مسألة دراسة حزمة توابع: يمكن إعطائها

ليكن $n$ عدداً طبيعياً غير معدوم، وليكن $f_n$ التابع المعرف على المجال $I = [0,+\infty[$

وفق: $\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x & x > 0 \\ f_n(0) = 0 & : x = 0 \end{cases}$.

نرمز إلى الخط البياني للتابع $f_n$، في معلم متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، بالرمز $\mathscr{C}_n$.

أولاً : ① أثبت أنَّ $f_n$ اشتقاقي في $x = 0$ عند كل $n \geq 2$. ادرس حالة $n = 1$.

② احسب $f'_n$ على المجال $]0,+\infty[$، ثم ادرس تغيرات $f_n$ ونظم جدولاً بها.

ثانياً : ① أثبت أنَّ الخطوط $\mathscr{C}_n$ تمر جميعاً بنقطة ثابتة $A$ بالإضافة إلى المبدأ $O$.

② أثبت أنَّ الخطوط $\mathscr{C}_n$ تقبل جميعاً مماساً مشتركاً في النقطة $A$.

ثالثاً: ① لتكن $x_n$ فاصلة النقطة $M_n$ من الخط $\mathscr{C}_n$ والتي تحقق $f'_n(x_n) = 0$.

أثبت أنَّ النقاط $M_n$ واقعة على الخط $\Gamma$ الذي معادلته $y = \frac{1}{e}\ln x$.

② ارسم $\Gamma$ والمماس المشترك للخطين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ في النقطة $A$، ثم ارسم الخطين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$.

رابعاً: في حالة $n = 2$ نضع $x > 0$: $g(x) = x^2 \ln x$ خطه البياني $\mathscr{C}_2$

① جِدْ $g'(x)$ , $g''(x)$ و $g'''(x)$.

واستنتج أن المشتق من المرتبة $n$ حيث $n \geq 3$. يعطى بالعلاقة $g^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$

خامساً: احسب مساحة السطح المحصور بين الخط $\mathscr{C}_2$ ومحور الفواصل والمستقيمين

$x = 1, x = \frac{1}{e}$

ندوة : 2024/4/15 – ميكائيل الحمود – نهلة مشرفي – هيثم خلل.

$I = [0, +\infty[$

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x & ; x > 0 \\ f_n(0) = 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

**أولاً:** 1) أثبت أن $f_n$ اشتقاقي في $x=0$ عند كل $n \geq 2$ . ادرس حالة $n=1$ .

لنشكل التابع

$$t(x) = \frac{f_n(x) - f(0)}{x - 0} \quad ; x \in ]0, +\infty[$$

$$= \frac{x^n \ln x - 0}{x^n}$$

$$t(x) = x^{n-1} \cdot \ln x \quad ; n \geq 2$$

$$= x^{n-2} \, (x \ln x)$$

$$\lim_{x \to 0} t(x) = 0 \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$$

وفيه $f_n$ حيث $n \geq 2$ اشتقاقي عند الصفر من اليمين

$f'(0) = 0$

والخط $C_n$ حيث $n \geq 2$ يقبل نصف مماس أفقي من اليمين معادلته :

$y = 0$



$x \in ]0, +\infty[$

في حالة $n = 1$

$$t(x) = \frac{f_1(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \ln x - 0}{x}$$

$$= \ln x$$

$$\lim_{x \to 0^+} t(x) = -\infty \notin \mathbb{R}$$

إذاً $f_1$ غير اشتقاقي عند الصفر من اليمين

التفسير الهندسي: والخط البياني $C_1$ يقبل نصف مماس شاقولي في $O(0,0)$ معادلته

$x = 0$



2) احسب $f'_n$ على المجال $]0, +\infty[$ ، ثم ادرس تغيرات $f_n$ ونظم جدولاً بها.

$$f'_n(x) = \begin{cases} n x^{n-1} \times \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^n & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$f'_n(x) = \begin{cases} n x^{n-1} \cdot \ln x + x^{n-1} & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$f'_n(x) = \begin{cases} x^{n-1} (n \ln x + 1) & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

في حالة $n=1$

$f_1'(x) = \ln x + 1 \quad : x \in ]0,+\infty[$

* لندرس تغيرات التابع $f_n(x)$

حيث $n \geq 2$

$$f_n(x) = x^n \ln x \quad ; x > 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$$

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n \ln x + 1)$$

$$f_n'(x) = 0$$

$$x^{n-1}(n \ln x + 1) = 0$$

$$n \ln x + 1 = 0$$

$$n \ln x = -1$$

$$\ln x = -\frac{1}{n}$$

$$e^{\ln x} = e^{-\frac{1}{n}}$$

$$x = e^{-\frac{1}{n}}$$

$$f_n\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \ln\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)$$

$$= e^{-1} \times \left(-\frac{1}{n}\right) \ln e$$

$$= \frac{1}{e} \times \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{ne}$$

$n \geq 2$

| $x$ | $0$ | | $e^{-\frac{1}{n}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $\frac{-1}{ne}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

من أجل $n=1$

$$\begin{cases} f_1(x) = x \ln x \quad ; x > 0 \\ f_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$$

$$f_1'(x) = (1)\ln x + \frac{1}{x}(x)$$

$$= \ln x + 1$$

$$f_1'(x) = 0$$

$$\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1$$

$$x = e^{-1} \qquad x = \frac{1}{e}$$

$$f_1\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}(-1) = -\frac{1}{e}$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_1(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



ثانياً:

1) أثبت أن الخطوط $\ell_n$ تمر جميعاً بنقطة ثابتة $A$ بالإضافة إلى المبدأ $O$.

$\forall\; n \geq 1$ $\quad f_n(0)=0$

$(0,0) \in \ell_n$

من النص

$$f_n(x) = x^n \ln x$$

$n=1$

$$f_1(x) = x\ln x$$

$n=2$

$$f_2(x) = x^2 \ln x$$

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$x\ln x = x^2 \ln x$$

$$x^2 \ln x - x\ln x = 0$$

$$(x^2 - x)\ln x = 0$$

$$x(x-1)\ln x = 0$$

$\div\; x \neq 0$



$$(x-1)\ln x = 0$$

إما $x-1=0$ $\quad \boxed{x=1}$

$\ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$f_n(1) = 0$

نلاحظ أن $\begin{cases} f_n(1) = 1^n \ln 1 = 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

فالنقطة المشتركة

$A(1,0) \in \ell_n$

2) أثبت أن الخطوط $\ell_n$ تقبل جميعاً مماساً مشتركاً في النقطة $A$.

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n\ln x + 1) \quad ; x>0$$

من الجدول

نلاحظ أن ميل المماس لجميع الخطوط في النقطة المشتركة $A(1,0) \in \ell_n$ يساوي $\forall\; n \geq 1$

$$m = f_n'(1) = (1)^{n-1}(1\ln x + 1) = 0$$

ومنه جميع الخطوط $\ell_n$ حيث $n \geq 1$ تقبل مماساً مشتركاً في $A(1,0)$ ميله $m=1$

معادلته $T: y = x - 1$

ثالثاً:

1) لتكن $x_n$ فاصلة النقطة $M_n$ من الخط $f_n$ والتي تحقق $f'_n(x_n)=0$

2) أثبت أن النقاط $M_n$ واقعة على الخط $M_n$ الخط $\Gamma$ الذي معادلته $y=\frac{1}{e}\ln x$

نعلم أن $f'_n(x)=0$

عند $x=e^{-\frac{1}{n}}$

النقطة التي ينعدم عندها المشتق هي

$$f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)=-\frac{1}{ne}=y_n$$

أي

$$A\left(e^{-\frac{1}{n}},-\frac{1}{ne}\right)\overset{?}{\in}\Gamma$$

$$\Gamma : y=\frac{1}{e}\ln x$$

$$-\frac{1}{ne}=\frac{1}{e}\ln\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)$$

$$-\frac{1}{ne}=-\frac{1}{ne}$$

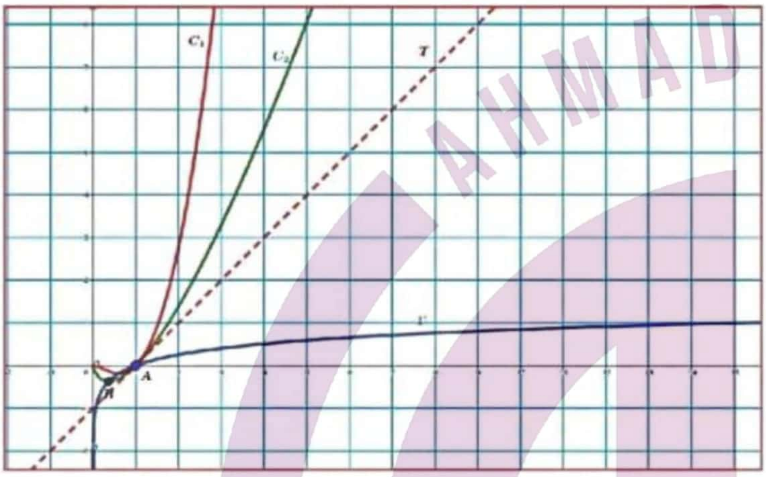
محققة

$\forall n\geq 1$

③

3) ارسم $\Gamma$ والمماس المشترك للخطين $f_1$ و $f_2$ في النقطة $A$ ثم ارسم الخطين $f_1$ و $f_2$

أحمد حسن
0932847372




أ.خليل شيخو
0991736954

أحمد حسن
0932847372

رابعاً:

في حالة $n=2$ نضع

$$g(x) = x^2 \ln x \quad : x>0$$

خطه البياني $C_2$

a) جد $g'(x)$ و $g''(x)$ و $g'''(x)$

واستنتج أن المشتق من المرتبة $n$ حيث $n\geq 3$ يعطى بالعلاقة

$$g^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1}\cdot(n-3)!}{x^{n-2}}$$

الحل:

$$g(x) = x^2 \ln x \ ; \ x>0$$

$$g'(x) = (2x)\ln x + \frac{1}{x}x^2$$

$$= 2x\ln x + x$$

$$g''(x) = (2)\ln x + \frac{1}{x}(2x) + 1$$

$$= 2\ln x + 2 + 1$$

$$g''(x) = 2\ln x + 3$$

$$g'''(x) = \frac{2}{x}$$

$$g^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1}\cdot(n-3)!}{x^{n-2}}$$

$\boxed{n\geq 3}$

نرمز للقضية بالرمز

$$E(n):\quad g^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1}\cdot(n-3)!}{x^{n-2}}$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $E(3)$

$$L_1:\ g^{(3)}(x) = g'''(x) = \frac{2}{x}$$

$$L_2:\ \frac{2(-1)^{3-1}(3-3)!}{x} = \frac{2}{x}$$

محققة $L_1 = L_2$

نفرض صحة العلاقة من أجل $E(n)$

ولنبرهن على صحتها من أجل

$$E(n+1):\quad g^{(n+1)}(x) = \frac{2(-1)^{n}(n-2)!}{x^{n-1}}$$

أ.خليل شيخو
0991736954

$$I_1 : \quad g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}(x)\right)'$$

$$= \left( \frac{2(-1)^{n-1} \cdot (n-3)!}{x^{n-2}} \right)'$$

$$= \left( 2(-1)^{n-1}(n-3)! \cdot x^{-n+2} \right)'$$

$$= (-n+2)(1)\, x^{-n+1} \times 2(-1)^{n-1}(n-3)!$$

$$= -(n-2)(1)(-1)^{n-1} \times 2(n-3)!\, x^{-n+1}$$

$$= 2(-1)^{n}(n-2)! \cdot x^{-n+1}$$

$$= \frac{2(-1)^{n}(n-2)!}{x^{+n-1}} \quad : I_2$$

وبالتالي $E(n+1)$ صحيحة

ف $E(n)$ صحيحة

$\forall \; n \geq 3$

## خامساً:

احسب مساحة السطح المحصور بين الخط $f_2$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x = \frac{1}{e}$ , $x = 1$

$$f_2(x) = x^2 \ln x$$

$c$ يقع تحت محور الفواصل على $[\frac{1}{e}, 1]$

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1} -x^2 \ln x \, dx$$

بفرض

$u(x) = \ln x \longrightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = -x^2 \longrightarrow v(x) = -\frac{x^3}{3}$

$$S = \left[-\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} -\frac{x^2}{3}\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{e}}^{1} x^2\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$S' = \left(-\frac{1}{3}\ln(1)\right) - \left(-\frac{1}{3e^3}\ln\frac{1}{e}\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3e^3}\right)\right)$$

$$S' = -\frac{1}{3e^3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9e^3}$$

$$= \frac{-4}{9e^3} + \frac{1}{9}$$

$$S' = \frac{e^3 - 4}{9e^3}$$