الحل :

1. ① أثبت أنَّ f_n اشتقاقي في $x = 0$ عند كل $n \geq 2$.
ثُم ادرس حالة $n = 1$.

ليكن n عدداً طبيعياً غير معدوم، وليكن f_n التابع المعرف على المجال $I = \left[0,+\infty\right[$

وفق: $\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x \cdots\cdots x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} k(x) = \dfrac{f_n(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^n \ln x}{x} = x^{n-1} \ln x \qquad \cdots\cdots x > 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} x^{n-1} \ln x = \lim\limits_{x \to 0} x^{n-1} \lim\limits_{x \to 0}(x \ln x) = 0 \end{cases}$$

المناقشة في حالة $n = 1$

$$\begin{cases} k(x) = \dfrac{f_1(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x \ln x}{x} = \ln x \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$ والتابع غير اشتقاقي عند الصفر

التفسير الهندسي يقبل نصف مماس شاقولي

② احسب f'_n على المجال $\left]0,+\infty\right[$، ثم ادرس تغيرات f_n ونظم جدولاً بها.

$$\begin{cases} f'_n(x) = nx^{n-1} \ln x + x^n \left(\dfrac{1}{x}\right) = x^{n-1} \;\; n \ln x + 1 & : x > 0 \\ f'_n(0) = 0 & : x = 0 \end{cases}$$

دراسة التغيرات : حساب النهايات – إشارة المشتق – الجدول

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^n \ln x = +\infty \quad \text{لأن} \quad \begin{matrix} \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{matrix}$$

ينعدم المشتق $f_n'(x) = 0$ عندما $0 = 1 + n\ln x \quad x^{n-1}$

$$x = 0$$

إما

$$f(0) = 0$$

أو $n\ln x + 1 = 0$ ومنه $\ln x = -\frac{1}{n}$ بحل المعادلة السابقة

$$x = e^{-\frac{1}{n}}$$

نجد

$$f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = \left\{ \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \ln e^{-\frac{1}{n}} = e^{-1}\left(-\frac{1}{n}\ln e\right) = \frac{-1}{ne} \right.$$

x	0		$e^{-\frac{1}{n}}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{ne}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. ① أثبت أنَّ الخطوط $\mathscr{C}_n$ تمر جميعاً بنقطة ثابتة A بالإضافة إلى المبدأ O.

من الأفتراض لدينا $f_n(0) = 0$

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$x \ln x = x^2 \ln x$ ومنه إما $x = 0$ أو $x = 1$ و $f(1) = 0$

$$x \ln x \ \ x - 1 \ = 0$$

نلاحظ $\begin{cases} f_n(1) = 1^n \ln 1 = 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$ فالنقطة المشتركة $A(1,0)$

② أثبت أنَّ الخطوط $\mathscr{C}_n$ تقبل جميعاً مماساً مشتركاً في النقطة A.

$$:x > 0 \qquad f_n'(x) = x^{n-1} \ \ n \ln x + 1$$

وميل المماس لجميع الخطوط في النقطة المشتركة $A(1,0)$

يساوي $m = f_n'(1) = 1^{(n-1)} \ \ n \ln 1 + 1 \ = 1$

3. لتكن x_n فاصلة النقطة M_n من الخط $\mathscr{C}_n$ والتي تحقق $f'_n(x_n) = 0$.

أثبت أنَّ النقاط M_n واقعة على الخط Γ الذي معادلته $y = \frac{1}{e} \ln x$.

$$x = e^{-\frac{1}{n}}$$

النقطة التي ينعدم عندها المشتق هي $f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = \begin{cases} y = \dfrac{-1}{ne} \end{cases}$

أي $A\left(e^{-\frac{1}{n}} , \dfrac{-1}{ne}\right)$ وهذه النقاط تحقق المعادلة $y = \frac{1}{e} \ln x$ أياً كانت قيمة $n \geq 1$ n

3. رسم Γ والمماس المشترك للخطين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ في النقطة A، ثم ارسم الخطين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$

مسألة دراسة حزمة توابع: يمكن إعطائها

ليكن n عدداً طبيعياً غير معدوم، وليكن f_n التابع المعرف على المجال $I = \left[0, +\infty\right[$

وفق: $\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x & x > 0 \\ f_n(0) = 0 & : x = 0 \end{cases}$.

نرمز إلى الخط البياني للتابع f_n، في معلم متجانس $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$، بالرمز $\mathscr{C}_n$.

أولاً : ① أثبت أنَّ f_n اشتقاقي في $x = 0$ عند كل $n \geq 2$. ادرس حالة $n = 1$.

② احسب f'_n على المجال $\left]0, +\infty\right[$، ثم ادرس تغيرات f_n ونظم جدولاً بها.

ثانياً : ① أثبت أنَّ الخطوط $\mathscr{C}_n$ تمر جميعاً بنقطة ثابتة A بالإضافة إلى المبدأ O.

② أثبت أنَّ الخطوط $\mathscr{C}_n$ تقبل جميعاً مماساً مشتركاً في النقطة A.

ثالثاً: ① لتكن x_n فاصلة النقطة M_n من الخط $\mathscr{C}_n$ والتي تحقق $f'_n(x_n) = 0$.

أثبت أنَّ النقاط M_n واقعة على الخط Γ الذي معادلته $y = \dfrac{1}{e} \ln x$.

② ارسم Γ والمماس المشترك للخطين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ في النقطة A، ثم ارسم الخطين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$.

رابعاً: في حالة $n = 2$ نضع $g(x) = x^2 \ln x \; : x > 0$ خطه البياني $\mathscr{C}_2$

① **جِدْ** $g'(x)$, $g''(x)$ و $g'''(x)$.

واستنتج أن المشتق من المرتبة n حيث $n \geq 3$. يعطى بالعلاقة $g^{(n)}(x) = \dfrac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$

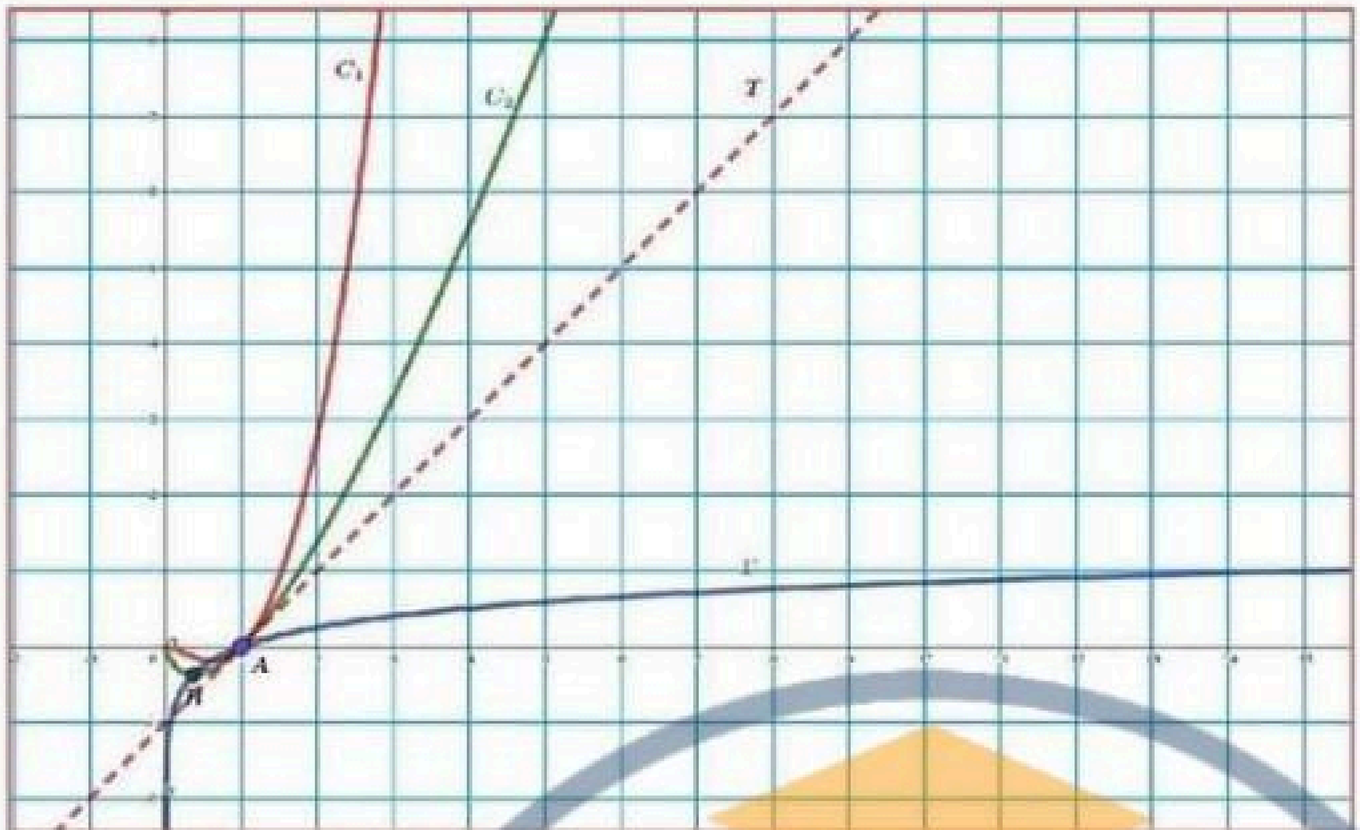
خامساً: احسب مساحة السطح المحصور بين الخط $\mathscr{C}_2$ ومحور الفواصل والمستقيمين

$x = 1,\ x = \dfrac{1}{e}$

سادساً : لنعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq 2}$ وفق $w_n = f(n) + \dfrac{1}{en}$ ادرس اطراد المتتالية w_n

ندوة : 2024 /4/15 – ميكائيل الحمود – نهلة مشرفي – هيثم خلل.

الرسم :



يتبع ....