خاص بقناة

ملفات بكالوريا سعادة/أوائل

السؤال الأول : ليكن C الخط البياني للتابع f المستمر على المجال $[0,+\infty[$. جدول تغيراته هو الآتي :

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	$3 \|\| -1$	$-$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-3

❶ هل للخط C مقاربات مائلة ؟ علّل إجابتك .

❷ دل على القيم الحدية محلياً مبيّناً نوعها .

❸ اكتب معادلةً لنصف المماس من اليسار للخط C في النقطة $A(1,5)$.

❹ عيّن $f([0,+\infty[)$.

❺ قارن بين $f(2021)$ و $f(2022)$.

الحل

❶ ليس للخط C مستقيمات مقاربة أفقية لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$.

❷ $f(0) = 3$ قيمة صغرى محلياً و $f(1) = 5$ قيمة كبرى محلياً .

❸ $y = f'(1^-)(x-1) + f(1)$ ومنه $y = 3(x-1)+5$ وبالتالي $y = 3x+2$.

❹ $f([0,+\infty[) =]-3,5]$.

❺ بما أنّ f متناقص تماماً على المجال $[2,+\infty[$ وكان $2021 < 2022$ فإنّ $f(2021) > f(2022)$.

السؤال الثاني :

أولاً : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرّفة بالعلاقة : $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-\frac{1}{2})^n$. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ثانياً : احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

الحل

أولاً : $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-\frac{1}{2})^n$

نلاحظ أنّ $u_n = (-\frac{1}{2})^0 + (-\frac{1}{2})^1 + (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^3 + \cdots + (-\frac{1}{2})^n$ مجموع $n+1$ حداً من متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$ وحدّها الأول 1 ومنه .

$u_n = 1\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n+1}}{1-(-\frac{1}{2})}$ وبالتالي $u_n = 1\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{3}{2}}$ ومنه $u_n = \frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^{n+1})$

بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{1}{2})^{n+1} = 0$ لأنّ $(-1 < \frac{-1}{2} < 1)$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

ثانياً : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ إنّ $1+2+3+\cdots+n = \frac{n}{2}(1+n)$ (مجموع حدود متتالية حسابية)

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{2}(1+n)}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$

السؤال الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x(1+e^{-x})$

❶ أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$. ثمّ ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ .

❷ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C و Δ والمستقيم $x=1$.

الحل

❶ $f(x)-y_{\Delta}=xe^{-x}$ ومنه $f(x)-y_{\Delta}=\frac{x}{e^{x}}$ ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_{\Delta})=0$ كان المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$. لدراسة وضع C بالنسبة إلى Δ ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y_{\Delta}=\frac{x}{e^{x}}$

$f(x)-y_{\Delta}=0$ عندما $x=0$ ومنه :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)-y_{\Delta}$	$-$ 0 $+$
الوضع النسبي	C يقع تحت Δ C يقع فوق Δ

ويوجد نقطة مشتركة بين C و Δ إحداثياتها $(0,0)$.

❷ من الطلب السابق نستنتج أنّ C يقع فوق Δ على المجال $[0,1]$ ومنه :

$S=\int_0^1(f(x)-y_{\Delta})\,dx=\int_0^1(\frac{x}{e^{x}})\,dx$ وبالتالي : $S=\int_0^1 x\cdot e^{-x}\,dx$ لحساب S نطبّق التكامل بالتجزئة

بفرض :

$u(x)=x$	$v'(x)=e^{-x}$
$u'(x)=1$	$v(x)=-e^{-x}$

فيكون $S=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}\,dx$ ومنه $S=[-xe^{-x}]_0^1-[e^{-x}]_0^1$

$S=[-xe^{-x}-e^{-x}]_0^1$ ومنه: $S=[-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}]-[-1]=\frac{-2}{e}+1$

السؤال الرابع: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

❶ ادرس اطراد التابع f .

❷ لنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة التدريجية : $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)=\frac{u_n}{\ln u_n}$ عند كل $n\geq 0$.

a. أثبت أنّه أياً كان العدد الطبيعي n كان $e\leq u_n\leq 5$. b. أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

c. استنتج أنّ المتتالية متقاربة واحسب نهايتها .

الحل

❶ f على $]1,+\infty[$ ويكون $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ حيث $f'(x)=0$ عندما $\ln x-1=0$ ومنه $x=e$ و $f(e)=e$

x	1 e $+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$ 0 $+$
$f(x)$	‖ $\searrow$ e $\nearrow$

❷ a. الخاصة المطلوب إثباتها : $E(n):\ll e\leq u_n\leq 5\gg$ ونريد إثبات هذه الخاصة أياً كان العدد الطبيعي n .

(I) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $u_0=5\leq\frac{5}{\ln 5}=u_1\leq e$ محقّقة .

(II) لنفترض أنّ الخاصة $E(n)$ ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$

$E(n+1) :\ll \ e \le u_{n+1} \le 5 \ \gg$

لدينا فرضاً $e \le u_n \le 5$ ولمّا كان f مزايد تماماً على المجال $[e,5]$ كان $f(e) \le f(u_n) \le f(5)$

ومنه $e \le u_{n+1} \le \dfrac{5}{\ln 5} \le 5$ فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على $E(n)$.

فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

b. الخاصة المطلوب إثباتها : $E(n) :\ll u_{n+1} \le u_n \gg$ ونريد إثبات هذه الخاصة أياً كان العدد الطبيعي n.

(I) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $u_1 = \dfrac{5}{\ln 5} \le u_0 = 5$ محقّقة .

(II) لنفترض أنّ الخاصة $E(n)$ ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$

$E(n+1) \ll \ u_{n+2} \le u_{n+1} \ \gg$

لدينا فرضاً $u_{n+1} \le u_n$ وبما أنّ f متزايد تماماً على $[e,5]$ فإنّ $f(u_{n+1}) \le f(u_n)$ ومنه $u_{n+2} \le u_{n+1}$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على $E(n)$. فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

فالمتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متناقصة .

c. بما أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد e فحسب مبرهنة فهي متقاربة من عدد حقيقي ℓ يحقّق

$\ell \in [m, u_0]$ أي $\ell \in [e,5]$ و f مستمر عند ℓ فيكون ℓ هو حل المعادلة $f(x) = x$

$\dfrac{x}{\ln x} = x$ ومنه $x = x\ln x$ وبالتالي $x\ln x - x = 0$ ومنه $x(\ln x - 1) = 0$

إمّا $x = 0$ مرفوض أو $\ln x = 1$ ومنه $x = e \in [e,5]$ مقبول ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

السؤال الخامس:

أولاً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمعطى بالعلاقة $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

❶ أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. ثم استنتج كل مقارب للخط C.

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها. ثم ارسم الخط البياني C بعد رسم المقاربات.

ثانياً: ليكن $(v_n)_{n\ge 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق $v_0 = 1$ و $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\sqrt{v_n^2+1}}$.

❶ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي يكون $0 \le v_{n+1} \le v_n$.

❷ أثبت أن $(v_n)_{n\ge 0}$ متقاربة وأوجد نهايتها.

❸ احسب الحدود v_1 و v_2 و v_3 ثم خمّن عبارة v_n بدلالة n وأثبت صحة تخمينك.

الحل

أولاً: ❶ f معرّف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ لإزالتها نكتب $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

وبما أنّ x في جوار $-\infty$ فإنّ $|x| = -x$ ومنه $f(x) = \dfrac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$ وبالتالي

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ فالمستقيم الذي معادلته $y = -1$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$.

نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ لإزالتها نكتب $f(x) = \dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$

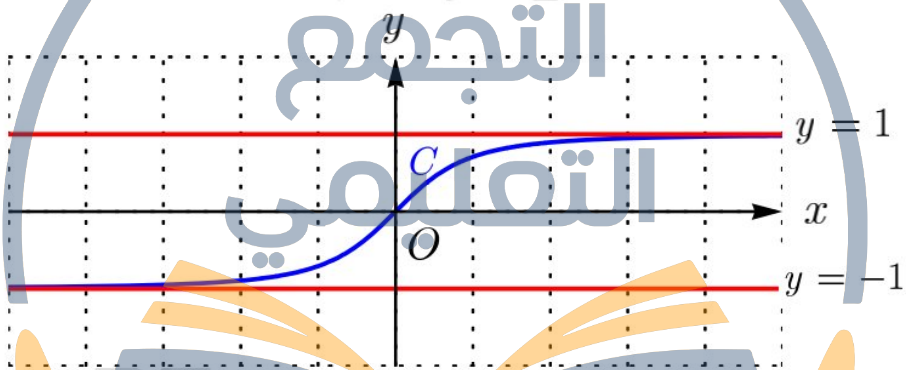
وبما أنّ x في جوار $+\infty$ فإنّ $|x| = x$ ومنه $f(x) = \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$ وبالتالي

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ فالمستقيم الذي معادلته $y = 1$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$.

❷

$$f'(x) = \frac{1(\sqrt{x^2+1}) - \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}x}{(x^2+1)} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$ ويكون

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 $\nearrow$ 1



ثانياً: ❶ $v_0 = 1$ و $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\sqrt{v_n^{\,2}+1}}$. الخاصة المطلوب إثباتها هي : $E(n)$:« $0 \le v_{n+1} \le v_n$ »

(I) الخاصة $E(0)$ لأنّ $0 \le v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le v_0 = 1$ محقّق .

(II) لنفترض أنّ الخاصة $E(n)$ صحيحة ، ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ $E(n+1)$:« $0 \le v_{n+2} \le v_{n+1}$ »

لدينا فرضاً $0 \le v_{n+1} \le v_n$ ولمّا كان f متزايد تماماً على $[0,+\infty[$ فإنّ $f(0) \le f(v_{n+1}) \le f(v_n)$ ومنه

$0 \le v_{n+2} \le v_{n+1}$ فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على الخاصة $E(n)$

فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \ge 0$.

❷بما أنّ $v_{n+1} \le v_n$ أياً تكن $n \ge 0$ فالمتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ متناقصة ولمّا كان $0 \le v_n$ كانت المتتالية محدودة من الأدنى

فحسب مبرهنة فالمتتالية متقاربة من عدد حقيقي ℓ يحقّق $\ell \in [m, u_0]$ أي $\ell \in [0,1]$ و f مستمر عند ℓ فيكون ℓ هو

حل المعادلة $f(x) = x$ ومنه $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x$ وبالتالي $x = x\sqrt{x^2+1}$ أي $x - x\sqrt{x^2+1} = 0$ ومنه

$x(1-\sqrt{x^2+1})=0$ إما $x=0\in[0,1]$ مقبول أو $1-\sqrt{x^2+1}=0$ ومنه $\sqrt{x^2+1}=1$ نربع الطرفين فنجد $x^2=0$

ومنه $x=0$ مقبول وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$.

❸ $v_1=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $v_2=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $v_3=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{4}}$

وبالتالي نخمّن أن $v_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ لنثبت صحة هذا التخمين بالتدريج :

الخاصة المطلوب إثباتها هي : $E(n):\ll v_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\gg$ ونريد إثبات هذه الخاصة أياً كان العدد الطبيعي n .

(I) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $v_0=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1$ محقّقة .

(II) لنفترض أنّ الخاصة $E(n)$ صحيحة ، ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$

$$E(n+1):\ll v_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+2}}\gg$$

لدينا $v_{n+1}=\frac{v_n}{\sqrt{1+v_n^{\ 2}}}$ ومنه $v_{n+1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{n+2}}$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على $E(n)$. فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

السؤال السادس: لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة كما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{4}$

❶ لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق العلاقة : $v_n=u_n-2$.

a.أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية يُطلب إيجاد أساسها وحدها الأول .

b. أوجد عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n . واحسب نهايتها .

❷ لنعرّف المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقتين :

$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$. اكتب عبارة S_n و S'_n بدلالة n . واستنتج نهاية كل منهما .

الحل

❶ a. $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-2}{u_n-2}=\frac{\frac{3u_n+2}{4}-2}{u_n-2}=\frac{\frac{3u_n-6}{4}}{u_n-2}$ ومنه

$q=\frac{3}{4}=\frac{3(u_n-2)}{4(u_n-2)}=\frac{v_{n+1}}{v_n}$ فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ ، $v_0=u_0-2=1-2=-1$

b. $v_n=v_0q^n=-(\frac{3}{4})^n$ ولدينا $v_n=u_n-2$ ومنه $u_n=v_n+2=-(\frac{3}{4})^n+2$.

وبما أنّ $\lim_{n\to+\infty}(\frac{3}{4})^n=0$ فإنّ $\lim_{n\to+\infty}u_n=2$.

❷ $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ إنّ S_n عبارة عن مجموع $n+1$ حداً من متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدّها الأول -1

ومنه : $S_n = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -1\frac{1-(\frac{3}{4})^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} = -4(1-(\frac{3}{4})^{n+1})$

$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ لمّا كان $u_n = v_n + 2$ كان $S'_n = (v_0+2)+(v_1+2)+\cdots+(v_n+2)$ ومنه

$S'_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (2+2+\cdots+2)$ ومنه $S'_n = S_n + (n+1)(2)$ وبالتالي :

$$S'_n = -4(1-(\frac{3}{4})^{n+1}) + (n+1)(2)$$

لمّا كان $\lim_{n\to+\infty}(\frac{3}{4})^{n+1} = 0$ (لأنّ $-1 < \frac{3}{4} < 1$) كان $\lim_{n\to+\infty} S_n = -4$ و $\lim_{n\to+\infty} S'_n = +\infty$.

السؤال السابع: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق : $f(x) = \frac{x^3-6x^2+x}{1-x}$

❶ I) عين الأعداد الحقيقية a و b و c و d بحيث من أجل كل $x \neq 1$ يكون $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1-x}$

II) احسب $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

❷ احسب باستعمال التكامل بالتجزئة ، التكامل J حيث: $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 - 12x + 1)\ln(1-x)\,dx$.

الحل

❶ I) لنقسّم البسط على المقام(قسمة إقليدية):

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + x & -x+1 \\ \hline \mp x^3 \pm x^2 & -x^2 + 5x + 4 \\ -5x^2 + x & \\ \pm 5x^2 \mp 5x & \\ -4x & \\ \pm 4x \mp 4 & \\ -4 & \end{array}$$

ومنه $f(x) = -x^2 + 5x + 4 + \frac{-4}{1-x}$ ومنه $a = -1$ و $b = 5$ و $c = 4$ و $d = -4$.

II) $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-x^2 + 5x + 4 + 4\frac{-1}{1-x})dx$ وبالتالي

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (-x^2 + 5x + 4 + 4\frac{-1}{1-x})dx = [-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 4x + 4\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}}$$

$I = [-\frac{1}{24} + \frac{5}{8} + 2 - 4\ln 2] = \frac{31}{12} - 4\ln 2$.

❷ $J=\int_0^{\frac{1}{2}}(3x^2-12x+1)\ln(1-x)\,dx$ لنستخدم التكامل بالتجزئة :

بفرض :

$v'(x)=3x^2-12x+1$	$u(x)=\ln(1-x)$
$v(x)=x^3-6x^2+x$	$u'(x)=\frac{-1}{1-x}$

ومنه نجد :

$J=[(x^3-6x^2+x)\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^3-6x^2+x}{1-x}dx$ ومنه

$J=[(x^3-6x^2+x)\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}}+I$ وبالتالي :

$$J=[(\frac{1}{8}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2})\ln\frac{1}{2}]+\frac{31}{4}-4\ln 2=\frac{7}{8}\ln 2+\frac{31}{4}-4\ln 2=\frac{31}{12}-\frac{25}{8}\ln 2$$

<u>السؤال الثامن</u>: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_{n+1}=2-\frac{1}{u_n}$ و $u_0=2$.

❶ أثبت أنّ مستعملةً البرهان بالتدريج أنّه أياً كان $n\geq 0$ تتحقق الخاصة الآتية : $u_n>1$.

❷ لنعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقة : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$. أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ حسابية عيّن حدّها الأول وأساسها.

❸ اكتب عبارة v_n بدلالة n . ثمّ استنتج أنّ $u_n=\frac{n+2}{n+1}$ واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

❹ a. احسب المجموع : $S=\frac{1}{u_{23}-1}+\frac{1}{u_{23}-1}+\cdots+\frac{1}{u_{2022}-1}$.

b. احسب بدلالة n المجموع $T_n=e^{v_0}+e^{v_1}+\cdots+e^{v_n}$.

الحل

❶ الخاصة المطلوب إثباتها هي : $E(n):\ll u_n>1 \gg$ ونريد إثبات هذه الخاصة أياً كان العدد الطبيعي n .

(I) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $u_0=2>1$.

(II) لنفترض أنّ الخاصة $E(n)$ صحيحة ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$

$E(n+1):\ll u_{n+1}>1 \gg$

لدينا فرضاً $u_n>1$ ومنه $0<\frac{1}{u_n}<1$ وبالتالي $-\frac{1}{u_n}>-1$ و بالتالي $2-\frac{1}{u_n}>1$ ومنه $u_{n+1}>1$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على $E(n)$. فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

❷ $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ ومنه $\frac{1}{1-\frac{1}{u_n}}=\frac{1}{2-\frac{1}{u_n}-1}=\frac{1}{u_{n+1}-1}=v_{n+1}$ وبالتالي $v_{n+1}=\frac{u_n}{u_n-1}$ و بالتالي نجد

$\frac{u_n}{u_n-1}-\frac{1}{u_n-1}=1=r$ $v_{n+1}-v_n=$ فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r=1$ حدّها الأول $v_0=1$.

❸ $v_n=v_0+rn=1+n$ ولمّا كان $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ كان $\frac{1}{v_n}=u_n-1$ ومنه $u_n=\frac{1}{v_n}+1$ وبالتالي

$u_n=\frac{1}{1+n}+1=\frac{n+2}{n+1}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

❹ $a.$ $S=\frac{1}{u_{23}-1}+\frac{1}{u_{23}-1}+\cdots+\frac{1}{u_{2022}-1}$ ومنه $S=v_{23}+v_{23}+\cdots+v_{2022}$ وبالتالي S عبارة عن مجموع حدود متتالية حسابية .

$2000=2022-23+1$ = عدد الحدود . $v_{23}=1+23=24$ و $v_{2022}=1+2022=2023$ ومنه

ذ .

$b.$ $T_n=e^{v_0}+e^{v_1}+\cdots+e^{v_n}$ نلاحظ أنّ $T_n=e^1+e^2+\cdots+e^{n+1}$ نلاحظ أنّ T_n مجموع $n+1$ حداً من متتالية هندسية أساسها $q=e$ وحدّها الأول e ومنه $T_n=e\frac{1-e^{n+1}}{1-e}$.

السؤال التاسع: ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x)=e^{2x}\cdot\sin x$.

❶ احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

❷ عيّن العددين الحقيقيين a و b التي تحقّق : $f(x)=af'(x)+bf''(x)$

❸ استنتج تابعاً أصلياً $F(x)$ للتابع $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

الحل

❶ $f'(x)=2e^{2x}.\sin x+\cos x\cdot e^{2x}=e^{2x}(2\sin x+\cos x)$

$f''(x)=2e^{2x}(2\sin x+\cos x)+(2\cos x-\sin x)\cdot e^{2x}$

$f''(x)=e^{2x}(3\sin x+4\cos x)$

❷ $f(x)=af'(x)+bf''(x)$ ومنه

$f(x)=ae^{2x}(2\sin x+\cos x)+be^{2x}(3\sin x+4\cos x)$ ومنه

$\sin x\cdot e^{2x}=e^{2x}((2a+3b)\sin x+(a+4b)\cos x)$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases}2a+3b=1 & (1)\\ a+4b=0 & (2)\end{cases}$

من (2) نجد $a=-4b$ نعوّض في (1) فنجد $-8b+3b=1$ ومنه $b=-\frac{1}{5}$ وبالتالي $a=\frac{4}{5}$

$f(x)=\frac{4}{5}f'(x)-\frac{1}{5}f''(x)$.

❸ $f(x)=\frac{4}{5}f'(x)-\frac{1}{5}f''(x)$ ومنه $F(x)=\frac{4}{5}f(x)-\frac{1}{5}f'(x)$ وبالتالي

$F(x)=\frac{4}{5}e^{2x}\cdot\sin x-\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x+\cos x)$ وبالتالي : $F(x)=e^{2x}(\frac{2}{5}\cdot\sin x-\frac{1}{5}\cos x)$.

السؤال العاشر: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$

❶ عيّن عددين حقيقيين a و b يحقّقان : $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$. ثمّ استنتج $I=\int_1^2 f(x)\,dx$

❷ لنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ وفق العلاقة : $u_n=f(n)$. ولنعرف $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$

اكتب عبارة S_n بدلالة n ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

الحل

❶ $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{a(x+1)+bx}{x(x+1)}$

ومنه نجد $1=a(x+1)+bx$

من أجل $x=-1$ نجد $b=-1$

من أجل $x=0$ نجد $a=1$ وبالتالي : $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

$I=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=[\ln(x)-\ln(x+1)]_1^2$ ومنه $I=\int_1^2 f(x)\,dx=[\ln 2-\ln 3]-[0-\ln 2]=\ln\dfrac{4}{3}$

❷ $S_n=u_1+u_2+\dots\dots+u_n$ لنأخذ الصيغة $u_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$S_n=(1-\cancel{\tfrac{1}{2}})+(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}})+(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{4}})+\cdots+(\cancel{\tfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{n+1})$ ومنه $S_n=1-\dfrac{1}{n+1}$

ولمّا كان $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$ كان $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=1$.

السؤال الحادي عشر: لتكن التكاملات الثلاث الآتية :

$$L=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\ ,\ J=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx\ ,\ K=\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx$$

❶ التابع f المعرّف على المجال $[0,1]$ وفق : $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ احسب $f'(x)$ واستنتج قيمة التكامل L .

❷ a. تحقّق أنّ $L+J=K$.

b. باستخدام التكامل بالتجزئة في K بيّني أنّ $K=\sqrt{2}-J$.

c. من الطلبين السابقين استنتج قيمة كلٍّ من J و K .

الحل

❶ $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ومنه $f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ وبالتالي $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$L=\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1 f'(x)dx$ وبالتالي $L=[f(x)]_0^1=[f(1)]-[f(0)]=\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$.

❷ التحقّق أنّ $L+J=K$

$$L+J=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}+\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\frac{1+x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=K=\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx=K\ .$$

$K=\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$ .b

بفرض :

$u(x)=\sqrt{x^2+1}$	$v'(x)=1$
$u'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$v(x)=x$

$K=[x\cdot\sqrt{x^2+1}]_0^1-\int_0^1\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$ ومنه $K=\sqrt{2}-J$.

c. من a نجد $L+J=K$ ومنه $K-J=\ln(1+\sqrt{2})$.

من b نجد $K=\sqrt{2}-J$ أي $K+J=\sqrt{2}$ بالجمع نجد : $2K=\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}$

ومنه $\boxed{K=\dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ نعوض

$J=\sqrt{2}-K=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})}$.

السؤال الثاني عشر: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(1-x)\cdot e^x$.

❶ ادرس تغيرات f ونظّمي جدولاً بها ، ودل على قيمته الكبرى محلياً ، و استنتج معادلة المقارب الأفقي لخطه C.

❷ أثبت أنّ مماسي الخط C في النقطتين اللتين فاصلتاهما : -1 و 1 متعامدان.

❸ ارسم C ثمّ استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع f_1 المعيّن بالعلاقة : $f_1(x)=\dfrac{1+x}{e^x}$ من الخط البياني C للتابع f .

❹ باستخدام التقريب التآلفي المحلي(التقريب الخطي) احسبي قيمة تقريبية لِ $f(0.1)$.

❺ ليكن C_1 الجزء من الخط البياني C المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

وليكن S السطح المحصور بين C_1 ومحور الفواصل . احسب مساحة S .

❻ عندما يدور السطح S حول محور الفواصل دورة كاملة فإنّه يولّد مجسّماً دورانياً حجمه $\mathcal{V}$. إذا علمت أنّ $G: x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x\mapsto f^2(x)$ عين a و b و c ، ثمّ احسب الحجم $\mathcal{V}$.

الحل

❶ $f(x)=(1-x)\cdot e^x$

f ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$f(x)=e^x-x\cdot e^x$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ و منه المستقيم $y=0$ مستقيم مقارب أفقي .

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

$f'(x)=-e^x+e^x(1-x)=e^x(-x)=-x\cdot e^x$ ويكون $f'(x)=0$ عندما $x=0$ ويكون $f(0)=1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

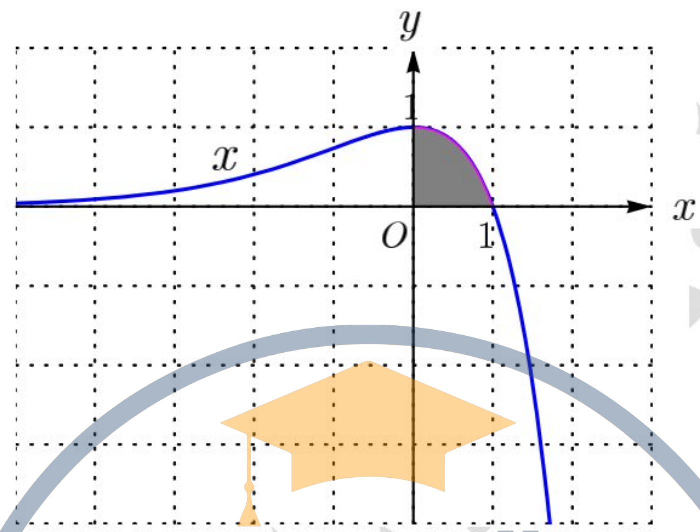
$f(0)=1$ قيمة كبرى محلياً .

❷ $m_1 = f'(-1) = \frac{1}{e}$ (ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها -1)

$m_2 = f'(1) = -e$ (ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 1)

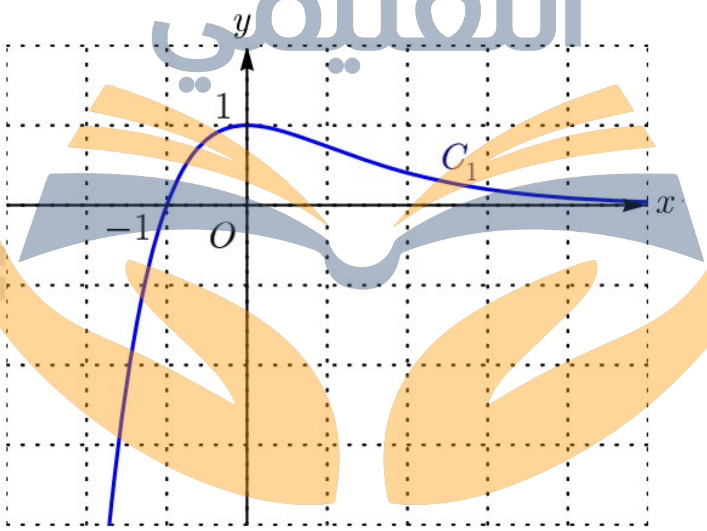
نلاحظ أنّ $m_1 \cdot m_2 = -1$ فالمماسان للخط C في النقطتين اللتين فاصلتاهما : -1 و 1 متعامدان.

❸



$f_1(x) = \frac{1+x}{e^x}$ نلاحظ أنّ $f_1(x) = \frac{1+x}{e^x} = f(-x) = (1+x)\cdot e^{-x}$

$f_1(x) = f(-x)$ ومنه C_1 هو نظير C بالنسبة إلى $y'y$.



❹ حساب قيمة تقريبية لِـ $f(0.1)$: $f(a+h) \approx f'(a)\cdot h + f(a)$

حيث $a=0$ و $h=0.1$.

$f(0+0.1) \approx f'(0)\cdot(0.1) + f(0)$ ومنه

$f(0+0.1) \approx (0)\cdot(0.1) + 1 = 1$

❺ $S = \int_0^1 (1-x)\cdot e^x \, dx$ نطبّق التكامل بالتجزئة :

بفرض :

$u(x) = (1-x)$	$v'(x) = e^x$
$u'(x) = -1$	$v(x) = e^x$

ومنه $S = [(1-x)\cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 -e^x \, dx = [(1-x)\cdot e^x]_0^1 + [e^x]_0^1$

وبالتالي $S = [(1-x)\cdot e^x + e^x]_0^1 = e - 2$.

❻ $G(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$ لمّا كان G اشتقاقي على $\mathbb{R}$ و G تابعاً أصلياً للتابع f^2 على $\mathbb{R}$ كان $G'(x) = f^2(x)$

$G'(x) = (2ax+b)e^{2x} + 2e^{2x}(ax^2+bx+c)$

ومنه $G'(x) = (2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c)\cdot e^{2x}$

ولدينا $f^2(x) = (x^2 - 2x + 1)\cdot e^{2x}$

$G'(x) = f^2(x)$ ومنه $(2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c)\cdot e^{2x} = (x^2 - 2x + 1)\cdot e^{2x}$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = -2 \\ b + 2c = 1 \end{cases}$ و منه $a = \frac{1}{2}$ نعوض فنجد $1 + 2b = -2$ ومنه $b = \frac{-3}{2}$ نعوّض $-\frac{3}{2} + 2c = 1$

ومنه $c = \frac{5}{4}$

ومنه $G(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4})\cdot e^{2x}$ تابع أصلي للتابع f^2 على $\mathbb{R}$

ومنه $\mathcal{V} = \int_0^1 \pi f^2(x)\,dx$

$\mathcal{V} = \int_0^1 \pi f^2(x)\,dx = \pi[(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4})\cdot e^{2x}]_0^1 = \pi([(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{5}{4})e^2] - [\frac{5}{4}]) = \pi(\frac{e^2-5}{4})$.

السؤال الثالث عشر: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

❶ ادرس تغيّرات التابع f ونظّمي جدولاً بها . واكتب معادلة كل مستقيم مقارب أفقي لخطّه البياني .

❷ ارسم ما وجدتيه من مستقيمات مقاربة ثمّ ارسم C .

❸ ليكن C_1 الجزء من الخط البياني C المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \ln 2$.

وليكن S السطح المحصور بين C_1 ومحور الفواصل . احسب مساحة S .

❹ عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنّه يولّد مجسّماً دورانياً حجمه $\mathcal{V}$.

إذا علمتَ أنّ التابع $x \mapsto f^2(x)$ يكتب بالشكل $f^2(x) = \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{ae^x}{e^x+1} + \frac{be^x}{(e^x+1)^2}$ عيّن العددين a و b.

ثمّ استنتج تابعاً أصلياً للتابع $x \mapsto f^2(x)$ على $\mathbb{R}$. ثمّ احسب الحجم $\mathcal{V}$.

الحل

❶ f معرّف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

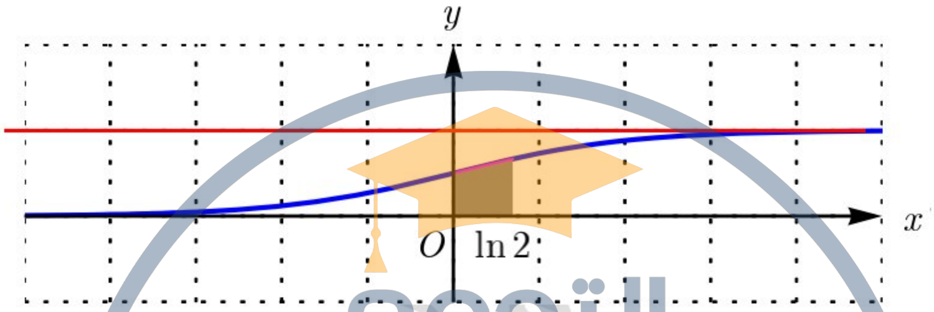
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ومنه المستقيم $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$.

$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{e^x}} = \dfrac{e^x}{e^x(1+\dfrac{1}{e^x})} = f(x)$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ فالمستقيم $y=1$ مستقيم مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$.

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0 .$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

❷



❸ $S=\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx=[\ln(e^x+1)]_0^{\ln 2}=\ln\frac{3}{2}$.

❹ $f^2(x)=\dfrac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\dfrac{ae^x}{e^x+1}+\dfrac{be^x}{(e^x+1)^2}$ نوحّد المقامات

$\dfrac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\dfrac{ae^x(e^x+1)}{(e^x+1)^2}+\dfrac{be^x}{(e^x+1)^2}$ ومنه

$\dfrac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\dfrac{ae^{2x}+(a+b)e^x}{(e^x+1)^2}$ بالمطابقة نجد :

$\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \end{cases}$ ومنه $a=1$ و $b=-1$. وبالتالي : $f^2(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

$\mathcal{V}=\displaystyle\int_0^{\ln 2}\pi f^2(x)\,dx=\int_0^{\ln 2}\pi\Big(\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\Big)dx$ ومنه

$$\mathcal{V}=\int_0^{\ln 2}\pi\Big(\frac{e^x}{e^x+1}-e^x\cdot(e^x+1)^{-2}\Big)dx=\pi\Big([\ln(e^x+1)-\frac{(e^x+1)^{-1}}{-1}]_0^{\ln 2}$$

$$\mathcal{V}=\pi\Big([\ln(e^x+1)+\frac{1}{e^x+1}]_0^{\ln 2}=\pi\Big([\ln 3+\frac{1}{3}]-[\ln 2+\frac{1}{2}]\Big)=\pi\Big(\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\Big)$$

....انتهت الأجوبة..

خاص بقناة

ملفات بكالوريا سعادة/أوائل

السؤال الأول :

❶ في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ صفي مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقات :

$x^2+z^2-\frac{4}{25}y^2=0$ مع $0\le y\le 5$.

❷ أوجد معادلةً للأسطوانة التي محورها $(O,\vec{k})$ و قاعدتها العليا الدائرة التي تمر بالنقطة $A(2,3,5)$ و قاعدتها الدنيا الدائرة التي مركزها O .

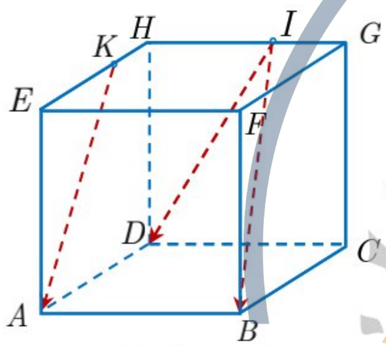
الحل

❶ $x^2+z^2-\frac{4}{25}y^2=0$ مع $0\le y\le 5$ تمثّل معادلة مخروط رأسه O محوره $(O,\vec{j})$ ونصف قطر قاعدته 2 وارتفاعه5 ومركز قاعدته العليا $(0,5,0)$.

❷ معادلة الأسطوانة المطلوبة من الشكل $x^2+y^2=r^2$ مع $0\le z\le 5$ ولمّا كانت الأسطوانة تمر بالنقطة $A(2,3,5)$ ومنه $2^2+3^2=r^2$ ومنه $r^2=13$ فمعادلة الأسطوانة هي : $x^2+y^2=13$ مع $0\le z\le 5$.

السؤال الثاني :

$ABCDEFGH$ مكعب ، طول ضلعه يساوي 1 . النقطة I تحقق $\overrightarrow{HI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$ والنقطة K تحقق $\overrightarrow{HK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{HE}$. ولنختر معلماً متجانساً $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$. والمطلوب:



❶ أثبت وجود عددين حقيقيين α و β يحقّقان: $\overrightarrow{KA}=\alpha\overrightarrow{IB}+\beta\overrightarrow{ID}$. ثمّ استنتج وضع المستقيم (KA) بالنسبة إلى المستوي (IBD).

❷ احسب $\cos\alpha$ حيث $\alpha=(\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IB})$

❸ K نقطة تحقق $2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$

أوجد الأمثال α و β و γ لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (B,α) و (C,β) و (G,γ) ثمّ عيّن النقطة K .

الحل

❶ $A(1,0,0)$ ، $K(\frac{1}{4},0,1)$ ، $D(0,0,0)$ ، $I(0,\frac{3}{4},1)$ ، $B(1,1,0)$ ، $\overrightarrow{KA}(\frac{3}{4},0,-1)$ ، $\overrightarrow{IB}(1,\frac{1}{4},-1)$ ، $\overrightarrow{ID}(0,-\frac{3}{4},-1)$

$\overrightarrow{KA}=\alpha\overrightarrow{IB}+\beta\overrightarrow{ID}$ ومنه $(\frac{3}{4},0,-1)=\alpha(1,\frac{1}{4},-1)+\beta(0,-\frac{3}{4},-1)$ ومنه

$$\alpha=\frac{3}{4}\quad(1)$$
$$\frac{1}{4}\alpha-\frac{3}{4}\beta=0\quad(2)$$
$$-\alpha-\beta=-1\quad(3)$$

لنأخذ المعادلتين $\{(1),(2)\}$ من (1) نجد $\alpha=\frac{3}{4}$ نعوّض في (2) فنجد $\frac{3}{16}-\frac{3}{4}\beta=0$ ومنه $\beta=\frac{1}{4}$

نتحقق بالتعويض في (3) فنجد $-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=-1$ محقق

وبالتالي $\overrightarrow{KA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{ID}$ فالأشعة $\overrightarrow{KA}$ و $\overrightarrow{ID}$ و $\overrightarrow{IB}$ مرتبطة خطياً . إذن المستقيم (KA) يوازي المستوي (IBD) .

❷ $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IB}}{\|\overrightarrow{ID}\|\cdot\|\overrightarrow{IB}\|}$ ومنه $\cos\alpha = \dfrac{(0)(1)+(\frac{-3}{4})(\frac{1}{4})+(-1)(-1)}{\sqrt{0+\frac{9}{16}+1}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{16}+1}} = \dfrac{\frac{13}{16}}{\sqrt{\frac{25}{16}}\sqrt{\frac{33}{16}}} = \dfrac{13}{5\sqrt{33}}$

❸ لدينا $2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$ ومنه $2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{KG}$

ومنه $2\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{KG}$ وبالتالي :

$-2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$ ونلاحظ أنّ $-2+1+3=2\neq 0$

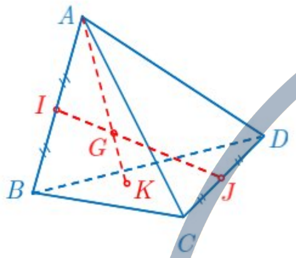
فالنقطة K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,-2)$ و $(G,3)$.

لتعيين النقطة K بفرض L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,-2)$ و $(G,3)$ ومنه فيكون $\overrightarrow{CL}=3\overrightarrow{CG}$

وحسب الخاصة التجميعية تكون النقطة K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(L,1)$ و $(B,1)$ فتكون النقطة K منتصف $[BL]$.

السؤال الثالث : $ABCD$ رباعي وجوه منتظم(كل وجه فيه مثلث متساوي الأضلاع) طول ضلعه a.

I و J هما، بالترتيب ، منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ و G مركز ثقل رباعي الوجوه .



❶ أثبت النقطة G تحقّق $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AK}$ حيث K مركز ثقل المثلث BCD.

❷ أثبت أنّ النقاط I و J و G تقع على استقامةٍ واحدة .

❸ أثبت أنّ المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان .

أثبت أنّ المستقيم (IJ) يعامد كلاً من المستقيمين (AB) و (CD) .

❹أوجد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق : $\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$

❺ عيّن طبيعة مجموعة نقط الفراغ M التي تحقق المساواة: $\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$.

❻عيّن طبيعة مجموعة نقط الفراغ M التي تحقق المساواة: $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = 2\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|$.

الحل

❶ بما أنّ G مركز ثقل رباعي الوجوه فإنّ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ و $(A,1)$

ولما كان Kمركز ثقل المثلث BCD كان K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ وحسب الخاصة التجميعية يكون Gمركز الأبعاد المناسبة للنقطتين $(A,1)$و $(K,3)$ ويكون $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AK}$.

❷ بما أنّ I منتصف $[AB]$ فإنّ I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$.

بما أنّ J منتصف $[CD]$ فإنّ J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$. وحسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و $(J,2)$ ومنه فالنقاط I و J و G تقع على استقامةٍ واحدة.

❸ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2=0$

فالمستقيمان (AB) و (CD) متعامدان.

$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ})\cdot\overrightarrow{CD} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}^2$

ومنه $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{CD}=0-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2=0$ وبنفس الأسلوب نثبت أنّ $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

فالمستقيم (IJ) يعامد كلاً من المستقيمين (AB) و (CD) .

❹ $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})\right\|$

بما أنّ K مركز ثقل المثلث BCD فإنّ $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MK}$

$\left\|3\overrightarrow{MK}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MK}\right\|$ ومنه $\left\|3\overrightarrow{MK}\right\| = \left\|3\overrightarrow{KA}\right\|$

$MK = KA$ فمجموعة النقاط M تمثّل كرة مركزها K ونصف قطرها KA .

❺ $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|$

ومنه $\left\|3\overrightarrow{MK}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MB}-(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})\right\|$

$\left\|3\overrightarrow{MK}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MJ}\right\|$ وبالتالي $\left\|3\overrightarrow{MK}\right\| = \left\|2\overrightarrow{JB}\right\|$

إذن $MK=\frac{2}{3}JB$ فمجموعة النقاط M تمثّل كرة مركزها K ونصف قطرها $\frac{2}{3}JB$.

❻ $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

بما أنّ G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ فإنّ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

و بما أنّ I منتصف $[AB]$ فإنّ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

ومنه $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = 2\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$ وهذا يكافئ $4MG=4MI$

ومنه $MG=MI$ فمجموعة النقاط M تمثّل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GI]$.

السؤال الرابع : نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$: $\mathcal{P}: x+2y-z+1=0$ و $\mathcal{Q}: 2x+y-z+2=0$

❶ أثبت أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعان ثمّ أعطِ تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d .

❷ اكتب معادلةً للمستوي R العمودي على كلٍّ من $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ ويمر بالنقطة $A(2,1,-1)$.

❸ احسب بعد النقطة $A(2,1,-1)$ عن المستقيم d .

الحل

❶ $\vec{n}_P(1,2,-1)$ و $\vec{n}_Q(2,1,-1)$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{2}{1}\neq\frac{1}{2}\right)$ فالمستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعان .

$\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases}$ بالطرح نجد $-x+y-1=0$ ومنه $y=x+1$ نعوّض فنجد

$x+2(x+1)-z+1=0$ ومنه $z=3x+3$

بفرض $x=t$ نحصل على تمثيل وسيطي للمستقيم d .

$$d:\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \\ z=3t+3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

❷ $\vec{n}_R=\vec{u}_d(1,1,3)$ و $A(2,1,-1)$

$1(x-2)+1(y-1)+3(z+1)=0$ ومنه $R:\ \boxed{x+y+3z=0}$.

❸ النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d هي نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي R بالحل المشترك :

$t+t+1+3(3t+3)=0$ ومنه $11t=-10$ وبالتالي $t=\frac{-10}{11}$ نعوّض فنجد :

$$\begin{cases} x=\frac{-10}{11} \\ y=\frac{1}{11} \\ z=\frac{-3}{11} \end{cases}$$ ومنه $A'(\frac{-10}{11},\frac{1}{11},\frac{3}{11})$

ومنه: $AA'=\sqrt{(2+\frac{10}{11})^2+(1-\frac{1}{11})^2+(-1-\frac{3}{11})^2}=\sqrt{\frac{1024}{121}+\frac{100}{121}+\frac{169}{121}}=\frac{\sqrt{1293}}{11}$

طريقة ثانية : لإيجاد إحداثيات A' بالحل المشترك للمستويات الثلاث $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ و R

$$\begin{cases} x+y+3z=0 & (L_1) \\ x+2y-z+1=0 & (L_2) \\ 2x+y-z+2=0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x+y+3z=0 & (L_1) \\ y-4z=-1 & (-L_1+L_2)\to(L_2') \\ -y-7z=-2 & (-2L_1+L_3)\to(L_3') \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x+y+3z=0 & (L_1) \\ y-4z=-1 & (L_2') \\ -11z=-3 & (L_2'+L_3') \end{cases}$$

ومنه $z=\frac{3}{11}$ نعوّض $y=-1+\frac{12}{11}=\frac{1}{11}$ ومنه $x=\frac{-1}{11}-\frac{9}{11}=\frac{-10}{11}$ وبالتالي $A'(\frac{-10}{11},\frac{1}{11},\frac{3}{11})$.

السؤال الخامس : في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقط : $A(2,-2,3)$ و $B(4,-3,-1)$ و $C(0,-\frac{1}{2},-3)$

والمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $2x-y+3z-4=0$.

❶ تحقّق أنّ المستقيم (AB) ليس عمودياً على المستوي $\mathcal{P}$. ثمّ أعطِ معادلةً للمستوي $\mathcal{Q}$ العمودي على $\mathcal{P}$ والمار بالنقطتين A و B .

❷ اكتب معادلةً للكرة التي مركزها النقطة B و تمس المستوي $\mathcal{P}$.

❸ أعطِ تمثيلاً وسيطياً لنصف المستقيم $[AB)$.

❹ ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أنّ إحداثيات النقطة G هي $(-1,0,-1)$.

❺ بيّن أنّ M مجموعة نقط الفراغ التي تحقق المساواة : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=12$ تمثّل كرة $\mathcal{S}$ عيّن مركزها واحسب نصف قطرها. ثم أثبت أنّ المستوي $\mathcal{P}$ يقطع الكرة $\mathcal{S}$.عين نصف قطر الدائرة المقطع .

الحل

❶ $\overrightarrow{AB}(2,-1,-4)$ و $\vec{n}_p(2,-1,3)$ نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}_p$ غير مرتبطين خطياً

لأنّ مركباتهما غير متناسبة ($\frac{3}{-4}\neq\frac{2}{2}$) فالمستقيم (AB) لا يعامد المستوي $\mathcal{P}$.

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي $\mathcal{Q}$ فيكون $\vec{n}\perp\vec{n}_p$ ومنه $\vec{n}\cdot\vec{n}_p=0$ وبالتالي $2a-b+3c=0$

و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ ومنه $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ وبالتالي $2a-b-4c=0$

بفرض $a=1$ فيكون $-b+3c=-2$ و $-b-4c=-2$

بالطرح نجد $c=0$ نعوض $b=2$ وبالتالي $\vec{n}(1,2,0)$ فمعادلة المستوي $\mathcal{Q}$ هي :

$1(x-2)+2(y+2)+0(z-3)=0$ ومنه $\boxed{x+2y+2=0}$

❷ $$R = dist(B,\mathcal{P}) = \frac{\left|2(4)-(-3)+3(-1)-4\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

فمعادلة الكرة هي : $(x-4)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=\frac{8}{7}$.

❸

$$[AB]:\begin{cases} x=2t+2 \\ y=-t-2 \\ z=-4t+3 \end{cases} ,t\in[0,+\infty[$$

❹

$$x_G = \frac{x_A-x_B+2x_C}{2} = \frac{2-4+0}{2} = -1$$
$$y_G = \frac{y_A-y_B+2y_C}{2} = \frac{-2+3-1}{2} = 0$$
$$z_G = \frac{z_A-z_B+2z_C}{2} = \frac{3+1-6}{2} = -1$$

ومنه $G(-1,0,-1)$.

❺ $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=12$

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$ ومنه $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=12$ أي $MG=6$

فمجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها $G(-1,0,0)$ ونصف قطرها 6 .

$$dist(G,\mathcal{P}) = \frac{\left|2(-1)-(0)+3(-1)-4\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}} < R=6$$

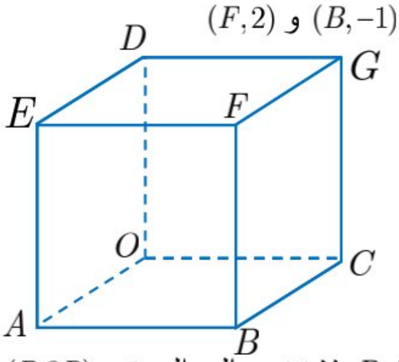
فالمستوي $\mathcal{P}$ يقطع الكرة $\mathcal{S}$

بفرض r نصف قطر الدائرة المقطع فيكون $r^2=36-\frac{81}{14}=\frac{423}{14}$ ومنه $r=\frac{3\sqrt{47}}{\sqrt{14}}$.

السؤال السادس : $OABCDEFG$ مكعّب طول ضلعه يساوي 1. ولتكن النقطتان P و Q تحقّقان :

$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OQ}=4\overrightarrow{OC}$ ، ولتكن النقطة R مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,-1)$ و $(F,2)$

ولنختر معلماً متجانساً $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})$.



❶ .a أثبت أنّ إحداثيات النقطة R هي $(1,1,2)$.

.b أثبت أنّ النقاط P و Q و R لا تقع على استقامةٍ واحدة .

.c احسب $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$ ثمّ استنتجي نوع المثلّث PQR ؟

❷ أثبت أنّ معادلة المستوي (PQR) هي: $4x+2y+z-8=0$ ثمّ تحقّق أنّ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (PQR) .

❸ لتكن النقطة H المسقط القائم للنقطة D على المستوي (PQR) . أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DH) .

ثمّ عيّن إحداثيات النقطة H وأثبت أنّها تنتمي إلى المستقيم (PR) .

❹ احسب حجم رباعي الوجوه $DPQR$.

الحل

❶ .a $R(\frac{-x_B+2x_F}{-1+2},\frac{-y_B+2y_F}{-1+2},\frac{-z_B+2z_F}{-1+2})$ حيث $B(1,1,0)$ و $F(1,1,1)$ومنه

$R(\frac{-1+2(1)}{1},\frac{-1+2(1)}{1},\frac{0+2(1)}{1})$ ومنه $R(1,1,2)$.

.b بما أنّ $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}$ فإنّ $P(2,0,0)$ وبما أنّ $\overrightarrow{OQ}=4\overrightarrow{OC}$ فإنّ $Q(0,4,0)$ ولدينا $R(1,1,2)$

$\overrightarrow{RP}(1,-1,-2)$ و $\overrightarrow{RQ}(-1,3,-2)$ نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{RP}$ و $\overrightarrow{RQ}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة

$(\frac{1}{-1}\neq\frac{-1}{3})$ فالنقاط P و Q و R لا تقع على استقامةٍ واحدة .

.c $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=(1)(-1)+(-1)(3)+(-2)(-2)=-4+4=0$ فالشعاعان $\overrightarrow{RP}$ و$\overrightarrow{RQ}$ متعامدان فالمثلث PQR قائم في R

❷ بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي (PQR) ومنه $\vec{n}\cdot\overrightarrow{RP}=0$ وبالتالي $\vec{n}\cdot\overrightarrow{RP}=0$ ومنه $a-b-2c=0$.

وكذلك $\vec{n}\cdot\overrightarrow{RQ}=0$ ومنه $-a+3b-2c=0$

أصبح لدينا المعادلتين: $\begin{cases}a-b-2c=0\\-a+3b-2c=0\end{cases}$ ولهما عدد غير منتهٍ من الحلول وهذا أمرٌ متوقع لأنّ للمستوي عدد غير منتهٍ

من النواظم المرتبطة خطياً لإيجاد إحداها نفرض $c=1\neq0$ فنجد $\begin{cases}a-b=2\\-a+3b=2\end{cases}$ بالجمع نجد $2b=4$ وبالتالي $b=2$

نعوّض فنجد $a=4$ ومنه $\vec{n}(4,2,1)$ فمعادلة المستوي (PQR) هي $4(x-2)+2(y-0)+1(z-0)=0$ ومنه

$4x+2y+z-8=0$ وهي المعادلة المطلوبة .

$D(0,0,1)$ نعوّض إحداثياتها في معادلة المستوي (PQR)فنجد $1-8\neq0$ فالنقطة $D(0,0,1)$ لا تنتمي إلى المستوي (PQR)

❸ المستقيم (DH) شعاع توجيهه $\vec{n}(4,2,1)$ فتمثيله الوسيطي :

$$(DH):\begin{cases}x=4t\\y=2t\\z=t+1\end{cases}\quad :t\in\mathbb{R}$$

النقطة H هي نقطة تقاطع المستقيم (DH) مع المستوي (PQR) لذلك نعوّض المعادلات الوسيطية للمستقيم (DH) في معادلة المستوي (PQR) فنجد : $4(4t)+2(2t)+(t+1)-8=0$ ومنه $21t-7=0$ و بالتالي $t=\frac{1}{3}$ نعوّض فنجد $x=\frac{4}{3}, y=\frac{2}{3}, z=\frac{4}{3}$ ومنه $H(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3})$.

لنوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (PR) : $\overrightarrow{PR}(-1,1,2)$: $t \in \mathbb{R}$ $\quad (PR):\begin{cases} x=-t+2 \\ y=t \\ z=2t \end{cases}$

لنعوّض إحداثيات النقطة $H(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3})$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم (PR) فنجد:

$$\begin{cases} \frac{4}{3}=-t+2 \Rightarrow t=\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}=t \\ \frac{4}{3}=2t \Rightarrow t=\frac{2}{3} \end{cases}$$

فالنقطة $H(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3})$ تنتمي إلى المستقيم (PR) .

❹ $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{S}\cdot h$: $\mathcal{S}$ تمثّل مساحة المثلث PQR وهو قائم في R .

ومنه $\mathcal{S}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{RP}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{RQ}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+1+4}\sqrt{1+9+4}=\frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{14}=\sqrt{21}$

$$h=dist(D,(PQR))=\frac{\left|0+0+1-8\right|}{\sqrt{16+4+1}}=\frac{7}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

ملاحظة : يمكن حساب $h=DH=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

ومنه $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\sqrt{21}\frac{\sqrt{21}}{3}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$.

السؤال السابع : في معلمٍ متجانس معطى في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط :

$A(4,0,-3)$ و $B(2,2,2)$ و $C(3,-3,-1)$ و $D(0,0,-3)$ تمثّل رؤوس رباعي الوجوه $ABCD$.

❶ أثبت أنّ معادلة المستوي المحوري $\mathcal{P}_1$ للقطعة المستقيمة $[AB]$ هي : $4x-4y-10z-13=0$.

❷ بافتراض أنّ معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$ و $[CD]$ هما بالترتيب: $\mathcal{P}_2 : 2x-10y-6z-7=0$

و $\mathcal{P}_3 : 3x-3y+2z-5=0$ أثبت أنّ المستويات الثلاث تتقاطع في نقطة واحدة E يطلب إيجاد إحداثياتها .

❸ استنتج معادلةً للكرة التي تمر برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل

❶ بفرض M منتصف القطعة $[AB]$ فتكون إحداثياتها $M(3,1,-\frac{1}{2})$. ويكون الشعاع $\overrightarrow{AB}(-2,2,5)$ هوشعاع ناظم على المستوي المحوري $\mathcal{P}_1$. وتكون معادلة المستوي $\mathcal{P}_1$ هي : $-2(x-3)+2(y-1)+5(z+\frac{1}{2})=0$

وبالإصلاح نجد : $\boxed{\mathcal{P}_1 : 4x-4y-10z-13=0}$

❷ $\begin{cases}4x-4y-10z-13=0\\2x-10y-6z-7=0\\3x-3y+2z-5=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x-5y-3z-\frac{7}{2}=0 & L_1\\4x-4y-10z-13=0 & L_2\\3x-3y+2z-5=0 & L_3\end{cases}$

$$\sim\to\begin{cases}x-5y-3z-\frac{7}{2}=0 & L_1\\16y+2z+1=0 & -4L_1+L_2\to L_2'\\12y+11z+\frac{11}{2}=0 & -3L_1+L_3\to L_3'\end{cases}$$

$$\sim\to\begin{cases}x-5y-3z-\frac{7}{2}=0 & L_1\\16y+2z+1=0 & L_2'\\+\frac{19}{2}z+\frac{19}{4}=0 & -\frac{3}{4}L_1+L_3'\to L_3''\end{cases}$$

من L_3'' نجد $z=-\frac{1}{2}$ نعوّض في L_2' فنجد $y=0$

نعوّض في L_1 فنجد $x=2$. فالمستويات الثلاث تشترك بنقطة واحدة إحداثياتها $E(2,0,-\frac{1}{2})$.

❸ بما أنّ النقطة E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ فإنّ $EA=EB\cdots(I)$.

و بما أنّ النقطة E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AC]$ فإنّ $EA=EC\cdots(II)$.

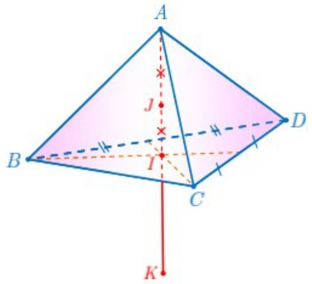
و بما أنّ النقطة E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$ فإنّ $EB=EC\cdots(III)$.

من (I) و (II) و (III) نجد أنّ النقطة E متساوية البعد عن النقاط A و B و C و D فهي مركز الكرة التي تمر بهذه النقاط

نصف قطر الكرة R حيث $R=EA=\sqrt{4+0+(-3+\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{41}{4}}$

معادلة الكرة المارة برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$ هي $\boxed{(x-2)^2+y^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{41}{4}}$.

السؤال الثامن :



ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه. وليكن I مركز ثقل المثلث BCD

و J منتصف $[AI]$ و K نظيرة A بالنسبة إلى I.

عبّر عن J و K بصفتهما مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C و D

بعد تزويدها بأمثال مناسبة.

الحل

- إنّ I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$.

و J منتصف $[AI]$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,3)$ و $(I,3)$ فتكون J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,1)$ و $(D,1)$ و $(C,1)$

- لما كانت $\overrightarrow{KI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}$ كان $2\overrightarrow{KI}-\overrightarrow{KA}=\vec{0}$ ، إذن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-1)$ و $(I,2)$

ولمّا كان I مركز ثقل المثلث BCD كان I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,\frac{2}{3})$ و $(B,\frac{2}{3})$ و $(C,\frac{2}{3})$

ومنه K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,-1)$ و $(D,\frac{2}{3})$ و $(B,\frac{2}{3})$ و $(C,\frac{2}{3})$.

....انتهت الأجوبة..

خاص بقناة

ملفات بكالوريا سعادة/أوائل

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

حل ورقة العمل الثالثة في مادة الرياضيات (**الجبر**) الاسم :.........

للصف الثالث الثانوي العلمي (2022)

السؤال الأول : في إحدى مسابقات التوظيف ، يتضمّن اختبار أربعة أسئلة كل منها مزوّد بثلاث إجابات مقترحة منها واحدة صحيحة فقط . يقرّر أحد المتقدّمين الإجابة عشوائياً عن الأسئلة الأربعة .

❶ ما احتمال الحصول على إجابة صحيحة على الأقل ؟

❷ لنعرّف المتحوّل العشوائي X الذي يدل على عدد الإجابات الصحيحة التي نحصل عليها . عيّن مجموعة قيم X . واكتب قانونه الاحتمالي واحسب توقعّه الرياضي و تباينه .

الحل

❶ نحن أمام تجربة برنولية فيها $n = 4$ و $p = \frac{1}{3}$ و $q = \frac{2}{3}$

ومنه $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$

$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \binom{4}{0}(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^4 = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$.

❷ $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$

$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{4}{0}(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}$ و $\mathbb{P}(X = 1) = \binom{4}{1}(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^3 = \frac{32}{81}$ و $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{4}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2 = \frac{24}{81}$

$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{4}{3}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^1 = \frac{8}{81}$ و $\mathbb{P}(X = 4) = \binom{4}{4}(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^0 = \frac{1}{81}$

x_i	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$E(X) = n \cdot p = 4 \cdot (\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$

$V(X) = n \cdot p \cdot q = 4(\frac{1}{3})(\frac{2}{3}) = \frac{8}{3}$.

السؤال الثاني : يحتوي صندوق على كرتين سوداوين و كرتين بيضاوين .

نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرّة .

لنرمّز بالرمز A إلى الحدث « الحصول على كرات من لونين مختلفين ».

وبالرمز B إلى الحدث « الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأكثر »

❶ احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون ثمّ استنتج $\mathbb{P}(A)$.

❷ هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً؟ علل إجابتك .

❸ لنعرّف المتحوّل العشوائي X الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

عيّن مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه .

الحل

❶ $A' = \{(w,w,w),(b,b,b)\}$

$$\mathbb{P}(A') = \frac{2\times2\times2}{4\times4\times4} + \frac{2\times2\times2}{4\times4\times4} = \frac{1}{4}$$

ومنه $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

❷ $B = \{(b,b,w)_{\times3},(b,b,b)\}$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2\times2\times2\times3}{4\times4\times4} + \frac{2\times2\times2}{4\times4\times4} = \frac{1}{2}$$

$A\cap B = \{(b,b,w)_{\times3}\}$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{2\times2\times2\times3}{4\times4\times4} = \frac{3}{8}$$

نلاحظ أنّ الحدثين A و B مستقلان احتمالياً لأنّ $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$ حيث $\frac{3}{8} = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$ محقّق

❸ $\Omega = \{\overbrace{(b,b,b)}^{0},\overbrace{(w,w,w)}^{3},\overbrace{(b,b,w)_{\times3}}^{1},\overbrace{(w,w,b)_{\times3}}^{2}\}$

$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(b,b,b) = \frac{2\times2\times2}{4\times4\times4} = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(w,b,b)_{\times3} = \frac{2\times2\times2\times3}{4\times4\times4} = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(w,w,b)_{\times3} = \frac{2\times2\times2\times3}{4\times4\times4} = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(w,w,w) = \frac{2\times2\times2}{4\times4\times4} = \frac{1}{8}$$

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

التوقع الرياضي :

$$E(X) = (0)(\frac{1}{8}) + (1)(\frac{3}{8}) + (2)(\frac{3}{8}) + (3)(\frac{1}{8}) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

التباين : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$E(X^2) = (0)^2(\frac{1}{8}) + (1)^2(\frac{3}{8}) + (2)^2(\frac{3}{8}) + (3)^2(\frac{1}{8}) = 3$$

ومنه : $V(X) = 3 - (\frac{3}{2})^2 = \frac{12-9}{4} = \frac{3}{4}$.

السؤال الثالث : في إحصائيةٍ لوزارة النقل وُجد أنّ 60% من الحوادث يكون السائق رجلاً وأنّ 70% منهم يكون حادثهم بسبب تجاوز حدود السرعة . و وُجد أيضاً بشكلٍ عام أنّ 80% من الحوادث سببها تجاوز حدود السرعة .

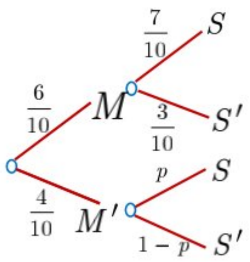
اخترنا عشوائياً ملفاً لحادث مروري.

بفرض M الحدث : « السائق في الملف رجلاً » و S الحدث : « تجاوز السائق حدود السرعة »

إذا علمت أنّ السائق في هذا الملف امرأةً ، فما احتمال أن يكون الحادث سببه تجاوز حدود السرعة ؟

الحل

$$\mathbb{P}(M) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(S \mid M) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(S) = \frac{80}{100}$$



الطلب : $\mathbb{P}(S \mid M') = p$

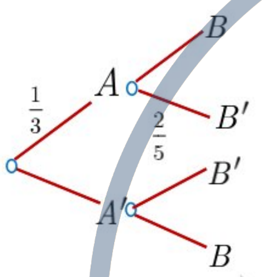
لدينا فرضاً $\mathbb{P}(S) = \frac{80}{100}$ ومنه

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(M \cap S) + \mathbb{P}(M' \cap S)$$

ومنه $\frac{4}{10}p + \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{80}{100}$ وبالتالي

$\frac{38}{100} = p \frac{40}{100}$ ومنه : $\mathbb{P}(S \mid M') = \frac{19}{20} = \frac{38}{40} = p$

السؤال الرابع : في تجربة عشوائية لدينا الحدثان A و B يحققان :

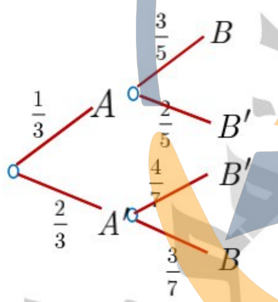


$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(B' | A) = \frac{2}{5} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(A' \cap B) = \frac{2}{7}$$

عيّن الاحتمالات $\mathbb{P}(A')$ و $\mathbb{P}(B \mid A)$ و $\mathbb{P}(A \cap B)$ و $\mathbb{P}(A \cap B')$

و $\mathbb{P}(B \mid A')$ و $\mathbb{P}(A' \cap B')$ و $\mathbb{P}(B)$ و $\mathbb{P}(A \mid B)$.

الحل



$$\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(B \mid A) = 1 - \mathbb{P}(B' \mid A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B') = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B' \mid A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

$\mathbb{P}(B \mid A') = \dfrac{\mathbb{P}(A' \cap B)}{\mathbb{P}(A')} = \dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{7}$ ومنه $\mathbb{P}(B' \mid A') = \dfrac{4}{7}$

$$\mathbb{P}(A' \cap B') = \mathbb{P}(A') \cdot \mathbb{P}(B' \mid A') = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A' \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} = \frac{17}{35}$$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{17}{35}} = \frac{7}{17} \; .$$

السؤال الخامس:

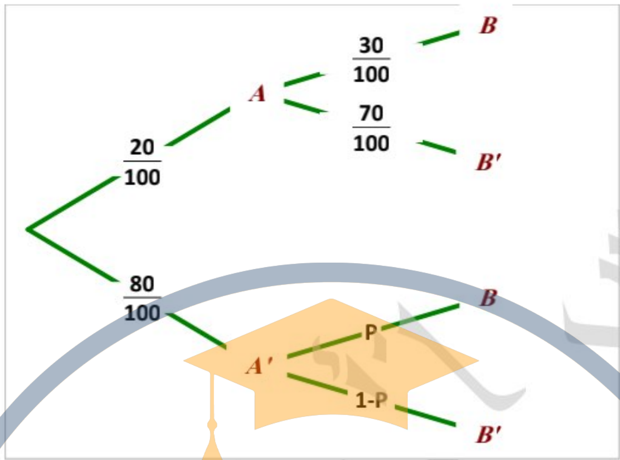
في أحد المشافي نسبة المصابين بالمرض A 20% ونسبة المصابين بالمرض B 46% ومن بين المصابين بالمرض A نسبة المصابون بالمرض B 30% اخترنا مريضاً عشوائياً من المشفى .

❶ إذا علمت أنّه غير مصاب بالمرض A ما احتمال أن يكون مصاباً بالمرض B ؟

❷ لنعرّف المتحوّل العشوائي X الذي يدل على عدد الأمراض التي يمكن أن يصاب بها الشخص المختار (من المرضين A أو B) عيّن مجموعة قيم X وجدول قانونه الاحتمالي واحسب توقّعه الرياضي .

الحل

❶



$$\mathbb{P}(B)=\frac{46}{100}=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A'\cap B)$$

$$\frac{46}{100}=\frac{20}{100}\times\frac{30}{100}+\frac{80}{100}\times p$$

ومنه $p=\frac{1}{2}=\mathbb{P}(B\mid A')$

❷ $X(\Omega)=\{0,1,2\}$

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(A'\cap B')=\frac{80}{100}\times\frac{1}{2}=\frac{40}{100}$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(A\cap B')+\mathbb{P}(A'\cap B)$$

$$=\frac{20}{100}\times\frac{70}{100}+\frac{80}{100}\times\frac{1}{2}=\frac{54}{100}$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{20}{100}\times\frac{30}{100}=\frac{6}{100}$$

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{40}{100}$	$\frac{54}{100}$	$\frac{6}{100}$

التوقع الرياضي : $E(X)=0+\frac{54}{100}+\frac{12}{100}=\frac{66}{100}$.

السؤال السادس : يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء وكرتان سوداوان. نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة . ليكن المتحوّل العشوائي X الذي يأخذ القيمة 4 إذا كانت الكرتان المسحوبتان بيضاوان، ويأخذ القيمة -3 إذا كانت كرة بيضاء وكرة سوداء، ويأخذ القيمة n إذا كانت الكرتان المسحوبتان سوداوين.

❶ احسب $\mathbb{P}(X=4)$ و $\mathbb{P}(X=-3)$. استنتج $\mathbb{P}(X=n)$.

❷ عيّن القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي X .

❸ احسب n كي يكون توقعه الرياضي معدوماً .

الحل

❶ $\mathbb{P}(X=4)=\mathbb{P}((w,w))=\dfrac{P_3^2}{P_5^2}=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$

$\mathbb{P}(X=-3)=\mathbb{P}((w,b)_{\times 2})=\dfrac{P_3^1\cdot P_2^1\times 2}{P_5^2}=\dfrac{12}{20}=\dfrac{6}{10}$

$\mathbb{P}(X=n)=1-\mathbb{P}(X=-3)-\mathbb{P}(X=4)=1-\dfrac{3}{10}-\dfrac{6}{10}=\dfrac{1}{10}$

❷

x_i	-3	4	n
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

❸ $E(X)=\dfrac{-18+12+n}{10}=\dfrac{-6+n}{10}$ يكون التوقع الرياضي معدوماً عندما $-6+n=0$ ومنه $n=6$.

السؤال السابع : ليكن X متحوّل عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية .

الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي للمتحوّل X .

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{81}$				

❶ ما عدد الاختبارات في التجربة ؟

❷ أكمل الجدول المجاور ؟

❸ احسب التوقع الرياضي وتباين المتحوّل العشوائي X .

الحل

❶ عدد الاختبارات يساوي 4 .

❷ $\mathbb{P}(X=0)=\dfrac{1}{81}=\dbinom{4}{0}\cdot p^0\cdot q^4=q^4$ ومنه $q^4=\dfrac{1}{81}$ ومنه $q=\dfrac{1}{3}$ وبالتالي $p=\dfrac{2}{3}$.

$\mathbb{P}(X=1)=\dbinom{4}{1}\cdot(\dfrac{2}{3})^1\cdot(\dfrac{1}{3})^3=\dfrac{8}{81}$ و $\mathbb{P}(X=2)=\dbinom{4}{2}\cdot(\dfrac{2}{3})^2\cdot(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{24}{81}$

و $\mathbb{P}(X=3)=\dbinom{4}{3}\cdot(\dfrac{2}{3})^3\cdot(\dfrac{1}{3})^1=\dfrac{32}{81}$ و $\mathbb{P}(X=4)=\dbinom{4}{4}\cdot(\dfrac{2}{3})^4\cdot(\dfrac{1}{3})^0=\dfrac{16}{81}$

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

❸ $E(X)=n\cdot p=4\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$

$V(X)=n\cdot p\cdot q=4\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{9}$

السؤال الثامن: يحتوي صندوق على خمس كرات ، ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 ، وكرتان حمراوان تحملان الأرقام 1 و 2 . نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق .

❶ كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟

❷ ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من اللون نفسه ؟

❸ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرتين مجموع رقميهما يساوي 3 ؟

❹ إذا علمت أنّ الكرتين المسحوبتين من اللون نفسه ، ما احتمال أن يكون مجموع رقميهما يساوي 3 ؟

الحل

❶ $\binom{5}{2} = 10$.

❷ لنرمز الحدث A :«الكرتان المسحوبتان من اللون نفسه »

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{3}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3+1}{10} = \frac{2}{5} .$$

❸ $\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{1} = 4$.

❹ لنرمز الحدث B :« مجموع رقميهما يساوي 3 »

والمطلوب : $\mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ ومنه

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}+\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$ ومنه

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

السؤال التاسع : نلقي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرّات متتالية

❶ ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثّل عدد مرّات ظهور الوجه H في الرمية الأولى .

عيّن القيم التي يأخذها X ، وقانونه الاحتمالي.

❷ ليكن Y المتحوّل العشوائي الذي يمثّل عدد مرّات ظهور الوجه H في الرميتين الثانية والثالثة .

عيّن القيم التي يأخذها Y، وقانونه الاحتمالي.

❸ اكتب الجدول الاحتمالي الذي يمثّل القانون الاحتمالي للزوج (X,Y). أيكون المتحولان X و Y مستقلين احتمالياً ؟علل

الحل

❶

$$\Omega=\{\overbrace{HHH}^{1},\overbrace{HHT}^{1},\overbrace{HTH}^{1},\overbrace{THH}^{0},\overbrace{TTT}^{0},\overbrace{TTH}^{0},\overbrace{THT}^{0},\overbrace{HTT}^{1}\}$$

$$X(\Omega)=\{0,1\}$$

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

❷

$$\Omega=\{\overbrace{HHH}^{2},\overbrace{HHT}^{1},\overbrace{HTH}^{1},\overbrace{THH}^{2},\overbrace{TTT}^{0},\overbrace{TTH}^{1},\overbrace{THT}^{1},\overbrace{HTT}^{0}\}$$

$$Y(\Omega)=\{0,1,2\}$$

y_j	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=y_j)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

❸

$X\setminus Y$	0	1	2	$\mathbb{P}(X=x_i)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(Y=y_j)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

نلاحظ أنّ $p_{0,0}=\frac{1}{8}=\mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$

و $p_{0,1}=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ و $p_{0,2}=\frac{1}{8}=\mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Y=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$

و $p_{1,0}=\frac{1}{8}=\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$ و $p_{1,1}=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ و

$p_{1,2}=\frac{1}{8}=\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$

ومنه $p_{i,j}=\mathbb{P}(X=x_i)\times\mathbb{P}(Y=y_j)$ أياً تكن i و j فالمتحولان X و Y مستقلان احتمالياً .

السؤال العاشر: يحوي مغلف 5 بطاقات متماثلة كتب عليها الأرقام $2,2,1,1,0$

نسحب من المغلف عشوائياً ثلاث بطاقات على التتالي دون الإعادة

❶ إذا علمت أن مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة يساوي 4 فما احتمال أن تكون البطاقة الأولى تحمل الرقم 0 ؟

❷ ليكن X المتغير العشوائي الذي يدل على جداء أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة ، اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه وانحرافه .

الحل

❶ السحب ثلاث كرات على التتالي دون إعادة

$$\underbrace{2,2}_{2},\underbrace{1,1}_{2},\underbrace{0}_{1} \qquad \boxed{5}$$

الحدث المعلوم B : مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة يساوي 4 .

الحدث المطلوب A : أن تكون البطاقة الأولى تحمل الرقم 0

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$B = \{(1,1,2)_{\times 3}, (2,2,0)_{\times 3}\}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{P_2^2 \cdot P_2^1 \times 3 + P_2^2 \cdot P_1^1 \times 3}{P_5^3} = \frac{12+6}{5 \times 4 \times 3} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$$

$$A \cap B = \{(0,2,2)\}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{P_1^1 \cdot P_2^2}{P_5^3} = \frac{2}{60}$$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{2}{60}}{\frac{18}{60}} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

❷ $X(\Omega) = \{0,2,4\}$

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}((0,n,n)_{\times 3}) = \frac{P_1^1 P_4^2 \times 3}{P_5^3} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}((1,1,2)_{\times 3}) = \frac{P_2^2 P_2^1 \times 3}{P_6^3} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}((1,2,2)_{\times 3}) \frac{P_2^1 P_2^2 \times 3}{P_6^3} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

x_i	0	2	4
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$E(X) = \frac{0+2+4}{5} = \frac{6}{5}$$

التباين : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = (0)^2 \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{16}{5} = 4$ ومنه $V(X) = 4 - \frac{36}{25} = \frac{64}{25}$

الانحراف المعياري : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{8}{5}$.

....انتهت الأجوبة..

خاص بقناة

ملفات بكالوريا سعادة/أوائل

السؤال الأول : الجدول الآتي يمثل جدول تغيرات للتابع f المعرّف والاشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ خطّه البياني C:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

❶ بيّن أنّ للمعادلة $f(x)=0$ جذرين مختلفين على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

❷ أوجد معادلة المقارب الشاقولي للخط البياني C .

❸ هل يوجد للخط C مقارب مائل ؟ علل إجابتك .

❹ دل على قيمته الحدية محلياً مبيّناً نوعها .

الحل

❶ ❑ في المجال $]-\infty,0]$ يكون f مستمراً ومتزايداً تماماً عليه و $f(]-\infty,0])=]1,2]$ و $0\notin]1,2]$

ومنه ليس للمعادلة $f(x)=0$ حل في المجال $]-\infty,0]$.

❑ في المجال $]0,2[$ يكون f مستمراً ومتناقصاً تماماً عليه

و $f(]0,2[)=]-\infty,2[$ و $0\in]-\infty,2[$ ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد x_1 يقع في المجال $]0,2[$.

❑ في المجال $]2,+\infty[$ يكون f مستمراً ومتزايداً تماماً عليه

و $f(]2,+\infty[)=]-\infty,1[$ و $0\in]-\infty,1[$ ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد x_2 يقع في المجال $]2,+\infty[$.

❷ $\lim\limits_{x\to2}f(x)=-\infty$ ومنه المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب شاقولي للخط C .

❸ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ وبالتالي المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$ و $-\infty$

ومنه ليس للخط C أي مستقيم مقارب مائل.

❹ $f(0)=2$ قيمة كبرى محلياً .

السؤال الثاني : ليكن C الخط البياني لتابع f المعرّف على $D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ والاشتقاقي على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ جدول تغيّراته هو الآتي:

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		////		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-3	////	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

❶ ما نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه المفتوحة ؟ ثمّ استنتج معادلة مستقيم مقاربه الشاقولي لخطّه البياني.

❷ دل على القيم الحدّية محلياً مبيّنةً نوعها .

❸ أوجد $f(D)$. وهل يتقاطع C مع محور الفواصل ؟

❹ ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<0$ ؟ و ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)<0$ ؟

الحل

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$ ومنه $x=1$ مستقيم مقارب شاقولي .

❷ $f(-2)=-2$ قيمة كبرى محلياً ، $f(-1)=-3$ قيمة صغرى محلياً ، $f(2)=4$ قيمة صغرى محلياً .

❸ $f(D)=]-\infty,-2]\cup[4,+\infty[$ ونلاحظ أنّ $0\notin f(D)=]-\infty,-2]\cup[4,+\infty[$ ومنه ليس للمعادلة $f(x)=0$ أية حلول

أي أنّ الخط C لا يتقاطع مع محور الفواصل .

❹ مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<0$ هي $x\in]-\infty,-1]$. ومجموعة حلول المتراجحة $f'(x)<0$ هي $x\in]-2,-1[\cup]1,2[$

السؤال الثالث : ليكن f تابعاً اشتقاقياً على $]-1,+\infty[$ ، خطّه البياني C_f . جدول تغيّراته هو الآتي :

x	-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	-4	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

❶ جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه ثمّ استنتج معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي لخطّه البياني C_f .

وهل يوجد للخط C_f مستقيم مقارب مائل ؟ علل إجابتك .

❷ جد $f(]-1,+\infty[)$.

❸ احسب $f(0)$ و $f'(0)$ ثمّ اكتب معادلةً لمماس الخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

❹ بيّن أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً .

❺ بافتراض $f(1)=0$. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<0$ ؟

❻ ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)\le 0$ ؟

الحل

❶ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=+\infty$ ومنه $x=-1$ مستقيم مقارب شاقولي يوازي yy' .

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ ومنه $y=0$ مستقيم مقارب أفقي يوازي xx' . و لا يوجد مستقيم مقارب مائل لأنّ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$.

❷ $f(]-1,+\infty[)=[-1,+\infty[$.

❸ $f(0)=3$ و $f'(0)=-4$ فتكون معادلة المماس للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$ من الشكل :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ وبالتالي $y=-4(x-0)+3$ إذن $y=-4x+3$

❹ ☐ في المجال $]-1,2[$ يكون f مستمراً ومتناقصاً تماماً عليه و $0\in f(]-1,2[)=]-1,+\infty[$

فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد x_1 يقع في المجال $]-1,2[$.

☐ في المجال $[2,+\infty[$ يكون f مستمراً عليه و $0\notin f([2,+\infty[)=[-1,0[$

فليس للمعادلة $f(x)=0$ أية حلول في المجال $[2,+\infty[$.

❺ بافتراض $f(1)=0$ فتكون مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<0$ هي $x\in]1,+\infty[$.

❻ مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)\le 0$ هي $x\in]-1,2]$.

السؤال الرابع : ليكن g تابعاً اشتقاقياً على $\mathbb{R}$ جدول تغيّراته هو الآتي

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

❶ بالاستفادة من الجدول استنتج نهاية التابع $f: x\mapsto e^{g(x)}$ عند $-\infty$ و $+\infty$.

❷ أوجد $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثمّ نظّم جدولاً بتغيّرات f . واستنتج مجموعة قيم التابع f .

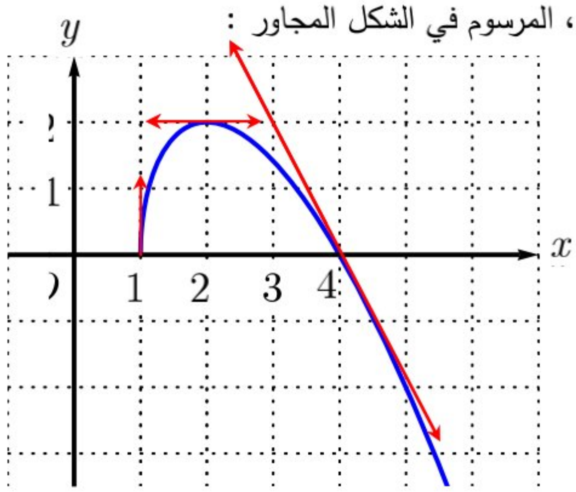
الحل

❶ $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$.و لدينا $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=e^0=1$.

❷ $f'(x)=g'(x)e^{g(x)}$ نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$ وبالتالي نستنتج جدول تغيّرات التابع f كالآتي :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	1

السؤال الخامس : f تابعٌ معرّف على $[1,+\infty[$. خطّه البياني C_f، المرسوم في الشكل المجاور :



❶ هل f اشتقاقي عند $x=1$ ؟ علل إجابتك .

❷ احسب كلاً من $f(2)$ و $f'(2)$ و $f(4)$ و $f'(4)$.

❸ اكتب معادلةً للمماس للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x=4$.

❹ استنتج مجموعة تعريف التابع $g : x \mapsto \ln(f(x))$

❺ ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) \le 0$ ؟

❻ نظّم جدولاً بتغيّرات التابع f .

الحل

❶ f ليس اشتقاقياً عند $x=1$ لأنّ المماس شاقولي عند هذه النقطة .

❷ $f(2)=2$ و $f'(2)=0$ (لأنّ المماس أفقي في النقطة التي فاصلتها 2)

$f(4)=0$ و لحساب $f'(4)$ (إنّ $f'(4)$ تعني هندسياً ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 4)

حيث أنّ المماس للخط C في هذه النقطة يمر بالنقطتين $(4,0)$ و $(3,2)$. ومنه $m=\dfrac{0-2}{4-3}=-2=f'(4)$.

❸ معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=4$ هي : $y=f'(4)(x-4)+f(4)$

ومنه $y=-2(x-4)+0$ أي $y=-2x+8$.

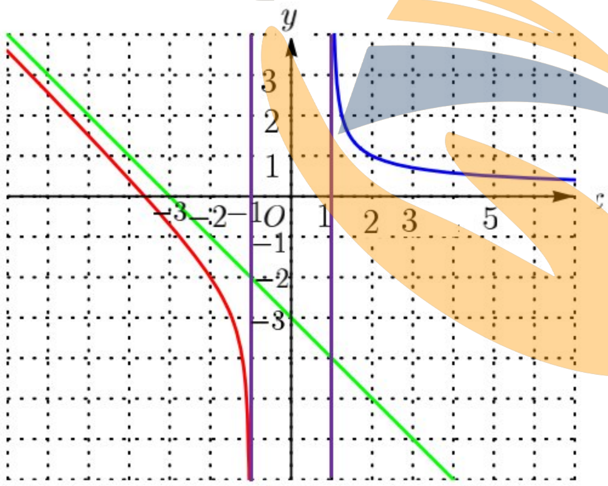
❹ g معرّف عندما يكون $f(x)>0$ وهذا محقق عندما $x\in]1,4[=D_g$.

❺ مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)\le 0$ هي $x\in[2,+\infty[$.

❻

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

السؤال السادس :



ليكن f التابع المعرّف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

خطه البياني C_f المرسوم في الشكل المجاور:

$x=-1$ و $x=1$ و $y=0$ و $y=-x-3$ مستقيمات

مقاربة لخطه البياني C_f .

❶ احسب كلاً من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x+3)$

و $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

❷ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

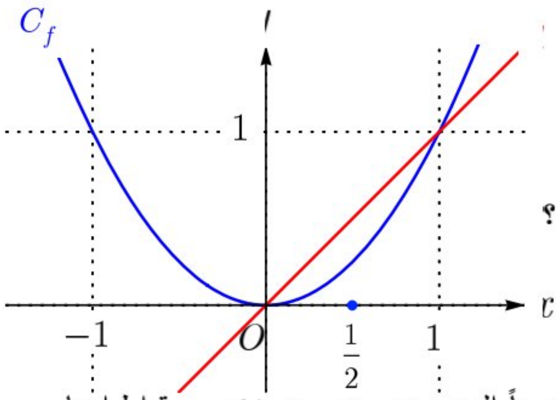
الحل

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x+3)=0$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$

❷ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد .

السؤال السابع: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ والمرسوم في الشكل المجاور :



وليكن المستقيم d الذي معادلته : $y = x$.

❶ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

❷ دل على القيمة الحدية محلياً مبيّناً نوعها .

❸ ما حلول المعادلة $f(x) = x$ ؟ وما حلول المتراجحة $f(x) < x$ ؟

❹ هل f تابعٌ زوجي أم فردي ؟ علل إجابتك .

❺ لنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ وفق العلاقة التدريجية:

$u_0 = \frac{3}{4}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ أعد الرسمة على ورقة إجابتك ثمّ مثّل هندسياً الحدود u_0 و u_1 و u_2 .خمّن جهة اطرادها.

أهي محدودة من الأدنى ؟ ما نهايتها المحتملة؟

الحل

❶ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

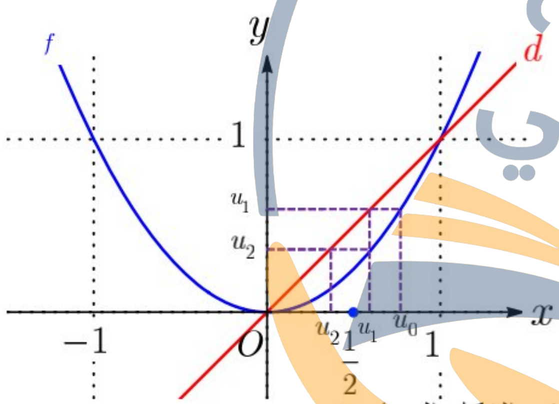
❷ $f(0) = 0$ قيمة صغرى محلياً .

❸ للمعادلة $f(x) = x$ حلّان هما $x = 0$ و $x = 1$. وحلول المتراجحة $f(x) < x$ هي $x \in]0,1[$.

❹ f تابعٌ زوجي لأنّ خطّه البياني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

❺ $g : x \mapsto \ln(f(x))$ معرّف عندما $f(x) > 0$ وهذا محقّق عندما $x \in \mathbb{R}^*$ أي $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$g(x) = 0$ وهذا يكافئ $f(x) = 1$ ومنه $x = -1$ أو $x = 1$

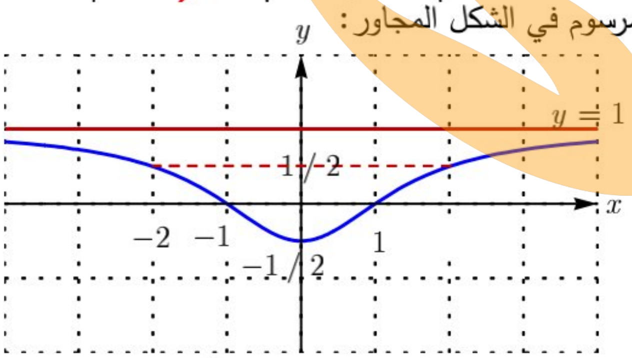


❻

نخمّن بأنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد صفر

ونهايتها المحتملة تساوي الصفر .

السؤال الثامن : f تابع معرف على $\mathbb{R}$ ، C خطّه البياني المرسوم في الشكل المجاور:



❶ ما حلول المتراجحة $f(x) > 0$ ؟

واستنتج مجموعة تعريف التابع $g : x \mapsto \ln f(x)$

❷ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

❸ جد $f(\mathbb{R})$. و ما هي حلول المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}$ ؟

الحل

❶ حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. وهي نفسها مجموعة تعريف التابع g .

❷ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

❸ $f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{2}, 1[$. وحلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ هي $x = -2$ أو $x = 2$.

....انتهت الأسئلة...