معهد المتفوقين | الرياضيات | الدرجة: 600° | الشهادة الثانوية (علمي ٢٠٢٣-٢٠٢٤)

المدة: $e^{\ln 3}$ ساعات | **الصفحة الأولى** | الاسم:..................

أولا : أجب عن خمسة من الأسئلة الآتية: (40° لكل سؤال)

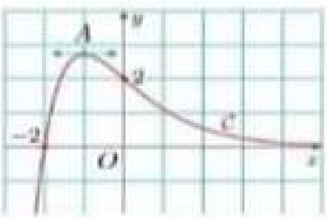
السؤال الأول:

عين العدد الطبيعي n الذي يحقق : $\binom{10}{n+2} = \binom{10}{3n}$.

السؤال الثاني :

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{x}{2} - 3\cos x$, ادرس سلوك التابع في جوار $+\infty$.

السؤال الثالث :

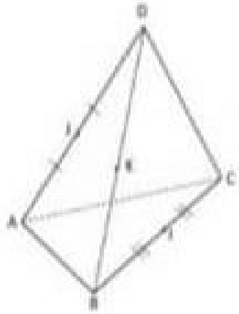


ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ حيث a و b عددان حقيقيان. اعتمادا على ما تجد في الشكل:

١. احسب قيمة كل من a و b ,ثم أثبت أن محور الفواصل مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

٢. احسب التابع المشتق واستنتج إحداثيات النقطة A الموافقة للقيمة الحدية الكبرى.

السؤال الرابع:



ليكن $ABCD$ رباعي وجوه وليكن K مركز ثقله ,فيه J منتصف $[AD]$ و I منتصف $[BC]$

أثبت أن النقاط J و K و I تقع على استقامة واحدة وعين موقع K.

السؤال الخامس :

ليكن f المعرف على $R \setminus \{1\}$ وفق : $f(x) = \frac{1}{1-x}$.احسب $f'(x)$ ثم أثبت أن المشتق من المرتبة n يعطى بالصيغة : $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ حيث $x \neq 1$.

السؤال السادس:

تحقق أن التابعين F و G المعرفين وفق : $F(x) = \tan^2 x$ و $G(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ هما تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ثم احسب التكامل التالي $I = \int e^x \sin x \, dx$.

ثانيا : أجب عن التمارين الأربعة التالية: (50° لكل تمرين)

التمرين الأول: تتألف عائلة من أربعة أطفال . نقبل أنه عند كل ولادة احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة طفلة أنثى. نفترض أن الولادات المتتالية هي أحداث مستقلة احتماليا , وليكن A : الحدث الأطفال الأربعة من نفس الجنس , و B : الحدث هناك طفلان ذكران وطفلتان . C : الحدث الطفل الثالث أنثى.

١. احسب احتمال وقوع كل من الأحداث A و B و C .

٢. احسب احتمال أن يكون الطفل الثالث أنثى ,إذا علمت أن هناك طفلان ذكران و طفلتان و استنتج هل الحدثان C , B مستقلان احتماليا.

٣. احسب احتمال ولادة طفلان ذكران على الأقل.

التمرين الثاني : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$.

١. ادرس $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3x)$.

٢. استنتج أن الخط C يقبل مقارب مائل Δ في جوار $+\infty$, وادرس الوضع النسبي للخط مع مقاربه المائل.

يتبع في الصفحة الثانية

التمرين الثالث:

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بـ: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n :

١. أثبت أن $u_n > 0$ أياً يكن n .
٢. المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي n وفق $t_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$ أثبت أن $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية واكتبها بدلالة n واحسب نهايتها.
٣. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة . واحسب نهايتها.

التمرين الرابع:

ليكن $\alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ نضع $A = \alpha + \alpha^4$ و $B = \alpha^2 + \alpha^3$ والمطلوب:

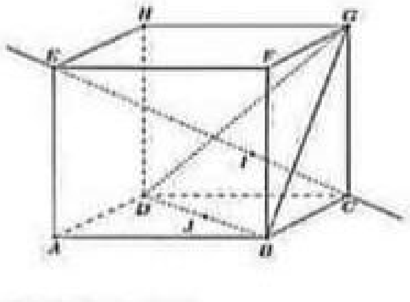
١. أثبت أن $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ واستنتج أن A و B هما جذرا المعادلة من الدرجة الثانية (1) .... $x^2 + x - 1 = 0$.
٢. عبر عن A بدلالة $\cos\frac{2\pi}{5}$.
٣. حل المعادلة (1) واستنتج قيمة $\cos\frac{2\pi}{5}$.

ثالثاً : حل المسألتين التاليتين : (100°لكل مسألة)

المسألة الأولى:

ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1 . I نقطة تقاطع المستوي (GBD) مع المستقيم (EC)، النقطة J منتصف $[BD]$.

نتأمل معلم متجانس $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:



١. حدد في هذا المعلم إحداثيات النقاط G, E, B, C, D, J .
٢. جد تمثيل وسيطي للمستقيم (EC) ، ثم أثبت أن المستقيم (EC) يعامد المستوي (GBD).
٣. أثبت أن المعادلة الديكارتية للمستوي (GBD) تعطى بالصيغة $x + y - z - 1 = 0$ ثم استنتج أن إحداثيات النقطة I هي $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
٤. احسب بعد النقطة E عن المستوي (GBD) .
٥. أثبت أن المثلث (GBD) متساوي الأضلاع واحسب مساحته .
٦. أثبت أن حجم رباعي الوجوه $EGBD$ يساوي $\frac{1}{3}$.

المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]0, +\infty\right[$ وفق : $f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ والمطلوب :

١. ادرس نهايات التابع f عند أطراف مجموعة التعريف وحدد المقاربات غير المائلة.
٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .
٣. استنتج أنه للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α في المجال $]0, +\infty[$ واحصره في مجال طوله يساوي 1.
٤. أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$ و $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C مع d.
٥. ارسم مقاربات C ثم ارسم C في معلم واحد.
٦. ليكن التابع h المعرف على المجال J وفق: $x \to x - \ln(2x+1) + \ln x$، أثبت أن التابع h هو مقصور التابع f على المجال J.

كل المنى بالتوفيق والنجاح

يمنع استخدام الآلات الحاسبة والجداول اللوغاريتمية