شغف رفيقك خطوة بخطوة

شغف التعليمي

Educational passion

أنواع التوابع المألوفة ومجموعة تعريفها:

$\boxed{1}$ التابع الصحيح ← كثير حدود

• $f(x) = x + 1$; $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$

• مجموعة تعريفه $\mathbb{R}$

• ندعو أكبر أس مع أمثاله "الحد المسيطر"

$\boxed{2}$ التابع الكسري: $\frac{\text{صحيح}}{\text{صحيح}}$

• إيجاد مجموعة التعريف:

← نعدم المقام.

← $D_f = \mathbb{R} \setminus \{$ القيم التي عدمت المقام $\}$

• ملاحظة: $x^2 + ♡$: إذا كان المقام بهذا الشكل يكون $D_f = \mathbb{R}$

$\boxed{3}$ التابع الجذري: $f(x) = \sqrt{u(x)}$

• معرف بشرط $u(x) \geq 0$

• إيجاد مجموعة التعريف:

← $u(x) \geq 0$

← نحل المتراجحة

- إيجاد نهاية تابع :

عندما $x \to \mp\infty$ ← في التوابع العادية : نعوض بأكبر أس فقط .

في التوابع الكسرية ← • درجة البسط = درجة المقام ← $\dfrac{\text{الأمثال}}{\text{الأمثال}}$

• درجة البسط < درجة المقام ← النهاية (0)

• درجة البسط > درجة المقام ← $\dfrac{\text{أكبر أس}}{\text{أكبر أس}}$

أمثلة :

1- $f(x) = \underbrace{2x^3}_{\text{أكبر أس}} + 3x + 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2- $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{3x^2+5} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \dfrac{2}{3}$

3- $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} x = \mp\infty$

4- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = 0$

حالات عدم التعيين: $\infty-\infty$ / $\frac{\infty}{\infty}$ / $\frac{0}{0}$ / $0\times\infty$

إزالة عدم التعيين ($\infty-\infty$):

- الضرب بالمرافق والتقسيم
- إخراج عامل مشترك مناسب
- كلاهما

ملاحظة: إذا كان التابع من الشكل $\sqrt{ax^2 \dots} \mp bx$

$\sqrt{a} \neq b$: نخرج x^2 عامل مشترك

$\sqrt{a} = b$: نضرب بالمرافق.

هام

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

مثال (1)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{2x^2+3}\right) = (-\infty+\infty)$$ عدم تعيين

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - x\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}\right)$$

$$= -\infty(1-\sqrt{2}) = +\infty$$

مثال (2):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\underset{a}{4}x^2+5}-\underset{b}{2}x\right) = (\infty-\infty)$$ ع.ت $\sqrt{a}=b$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+5}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+5}+2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+5}+2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{4x^2+5}+2x} = 0$$

إزالة عدم التعيين $(0\times\infty)$ و $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$: إخراج عامل مشترك.

مثال ٤ : ت

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}(\sqrt{x}+1) \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$$

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x}+x}{x^2+1}=\frac{\sqrt{x^2\times x}+x}{x^2+1}=\frac{\sqrt{x^3}+x}{x^2+1}$$

$$=\frac{\sqrt{x^4\left(\frac{1}{x}\right)}+x}{x^2+1}=\frac{x^2\left(\sqrt{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

/ /

- إزالة عدم التعيين ($\frac{0}{0}$): تحليل - اختزال - ضرب بالمرافق - عامل مشترك

مثال (1): $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2} \longrightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{0}{0}$ ع.ت

نلاحظ أن (1) جذر لـ ($2x^3 - x^2 - 1$) نقسم على $x-1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2+x+1}{x+2} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 + x + 1 \\ \hline x-1 & 2x^3 - x^2 - 1 \\ & \underline{-2x^3 \pm 2x^2} \\ & x^2 - 1 \\ & \underline{-x^2 \pm x} \\ & x - 1 \\ & \underline{x - 1} \\ & 0 \end{array}$$

/ /

مثال (2): ع.ت

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+4}-2}{3-\sqrt{2x^2+9}} \longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{2x+4}-2}{(3-\sqrt{2x^2+9}} \times \frac{\sqrt{2x+4}+2)}{3+\sqrt{2x^2+9})} \times \frac{3+\sqrt{2x^2+9}}{\sqrt{2x+4}+2}$$

$$=\frac{2x+4-4}{9-2x^2-9} \times \frac{3+\sqrt{2x^2+9}}{\sqrt{2x+4}+2}$$

$$=\frac{2x}{-2x^2} \times \frac{3+\sqrt{2x^2+9}}{\sqrt{2x+4}+2} = \frac{-(3+\sqrt{2x^2+9})}{x(\sqrt{2x+4}+2)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{-6}{0}=-\infty$$

قوانين هامة تفيد في إزالة عدم التعيين :

- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- $a^2+b^2=$ ليست مطابقة
- $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$
- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $\sin 2x=2.\sin x.\cos x$
  - $\sin x=2.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$
- $\cos 2x=$
  - $\cos^2 x-\sin^2 x$
  - $2\cos^2 x-1 \rightarrow \cos^2 x=\frac{1+2\cos 2x}{2} \rightarrow 2\cos^2 x=1+2\cos 2x$
  - $1-2\sin^2 x \rightarrow \sin^2 x=\frac{1-2\cos 2x}{2} \rightarrow 2\sin^2 x=1-2\cos 2$
- $\cos a-\cos b=-2.\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$
- $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$
- $\cos 3x=-3\cos x+4\cos^3 x$

أمثلة :

1. $f(x)=\frac{x^4-1}{x^3-1}\ ;\ x\rightarrow 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2-b^2=(a-b)(a+b) \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \end{array}}$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{0}{0}$. ع.ت

$$f(x)=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=\frac{4}{3}$$

/ /

2. $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; $x\to 0$

$$\boxed{\begin{aligned}1-\cos x&=2\sin^2\tfrac{x}{2}\\ \sin x&=2\sin\tfrac{x}{2}\cdot\cos\tfrac{x}{2}\end{aligned}}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{0}{0}$ ت.ع

$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

3. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+x^3}}$; $x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{0}{0}$ ت.ع

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ مبرهنة

$f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+x^3}}=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2(1+x)}}=\dfrac{\sin x}{x\sqrt{1+x}}$

$\Rightarrow \lim f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+0}}=1$

4. $f(x)=\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x\cdot\sin x}$; $x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{0}{0}$ ت.ع

$f(x)=\dfrac{-2\cdot\sin\frac{4x}{2}\cdot\sin\frac{2x}{2}}{x\cdot\sin x}=\dfrac{-2\cdot\sin 2x\cdot\sin x}{x\cdot\sin x}$

$=\dfrac{-2\cdot 2\cdot\sin 2x}{2\cdot x}=\dfrac{-4\cdot\sin 2x}{2x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-4(1)=-4$

مبرهنة

5. $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; $x \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{0}{0}$ ع.ت

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2.\sin^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = 2(1)^2 = 2$

6. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$; $x \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{0}{0}$ ع.ت

$f(x) = \dfrac{2.\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2\left(\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

7. $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x}$; $x \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{0}{0}$ ع.ت

$f(x) = \dfrac{2.\sin^2 x}{x} = 2.\sin x.\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = (2)(0)(1) = 0$

8. $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x \cdot \sin x}$; $x \longrightarrow 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{0}$ ت.ع

$f(x) = \dfrac{2 \cdot \sin^2 x}{x \cdot \sin x} = \dfrac{2 \cdot \sin x}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2(1) = 2$

9. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x \cdot \sin x}$; $x \longrightarrow 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{0}$ ت.ع

$f(x) = \dfrac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{2x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2} \cdot (1)(1) = \frac{1}{2}$

10. $f(x) = \dfrac{1-\cos 3x}{5x^2}$, $x \longrightarrow 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{0}$ ت.ع

$f(x) = \dfrac{2 \cdot \sin^2 \frac{3}{2}x}{5x^2} = \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{\sin \frac{3}{2}x}{\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}x}\right)^2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{9}{4} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

مبرهنة الإحاطة:

$\boxed{1}$ إذا كان: $g(x) \le f(x) \le h(x)$ وكانت $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l \in \mathbb{R}$

فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

- ملاحظة: تستخدم مبرهنة الإحاطة عند

لفظ $\cos\infty / \sin\infty$ — تابع الجزء الصحيح $E(x)$ — عند الطلب.

$$-1 \le \frac{\sin}{\cos} \le 1$$

$$0 \le \frac{\sin^2}{\cos^2} \le 1$$

أمثلة:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + \cos 2x}{x+1}$

$$-1 \le \cos 2x \le 1$$

$$3x - 1 \le 3x + \cos 2x \le 3x + 1$$

$$\frac{3x-1}{x+1} \le \frac{3x + \cos 2x}{x+1} \le \frac{3x+1}{x+1} \Rightarrow \frac{3x-1}{x+1} \le f(x) \le \frac{3x+1}{x+1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x-1}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x+1}{x+1} = 3$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ "حسب مبرهنة الإحاطة"

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{5 - 2 \cdot \sin\sqrt{x}}$

$-1 \leq \sin\sqrt{x} \leq 1$

$2 \geq -2 \cdot \sin\sqrt{x} \geq -2$

$7 \geq 5 - 2 \cdot \sin\sqrt{x} \geq 3$

$\dfrac{1}{7} \leq \dfrac{1}{5 - 2 \cdot \sin\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{x^2}{7} \leq \dfrac{x}{5 - 2 \cdot \sin\sqrt{x}} \leq \dfrac{x^2}{3} \Rightarrow \dfrac{x^2}{7} \leq f(x) \leq \dfrac{x^2}{3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{7} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{3} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ «إحاطة»

3. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

$-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$

$-x^2 \leq x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x} \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq f(x) \leq x^2$

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ «إحاطة»

$\boxed{2}$ إذا كان $|f(x)-l| < g(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to\mp\infty} g(x) = 0$

فإن $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = l$

أمثلة:

1. $|f(x)+5| < \frac{1}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -5$ «مبرهنة»

2. $|f(x)+1| \leq \frac{x+\cos\sqrt{x}}{x^2+1}$

ما نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ ؟

$-1 \leq \cos\sqrt{x} \leq 1$

$x-1 \leq x+\cos\sqrt{x} \leq x+1$

$\frac{x-1}{x^2+1} \leq \frac{x+\cos\sqrt{x}}{x^2+1} \leq \frac{x+1}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\cos\sqrt{x}}{x^2+1} = 0$ «إحاطة»

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ «مبرهنة»

3 مبرهنة:

• إذا كان $f \geq g$ وكان $\lim\limits_{x \to \mp\infty} g(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = +\infty$

• إذا كان $f \leq g$ وكان $\lim\limits_{x \to \mp\infty} g(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = -\infty$

أمثلة:

1. $f(x) = x^2 - 5.\sin x \quad ; x \to +\infty$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$5 \geq -5\sin x \geq -5$$

$$x^2+5 \geq \underbrace{x^2 - 5\sin x}_{f} \geq \underbrace{x^2-5}_{g}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2-5) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5.\sin x) = +\infty$ «مبرهنة»

2. $f(x) \geq \frac{1}{4}x^2 \quad ; x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{4}x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

/ /

3. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

- أثبت أن $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

- " " $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- ما نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ ؟

الحل:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \frac{1+x-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

$\boxed{3+3 \le 3+4 \le 4+4}$

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x} \ge \sqrt{1+x} + \sqrt{x} \ge \sqrt{x} + \sqrt{x}$$

$$2\sqrt{1+x} \ge \sqrt{1+x} + \sqrt{x} \ge 2\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$ «إحاطة»

تابع الجزء الصحيح:

$E(0)=0 \quad E(1)=1 \quad E(2)=2 \dots$

$E(-1,1)=-2 \quad E(-1,5)=-2 \dots$

$E(0,1)=0 \;,\; E(1,2)=1 \dots$

$E([0,1[)=0$

$E([1,2[)=1$

- ملاحظة:

. $E(x)$ غير مستمر على $\mathbb{R}$.

. $E(x)$ مستمر على $[0,1[$

أو $[1,2[$

⋮

حفظ: $\boxed{x-1 < E(x) \leq x}$

- تمرين:

$C: f(x) = x - E(x) \;;\; [0,2]$

1. اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$
2. ارسم C على $[0;2]$
3. هل f مستمر على $[0,2]$ ؟
4. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - E(x)}{x^2+1}$

الحل: 1

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; x=0 \\ x-0 & ; 0<x<1 \\ 0 & ; x=1 \\ x-1 & ; 1<x<2 \\ 0 & ; x=2 \end{cases}$$

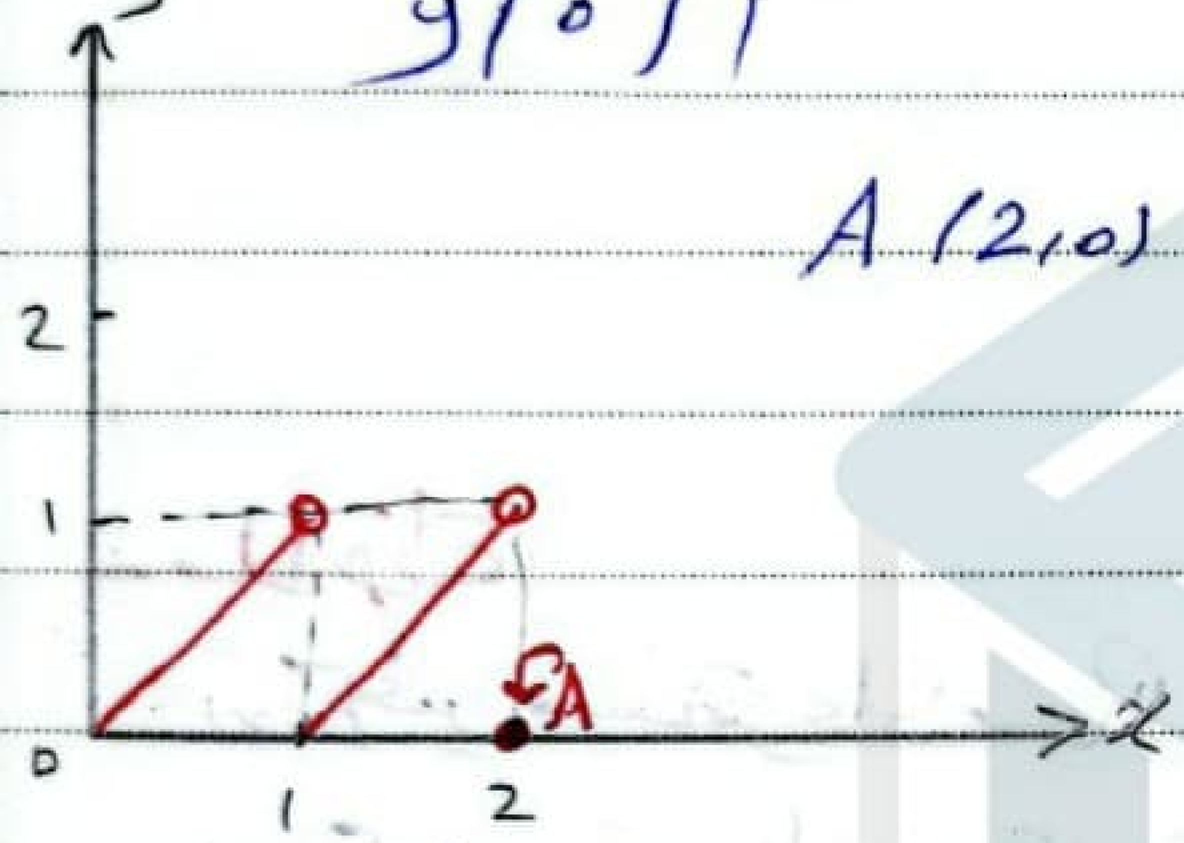
2. الرسم: $y=x \;;\; x\in[0,1[$

x	0	1
y	0	1

$y=x-1 \;;\; x\in[1,2[$

x	1	2
y	0	1

$x=2 \;;\; y=0 \rightarrow A(2,0)$



3. $F(x)$ غير مستمر على $[0,2]$ لأن خطه البياني انقطع عند $x=1$ و $x=2$.

4. نعلم أن:
$$x-1<E(x)\le x$$

نضرب بـ (-1):
$$-x+1 > -E(x) \ge -x$$
$$1 > x-E(x)\ge 0$$

نقسم على x^2+1:
$$\frac{1}{x^2+1} > \frac{x-E(x)}{x^2+1} \ge 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}(0)=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x-E(x)}{x^2+1}=0$$