## استنتاج الطاقة الكلية

$$E_{tot} = E_p + E_k \dots (1)$$

$$E_p = \frac{1}{2}KX^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}KX_{max}^2\cos^2(\omega_o t + \bar{\varphi}) \dots (2)$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega_o^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_o t + \bar{\varphi}) \dots (3)$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}KX_{max}^2\cos^2(\omega_o t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2}m\omega_o^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_o t + \bar{\varphi})$$

لكن $K = m \cdot \omega_o^2$ و منه :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}KX_{max}^2\cos^2(\omega_o t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2}KX_{max}^2 \sin^2(\omega_o t + \bar{\varphi})$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}KX_{max}^2$$

$$=const$$

## الطاقة الحركية و سعة الإهتزاز

$$E_{tot} = E_p + E_k \to E_k = E_{tot} - E_p$$

$$E_k = \frac{1}{2}KX_{max}^2 - \frac{1}{2}KX^2 = \frac{1}{2}K(X_{max}^2 - X^2)$$

الطاقة الحركية في الموضع A حيث: $X_A = -\frac{X_{max}}{2}$

$$E_{kA} = \frac{1}{2}K(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{4}) = \frac{3}{4}E_{tot}$$

الطاقة الحركية في الموضع B حيث: $X_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$

$$E_{kB} = \frac{1}{2}K(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{2})) = \frac{1}{2}E_{tot}$$

العلاقة عكسية بين الطاقة الحركية و المطال

1) يتناسب الدور الخاص للنواس المرن طرداً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم المُعلق

2) يتناسب الدور الخاص للنواس المرن عكساً مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض

3) لا يتعلق الدور الخاص للنواس المرن مع سعة الإهتزاز

## علاقة السرعة

أثبت صحة العلاقة

$$v = \omega_o\sqrt{X_{max}^2 - X^2}$$

إنطلاقاً من العلاقة الطاقة الحركية:

$$E_{tot} = E_p + E_k \to E_k = E_{tot} - E_p$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}KX_{max}^2 - \frac{1}{2}KX^2$$

$$mv^2 = KX_{max}^2 - KX^2$$

$$mv^2 = K(X_{max}^2 - X^2)$$

$$v^2 = \frac{k}{m}(X_{max}^2 - X^2)$$

نعلم أن $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$ و منه : $v^2 = {\omega_o}^2(X_{max}^2 - X^2)$

$$v = \omega_o\sqrt{X_{max}^2 - X^2}$$

## الدراسة الأفقية للنواس المرن

أولاً: القوى الخارجية المؤثرة في الجسم :

1) قوة الثقل $\vec{w}$  2) قوة توتر النابض $\vec{F_s}$

3) قوة رد فعل محور الدوران $\vec{R}$

$$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a} \to \vec{w} + \vec{F_s} + \vec{R} = m\,\vec{a}$$

وبالإسقاط على محورٍ أفقي موجّه نحو اليمين نجد أن:

$$0 - F_s + 0 = m\,a \to -F_s = m\,a\ (1)$$

ثانياً : القوى الخارجية المؤثرة في النابض : قوة الشد

$$F_s{}' = K\,X \to F_s{}' = F_s = K\,X$$

و منه بالتعويض في (1) نجد أن:

$$-K\,\bar{X} = m\,\bar{a} \to$$

$$-K\,\bar{X} = m\,(\bar{X})''_t$$

$$(\bar{X})''_t = -\frac{k}{m}\bar{X}\ (2)$$



## انفصال الجسم المعلق بالنابض

الجسم يكون متأثراً بقوة ثقله فقط $\vec{w}$

بتطبيق العلاقة الأساسية في التحريك الإنسحابي

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \to \vec{w} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} = m\vec{a} \to \vec{a} = \vec{g} = \overrightarrow{const}$$

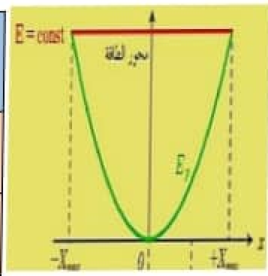
الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام

A) نحو الاتجاه السالب ؟ قذف شاقولي نحو الأعلى

B) نحو الاتجاه الموجب ؟قذف شاقولي نحو الأسفل

C)عند تركه من المطال الأعظمي الموجب أو السالب ؟ سقوط حر

| الموضع | الطاقة الحركية | الطاقة الكامنة المرونية |
| --- | --- | --- |
| مركز الاهتزاز | عُظمى | معدومة |
| المطالين الأعظمين | معدومة | عُظمى |



## الدراسة التحريكية لنواس فتل

القوى الخارجية المؤثرة :

1) قوة الثقل $\overline{W}$ 2) قوة توتر السلك $\overline{T}$

3)مزدوجة الفتل $\overline{\Gamma}$

$$\sum \overline{\Gamma} = I_\Delta \overline{\alpha}$$

$$\overline{\Gamma}_{\overline{W}/\Delta} + \overline{\Gamma}_{\overline{T}/\Delta} + \overline{\Gamma}_{\overline{\Gamma}/\Delta} = I_\Delta \overline{\alpha}$$

$\overline{\Gamma}_{\overline{W}/\Delta} = 0$ لأن حامل قوة الثقل منطبق على محور الدوران

$\overline{\Gamma}_{\overline{T}/\Delta} = 0$ لأن حامل قوة توتر السلك منطبق على محور الدوران

$$\overline{\Gamma}_{\overline{\Gamma}/\Delta} = -k\,\overline{\theta}$$

$$0 + 0 - k\,\overline{\theta} = I_\Delta \overline{\alpha}$$

$$-k\,\overline{\theta} = I_\Delta (\overline{\theta})''_t$$

$$(\overline{\theta})''_t = -\frac{k}{I_\Delta}\,\theta$$

## مصونية الطاقة :

$$E_{tot} = E_p + E_k$$

$$const = \frac{1}{2} K\,\theta^2 + \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$$

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن

$$0 = \frac{1}{2} K\,2\theta\omega + \frac{1}{2} I_\Delta 2\omega\alpha$$

$$0 = K\,\theta\omega + I_\Delta \omega\alpha$$

$$I_\Delta \overline{\alpha} = -k\,\overline{\theta}$$

$$(\overline{\theta})''_t = -\frac{k}{I_\Delta}\overline{\theta} \ ...(1)$$

و هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل : ( نكمل كما في السؤال السابق )

## ثابت فتل السلك

$$k = k' \times \frac{(2r)^4}{l}$$

$k'$ : ثابت يتعلق بنوع مادة السلك

$2r$: قطر السلك $l$ : طول السلك

1) لا تتغير قيمة الدور الخاص لنواس الفتل بتغير السعة الزاويّة للحركة

2) يزداد الدور الخاص لنواس الفتل بزيادة عزم عطالة الجملة

3) ينقص الدور الخاص لنواس الفتل بنقصان طول سلك الفتل

## سلك الفتل و الدورالخاص :

نُعلق ساقين متماثلين بسلكي فتلِ متماثلين طول الأول $L_1$ و طول الثاني $L_2$ فإذا علمت أن : $T_{o1} = 2T_{o2}$ أوجد العلاقة بين طولي السلكين ؟

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}} \quad ; k = k' \times \frac{(2r)^4}{l}$$

$$\rightarrow T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k' \times \frac{(2r)^4}{l}}}$$

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta\, l}{k' \times (2r)^4}}$$

$$T_o = const\sqrt{L}$$

$$T_{o1} = const\sqrt{L_1}$$

$$T_{o2} = const\sqrt{L_2}$$

$$\frac{T_{o1}}{T_{o2}} = \frac{const\sqrt{L_1}}{const\sqrt{L_2}}$$

$$\frac{2T_{o2}}{T_{o2}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \rightarrow 4 = \frac{L_1}{L_2}$$

$$L_1 = 4L_2$$

**تعريف النواس المركب :**

وهو كل جسم صلب يهتز بتأثير عزم قوة ثقله في مستوٍ شاقولي حول محور دوران أفقي لا يمر من مركز عطالته وعمودي على مستويه

**تعريف النواس البسيط :**

نظرياً : نقطة مادية تهتز بتأثير قوة ثقلها على بُعدٍ ثابت L من محور أفقي ثابت

عملياً: كرة صغيرة كتلتها m كثافتها النسبية كبيرة ومعلقة بخيطٍ مهمل الكتلة لا يمتط طوله L كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$I_\Delta = mr^2 \quad L = r \quad I_\Delta = mL^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} \rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

1) لا يتعلق دور النواس البسيط بكتلة الكرة و لا بنوع مادة الكرة

2) يتناسب الدور الخاص للنواس البسيط طرداً مع الجذر التربيعي لطول الخيط

3) يتناسب الدور الخاص للنواس البسيط عكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبية الأرضية

**الدراسة التحريكية للنواس المركب :**

القوى الخارجية المؤثرة:

1) قوة الثقل $\vec{w}$ 2) قوة رد فعل محور الدوران على الجسم $\vec{R}$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني

$$\Sigma\bar{\Gamma}_\Delta = I_\Delta\,\bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_\Delta\,\bar{\alpha}$$

وباختيار الجهة الموجبة للدوران عكس جهة دوران عقارب الساعة نجد أن :

$\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0$ لأن حامل القوة $\vec{R}$ يمر من محور الدوران $\Delta$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -\,mgd\,\sin\theta$$

$$-mgd\,\sin\theta + 0 = I_\Delta\,\bar{\alpha}$$

$$\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t$$

$$-mg\,d\,\sin\theta = I_\Delta\,(\bar{\theta})''_t$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\sin\theta$$

**السعات الزاوية الكبيرة :**

إن الدور ليس له علاقة بالسعة الزاوية إذا كانت السعة الزاوية صغيرة

إن الدور يزداد بازدياد السعة الزاوية إذا كانت السعة الزاوية كبيرة

$$T_0' \approx T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$$

حركة النواس الثقلي في حالة :

1) السعات الزاوية الكبيرة ؟ اهتزازية غير توافقية

2) السعات الزاوية الصغيرة ؟ جيبية دورانية

**الدراسة التحريكية للنواس البسيط :**

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

1) قوة ثقل الكرة $\vec{w}$ 2) قوة توتر الخيط $\vec{T}$

و بتطبيق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني :

$$\Sigma\bar{\Gamma}_\Delta = I_\Delta\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\Gamma}_{\vec{w}} + \bar{\Gamma}_{\vec{T}} = I_\Delta\bar{\alpha}$$

$\bar{\Gamma}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يمر بمحور الدوران

$$-mgL\sin\theta = mL^2(\bar{\theta})''_t$$

$$-g\sin\theta = L(\bar{\theta})''_t$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

## استنتاج علاقة السرعة الخطية :

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة :

قوة ثقل الكرة $\vec{W}$

قوة توتر الخيط $\vec{T}$

نطبق نظرية تغيير الطاقة الحركية بين وضعيين :

الوضع الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$

الوضع الثاني: $\theta_2 = \theta$

$$\Delta \overline{EK} = \Sigma \overline{W}_{\vec{F}(1\to2)}$$

$$EK_2 - EK_1 = \overline{W}_{\vec{W}} + \overline{W}_{\vec{T}}$$

$\overline{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يُعامد الانتقال في كل لحظة

$EK_1 = 0$ لأن الكرة تُركت دون سرعةٍ ابتدائية

$$EK_2 = \overline{W}_{\vec{W}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$h = L(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$h = L(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$v^2 = 2gL(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$v = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$$

عند المرور بالشاقول $\theta = 0$ و منه $\cos\theta = 1$

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_{max})}$$

## استنتاج علاقة توتر الخيط :

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة :

قوة ثقل الكرة $\vec{W}$

قوة توتر الخيط $\vec{T}$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الإنسحابي :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

و بالإسقاط على الناظم الموجه للأعلى (بجهة $\vec{T}$)

$$-w\cos\theta + T = m\,a_c$$

$$a_c = \frac{v^2}{L}$$

$$-mg\cos\theta + T = m\frac{v^2}{L}$$

$$T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{L}$$

$$v^2 = 2gL(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$T = mg\cos\theta + m\frac{2gL(\cos\theta - \cos\theta_{max})}{L}$$

$$T = mg\left(\cos\theta + 2(\cos\theta - \cos\theta_{max})\right)$$

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$$

عند المرور بالشاقول $\theta = 0$ و منه $\cos\theta = 1$

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_{max})$$

## اختيارات متعدد هام

1) حركة توافقية بسيطة سعة اهتزازها $X_{max}$ و دورها الخاص $T_0$ نضاعف سعة الإهتزاز فيصبح دورها الخاص $\acute{T}_0$ يساوي :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\acute{T}_0 = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ | d | $\acute{T}_0 = T_0$ | c | $\acute{T}_0 = \frac{1}{2}T_0$ | b | $\acute{T}_0 = 2T_0$ | a |

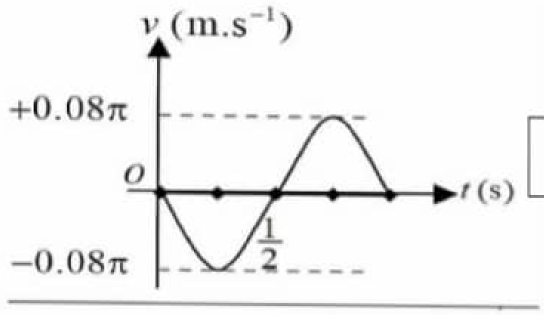
الإجابة الصحيحة هي C

2) يتألف نواس مرن من جسم صلب كتلته m مُعلق بنابض ثابت صلابته k النبض الخاص له $\omega_0$ نستبدل بالجسم جسماً آخر كتلته $\acute{m} = 2m$ وبالنابض نابضاً آخر ثابت صلابته $\acute{k} = \frac{1}{2}k$ فيصبح النبض الخاص الجديد $\acute{\omega}_0$ :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\acute{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{4}$ | d | $\acute{\omega}_0 = 2\omega_0$ | c | $\acute{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{2}$ | b | $\acute{\omega}_0 = 4\omega_0$ | a |

الإجابة الصحيحة هي b

3) يمثل الشكل البياني المجاور تغيرات السرعة بدلالة الزمن لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة فإن سعة الحركة لهذا الجسم $X_{max}$ تساوي :




| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.16m | d | 0.08m | c | 0.04m | b | 0.02m | a |

الإجابة الصحيحة هي b

4) نواس فتل دوره الخاص $T_0$ نزيد من عزم عطالته حتى أربعة أمثال ما كان عليه فيصبح دوره الجديد $\acute{T}_0$:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\acute{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}T_0$ | d | $\acute{T}_0 = \frac{1}{2}T_0$ | c | $\acute{T}_0 = \sqrt{2}T_0$ | b | $\acute{T}_0 = 2T_0$ | a |

الإجابة الصحيحة هي a

5) نواس فتل طول سلك الفتل فيه و دوره الخاص $T_0$ و نجعل طول سلك الفتل $2\ell$ فيصبح دوره الخاص الجديد $\acute{T}_0$ :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\acute{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}T_0$ | d | $\acute{T}_0 = \frac{1}{2}T_0$ | c | $\acute{T}_0 = \sqrt{2}T_0$ | b | $\acute{T}_0 = 2T_0$ | a |

الإجابة الصحيحة هي b

6) نواس فتل دوره 2s نجعل طول سلك الفتل ربع ما كان عليه فيصبح دوره الخاص الجديد يساوي :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 S | d | 4 S | c | 1 S | b | 0.5 S | a |

الإجابة الصحيحة هي b

7) عزم الإرجاع في نواس الفتل يُعطى بالعلاقة :

| a | | b | | c | | d | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | $\Gamma = -k^2\bar{\theta}$ | b | $\Gamma = -k\bar{\theta}$ | c | $\Gamma = -k\bar{\theta}^2$ | d | $\Gamma = -k^2\bar{\theta}^2$ |

الإجابة الصحيحة هي b

8) نواس فتل طول سلكه $\ell$ و دوره الخاص $T_0$ نجعل طول سلك الفتل نصف ما كان عليه فيصبح الدور الجديد :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | $\acute{T}_0 = 2T_0$ | b | $\acute{T}_0 = \sqrt{2}T_0$ | c | $\acute{T}_0 = \frac{1}{2}T_0$ | d | $\acute{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}T_0$ |

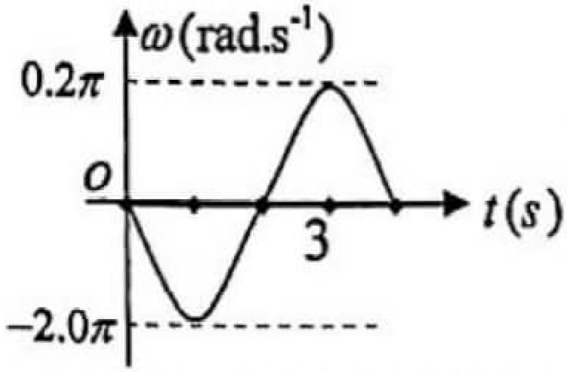
الإجابة الصحيحة هي d

9) يتحرك نواس فتل بحركة جيبية دورانية سعتها الزاويّة $\theta_{max} = \pi\ rad$ دوره الخاص $T_o = 2\ s$ فتكون القيمة المطلقة لسرعته الزاويّة العظمى لحظة مروره بموضع التوازن :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | $0\ rad \cdot s^{-1}$ | b | $\frac{\pi}{2}\ rad \cdot s^{-1}$ | c | $\pi\ rad \cdot s^{-1}$ | d | $\pi^2\ rad \cdot s^{-1}$ |

الإجابة الصحيحة هي d

10) يمثل الخط البياني في الشكل المجاور تغيرات السرعة الزاوية لنواس فتل بتغير الزمن فإن تابع السرعة الزاوية الذي يمثله هذا المنحني هو :




| | |
|---|---|
| a | $\bar{\omega} = 0.2\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$ |
| b | $\bar{\omega} = 0.4\pi \cdot \sin\frac{\pi}{2}t$ |
| c | $\bar{\omega} = 0.2\pi \cdot \sin\frac{\pi}{2}t$ |
| d | $\bar{\omega} = 0.4\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$ |

الإجابة الصحيحة هي c

# التوابع الزمنية للنواس المرن

## تابع المطال

$$\bar{X} = X_{max} \cdot \cos(\omega_o t + \bar{\varphi})$$

$t=0 \; ; \bar{X} = X_{max}$

$$X_{max} = X_{max} \cdot \cos\bar{\varphi}$$

$$\cos\bar{\varphi} = 1$$

$$\bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$$

$$\bar{X} = X_{max} \cdot \cos\omega_o t$$

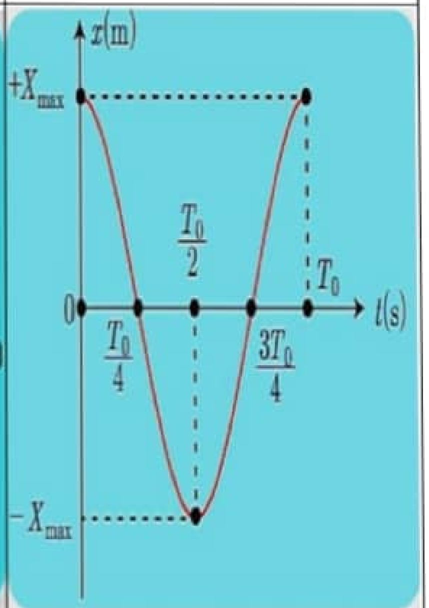
1) المطال أعظمي (طويلة)
في الموضعين الطرفيين :

$$X = |\pm X_{max}|$$

2) المطال معدوم
في مركز الإهتزاز :

$$X = 0$$

| t | 0 | $\frac{T_o}{4}$ | $\frac{T_o}{2}$ | $\frac{3T_o}{4}$ | $T_o$ |
|---|---|---|---|---|---|
| x | $+X_{max}$ | 0 | $-X_{max}$ | 0 | $+X_{max}$ |




## تابع السرعة

$$\bar{X} = X_{max} \cdot \cos(\omega_o t)$$

$$\bar{V} = (\bar{X})'_t = -\omega_o X_{max} \cdot \sin(\omega_o t)$$

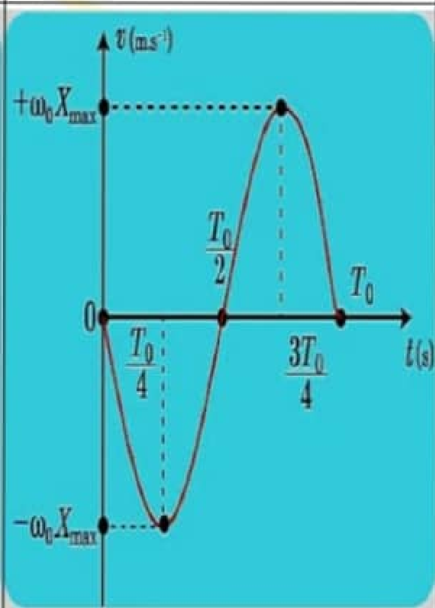
1) السرعة عظمى (طويلة)
في مركز الإهتزاز :

$$V_{max} = |\pm \omega_o X_{max}|$$

2) السرعة معدومة
في المطالين الأعظميين :

$$\vec{v} = 0$$

| t | 0 | $\frac{T_o}{4}$ | $\frac{T_o}{2}$ | $\frac{3T_o}{4}$ | $T_o$ |
|---|---|---|---|---|---|
| v | 0 | $-\omega_o X_{max}$ | 0 | $+\omega_o X_{max}$ | 0 |




## تابع التسارع

$$\bar{a} = (\bar{V})'_t = (\bar{X})''_t$$

$$\bar{V} = (\bar{X})'_t = -\omega_o \cdot X_{max} \cdot \sin(\omega_o t)$$

$$\bar{a} = (\bar{X})''_t = -\omega_o^2 \cdot X_{max} \cdot \cos(\omega_o t)$$

$$\bar{a} = -\omega_o^2 \bar{X}$$

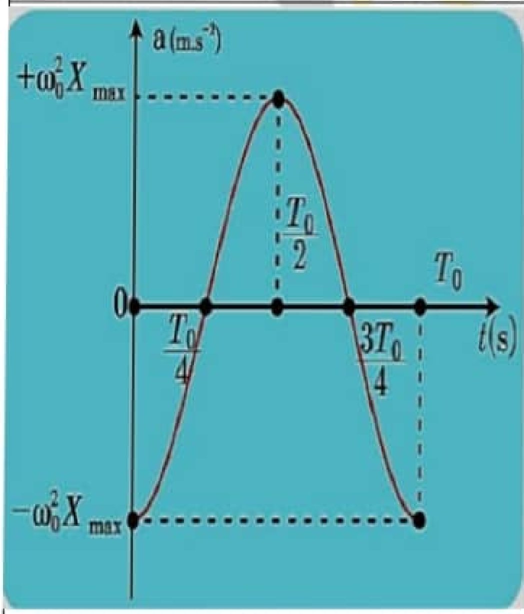
1) التسارع أعظمي (طويلة)
في المطالين الأعظميين :

$$a_{max} = |\pm \omega_o^2 X_{max}|$$

2) التسارع معدوم
في مركز الإهتزاز

$$a = 0$$

| t | 0 | $\frac{T_o}{4}$ | $\frac{T_o}{2}$ | $\frac{3T_o}{4}$ | $T_o$ |
|---|---|---|---|---|---|
| a | $-\omega_o^2 X_{max}$ | 0 | $+\omega_o^2 X_{max}$ | 0 | $-\omega_o^2 X_{max}$ |



| النواس المرن | نواس الفتل |
|---|---|
| $\bar{F} = -K\bar{X}$<br>$\bar{F} = m\bar{a}$<br>$m(\bar{X})''_t = -K\bar{X}$<br>$(\bar{X})''_t = -\frac{k}{m}\bar{X} \dots (1)$<br>و هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل :<br>$\bar{X} = X_{max} \cdot \cos(\omega_o t + \bar{\varphi})$<br>و للتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن :<br>$(\bar{X})'_t = -\omega_o \cdot X_{max} \cdot \sin(\omega_o t + \bar{\varphi})$<br>$(\bar{X})''_t = -\omega_o^2 \cdot X_{max} \cdot \cos(\omega_o t + \bar{\varphi})$<br>$(\bar{X})''_t = -\omega_o^2 \cdot \bar{X} \dots (2)$<br>و بموازنة العلاقتين (1) و (2) نجد أن:<br>$\omega_o^2 = \frac{k}{m} \to \omega_o = \sqrt{\frac{K}{m}} > 0$<br>وهذا ممكن لأن $m$ و $k$ موجبان فالحركة جيبية إنسحابية<br>$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$<br>$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$<br>$\to \frac{2\pi}{T_o} = \sqrt{\frac{k}{m}}$<br>$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ | $\bar{\Gamma}_{\vec{\eta}/\Delta} = -k\,\bar{\theta}$<br>$-k\,\bar{\theta} = I_\Delta \bar{\alpha}$<br>$I_\Delta(\bar{\theta})''_t = -k\,\bar{\theta}$<br>$(\bar{\theta})''_t = -\frac{k}{I_\Delta}\,\theta \dots (1)$<br>و هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل :<br>$\bar{\theta} = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_o t + \varphi)$<br>و للتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن :<br>$(\bar{\theta})'_t = -\omega_o \theta_{max} \sin(\omega_o t + \varphi)$<br>$(\bar{\theta})''_t = -\omega_o^2 \theta_{max} \cos(\omega_o t + \varphi)$<br>$(\bar{\theta})''_t = -\omega_o^2 \bar{\theta} \dots (2)$<br>و بموازنة العلاقتين (1) و (2) نجد أن:<br>$\omega_o^2 = \frac{k}{I_\Delta} \to \omega_o = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} > 0$<br>وهذا ممكن لأن $K$ و $I_\Delta$ موجبان فالحركة جيبية دورانية<br>$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}$<br>$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$<br>$\frac{2\pi}{T_o} = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}$<br>$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$ |

الدراسة التحريكية

## النواس المركب

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\sin\theta$$

و هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية حلها ليس جيبياً لأنها تحتوي $\sin\theta$ بدلا من $\theta$ و من أجل السعات الزاويّة الصغيرة :

$\theta \le 0.24\ rad$ أو $\theta \le 14^o$

حيث يكون: $\sin\theta \approx \theta$ فنجد أن :

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\theta \quad (1)$$

و هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل :

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\theta})$$

و للتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن فنجد

$$(\bar{\theta})'_t = -\omega_0\,\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\theta})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\,\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\theta})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\bar{\theta} \quad (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد أن :

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta} \to \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا محقق لأن المقادير $I_\Delta$ و m و g و d موجبة و منه حركة النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}$$

بالمطابقة بينهما نجد أن :

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} \to T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

## النواس البسيط

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{L}\sin\bar{\theta}$$

و هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية حلها ليس جيبياً لأنها تحتوي $\sin\theta$ بدلا من $\theta$ و من أجل السعات الزاويّة الصغيرة :

$\theta \le 0.24\ rad$ أو $\theta \le 14^o$

حيث يكون: $\sin\theta \approx \theta$ فنجد أن :

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{L}\bar{\theta} \quad (1)$$

و هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل :

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\theta})$$

و للتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن فنجد

$$(\bar{\theta})'_t = -\omega_0\,\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\theta})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\,\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\theta})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\bar{\theta} \quad (2)$$

بالمطابقة بين(1) و (2) نجد أن:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \to \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} > 0$$

و هذا محقق لأن المقداران $g, L$ مقداران موجبان فحركة و منه حركة النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

بالمطابقة بينهما نجد أن :

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{L}} \to T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

## استنتاج قوة الإرجاع

| حالة السكون | حالة الحركة |
|---|---|
| القوى الخارجية المؤثرة في الجسم :<br>قوة ثقل الكرة $\vec{w}$<br>قوة توتر النابض $\vec{F}_{so}$<br>$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{so} = \vec{0}$<br>و بالإسقاط على محور شاقوليّ موجّهٍ نحو الأسفل :<br>$W - F_{S0} = 0 \rightarrow W = F_{S0} \dots (1)$<br>القوى الخارجية المؤثرة في النابض :<br>$\vec{F'_{so}}$ تسبب له استطالة $X_0$ قانونها :<br>$F'_{so} = F_{S0} = kx_0$<br>نعوض في $(1)$ فنجد أن : $w = kx_0$<br>تسمى العلاقة السابقة استنتاج الإستطالة السكونية | القوى الخارجية المؤثرة في الجسم :<br>قوة ثقل الكرة $\vec{w}$<br>قوة توتر النابض $\vec{F}_s$<br>$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{w} + \vec{F}_s = m\vec{a}$<br>و بالإسقاط على محور شاقوليّ موجّهٍ نحو الأسفل :<br>$w - F_s = m \cdot a \quad (2)$<br>القوى الخارجية المؤثرة في النابض :<br>$\vec{F_s'}$ تسبب له الاستطالة $(\bar{X} + X_0)$ قانونها :<br>$F_s' = F_s = k(\bar{X} + X_0)$<br>نعوض في $(2)$ فنجد أن :<br>$w - k(\bar{X} + X_0) = m\bar{a}$<br>$w - K\bar{X} - KX_0 = m\bar{a}$<br>ومن حالة السكون لدينا :<br>$W = F_{S0} = kx_0$<br>$-K\bar{X} = m\bar{a} = F$<br>$\bar{F} = -K\bar{X}$ |

المهندس محمد شيخ أحمد
0937638966