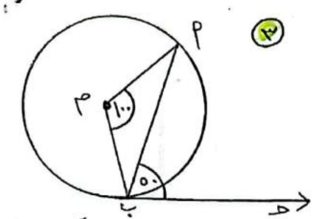
٢٣ الزاوية المماسية:

① 

المماسية = $\frac{1}{2}$ القوس

② 

المماسية = المحيطية

③ 

المماسية = $\frac{1}{2}$ المركزية

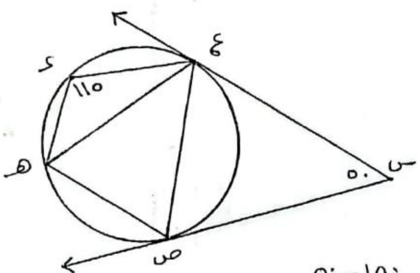
الحل

① قياس الزاوية المماسية .... قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.

② قياس الزاوية المماسية .... قياس المركزية المشتركة معها في نفس القوس.

③ قياس الزاوية المماسية .... قياس القوس المقابل لها.

مثال/ في الشكل المقابل:



اثبت أن: ع هـ = ع ص

الحل ∵ ع ص هـ د رباعي دائري

∴ ق(∠ع ص هـ) = ١٨٠ − ١١٥ = $\boxed{٦٥}$ ← ①

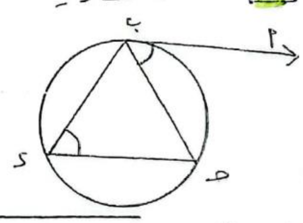
∵ س ع ، س ص قطعتان مماستان من نقطة س

∵ س ع = س ص ∴ ق(∠س ع ص) = ق(∠س ص ع) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = ٦٥

∵ ق(∠س ع ص) = ق(∠ع هـ ص) = $\boxed{٦٥}$ ← ② مماسية ومحيطية مشتركتان في ع ص

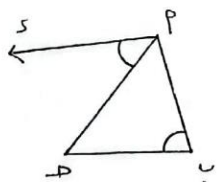
من ①، ② ∴ ع هـ = ع ص #

٢٤ عكس النظرية



∵ ق(∠ب) = ق(∠د)

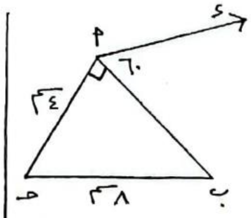
∴ ب أ مماس.



∵ ق(∠أ) = ق(∠ب)

∴ أ د مماس.

① في الشكل المقابل:



اثبت أن: أ د مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب جـ.

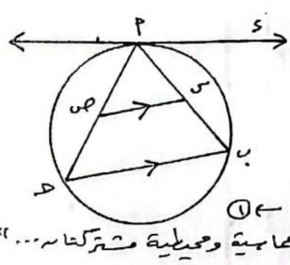
الحل ∵ ق(∠ب أ جـ) = ٩٠ ، أ جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∴ ق(∠ب) = ٣٠ ∴ ق(∠جـ) = ٦٠°

∵ ق(∠د أ ب) = ق(∠جـ) = ٦٠°

∴ أ د مماس #

② في الشكل المقابل:



اثبت أن: أ د مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ س ص.

الحل ∵ ق(∠د أ ب) = ق(∠جـ) ← ① "مماسية ومحيطية مشتركتان..."

∵ س ص // ب جـ

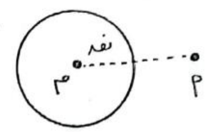
∴ ق(∠جـ) = ق(∠س ص أ) ← ② بالتناظر

من ①، ② ∴ ق(∠د أ س) = ق(∠أ ص س)

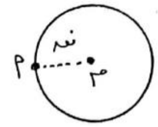
∴ أ د مماس #

ثانيًا النظري

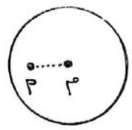
١ موضع نقطة بالنسبة لدائرة :



م أ > نق
أ ∈ خارج الدائرة

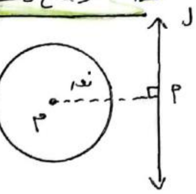


م أ = نق
أ ∈ تقع على الدائرة



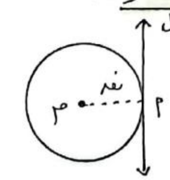
م أ < نق
أ ∈ داخل الدائرة .

٢ موضع مستقيم بالنسبة لدائرة :



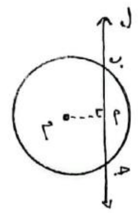
م أ > نق
ل ∈ خارج الدائرة

ل ∩ الدائرة = ∅



م أ = نق
ل ∈ مماس للدائرة

ل ∩ الدائرة = {أ}

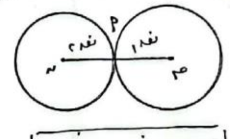


م أ < نق
ل ∈ قاطع للدائرة .

ل ∩ الدائرة = {ب ، جـ}

٣ موضع دائرة بالنسبة لدائرة :

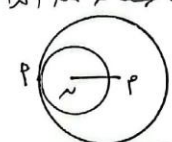
١ متماستان من الخارج



$\boxed{\text{م ن = نق}_1 + \text{نق}_2}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ}
سطح م ∩ سطح ن = {أ}

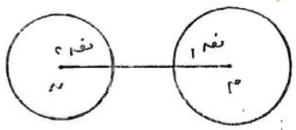
٢ متماستان من الداخل



$\boxed{\text{م ن = نق}_1 - \text{نق}_2}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ}
سطح م ∩ سطح ن = سطح ن

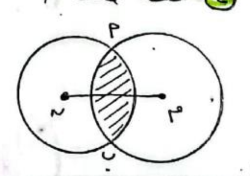
٣ متباعدتان



$\boxed{\text{م ن > الجمع}}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅
سطح م ∩ سطح ن = ∅

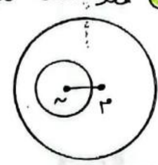
٤ متقاطعتان



$\boxed{\text{الطرح < م ن < الجمع}}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}
سطح م ∩ سطح ن = سطح المنطقة المظللة

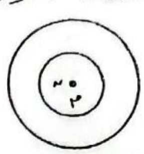
٥ متداخلتان



$\boxed{\text{م ن < الطرح}}$

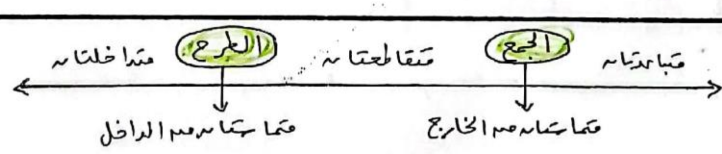
الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅
سطح م ∩ سطح ن = سطح ن

٦ متحدتا المركز



$\boxed{\text{م ن = صفر}}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅
سطح م ∩ سطح ن = سطح ن



مثال

(١) دائرة طول قطرها ٨ سم والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٤ سم فإنه يكون ......

(٢) دائرتان م ، ن طولا نصفي قطريهما ٩ سم ، ٤ سم بين وضع كلاً منهما بالنسبة للأخرى اذا كان م ن = ١٣ سم ....

(٣) دائرتان م ، ن متماستان من الخارج وكان م ن = ١٤ سم ، نق١ = ٥ سم فإن نق٢ = ...

(٤) دائرتان م ، ن متماستان من الداخل وكان م ن = ١٤ سم ، نق١ = ١٦ سم فإن نق٢ = ...

(٥) دائرتان م ، ن متقاطعتان وكان نق١ = ٣ سم ، نق٢ = ٥ سم فإن م ن ∈ .....

(٦) اذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ} وكان م ن = ١٠ سم ، نق١ = ٦ سم فإن نق٢ = ...

---

٤ طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ ط نق

مثال

(١) قياس الدائرة = ... ، قياس $\frac{1}{2}$ الدائرة = ...

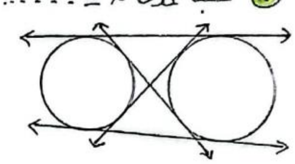
(٢) قياس القوس الذي يمثل $\frac{1}{4}$ قياس الدائرة = ...

(٣) طول القوس الذي يقابل زاوية مركزية قياسها ١٢٠° في دائرة طول نصف قطرها ٢١ سم ....

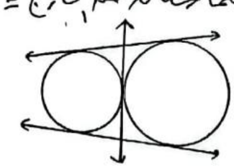
---

٥ عدد المماسات المشتركة :

(١) متباعدتان = ... ٤

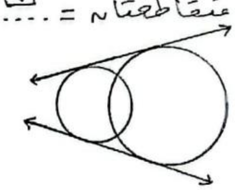


(٢) متماستان من الخارج = ... ٣

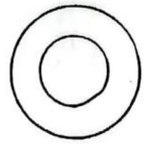


(٣) متماستان من الداخل = ... ١

(٤) متقاطعتان = ... ٢



(٥) متداخلتان (متحدتا المركز) = ... صفر



تعيين الدائرة

① يمكن رسم (تعيين) الدائرة اذا علم (مركزها) ، (طول نصف قطرها).

② عدد الدوائر التي تمر بنقطة معلومة = ... (عدد لا نهائي).

③ عدد الدوائر التي تمر بنقطتين = ... (عدد لا نهائي).
ومراكز هذه الدوائر تقع جميعًا على ...... (محور التماثل)

④ عدد الدوائر التي تمر بـ :
أ ثلاث نقط تنتمي لمستقيم واحد (على استقامة واحدة) = ... (صفر)
ب ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة = ... (1)

⑤ عدد الدوائر التي تمر برؤوس مثلث = ... (1)
وتسمى دائرة ...... (خارجة للمثلث).

⑥ مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو .... (نقطة تقاطع محاور تماثل اضلاعه).

⑦ مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو .... (نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة).

⑧ مركز الدائرة الخارجة للمثلث :
أ △ حاد ← فإن المركز يقع داخل الدائرة.
ب △ قائم ← فإن المركز يقع في منتصف الوتر.
جـ △ منفرج ← فإن المركز يقع خارج المثلث.

⑨ يمكن رسم دائرة تمر بـ المربع ، المستطيل ، شبه المنحرف متساوي الساقين.

⑩ لا يمكن رسم دائرة تمر بـ المعين ، متوازي الاضلاع ، شبه المنحرف العادي.

⑪ في حالة تحديد نصف قطر الدائرة "
اذا كان : أ نق $>$ $\frac{1}{2}$ أب ← يمكن رسم "دائرتان"
ب نق $=$ $\frac{1}{2}$ أب ← يمكن رسم "دائرة واحدة" وهي أصغر دائرة.
جـ نق $<$ $\frac{1}{2}$ أب ← لا يمكن رسم أي دوائر

مثال

1 عدد الدوائر التي تمر بالنقطتين أ ، ب حيث أب = ٨ سم وطول نصف قطر الدائرة ٥ سم = ...

2 اصغر دائرة يمكن رسمها تمر بالنقطتين أ ، ب حيث أب = ٤ سم يكون طول نصف قطرها = ...