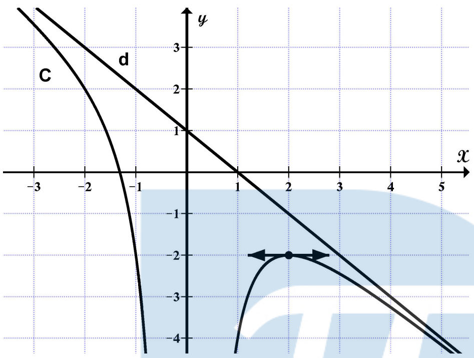
الرياضيات
نماذج امتحانية
البكالوريا السورية 2024

النموذج السادس
المدة : ثلاث ساعات
الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}^*$



وفق العلاقة $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2}$

حيث $a, b, c \in \mathcal{R}$ و d مقارب مائل لـ C

① جد معادلة المستقيم d

② احسب قيمة كل من a و b و c

③ جد حلول المتراجحة $f'(x) \ge 0$

④ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$

السؤال الثاني : في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطتان $A(-3, 0, -1)$, $B(3, 2, -1)$

نقرن بكل نقطة $M(x, y, z)$ من الفراغ المقدار $f(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$

① احسب $f(M)$ بدلالة x و y و z

② أثبت أن مجموعة النقاط M التي تحقق $f(M) = -6$ هي كرة يُطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R

السؤال الثالث : حل جملة المعادلتين :

$$2^{x} \times 2^{y} = 4 \quad .....(1)$$

$$2^{x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{y} = 6 \quad ....(2)$$

السؤال الرابع : لتكن المجموعة $S = \{0, 1, 2 ......15\}$

① ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S ؟

② ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S مجموعها ليس من مضاعفات العدد 3 ؟

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (٦٠ درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(x) = x^3 - 3x + 3$ خطه البياني C والمطلوب :

① ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

② أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in \mathcal{R}$ ثم بيّن أن $\alpha \in]-3, -2[$

③ ارسم الخط C

التمرين الثاني :

في معلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما على الترتيب العددان العقديان $a = 1 + i$ و $b = 1 - i$ والمطلوب :

① عيّن العددين p و q حتى يكون a و b جذري المعادلة $Z^2 + pZ + q = 0$

② جد الشكل المثلثي للعدد a واستنتج منه الشكل المثلثي للعدد b

③ استنتج قيمة العدد w حيثُ $w = a^6 + b^6$

④ إذا علمت أن R دوران مركزه O وزاويته θ وأن $R(A) = B$ احسب θ : $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران R

يتبع في الصفحة الثانية

التمرين الثالث : لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3n + 4 \end{cases}$

ولتكن المتتالية $(t_n)_{n \geq 0}$ حسابية تحقق العلاقة : $t_{n+1} = 2t_n - 3n + 4$

① جد t_n بدلالة n

② أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ هندسية ، اكتب v_n بدلالة n

③ استنتج u_n بدلالة n ، ثم بيِّن فيما إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة أم متباعدة .

التمرين الرابع :

في نادٍ رياضي يمارس 45% من أعضائه لعبة كرة الطاولة ونعلم أن 70% من أعضائه ذكور وأن 40% منهم لا يمارسون لعبة كرة الطاولة

نختار عشوائياً أحد أعضاء النادي احسب :

① احتمال أن يكون ذكر يمارس لعبة كرة الطاولة

② احتمال أن يكون لا يمارس لعبة كرة الطاولة علماً أنه أنثى

③ احتمال أن يكون أنثى علماً أنه يمارس لعبة كرة الطاولة

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن التابع g المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق : $g(x) = x - 1 + \ln x$

وليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = (\dfrac{x-1}{x})\ln x$

① بيِّن أن $g(1) = 0$ ثم ادرس تغيرات g ونظم جدولاً بها واستنتج إشارة $g(x)$

② جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

③ بيِّن أن $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ ونظم جدول تغيرات f وبيِّن أن $f(x) \geq 0$ أياً كانت $x \in I$

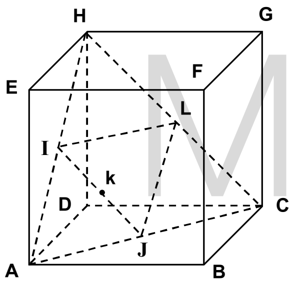
④ أثبت أن التابع F المعرف على I وفق : $F(x) = x\ln x - x - \dfrac{1}{2}\ln^2 x$ هو تابع أصلي للتابع f

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بين C_f ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$

المسألة الثانية :

ABCDEFGH مكعب طول ضلعه 4 ، I مركز الوجه ADHE ، J مركز الوجه ABCD ، L مركز الوجه DCGH ، k منتصف $[IJ]$

نتأمل المعلم المتجانس $(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AE})$



① هل A, k, G على استقامة واحدة

② أثبت أن الرباعي AJLI معين

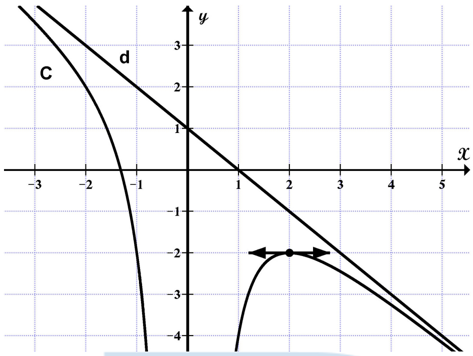
③ أثبت أن النقاط A و k و G و D تقع في مستوٍ واحد

④ استنتج أن النقطة A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة D و G و k يُطلب إيجاد تثقيلاتها

⑤ أثبت أن $\vec{n}(1,1,0)$ ناظم على المستوي (BDH) واكتب معادلة المستوي (BDH)

انتهت الأسـئلة

السـؤال الأول :



C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}^*$

وفق العلاقة $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2}$

حيث $a, b, c \in \mathcal{R}$ و d مقارب مائل لـ C

① جد معادلة المستقيم d

② احسب قيمة كل من a و b و c

③ جد حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$

④ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$

الحـــــــل :

① $m_d = \dfrac{1-0}{0-1} = -1$

$d : y = mx + p \Rightarrow \boxed{d : y = -x + 1}$

② $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{c}{x^2} = 0$

أي أن المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب مائل لـ C

ولدينا $d : y = -x + 1$ مقارب مائل لـ C وبالمطابقة نجد : $\boxed{a = -1}$ و $\boxed{b = 1}$

$$f(x) = -x + 1 + \frac{c}{x^2}$$

$$f(2) = -2 \Rightarrow -2 + 1 + \frac{c}{4} = -2 \Rightarrow \boxed{c = -4}$$

③ حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$ هي : $S =]0, 2]$

④ للمعادلة $f(x) = -2$ حلان

إعداد المدرسة	تنسيق وتدقيق المدرس	إشراف المدرس
براءة السماعيل	محمد السـيدعلي	عبد الحميد السـيد

السـؤال الثاني :

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(-3,0,-1)$ ، $B(3,2,-1)$

نقرن بكل نقطة $M(x,y,z)$ من الفراغ المقدار $f(M)=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$

① احسب $f(M)$ بدلالة x و y و z

② أثبت أن مجموعة النقاط M التي تحقق $f(M)=-6$ هي كرة يُطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R

الحـــل :

① $\overrightarrow{BM}(x-3,y-2,z+1)$ ، $\overrightarrow{AM}(x+3,y,z+1)$

$$f(M)=x^2-9+y^2-2y+(z+1)^2$$

② $x^2+y^2-2y+1-1+(z+1)^2-9=-6$

$$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$$

ومنه مجموعة النقاط M هي كرة مركزها $\Omega(0,1,-1)$ ونصف قطرها $R=2$

إعداد المدرس	تنسيق وتدقيق المدرس	إشراف المدرس
عدي الخميس	محمد السـيدعلي	عبد الحميد السيد

السـؤال الثالث :

حل جملة المعادلتين :

$$2^x\times2^y=4 \quad .....(1)$$

$$2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^y=6 \quad ....(2)$$

الحـــل :

من (1) نجد $2^{x+y}=2^2$ ومنه $x+y=2$ وبالتالي نجد $x=2-y$ نعوض في (2) نجد :

$$2^{2-y}-\left(\frac{1}{2}\right)^y=6\Rightarrow2^{2-y}-2^{-y}=6\Rightarrow2^2\times2^{-y}-2^{-y}=6$$

$$4\times2^{-y}-2^{-y}=6\Rightarrow3\times2^{-y}=6\Rightarrow2^{-y}=2\Rightarrow\boxed{y=-1}$$

$$x=2-(-1)\Rightarrow\boxed{x=3}$$

ومنه مجموعة الحل هي : $S=\{(3,-1)\}$

إعداد المدرس	تنسيق وتدقيق المدرس	إشراف المدرس
أحمد أبو السل	محمد السـيدعلي	عبد الحميد السيد

السـؤال الرابع :

لتكن المجموعة $S = \{0,1,2.......15\}$

① ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S ؟

② ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S مجموعها ليس من مضاعفات العدد 3 ؟

الحـــل :

① عدد المجموعات الكلي : $\binom{16}{3} = \frac{16\times15\times14}{3\times2\times1} = 560$

② لنجزّئ المجموعة S إلى ثلاث مجموعات جزئية وذلك تبعاً لقيمة باقي قسمة كل عدد على 3 كما يأتي :

$A_0 = \{0,3,6,9,12,15\}$

$A_1 = \{1,4,7,10,13\}$

$A_2 = \{2,5,8,11,14\}$

عدد المجموعات الجزئية التي يكون مجموع عناصرها من مضاعفات العدد 3 هو :

$$\left[\binom{6}{3}+\binom{5}{3}+\binom{5}{3}\right]+\binom{6}{1}\times\binom{5}{1}\times\binom{5}{1} = 20+10+10+150 = 190$$

فيكون عدد المجموعات المطلوبة هو : $560 - 190 = 370$

إعداد المدرس	تنسيق وتدقيق المدرس	إشراف المدرس
مازن الزعبي	محمد السـيدعلي	عبد الحميد السـيد

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول :

ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^3 - 3\mathcal{X} + 3$ خطه البياني C والمطلوب :

① ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

② أثبت أن للمعادلة $f(\mathcal{X}) = 0$ حل وحيد $\alpha \in \mathcal{R}$ ثم بيِّن أن $\alpha \in]-3,-2[$

③ ارسم الخط C

الحـــــل :

① التابع f معرف واشتقاقي على $\mathcal{R}$

$\lim\limits_{\mathcal{X}\to-\infty} f(\mathcal{X}) = -\infty$ و $\lim\limits_{\mathcal{X}\to+\infty} f(\mathcal{X}) = +\infty$

$f'(\mathcal{X}) = 3\mathcal{X}^2 - 3$

$f'(\mathcal{X}) = 0 \Rightarrow 3\mathcal{X}^2 - 3 = 0 \Rightarrow \mathcal{X} = \pm 1$

$f(1) = 1, f(-1) = 5$

$\mathcal{X}$	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(\mathcal{X})$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(\mathcal{X})$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

② التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty,-1[$ و $0 \in f(]-\infty,-1[) =]-\infty, 5[$ فإنَّ للمعادلة $f(\mathcal{X}) = 0$ حل وحيد في المجال $]-\infty,-1[$

وبما أن $0 \notin f([-1,+\infty[) = [1,+\infty[$

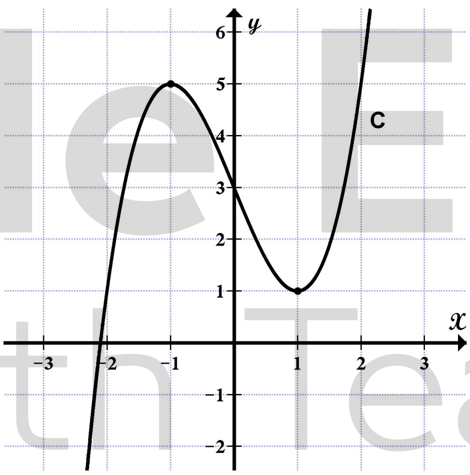
فإن للمعادلة $f(\mathcal{X}) = 0$ حل وحيد في $\mathcal{R}$

$f(-3) = (-3)^3 - 3(-3) + 3 = -15 < 0$

$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 3 = 1 > 0$

نلاحظ $f(-3), f(-2)$ من إشارتين مختلفتين فيكون $-3 < \alpha < -2$

③ الرسم :



إشراف المدرس	تنسيق وتدقيق المدرس	إعداد المدرس
عبد الحميد السـيد	محمد السـيدعلي	بلال أبو حصيني

التمرين الثاني :

في معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما على الترتيب العددان العقديان $a = 1+i$ و $b = 1-i$ والمطلوب :

① عيِّن العددين p و q حتى يكون a و b جذري المعادلة $Z^2 + pZ + q = 0$

② جد الشكل المثلثي للعدد a واستنتج منه الشكل المثلثي للعدد b

③ استنتج قيمة العدد w حيثُ $w = a^6 + b^6$

④ إذا علمت أن R دوران مركزه O وزاويته θ وأن $R(A) = B$ احسب θ: $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران R

الحـــــــل :

① $a + b = -p \Rightarrow 1+i+1-i = -p \Rightarrow \boxed{p = -2}$

$a \cdot b = q \Rightarrow (1+i)(1-i) = q \Rightarrow 1+1 = q \Rightarrow \boxed{q = 2}$

② $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$a = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$b = \bar{a} = \sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$$

③ $$a^6 = (\sqrt{2})^6(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^6 = 8(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -8i$$

$$b^6 = (\bar{a})^6 = \overline{a^6} = 8i$$

$$w = -8i + 8i \Rightarrow \boxed{w = 0}$$

④ $$\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{OB}}}{Z_{\overrightarrow{OA}}}\right) = \arg\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$= \arg(b) - \arg(a) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\theta = -\frac{\pi}{2}}$$

وتكون الصيغة العقدية للدوران R هي : $Z' = e^{-i\frac{\pi}{2}} Z$

إشراف المدرس	تنسيق وتدقيق المدرس	إعداد المدرس
عبد الحميد السيد	محمد السـيدعلي	وائل عنيزان

التمرين الثالث :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة تدريجياً وفق : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3n + 4 \end{cases}$

ولتكن المتتالية $(t_n)_{n\ge 0}$ حسابية تحقق العلاقة : $t_{n+1} = 2t_n - 3n + 4$

① جد t_n بدلالة n

② أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\ge 0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ هندسية ، اكتب v_n بدلالة n

③ استنتج u_n بدلالة n ، ثم بيِّن فيما إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متقاربة أم متباعدة .

الحـــــــــل :

① بما أن $(t_n)_{n\ge 0}$ حسابية فإن $t_n = an + b$

وبالتالي يكون $t_{n+1} = a(n+1) + b = an + a + b$

نعوض في العلاقة نجد :

$$\begin{aligned} an + a + b &= 2(an + b) - 3n + 4 \\ &= (2a - 3)n + 2b + 4 \end{aligned}$$

ومنه يكون : $a = 2a - 3 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$a + b = 2b + 4 \Rightarrow \boxed{b = -1}$

وبالتالي : $t_n = 3n - 1$

② $v_{n+1} = u_{n+1} - t_{n+1} = 2u_n - 3n + 4 - 2t_n + 3n - 4 = 2(u_n - t_n) = 2v_n$

والمتتالية $(v_n)_{n\ge 0}$ هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = u_0 - t_0 = 2 + 1 = 3$

ومنه نجد : $v_n = 3(2)^n$

③ $u_n = v_n + t_n = 3(2)^n + 3n - 1$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ($\lim_{n\to+\infty} 3(2)^n = +\infty$ هندسية أساسها $2 > 1$)

والمتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متباعدة

إشراف المدرس	تنسيق وتدقيق المدرس	إعداد المدرس
عبد الحميد السيد	محمد السـيدعلي	أحمد البـقي

التمرين الرابع :

في نادٍ رياضي يمارس 45% من أعضائه لعبة كرة الطاولة ونعلم أن 70% من أعضائه ذكور وأن 40% منهم لا يمارسون لعبة كرة الطاولة

نختار عشوائياً أحد أعضاء النادي احسب :

① احتمال أن يكون ذكر يمارس لعبة كرة الطاولة

② احتمال أن يكون لا يمارس لعبة كرة الطاولة علماً أنه أنثى

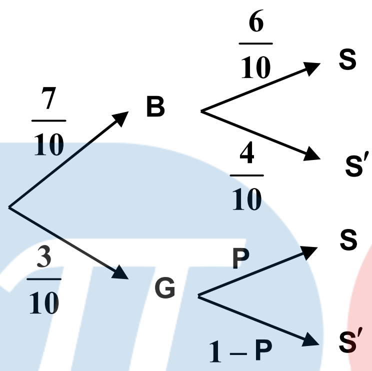
③ احتمال أن يكون أنثى علماً أنه يمارس لعبة كرة الطاولة

الحــــــــل :

S : يمارس لعبة كرة الطاولة

B : ذكر

G : أنثى



① $P(B \cap S) = P(S \mid B) \cdot P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{50}$

② $P(S' \mid G) = 1 - P$

$$P(S) = P(S \cap B) + P(S \cap G)$$

$$\frac{45}{100} = \frac{42}{100} + \frac{30}{100} P \Rightarrow \frac{30}{100} P = \frac{3}{100} \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{10}}$$

ومنه نجد $P(S' \mid G) = \frac{9}{10}$

③ $P(G \mid S) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)}$

$$P(G \cap S) = \frac{30}{100} P = \frac{30}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{100}$$

$$P(G \mid S) = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{45}{100}} \Rightarrow \boxed{P(G \mid S) = \frac{1}{15}}$$

ملاحظة : يمكن الحل بدون المخطط الشجري

إعداد المدرس	تنسيق وتدقيق المدرس	إشراف المدرس
أحمد الكلـــش	محمد الســيدعلي	عبد الحميد السيد

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى :

ليكن التابع g المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق : $g(x) = x - 1 + \ln x$

وليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق : $f(x) = (\frac{x-1}{x})\ln x$

① بيِّن أن $g(1) = 0$ ثم ادرس تغيرات g ونظم جدولاً بها واستنتج إشارة $g(x)$

② جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

③ بيّن أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ونظم جدول تغيرات f وبيّن أن $f(x) \geq 0$ أياً كانت $x \in I$

④ أثبت أن التابع F المعرف على I وفق : $F(x) = x\ln x - x - \frac{1}{2}\ln^2 x$ هو تابع أصلي للتابع f

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بين C_f ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$

الحــــــــل :

① $g(1) = 1 - 1 + 0 = 0$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ وذلك لأن $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ وذلك لأن $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

التابع g اشتقاقي على I

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	$+$	$+$	
$g(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ من الجدول :

$g(x) < 0$ عندما $x \in]0,1[$

$g(x) > 0$ عندما $x \in]1,+\infty[$

$g(1) = 0$

② $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ وذلك لأن $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ وذلك لأن $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$

③ $f'(x) = \frac{x - x + 1}{x^2}\ln x + \frac{x-1}{x^2} = \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

من الجدول السابق نلاحظ أن $f'(x) = 0$ عندما $x = 1$ و $f(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ من الجدول أن $f(x) \geq 0$ أياً كانت $x \in I$

④ التابع F اشتقاقي على I

$$F'(x) = \ln x + \frac{1}{x}(x) - 1 - \frac{2}{2}(\ln x)(\frac{1}{x}) = \ln x - \frac{1}{x}\ln x$$

$$= (1 - \frac{1}{x})\ln x = (\frac{x-1}{x})\ln x = f(x)$$

أي أن التابع F هو تابع أصلي للتابع f على I

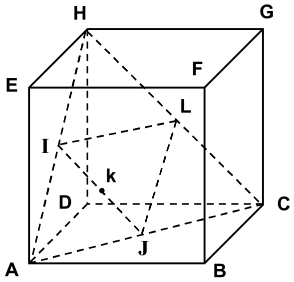
⑤ لدينا $f(x) \geq 0$ أياً كانت $x \in I$ وبالتالي فإن C_f فوق محور الفواصل ومنه

$$S = \int_1^e f(x)\,dx = \left[x\ln x - x - \frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

إعداد المدرس	تنسيق وتدقيق المدرس	إشراف المدرس
محي الدين إسماعيل	محمد السـيدعلي	عبد الحميد السيد

المسألة الثانية :

ABCDEFGH مكعب طول ضلعه 4 ، I مركز الوجه ADHE ، J مركز الوجه ABCD ، L مركز الوجه DCGH ، k منتصف $[IJ]$



نتأمل المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$

① هل A, k, G على استقامة واحدة

② أثبت أن الرباعي $AJLI$ معين

③ أثبت أن النقاط A و k و G و D تقع في مستوٍ واحد

④ استنتج أن النقطة A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة D و G و k يُطلب إيجاد تثقيلاتها

⑤ أثبت أن $\vec{n}(1,1,0)$ ناظم على المستوي (BDH) واكتب معادلة المستوي (BDH)

الحـــــــــل :

① لدينا $G(4,4,4), H(0,4,4), C(4,4,0), A(0,0,0)$ ونجد $I(0,2,2), J(2,2,0)$ و k منتصف $[IJ]$ ومنه نجد $k(1,2,1)$ وبالتالي $\overrightarrow{Ak}(1,2,1), \overrightarrow{AG}(4,4,4)$

الشعاعان $\overrightarrow{Ak}, \overrightarrow{AG}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{2}{4} \neq \frac{1}{4}\right)$ فالنقاط A, k, G ليست على استقامة واحدة

② لدينا L منتصف $[HC]$ ومنه $L(2,4,2)$

$\overrightarrow{AJ}(2,2,0), \overrightarrow{IL}(2,2,0), \overrightarrow{AI}(0,2,2)$ ومنه $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{IL}$ فالرباعي متوازي الأضلاع

$AJ = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}, AI = \sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2}$ ومنه $AJ = AI$

مما سبق نجد أن الرباعي $AJLI$ معين

③ لدينا $D(0,4,0)$ ومنه $\overrightarrow{AD}(0,4,0)$ والشعاعان $\overrightarrow{Ak}, \overrightarrow{AG}$ غير مرتبطين خطياً

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{Ak}$$

$$0 = 4\alpha + \beta \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$4 = 4\alpha + 2\beta \;\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$0 = 4\alpha + \beta \;\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

من (1) أو (3) نجد $\beta = -4\alpha$ نعوض في (2) نجد $4 = 4\alpha - 8\alpha$ ومنه $\boxed{\alpha = -1}$ و $\boxed{\beta = 4}$

وبالتالي نجد $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AG} + 4\overrightarrow{Ak}$ إذاً النقاط A و k و G و D تقع في مستوٍ واحد

④ من عبارة الارتباط الخطي السابقة لدينا $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AG} + 4\overrightarrow{Ak}$ ومنه نجد $4\overrightarrow{Ak} - \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

وبالتالي النقطة A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,-1)$ و $(G,-1)$ و $(k,4)$

⑤ لدينا $B(4,0,0), H(0,4,4)$

$$\overrightarrow{BD}(-4,4,0), \overrightarrow{BH}(-4,4,4), \vec{n}(1,1,0)$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD} = -4+4+0 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{BD}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BH} = -4+4+0 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{BH}$$

أي أن الشعاع $\vec{n}$ ناظم على المستوي (BDH) والنقطة B من المستوي (BDH) ومعادلة المستوي من الشكل :

$a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$ بالتعويض نجد : $(x-4) + (y-0) = 0 \Rightarrow (BDH) : x + y - 4 = 0$

إعداد المدرس	تنسيق وتدقيق المدرس	إشراف المدرس
عمـار قـدوري	محمد السـيدعلي	عبد الحميد السيد

تم كتابة وتنسيق وتدقيق هذا النموذج بواسطة