الوحدة السابعة: التكامل والتوابع الأصلية

التابع الأصلي

تعريف: ليكن لدينا التابع f تابع معرف على مجال I

نقول أن F أنه تابع أصلي للتابع f إذا تحقق:

1- F اشتقاقي على I

2- $F'(x) = f(x)$

تمارين داعمة (1):

في كل من الحالات الآتية تحقق أن $F(x)$ تابع أصلي للتابع $f(x)$:

1) $f(x) = \tan^2 x \quad , \quad F(x) = \tan x - x$

نعلم أن $F(x)$ اشتقاقي على I كما أن:

$$F'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x = f(x)$$

اذاً F تابع أصلي للتابع f على المجال I

2) $f(x) = \cos x - x\sin x \quad , F(x) = x\cos x$

نعلم أن $F(x)$ اشتقاقي على I كما أن:

اذاً: F تابع أصلي للتابع f على المجال I

3) $f(x) = \frac{2(x^4-1)}{x^3} \quad , \quad F(x) = (x + \frac{1}{x})^2$

نعلم أن $F(x)$ اشتقاقي على I كما أن:

$$F'(x) = 2(x + \frac{1}{x}) \cdot (1 - \frac{1}{x^2})$$

$$F'(x) = 2(\frac{x^2+1}{x}) \cdot (\frac{x^2-1}{x^2})$$

$$F'(x) = 2\left(\frac{x^4-1}{x^3}\right) = f(x)$$

اذاً: F تابع أصلي للتابع f على المجال I

4) $f(x) = \ln x \quad , \quad F(x) = x\ln x - x$

نعلم أن $F(x)$ اشتقاقي على I كما أن:

$$F'(x) = 1 \cdot \ln x + \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x - 1$$

$$= \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x)$$

اذاً: F تابع أصلي للتابع f على المجال I

ملاحظة:

نسمي الصيغة:

$$F(x) + k \, ; k \epsilon \mathbb{R}$$

مجموعة كل التوابع الأصلية للتابع f

- سبب وجود العدد k

لأنه عند اشتقاق $F(x)$ يكون مشتق k هو الصفر

مثال لشرح المفهوم:

ليكن لدينا التابع: $f(x) = 2x$

عندئذٍ تكون مجموعة التوابع الأصلية

$$F(x) = x^2 + k$$

مثال (2):

اذا كان: $F_1(x) = 3x^2 - 6x + 1$

$F_2(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$F_3(x) = 3x^2 - 6x - 6$

نلاحظ أن:

$$F'_1(x) = F'_2(x) = F'_3(x) = F(x)$$

كلها توابع أصلية للتابع

$$f(x) = 6x - 6$$

SHEHADEH
MANAL ALBABA
& Moataz
learning math with us !

قواعد التكامل وإيجاد التابع الأصلي

المجموعة الأولى: (الأساسيات)		
F	f	
k	0	1
ax	a	2
$\frac{x^{n+1}}{n+1}\ n \neq -1$	x^n	3
$\ln(x)\quad ; x > 0$ $\ln(-x)\quad ; x < 0$	$\frac{1}{x}$	4
e^x	e^x	5
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	6
$\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$	$(ax+b)^n$	7
$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	e^{ax+b}	8

ملاحظة:

1) التابع الأصلي للمجموع هو مجموع التوابع الأصلية

$$f + g \to F + G$$

2) عدد ضرب تابع بكامل تابع ويترك العدد

$$K \cdot f(x) \to k \cdot F(x)$$

تمارين داعمة(2):

أوجد مجموعة التوابع الأصلية لكل من التوابع التالية:

1) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4$

الحل:

$$F(x) = \frac{4x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 4x + k$$

$$F(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + k$$

---

2) $f(x) = 6x^2 - 14x + 1$

الحل:

$$F(x) = \frac{6x^3}{3} - 14\frac{x^2}{2} + x + k$$

$$= 2x^3 - 7x^2 + x + k$$

---

3) $f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}$

الحل:

أولاً نصلح في شكل التابع:

$$f(x) = x^{-4} - 2x^{-3}$$

$$F(x) = \frac{x^{-3}}{-3} - 2\frac{x^{-2}}{-2} + k$$

$$F(x) = \frac{-1}{3x^3} + \frac{1}{x^2} + k$$

---

4) $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} - 2$

الحل:

أولا نصلح من شكل التابع (نحول جذر لقوة):

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} - 2$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 2x + k$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2x + k$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL
سوريانا التعليمية
Manal& learning mat

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\left(\frac{2}{5}\right)x^{\frac{5}{2}} - 2x + k$$

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x + k$$

$$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{4}{5}\sqrt{x^5} - 2x + k$$

5) $f(x) = \frac{3}{x} - e^x \quad : \ ]0, +\infty[$

$$f(x) = 3\left(\frac{1}{x}\right) - e^x$$

$$F(x) = 3\ln(x) - e^x + k$$

6) $f(x) = 3e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$F(x) = 3e^x - \sqrt{x} + k$$

7) $f(x) = (3x+1)^7$

$$F(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+1)^8}{8} + k$$

$$F(x) = \frac{1}{24}(3x+1)^8 + k$$

8) $f(x) = (-2x+4)^5$

$$F(x) = \frac{1}{-2}\cdot\frac{(-2x+4)^6}{6} + k$$

$$F(x) = -\frac{1}{12}(-2x+4)^6 + k$$

9) $f(x) = (4x)^4$

$$F(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{(4x)^5}{5} + k$$

$$F(x) = \frac{1}{20}(4^5)x^5 + k$$

10) $f(x) = e^{5x-3}$

$$F(x) = \frac{1}{5}e^{5x-3} + k$$

11) $f(x) = \frac{-5}{x} + e^{3x} \quad ; \ ]-\infty, 0[$

$$F(x) = -5\ln(-x) + \frac{1}{3}e^{3x} + k$$

12) $f(x) = \frac{1}{x} - e^x + x - 5$

$$F(x) = \ln(|x|) - e^x + \frac{x^2}{2} - 5x + k$$

حركات يا شاطر:

1) بوجود $\frac{1}{x^a}$ نكتب بالشكل x^{-a}

2) بوجود $\sqrt{x}$ نكتب $x^{\frac{1}{2}}$ نحول الجذر لقوة

$$x^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{x^b}$$

MOATAZ SHEHADEH ALBABA
سوريانا التعليمية
& Moataz

المجموعة الثانية: (قواعد تكامل تابع مثلثي):

$F(x)$	$f(x)$	
$-\cos x$	$\sin x$	1
$\sin x$	$\cos x$	2
$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$	3
$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$	4
$\tan x$	$1+\tan^2 x$ أو $\frac{1}{\cos^2 x}$	5
$\frac{1}{a}\tan ax$	$\frac{1}{\cos^2 ax}$ أو $1+\tan^2 ax$	6
$-\cot x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$ $1+\cot^2 x$	7
$-\frac{1}{a}\cot ax$	$\frac{1}{\sin^2 ax}$ $1+\cot^2 ax$	8

تمارين داعمة: (3)

أوجد تابعاً أصلياً للتابع f في كل من الحالات التالية:

1) $f(x) = 2\sin x + 4\cos x$

$F(x) = -2\cos x + 4\sin x$

2) $f(x) = -3\sin x - 4$

$F(x) = +3\cos x - 4x$

3) $f(x) = \sin(2x-1)$

$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x-1)$

---

4) $f(x) = 3\cos(3x+6) - \frac{1}{x}$

$F(x) = 3(\frac{1}{3})\sin(3x+6) - \ln|x|$

$F(x) = \sin(3x+6) - \ln|x|$

---

5) $f(x) = 2\sin(6x) + \cos 2x$

$F(x) = 2\left(-\frac{1}{6}\right)\cos 6x + \frac{1}{2}\sin 2x$

$F(x) = -\frac{1}{3}\cos 6x + \frac{1}{2}\sin 2x$

---

6) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 3x}$

$f(x) = 2\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}$

$F(x) = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\tan 3x$

$F(x) = \frac{2}{3}\tan 3x$

---

7) $f(x) = \tan^2 x$

الحل: نصلح من شكل التابع

$f(x) = \tan^2(x) + 1 - 1$

$F(x) = \tan(x) - x$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALB
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math

8) $f(x) = \cot^2 x$

نصلح من شكل التابع: $f(x) = \cot^2(x) + 1 - 1$

$$F(x) = -\cot(x) - x$$

قوانين مهمة في التكامل للتوابع المثلثية

1- $\cos^2(\text{زاوية}) = \frac{1+\cos \text{ضعف}}{2}$

2- $\sin^2(\text{زاوية}) = \frac{1-\cos \text{ضعف}}{2}$

3- $\sin(\text{زاوية}) = 2\sin(\text{نصفها}) \cdot \cos(\text{نصفها})$

نستخدم القانون إذا كان الأس زوجي

تمارين داعمة (4)

أوجد التابع الأصلي لكل من التوابع الآتية:

1) $f(x) = \cos^2 x$

الحل:

نصلح من شكل التابع

$$f(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos 2x]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

2) $f(x) = 2\sin^2 4x$

الحل:

نغير شكل التابع

$$f(x) = 2(\frac{1}{2}) \cdot [1 - \cos 8x]$$

$$f(x) = 1 - \cos 8x$$

$$F(x) = x - \frac{1}{8}\sin 8x$$

دساتير التحويل من جداء إلى مجموع

1- $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

2- $\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))$

3- $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

4- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))$

تمارين داعمة (5)

أوجد تابع أصلي لكل من التوابع الآتية:

1) $f(x) = \cos 4x \cdot \cos x$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{2}[\cos 5x + \cos 3x]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x\right]$$

$$F(x) = \left[\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{6}\sin 3x\right]$$

2) $f(x) = \sin 4x \cdot \cos 2x$

$$f(x) = \frac{1}{2}[\sin 6x + \sin 2x]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{6}\cos 6x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]$$

$$F(x) = \frac{-1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x$$

سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us
MANAL ALBABA

المجموعة الثالثة (القواعد العامة)	
$F(x)$	$f(x)$
$\ln\lvert u\rvert$	$\dfrac{u'}{u}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$u'\cdot u^n$
e^u	$u'\cdot e^u$
$-\cos u$	$u'\cdot \sin u$
$\sin u$	$u'\cdot \cos u$

تمارين داعمة (6)

أوجد مجموعة التوابع الأصلية لكل من التوابع الآتية:

1) $f(x)=\frac{2}{x+1}$

الحل:

$$f(x)=2\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$F(x)=2\ln|x+1|+k$$

2) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$

الحل: درجة البسط = درجة المقام

(قسمة اقليدية) أو تفريق كسور

$$f(x)=\frac{x-2+3}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}+\frac{3}{x-2}$$

$$f(x)=1+3\frac{1}{x-2}$$

$$F(x)=x+3\ln|x-2|+k$$

3) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

الحل:

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+k$$

4) $f(x)=\frac{3x}{x^2-5}$

الحل:

$$f(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-5}$$

$$F(x)=\frac{3}{2}\ln|x^2-5|+k$$

5) $f(x)=\frac{4x-2}{x^2-x+3}$

الحل:

$$f(x)=2\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+3}$$

$$F(x)=2\cdot\ln|x^2-x+3|+k$$

6) $f(x)=(x-2)(x^2-4x+5)^3$

الحل:

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot(2)(x-2)(x^2-4x+5)^3$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(2x-4)(x^2-4x+5)^3$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\frac{[x^2-4x+5]^4}{4}+k$$

$$F(x)=\frac{1}{8}[x^2-4x+5]^4+k$$

MOATAZ SHEHADI
MANAL ALBABA
Manal & Moataz
learning math with us
سوريانا التعليمية
23 24

7) $f(x) = \frac{3x^2+2}{(x^3+2x)^3}$

الحل:

$$f(x) = \underbrace{(3x^2+2)}_{u'}\underbrace{(x^3+2x)^{-3}}_{u^{-3}}$$

$$F(x) = \frac{[x^3+3x]^{-2}}{-2} + k$$

$$F(x) = \frac{-1}{2}\frac{1}{(x^3+3x)^2} + k$$

---

8) $f(x) = \sin(3x+1)$

$$F(x) = -\frac{\cos(3x+1)}{3} + k$$

---

9) $f(x) = \cos(5x+4)$

$$F(x) = \frac{\sin(5x+4)}{5} + k$$

---

10) $f(x) = e^{3x+4}$

$$F(x) = \frac{e^{3x+4}}{3} + k$$

---

11) $f(x) = \frac{2}{x+1}$

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = 2\ln|x+1| + k$$

---

12) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

نقسم البسط على المقام:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x-2 & x+1 \\ & \mp x+2 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x-2} = 1 + 3\frac{1}{x-2} =$$

$$F(x) = x + 3\ln|x-2| + k$$

13) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + k$$

$f(x) = \frac{(2x+1)}{(x^2+x)^2}$

$$f(x) = (2x+1)(x^2+x)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{(x^2+x)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{(x^2+x)}$$

14) $f(x) = xe^{x^2}$

$$f(x) = \frac{1}{2}2x \cdot e^{x^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

15) $f(x) = \cos x\, e^{\sin x}$

$$F(x) = e^{\sin x} + k$$

---

16) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

$$f(x) = 2\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} \to 2u' \cdot e^u$$

$$F(x) = 2e^{\sqrt{x}} + k$$

17) $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2}{x^2}e^{-\frac{2}{x}} \to \frac{1}{2}u' \cdot e^u$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}} + k$$

---

18) $f(x) = \frac{1}{x}\sin(ln(x)) \to u' \cos u$

$$F(x) = -\cos(\ln x) + k$$

---

19) $f(x) = 2x\cos(x^2) \to u' \cos u$

$$F(x) = \sin(x^2) + k$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
24
23
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us !

تمارين داعمة (7):

في كل من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع $f: x \to f(x)$ على المجال I:

1) $f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 2x + 3 \, , I = \mathbb{R}$

الحل:

$$F(x) = 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x$$

2) $f(x) = \frac{1}{x^4} \quad , \quad I =]0, +\infty[$

الحل:

$$f(x) = x^{-4}$$

$$F(x) = \frac{1}{-3} x^{-3} = -\frac{1}{3x^3}$$

3) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{x^2} \quad , \quad I =]-\infty, 0[$

$$f(x) = (x)^{\frac{1}{3}} + (x)^{\frac{-1}{3}} - 3x^{-2}$$

$$F(x) = \frac{3}{4}(x)^{\frac{1}{3}+1} + \frac{3}{2}(x)^{-\frac{1}{3}+1} + 3x^{-2+1}$$

$$F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 3\frac{1}{x}$$

4) $f(x) = \frac{1}{1-2x+x^2} \quad , I =]1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x + x^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$$
$$= (x-1)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{-1}(x-1)^{-2+1} = \frac{-1}{x-1}$$

5) $f(x) = \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}} \quad , \quad I =]1, +\infty[$

الحل:

$$f(x) = \frac{2(2x-1)}{\sqrt{x^2-x}}$$
$$= 2(2x-1)(x^2-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = 2\frac{(x^2-x)^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} = 2\frac{(x^2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$
$$= 4(x^2-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = 4\sqrt{x^2-x}$$

6) $f(x) = \frac{5}{4x-3} \quad , \quad I = \left]-\infty, \frac{3}{4}\right[$

الحل:

$$f(x) = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{4x-3}$$

بما أن $(4x - 3) < 0$ في المجال I

$$F(x) = \frac{5}{4}\ln|4x-3| = \frac{5}{4}\ln(3-4x)$$

7) $f(x) = \frac{3x+1}{2x} \quad , \quad I =]0, +\infty[$

الحل:

نكتب التابع بالشكل:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2x}$$

وبما أن $x > 0$ في المجال I:

فيكون:

$$F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\ln|x| = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\ln x$$

8) $f(x) = \frac{x+1}{x-2} \quad , \quad I =]-\infty, 2[$

الحل:

باستخدام القسمة الأقليدية لنكتب التابع بالشكل:

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us !

$$F(x) = x + 3\ln|x-2|$$

وبما أن $(x-2) < 0$ في المجال I فيكون:

$$F(x) = x + 3\ln(2-x)$$

9) $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$, $I = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

الحل:

باستخدام القسمة الإقليدية لنكتب التابع بالشكل:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2x-1} = \frac{3}{2} + \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{2x-1}$$

وبما أن $(2x-1) < 0$ في المجال I:

$$F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\ln|2x-1|$$
$$= \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\ln(2x-1)$$

تمارين مهمة للطالب المعلم وانت معلم 👌

1) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \Rightarrow F(x) = \ln|\ln x| + k$$

2) $f(x) = \tan x$

$$f(x) = \frac{+\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x}$$
$$F(x) = -\ln|\cos x| + k$$

3) $f(x) = \cot x$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow F(x) = \ln|\sin x| + k$$

4) $f(x) = \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{2\sin x \cos x}$

الحل:

نقسم البسط والمقام على $\cos^2 x$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln|\tan x| + k$$

طريقة حل أخرى:

$$f(x) = \frac{1}{\sin 2x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x \cos x}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{2\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{2\sin x \cos x}$$
$$= \frac{-1}{2}\frac{-\mathrm{si\,n}(x)}{\cos x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$F(x) = -\frac{1}{2}\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln|\sin x|$$
$$= \frac{1}{2}[\ln|\sin x| - \ln|\cos x|]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|\right]$$
$$= \frac{1}{2}[\ln|\tan x|] + k$$

5) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

$$F(x) = \ln|1+e^x| + k = \ln(1+e^x) + k$$

6) $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

الحل:

طريقة (1)

$$f(x) = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$
$$F(x) = x - \ln(1+e^x) + k$$

طريقة (2)

نضرب البسط والمقام بـ e^{-x}

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=-\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

$$F(x)=-\ln|e^{-x}+1|+k$$

7) $f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}\to \mathrm{u}'}{e^{x}-e^{-x}\to u^{n}}$

$$F(x)=\ln|e^{x}+e^{-x}|+k$$

8) $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{x}}{e^{x}+\frac{1}{e^{x}}}=\frac{e^{x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}}$

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}=\frac{1}{2}\frac{2e^{2x}\to}{e^{2x}+1\to}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln|e^{2x}+1|+k$$

ملاحظة:

في حالة sin^{n} , cos^{n} حيث n فردي نستخدم القانون الذهبي $\cos^{2}x+\sin^{2}x=1$ ثم قاعدة

$$u'u^{n}$$

مثال:

$$f(x)=\cos^{3}x$$

$$f(x)=\cos x\cdot\cos^{2}x$$

$$=\cos x\,(1-\sin^{2}x)$$

$$=\underbrace{\cos x}_{u'}-\underbrace{\cos x\sin^{2}x}_{u^{n}}$$

$$F(x)=\sin x-\frac{\sin^{3}x}{3}+k$$

في كل من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع

$f:x\to f(x)$ على المجال I:

1) $f(x)=\cos^{2}3x$, $I=\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{1+\cos 6x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 6x$$

$$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x$$

2) $f(x)=\cos^{4}x$, $I=\mathbb{R}$

$$f(x)=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{2}$$

$$=\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^{2}2x)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{\cos 4x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right)$$

$$F(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right)$$

3) $f(x)=\cos 3x\cdot\cos x$, $I=\mathbb{R}$

لنكتب التابع على شكل مجموع كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

4) $f(x)=\cot^{2}x$, $I=]0,\pi[$

$$f(x)=1+\cot^{2}x-1$$

$$F(x)=-x-\cot x$$

5) $f(x)=\tan x$, $I=\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{-\sin x}{\cos x}$$

وبما أن $\cos x<0$ في المجال I فيكون:

$$F(x)=-\ln|\cos x|=-\ln(-\cos x)$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us !

6) $f(x) = \cot x \ , \ I =]0, \pi[$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

وبما أن $\sin x > 0$ في المجال I فيكون:

ومنه $F(x) = \ln|\sin x| = \ln(\sin x)$

7) $f(x) = \sqrt{(2x-1)^3} \ , \ I = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$$f(x) = (2x-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}+1}}{2(\frac{5}{2})} = \frac{1}{5}\sqrt{(2x-1)^5}$$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}, \ I = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$

$$f(x) = (3-2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{(3-2x)^{\frac{1}{2}+1}}{-2\left(-\frac{1}{2}+1\right)} = -\sqrt{3-2x}$$

9) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{(x^2+1)^2} \quad I = \mathbb{R}$

$$f(x) = x \cdot (x^2+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\overbrace{2x}^{u'} \cdot \overbrace{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}^{u^n}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{3}}$$

$$F(x) = \frac{3}{10}\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^5}$$

10) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{(3-x^2)}} \quad I =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

$$f(x) = x\cdot(3-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{-1}{2}(-2x)\cdot(3-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

فيكون التابع الأصلي:

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -(3-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= -\sqrt{(3-x^2)}$$

التكامل المحدد وخواصه

- رمز التكامل المحدد $\int_a^b f(x)\,dx$

عملية التكامل المحدد هي: حساب التابع الأصلي

قانون:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال:

$$\int_1^5 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^5 = \left(\frac{25}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) = 12$$

خواص التكامل المحدد:

1- بما أن التكامل المحدد عدد فلا علاقة له بالمتحول الذي نوجد التابع الأصلي لأجله بمعنى:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

2- (هام) إن التابع الأصلي لتابع مستمر على مجال ما هو إلا تكامل محدد من a حيث a عدد كيفي من Df إلى x أي:

$$\int_a^x f(t)dt$$

تستخدم هذه القاعدة عند إيجاد التابع الأصلي لتوابع تحتاج تجزئة

سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
Learning math with us !

3- تكامل المجموع يساوي مجموع التكاملات

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

4- العدد المضروب لا يؤثر على التكامل المحدد

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

5- $\int_a^b f = -\int_b^a f$

6- علاقة شال

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \quad : a < b < c$$

مثال: (تكاملات تحوي قيمة مطلقة)

$$I = \int_0^2 |x^2 - 1| dx$$

الحل:

$$I = \int_0^1 |x^2 - 1| dx + \int_1^2 |x^2 - 1| dx$$

$$= \int_0^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0\right] + \left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

تمرين:

احسب التكاملات الآتية

1) $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos 2x}\ dx$

الحل:

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos 2x)}\ dx$$

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(2\sin^2 x)}\ dx$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{4(\sin^2 x)}\ dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2|\sin x|\ dx$$

وبما أن $\sin x < 0$ في المجال $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -2\sin x\ dx = [2\cos x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = (2) - (0)$$

$$= 2$$

2) $I = \int_{-1}^{2} x|x - 1| dx$

الحل:

ندرس إشارة $x - 1$: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	-1	1	2
$x - 1$	$-$	0	$+$

$$= \int_{-1}^{1} x(-x + 1) dx + \int_1^2 x(x - 1) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-x^2 + x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{10 - 9}{6} = \frac{1}{6}$$

3) $K = \int_0^1 \left(e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right) dx$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}e^{-2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{e^2}{2} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{3}{4}$$

---

4) $L = \int_{-2}^{-1} \frac{2x-1}{x-1} dx$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x-1 & 2x-1 \\ & -\ 2x-2 \\ \hline & +1 \end{array}$$

$$= \int_{-2}^{-1} \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= [2x + \ln|x-1|]_{-2}^{-1}$$

$$= [2x + \ln(-x+1)]_{-2}^{-1}$$

$$= (-2 + \ln(1+1)) - (-4 + \ln(2+1))$$

$$= (-2 + \ln(2)) - (-4 + \ln(3))$$

$$= -2 + \ln(2) + 4 - \ln(3)$$

$$= 2 + \ln(2) - \ln(3) = 2 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

5) $M = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx$

الحل:

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= -[\ln|\cos x|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -[\ln \cos x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\left(\ln\frac{1}{2}\right) - \left(-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \ln 2 + \ln\sqrt{3} - \ln 2 = \ln\sqrt{3}$$

---

6) $N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

$$= [\ln|\cos x + \sin x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= [\ln(\cos x + \sin x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - (\ln(1+0))$$

$$= \ln\sqrt{2} - \ln 1 = \ln\sqrt{2}$$

التكامل بالتجزئة

القانون:

$$\int_b^b [u \cdot v'] = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot u'$$

نستخدم هذا التكامل في جداءات التوابع من الشكل

$$I = \int_a^b \begin{bmatrix} \text{صحيح} \\ \text{أسي} \\ \text{لوغارتمي} \\ \text{مثلثي} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{أسي} \\ \text{لوغارتمي} \\ \text{مثلثي} \end{bmatrix} dx$$

احسب التكاملات الآتية باستعمال التكامل بالتجزئة:

1) $I = \int_1^e x \ln x \, dx$

الحل:

$v' = x$	$u = \ln x$
$v = \frac{x^2}{2}$	$u' = \frac{1}{x}$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
24
23
منال التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us !

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}\right)-(0)-\left[\left(\frac{e^2}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$$

2) $J=\int_0^{\pi}(x-1)\cos x\,dx$

الحل:

$u=x-1$	$v'=\cos x$
$u'=1$	$v=\sin x$

$$[(x-1)\sin x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$

$$[(x-1)\sin x]_0^{\pi}+[\cos x]_0^{\pi}$$

$$(0)-(0)+(-1)-(1)=-2$$

3) $k=\int_0^{1}(x+2)e^x\,dx$

الحل:

$u=x+2$	$v'=e^x$
$u'=1$	$v=e^x$

$$=[(x+2)e^x]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$$

$$=[(x+2)e^x]_0^1-[e^x]_0^1$$

$$=(3e)-(2)-[(e)-(1)]$$

$$=3e-2-e+1=2e-1$$

4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\sin 3x\,dx$

$u=x$	$v'=\sin 3x$
$u'=1$	$v=\frac{-\cos 3x}{3}$

$$=\left[-x\frac{\cos x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{-\cos 3x}{3}\,dx$$

$$=\left[-x\frac{\cos x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[\frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left[\frac{-\pi}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]-(0)+[(0)-(0)]=\frac{\pi}{9}$$

5) $M=\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$

الحل:

$u=\cos x$	$v'=e^x$
$u'=-\sin x$	$v=e^x$

$$=[e^x\cos x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-e^x\sin x\,dx$$

$$=[e^x\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$$

بالتجزئة ثانية في N

$$N=\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$$

$u=\sin x$	$v'=e^x$
$u'=\cos x$	$v=e^x$

$$N=[e^x\sin x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$$

$$N=[e^x\sin x]_0^{\pi}-M$$

نعوضها في M

$$M=[e^x\cos x]_0^{\pi}+[e^x\sin x]_0^{\pi}-M$$

$$2M=[e^x\cos x]_0^{\pi}+[e^x\sin x]_0^{\pi}$$

$$2M=(-e^{\pi})-(1)+(0)-(0)=-e^{\pi}-1$$

$$2M=-e^{\pi}-1\Rightarrow M=\frac{-e^{\pi}-1}{2}$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us !

التكامل بتفريق الكسور

(نكتفي بدراسة المقام من الدرجة الثانية حيث يكون جداء عاملين مختلفين)

سندرس حالتين:

1) درجة البسط < درجة المقام

خطوات العمل:

1- نحلل المقام إلى جداء عوامل

2- نكتب

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a}{\text{العامل الأول}} + \frac{b}{\text{العامل الثاني}}$$

لإيجاد λ و β نوحد المقامات بالطرف الثاني ونقارن مع الطرف الأول

2) درجة البسط ≥ درجة المقام

- نقسم قسمة إقليدية ونعود إلى الحالة الأولى

ملاحظة:

1- المقام يحوي جذر أو قوس له قوة ⟸ نرفعه للأعلى ثم نستخدم $u' u^n$

2- درجة البسط أكبر أو تساوي من درجة المقام ⟸ قسمة إقليدية

تمارين داعمة (8):

في كل من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع $f: x \longrightarrow f(x)$ على المجال I :

1) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$, $I =]1, +\infty[$

الحل:

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \qquad (\star)$$

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-1)} = \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{(A+B)x + (B-A)}{(x+1)(x-1)}$$

$$A + B = 1 \qquad ①$$

$$B - A = 3 \qquad ②$$

بالجمع $2B = 4 \Longrightarrow \boxed{B = 2}$

بالطرح $2A = -2 \Longrightarrow \boxed{A = -1}$

$$f(x) = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = -\frac{1}{x+1} + 2\frac{1}{x-1}$$

$$F(x) = -\ln|x+1| + 2\ln|x-1|$$

$$= -\ln(x+1) + 2\ln(x-1)$$

2) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$, $I =]-\infty, -2[$

الحل:

$$f(x) = \frac{x+1}{(x+2)(x-2)}$$

$$f(x) = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-2)} \qquad (\star)$$

$$f(x) = \frac{Ax - 2A + Bx + 2B}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{x+1}{(x+2)(x-2)} = \frac{(A+B)x + (2B-2A)}{(x-2)(x-2)}$$

بالمقارنة:

$$A + B = 1 \qquad ①$$

$$2B - 2A = 1 \Longrightarrow B - A = \frac{1}{2} \qquad ②$$

من ② $\quad B = A + \frac{1}{2} \qquad ③$

نعوض في ① : $A + A + \frac{1}{2} = 1$

نعوض في $(\star)$ $\boxed{B = \frac{3}{4}}$, $\boxed{A = \frac{1}{4}}$

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{3}{4}\ln|x-2|$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
Learning math with us !

$$=\frac{1}{4}\ln(-x-2)+\frac{3}{4}\ln(-x+2)$$

3) $f(x)=\frac{x}{x^2-x-6}$, $I=]-2,3[$

الحل:

$$f(x)=\frac{x}{(x-3)(x+2)}$$

$$f(x)=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x+2)} \quad (\star)$$

$$f(x)=\frac{Ax+2A+Bx-3B}{(x-3)(x+2)}$$

$$\frac{x}{(x-3)(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A-3B}{(x-3)(x+2)}$$

بالمقارنة:

$A+B=1$ ①

$2A-3B=0$ ②

من ②

$2A=3B \Leftarrow A=\frac{3}{2}B$ ③

نعوض في ①: $\frac{3}{2}B+B=1 \Leftarrow \frac{5}{2}B=1$

نعوض في $(\star)$ $\boxed{B=\frac{2}{5}}$, $\boxed{A=\frac{3}{5}}$

$$f(x)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$F(x)=\frac{3}{5}\ln|x-3|+\frac{2}{5}\ln|x+2|$$

$$=\frac{3}{5}\ln(-x+3)+\frac{2}{5}\ln(x+2)$$

---

4) $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+x}$, $I=]-1,0[$

الحل:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x(x+1)}$$

$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1} \quad (*)$$

$$\frac{2x}{x(x+1)}=\frac{Ax+A+Bx}{x(x+1)}=\frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$$

بالمقارنة: $A+B=2$ ①

$A=-1$ ② ⟸ من ②: $B=3$

$$f(x)=-\frac{1}{x}+3\frac{2}{x+1}$$

$$F(x)=-\ln|x|+3\ln|x+1|$$

$$F(x)=-\ln(-x)+3\ln(x+1)$$

---

5) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-x-2}$, $I=]2,+\infty[$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x^2-x-2 & x^3 \\ & x^3-x^2-2x \\ \hline & 0+x^2+2x \\ & +x^2-x-2 \\ \hline & 0+3x+2 \end{array}$$

$$f(x)=x+1+\frac{3x+2}{x^2-x-2}$$

$$\frac{3x+2}{x^2-x-2}=\frac{3x+2}{(x-2)(x+1)}$$

$$g(x)=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} \quad (*)$$

$$\frac{3x+2}{x^2-x-2}=\frac{(A+B)x+(A-2B)}{x^2-x-2}$$

بالمقارنة:

$A+B=3$ ①

$A-2B=2$ ②

$A=3-B$ ③ ⟸ من ①

نعوض في ②: $3-B-2B=2$

نعوض في $(*)$ $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{8}{3}$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
24 23
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us !

$$g(x)=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$f(x)=x+1+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln[x+1]$$

الرسم (2)

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{3}\ln(x-2)+\frac{1}{3}\ln(x+1)$$

التكامل المحدود وحساب المساحة

عند حساب المساحة S نستخدم التكامل المحدود ونميز الحالات التالية:

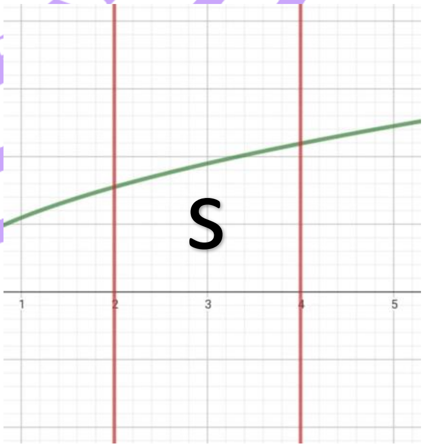
1) الحالة الأولى: (C فوق xx')

$$\left\{S=\int_a^b f(x)\ dx\right\}\qquad \left\{\begin{matrix}\text{مساحة محصورة بين}\\ Cf \text{ و } xx' \text{ والمستقيمان}\\ x=a \text{ و } x=b\end{matrix}\right\}$$

$f(x)\geq 0$ معرف ومستمر على مجال I $a<b$ و $a,b\in I$

الرسم (1)

الرسم

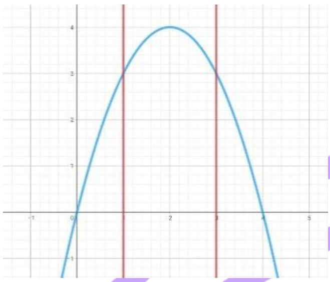


❖ **التمرين الأول:**

ليكن f تابع مرف على R بالعلاقة

$$f(x)=-x^2+4x$$

احسب مساحة A المحصورة بين الخط C والمحور xx' والمستقيمان $x=1$, $x=3$



$$A=\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3[-x^2+4x]\ \ dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right]_1^3=\left[\frac{-x^3}{3}+2x^2\right]_1^3$$

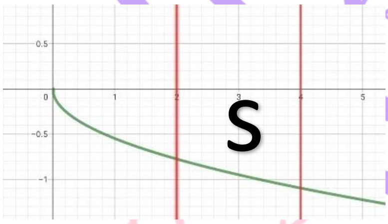
$$=\left[\frac{-27}{3}+18-(-\frac{1}{3}+2)\right]$$

$$=-9+18+\frac{1}{3}-2=7+\frac{1}{3}=\frac{22}{3}$$

2) الحالة الثانية: (C تحت xx')

$$\left\{S=-\int_a^b f(x)\ dx\right\}\qquad \left\{\begin{matrix}\text{مساحة محصورة بين}\\ Cf \text{ و } xx' \text{ والمستقيمان}\\ x=a \text{ و } x=b\end{matrix}\right\}$$

الرسم (2):

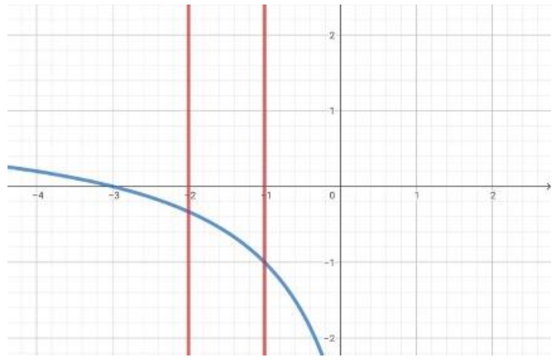


❖ **التمرين الثاني:**

ليكن لدينا التابع f معرف على $]-\infty,1[$ وفق: $f(x)=\frac{x+3}{x-1}$

احسب المساحة المحصورة بين Cf والمحور xx' والمستقيمان:

$x=-1$, $x=-2$



الحل:

$$A=\int_{-2}^{-1}-f(x)dx$$

$$=-\int_{-2}^{-1}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)dx$$

$$\begin{array}{r|l} x-1 & \overline{\;x+3\;}\ \ 1 \\ & \mp x\mp 1 \\ & \overline{\qquad\ 1} \end{array}$$

$$=-\int_{-2}^{-1}\left[1+\frac{4}{x-1}\right]dx$$

$$=-[x+4\ln|x-1|]_{-2}^{-1}$$

$$=-[x+4\ln(x-1)]_{-2}^{-1}$$

$$=-[-1+4\ln|-2|]$$

$$=-(-2+4\ln|-3|$$

$$=-(-1+4\ln(2)+2-4\ln(3))$$

$$=-1+4(\ln(3)-\ln(2))$$

$$=-1+4\ln\frac{3}{2}$$

3) الحالة الثالثة:

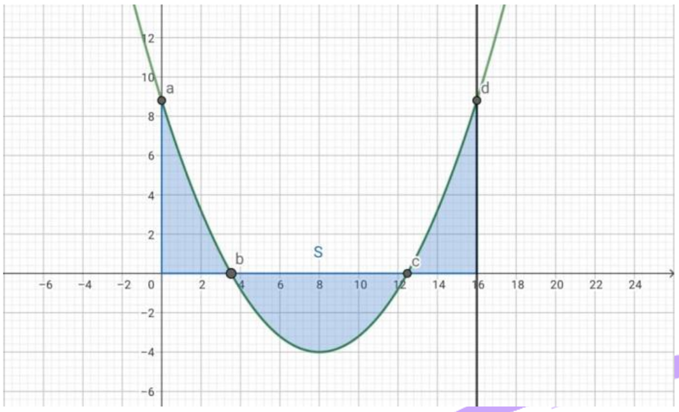
{جزء من المساحة فوق xx' وجزء من المساحة تحت xx' }

لحساب المساحة الكلية نجزء المساحة لمساحات جزئية

$$A=A_1+A_2+A_3$$

$$\int_a^d f\cdot dx=\int_a^b \underbrace{+f\cdot dx}_{A_1}-\int_b^c \underbrace{f\cdot dx}_{A_2}+\int_c^d \underbrace{+f\cdot dx}_{A_3}$$

حيث: $a<b<c<d$



تمرين:

ليكن لدينا التابع: $f(x)$

$$f(x)=2e^x-x-2$$

احسب مساحة المحصورة بين xx' والخط Cf

والمستقيمان: $x=-1\ ,x=+1$

الحل:

$$A=\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{+1}f(x)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}[2e^x-x-2]\,dx+\int_{0}^{1}[2e^x-x-2]\,dx$$

$$=-\left[2e^x-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{0}+\left[2e^x-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{0}^{1}$$

$$=-\left[(2e^0-0-0)-\left(2e^{-1}-\frac{1}{2}+2\right)\right]+\left[\left(2e^1-\frac{1}{2}-2\right)-(2e^0-0-0)\right]$$

$$=-2+\frac{2}{e}-\frac{1}{2}+2+2e-\frac{1}{2}-2-2$$

$$=-5+2e+\frac{2}{e}$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
Manal & Moataz
learning math with us !
سوريانا التعليمية
24 23

4) الحالة الرابعة نميز قسمين:

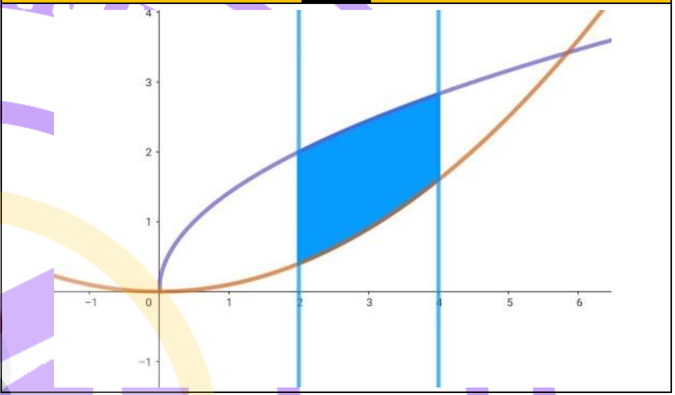
القسم الأول

مساحة محصورة بين خطان بيانيان
والمستقيمان $Cg\ ,Cf$
$x = a\ \ ,x = b$

المساحة

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))$$

الرسم



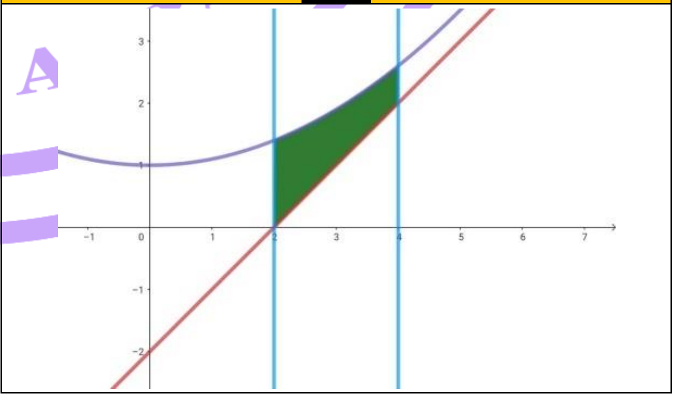
القسم الثاني

مساحة محصورة بين Cf ومستقيم أفقي أو مائل
والمستقيمان
$x = a\ \ ,x = b$

المساحة

$$S = \int_a^b (f(x) - y_{\Delta}$$

الرسم



ملاحظة:

حول حدود التكامل للمساحة بين منحنيين:

عندما لا نعطى حدي التكامل أحدهما أو كلاهما يمكن إيجاد حدود التكامل بالحل المشترك للتابعين أي $f = g$

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين الخطين Cf و Cg والمستقيم $x = 1$ حيث:

$$f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}$$

الحل: دون الرسم

حدود التكامل

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow e^x = e^{-x} \Longrightarrow x = -x$$
$$\Longrightarrow 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

إذا: نلاحظ أن Cf فوق Cg على $[0,1]$

$$A = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\ \ dx$$

$$= \int_0^1 (e^x - e^x)\ \ dx$$

$$\Longrightarrow A = [e^x + e^{-x}]_0^1 = (e^1 + e^{-1}) - 2$$

$$\Longrightarrow A = e + e^{-1} - 2$$

تمارين خارجية في حساب المساحات

السؤال الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = 3e^x - x - 3$$

احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين: $x = 0\ , x = 1$

الحل:

$$S = \int_0^1 f(x)\ \ dx = \int_0^1 (3e^x - x - 3)\ \ dx$$

سـوريانا التعليمية
Manal & M
learning math with us !

$$\left[3e^x - \frac{x^2}{2} - 3x\right]_0^1$$

$$= \left(3e^1 - \frac{1}{2} - 3\right) - (3e^0)$$

$$= 3e - \frac{1}{2} - 3 - 3 = 3e - \frac{1}{2} - \frac{12}{2}$$

$$= \frac{6e - 13}{2}$$

السؤال الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

احسب مساحة السطح S المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين:

الحل:

$$S = \int_0^{\ln 3}\left(x + \frac{4}{e^x + 1}\right)dx$$

$$= \int_0^{\ln 3}\left(x + \frac{4e^{-x}}{e^0 + e^{-x}}\right)dx$$

$$= \int_0^{\ln 3}\left(x + 4\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right)dx$$

$$= \int_0^{\ln 3}\left(x - 4\left(\frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right)\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 4\ln(1 + e^{-x})\right]_0^{\ln 3}$$

$$= \left(\frac{(\ln 3)^2}{2} - 4\ln(1 + \frac{1}{3})\right)$$

$$-\left(\frac{0}{2} - 4\ln(1 + e^0)\right)$$

$$= \frac{(\ln 3)^2}{2} - 4\ln\left(\frac{4}{3}\right) + 4\ln(2)$$

$$= \frac{(\ln 3)^2}{2} + 4\ln(\frac{2 \times 3}{4})$$

$$= \frac{(\ln 3)^2}{2} + 4\ln(\frac{3}{2})$$

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيم:

$: x = e$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$u = \ln x$	$v' = \frac{1}{x^2}$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = -\frac{1}{x}$

$$= \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{2}{e} + 1$$

السؤال الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = (x - 2)e^x$$

احسب مساحة السطح S المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين:

$:x = 2 , x = 0$

الحل:

المساحة المطلوبة تحت محور الفواصل:

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us !

$$S=\int_0^2 -f(x)\ dx=-\int_0^2 (x-2)e^x\,dx$$

نكامل بالتجزئة:

$v'=e^x$	$u=x-2$
$v=e^x$	$u'=1$

$$S=-[[(x-2)e^x]_0^2-\int_0^2 e^x\ dx$$

$$S=-\left[[[(x-2)e^x]]_0^2-[e^x]_0^2\right]$$

$$=-[0+2-(e^2-1)]=-[2-e^2+1]$$

$$=e^2-3$$

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على ℝ وفق:

$$f(x)=e^x(e^x-2)$$

احسب مساحة السطح S المحصور بين C والمحورين الإحداثيين:

الحل:

لإيجاد المساحة المطلوبة نحتاج لتعيين نقاط تقاطع المنحني مع محور الفواصل أي حل للمعادلة:

$$f(x)=0$$

$$f(x)=0\Rightarrow e^x-2=0\Rightarrow e^x=2\Rightarrow x=\ln 2$$

وذلك لأن $e^x\neq 0$

المساحة تحت xx'

$$S=\int_0^{\ln 2} -f(x)dx$$

$$=-\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-2e^x)dx$$

$$S=\left[-\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x\right]_0^{\ln 2}$$

$$=-\left[\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-2e^{\ln 2}-\left(\frac{1}{2}e^0-2e^0\right)\right]$$

$$\left[-\frac{1}{2}e^{\ln 4}-2e^{\ln 2}-\frac{1}{2}+2\right]$$

$$=-\left[2-4-\frac{1}{2}+2\right]=-\left[-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}$$

السؤال السادس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على ℝ وفق:

$$f(x)=\frac{2x}{e^x}-\frac{2}{e}$$

احسب مساحة السطح S المحصور بين C والمقارب $d: y=\frac{-2}{e}$ والمستقيمين: $x=0$ و $x=1$

الحل:

$$S=\int_0^1 (f(x)-yd)dx=\int_0^1 \frac{2x}{e^x}dx$$

$$=\int_0^1 2xe^{-x}\,dx$$

$v'=e^{-x}$	$u=2x$
$v=-e^{-x}$	$u'=2$

$$S=[-2xe^{-x}]_0^1+\int_0^1 2e^{-x}\,dx$$

$$=[-2xe^{-x}]_0^1+[-2e^{-x}]_0^1$$

$$=[-2xe^{-x}-2e^{-x}]_0^1+[-2e^{-x}]_0^1$$

$$=-\frac{4}{e}+2=\frac{2e-4}{e}$$

السؤال السابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{2+3\ln x}{x}$$

احسب مساحة السطح S المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين:

$: x=e\ ,\ x=1$

MOATAZ SHEHADEH MANAL ALBABA سوريانا التعليمية Manal & Moataz learning math with us !

الحل:

$$S = \int_1^e f(x)\,dx$$

$$= \int_1^e \frac{2 + 3\ln x}{x}\,dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{2}{x} + 3\frac{1}{x}\ln x\right)dx$$

$$= \left[2\ln|x| + \frac{3(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$$

$$= \left(2 + 3\cdot\frac{1}{2}\right) - (0) = \frac{7}{2}$$

السؤال الثامن:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^2 + \ln x}{x}$$

احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين: $x = e \;,\; x = 1$:

$$S = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{2x^2 + \ln x}{x}\,dx$$

$$= \int_1^e (2x + \frac{\ln x}{x}) = \left[2\frac{x^2}{2} + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]$$

$$S = \left(e^2 + \frac{1}{2}\right) - (1) = e^2 - \frac{1}{2}$$

السؤال التاسع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

احسب مساحة السطح S المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين: $x = 0 \,, x = 1$:

$$S = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x+1)^2 e^{-x}\,dx$$

$v' = e^{-x}$	$u = (x+1)^2$
$v = -e^{-x}$	$u' = (2 + 2x)$

$$S = [-(x+1)^2 e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 (2x+2)e^{-x}\,dx$$

$v' = e^{-x}$	$u = (2x+2)$
$v = -e^{-x}$	$u' = 2$

$$S = [-(x+1)^2 e^{-x}]_0^1 + [-(2x+2)e^{-x}]_0^1 dx + \int_0^1 2e^{-x}\,dx$$

$$= \left(-\frac{4}{e}\right) - (-1) + \left(-\frac{4}{e}\right) - (-2) + [-2e^{-x}]_0^1$$

$$= \frac{8}{e} + 3 + \left(-\frac{2}{e}\right) - (-2) = 5 - \frac{10}{e}$$

السؤال العاشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = xe^x$$

احسب مساحة السطح S المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين: $x = 0 \,, x = 1$

الحل:

$$S = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx$$

$v' = e^x$	$u = x$
$v = e^x$	$u' = 1$

$$= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 xe^x\,dx$$

$$= (e) - (0) - [e]_0^1 = e - [(e) - (1)]$$

$$= e - e + 1 = 1$$

ملاحظات:

1) بوجود رسم ظاهر نكتب القانون بالشكل:

$$S = \int_a^b (f(x) - y_\Delta)$$

2) اذا كانت حدود التكامل غير معطاة أحدهما أو كلاهما

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us

عندها تكون الحدود هي حلول المعادلة
$f(x)=g(x)$
أي النقاط تقاطع المنحنيين

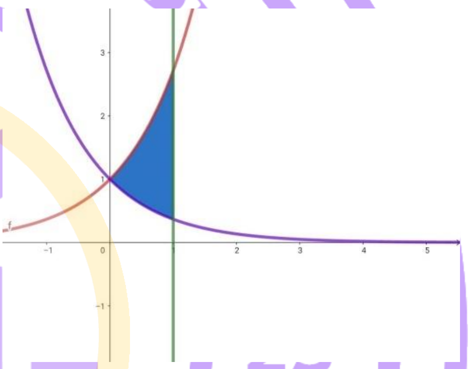
تمارين داعمة (9):

تمرين:

ليكن لدينا الخطين Cf , Cg الخطان البيانيان للتابعين:

$$f(x)=e^{x} \qquad , \qquad g(x)=e^{-x}$$

أوجد المساحة المحصورة بين Cf, Cg والمستقيم $x=1$



الحل:

من الرسم نلاحظ أن Cf فوق Cg ولإيجاد حد من حدود التكامل نحل المعادلة

$$f(x)=g(x)\Longrightarrow e^{x}=e^{-x}\Longrightarrow e^{x}-e^{-x}=0$$

$$(xe^{x})\Longrightarrow e^{2x}-1=0\Longrightarrow e^{2x}=1$$

$$e^{2x}=e^{0}\Longrightarrow x=0$$

إذاً حدود التكامل $x=0$ و $x=1$

$$S=\int_{0}^{1}[e^{x}-e^{-x}]\cdot dx\,[e^{x}+e^{-x}]_{0}^{1}$$

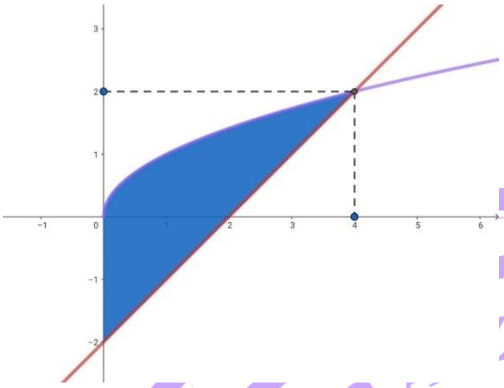
$$=\left[\left(e+\frac{1}{e}\right)-(e^{0}+e^{0})\right]$$

$$=e+\frac{1}{e}-2$$

تمرين:

ليكن لدينا التابع $f(x)=\sqrt{x}$
والمستقيم $\Delta: y=x-2$

احسب المساحة المحصورة بين بين Cf والمستقيم Δ والمستقيم $x=1$



الحل:

أحد حدود التكامل غير معطاة إذا نحل المعادلة

$$f(x)=y_{\Delta}$$

$$\sqrt{x}=x-2$$

نربع الطرفين: (بشرط أن تكون $x>2$

$$x=(x-2)^{2}$$

$$x=x^{2}-4x+4$$

$$x^{2}-5x+4=0$$

$$(x-4)(x-1)=0$$

$x=4$ مقبول $x=0$ مرفوض

$$Df=[0,+\infty[$$

$$S=\int_{0}^{4}[f(x)-y_{\Delta}]\,dx$$

$$S=\int_{0}^{4}[\sqrt{x}-(x-2)]\,dx$$

$$S=\int_{0}^{4}[\sqrt{x}-x+2]\,dx$$

$$S=\left[x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^{2}}{2}+2x\right]_{0}^{4}dx$$

Manal & Moataz
learning math with us !
سـوريانا التعليمية

$$= \left[\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^4$$

$$= \left[\left(\sqrt{64} - \frac{16}{2} + 8\right) - (0 - 0 + 0)\right]$$

$$= 8 - 8 + 8 = 8$$

تمرين:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^2 - 4$$

1) أولاً

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم ارسم C

2) ثانياً

في كل من الحالات الآتية احسب المساحة S

-1 S مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = 3$, $x = 4$

-2 S مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = 1$, $x = 2$

-3 S مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = 1$, $x = 3$

-4 S مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحور الفواصل ومحور التراتيب المستقيم الذي معادلته $x = 2$

-5 S مساحة السطح المحصور بين الخط C والمستقيم الذي معادلته $y = 5$ والمستقيمان $x = 1$, $x = 2$

-6 S مساحة السطح المحصور بين الخط C المستقيم الذي معادلته $y = x$ ومحور التراتيب والمستقيم الذي معادلته $x = 2$

الحل:

أولاً

التابع f معرف ومستمر على $\mathbb{R}$ ومنه:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = 2x$$

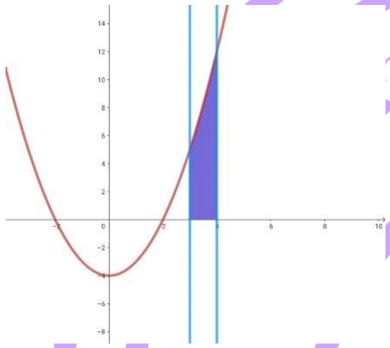
نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \in Df$$
$$\Rightarrow f(0) = -4$$

ننظم جدول التغيرات وفق:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

الطلب الأول



$$S = \int_3^4 (f(x))\,dx$$

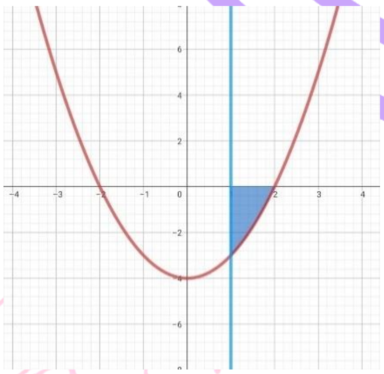
$$S = \int_3^4 (x^2 - 4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_3^4$$

$$= \left(\frac{64}{3} - 16\right) - (9 - 12)$$

$$= \frac{64}{3} - 16 + 3$$

$$= \frac{64}{3} - 13 = \frac{25}{3}$$

الطلب الثاني:



$$S = \int_1^2 (-f(x))\,dx$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us !

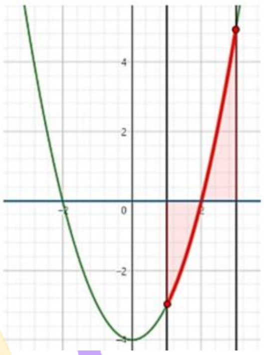
$$S=\int_1^2(-x^2+4)\,dx$$

$$S=\left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(-\frac{1}{3}+4\right)$$

$$=-\frac{8}{3}+8+\frac{1}{3}-4=-\frac{7}{3}+4=\frac{5}{3}$$

الطلب الثالث:



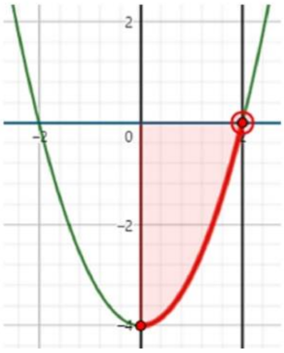
$$S=\int_1^2(-f(x))\,dx+\int_2^3(-f(x))\,dx$$

$$S=\int_1^2(-x^2+4)\,dx+\int_2^3(x^2-4)\,dx$$

$$=\left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=\frac{12}{3}=4$$

الطلب الرابع:

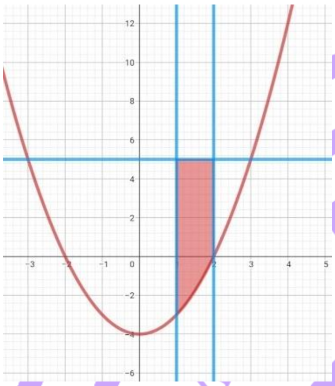


$$S=\int_0^2(-f(x))\,dx$$

$$S=\int_0^2(-x^2+4)\,dx$$

$$S=\left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_0^2=-\frac{8}{3}+8=\frac{16}{3}$$

الطلب الخامس:



$$S=\int_1^2(y_\Delta-f(x))\,dx$$

$$S=\int_1^2(5-x^2+4)\,dx$$

$$S=\int_1^2(-x^2+9)\,dx$$

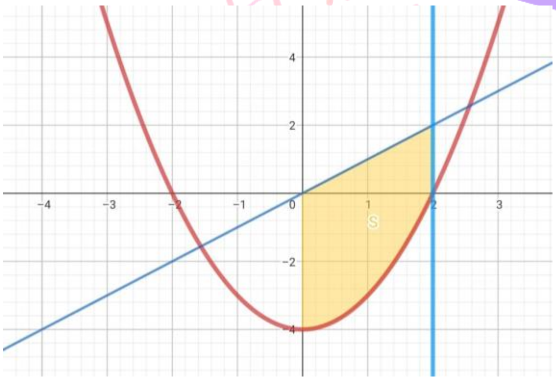
$$S=\left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{(2)^2}{3}+9(2)\right)-\left(-\frac{1}{3}+9\right)$$

$$=-\frac{8}{3}+18+\frac{1}{3}-9=-\frac{7}{3}+9=\frac{-9+27}{3}$$

$$=6$$

الطلب السادس:



MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
24
23
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us !

$$S = \int_0^2 (x - x^2 + 4)\, dx$$

$$S = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3} + 4(2)\right) - (0 + 0 + 0)$$

$$= \frac{30 - 8}{3} = \frac{22}{3}$$

تمارين داعمة (10)

التمرين الأول:

احسب مساحة السطح S المحصور بين C والمحورين الإحداثيين

الحل:

لإيجاد المساحة المطلوبة نحتاج لتعيين نقاط المنحني مع محور الفواصل أي حل للمعادلة $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Rightarrow e^x - 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

وذلك لأن $e^x \neq 0$

0المساحة تحت xx'

$$S = \int_0^{\ln 2} -f(x)\, dx = -\int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 2e^x) dx$$

$$S = -\left[\frac{1}{2} e^{2x} - 2e^x\right]_0^{\ln 2}$$

$$= -\left[\frac{1}{2} e^{\ln 4} - 2e^{\ln 2} - \frac{1}{2} + 2\right] = -\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x}{e^x} - \frac{2}{e}$$

التمرين الثالث:

احسب مساحة السطح S المحصور بين C والمقارب $d: y = \frac{-2}{e}$ والمستقيمين $x = 1\ ,\ x = 0$

الحل:

$$S = \int_0^1 (f(x) - y_\Delta)\, dx = \int_0^1 \frac{2x}{e^x} dx$$

$$= \int_0^1 2xe^{-x} dx$$

$u = 2x$	$v' = e^{-x}$
$u' = 2$	$-e^{-x}$

$$S = [-2xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}$$

$$= [-2xe^{-x}]_0^1 + [-2e^{-x}]_0^1$$

$$= [-2xe^{-x} 2e^{-x}]_0^1 = (-2e^{-1} - 2e^{-1}) + 2$$

$$= -\frac{4}{e} + 2 = \frac{2e - 4}{e}$$

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2 + 3\ln x}{x}$$

احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين $x = e\ ,\ x = 1$

الحل:

$$S = \int_1^e f(x)\, dx$$

$$= \int_1^e \frac{2 + 3\ln x}{x} dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{2}{x} + 3\frac{1}{x}\ln x\right) dx$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
سوريانا التعليمية
& Moataz
math with us !

$$= \left[2\ln x + \frac{3(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \left(2 + 3\frac{1}{2}\right) - (0)$$

$$= \frac{7}{2}$$

التمرين الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^2 + \ln x}{x}$$

احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين $x = e$, $x = 1$

الحل:

$$S = \int_1^e f(x)\,dx$$

$$= \int_1^e \frac{2x^2 + \ln x}{x}\,dx$$

$$= \int_1^e \left(2x + \frac{\ln x}{x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{2x^2}{2} + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$$

$$S = \left(e^2 + \frac{1}{2}\right) - (1) = e^2 - \frac{1}{2}$$

التمرين السادس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين $x = 0$, $x = 1$

الحل:

$$S = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x+1)^2 e^{-x}\,dx$$

$v' = e^{-x}$	$u = (x+1)^2$
$v = -e^{-x}$	$u' = 2 + 2x$

$$S = [-(x+1)^2 e^{-x}]_0^1 + [-(2x+2)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}\,dx$$

$$= \left(-\frac{4}{e}\right) - (-1) + \left(-\frac{4}{e}\right) - (-2) + [-2e^{-x}]_0^1$$

$$= -\frac{8}{e} + 3 + \left(-\frac{2}{e}\right) - (-2) = 5 - \frac{10}{e}$$

التمرين السابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = xe^x$$

احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين $x = 0$, $x = 1$

الحل:

$$S = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx$$

$v' = e^x$	$u = x$
$v = e^x$	$u' = 1$

$$S = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$

$$S = (e) - (0) - [e^x]_0^1 = e - [(e) - (1)]$$

$$= e - e + 1 = 1$$

حجم مجسم دوراني

- ❖ لحساب حجم المجسم A الناتج عن دوران Cf حول xx' ضمن المجال $[a, b]$ دورة كاملة

$$\left\{V_A = \int_a^b [\pi f^2(x)]\,dx\right\} \Leftrightarrow \{\text{نستخدم القانون}\}$$

- ❖ حيث $\pi f^2(x)$ هو مساحة الدائرة الناتجة عن مقطع في المجسم yy' //

MOATAZ SHEHADEH
ALBABA
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us !

تمارين داعمة (11)

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f معرف على المجال $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

❖ احسب الحجم A حجم المجسم الناتج عن دوران Cf حول محور xx' وفق المجال $[0, 4]$

الحل:

$$V_A = \int_0^4 \pi f^2(x)\, dx = \pi \int_0^4 f^2(x)$$

$$= \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \cdot dx = \pi[x] \cdot dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \left[\frac{16}{2} - 0\right] = 8\pi$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع $f(x) = x \cdot \sqrt{x(1-x)}$

احسب حجم المجسم الناتج عن دوران التابع f دورة كاملة حول المحور xx' ضمن المجال $[0. 1]$

الحل:

$$V_A = \int_0^1 \pi \cdot f^2(x) \cdot dx$$

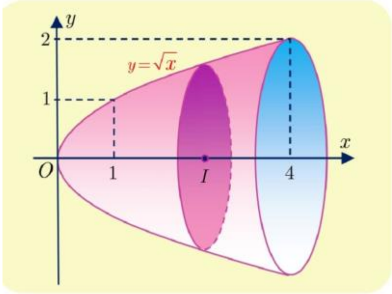
$$V_A = \pi \int_0^1 [x^2(x(1-x))]\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 [x^3 - x^4] dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5} - (0)\right] = \frac{\pi}{20}$$

الرسم:



التمرين الثالث:

احسم حجم المجسم الناتج عن دوران الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ دورة كاملة حول محور الفواصل على المجال $[0, 1]$

الحل:

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x)\, dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \frac{1+e^x}{1-e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$V = \pi \int_0^1 1 - \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$V = \pi[x - \ln(1+e^x]_0^1$$

$$V = \pi(1 - \ln(1+e) - (-\ln e))$$

$$V = \pi(1 - \ln(1+e) + \ln 2)$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
سنواتنا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us !

أسئلة شاملة في بحث التكامل

السؤال الأول:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}/\{3\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x + 3}$$

1) جد الأعداد a و b و c التي تحقق:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3} \quad \forall x \in Df$$

2) احسب $J = \int_0^2 f(x)\,dx$

الحل:

1- نقسم البسط على المقام فنجد:

$$f(x) = 4x - 17 + \frac{52}{x+3}$$

$$a = 4\,, b = -17\,, c = 52$$

$$2\text{-}\ J = \int_0^2 (4x - 17 + \tfrac{52}{x+3})\,dx$$

$$J = \left[\frac{4x^2}{2} - 17x + 52\ln|x+3|\right]_0^2$$

$$= (52\ln 3) - (8 - 34 + 52\ln 5)$$

$$= 52\ln 3 - 8 + 34 - 52\ln 5$$

السؤال الثاني:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}/\{1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

1) جد الأعداد a و b و c التي تحقق:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \quad \forall x \in Df$$

2) احسب $J = \int_{-3}^0 f(x)\,dx$

الحل:

$$1\text{-}\ f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c}{(x-1)^2}$$

$$x^2 = ax^2 - 2ax + a + bx - b + c$$

$$x^2 = ax^2 + (-2a+b)x + a - b + c$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$-2a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

$$a - b + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$2\text{-}\ I = \int_{-3}^0 \left[1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right] dx$$

$$= \left[x + 2\ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\right]_{-3}^0$$

$$= \left[x + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right]_{-3}^0$$

$$= \left(2\ln 1 - \frac{1}{-1}\right) - \left(-3 + 2\ln 4 - \frac{1}{-4}\right)$$

$$= 1 + 3 - 2ln4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} - ln16$$

$$= \frac{15}{4} - 4ln2 \Rightarrow \boxed{I = \frac{15}{4} - 4ln2}$$

السؤال الثالث:

أثبت أن: $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

واستنتج قيمة $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}$

الحل:

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBARA
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz learning math with

$$L1=\frac{1}{1+e^x}=\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}=L2$$

$$I=\int_0^1(1-\frac{\overset{W'}{\overbrace{e^x}}}{\underbrace{1+e^x}_{u}})dx=[x-\ln|1+e^x|]_0^1$$

$$=1-\ln(1+e)+\ln 2$$

$$=1+\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)\Rightarrow I=1+\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$$

السؤال الرابع:

باستعمال صيغتي $\sin^2 a$, $\cos^2 a$ بدلالة $\cos 2a$ أو بأي طريقة تراها مناسبة اكتب $\sin^4 a$ بدلالة $\cos 4a$ و$\cos 2a$ ثم احسب $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^4 x\,dx$

الحل:

$$\sin^4 x=(\sin^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$\sin^4 x=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^4 x\,dx=I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\,dx$$

$$=\left[\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$\frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{8}\right)-\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{1}{32}\sin\frac{\pi}{2}-0$$

$$=\frac{3\pi}{64}-\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{32}\Rightarrow\boxed{I=\frac{3\pi-8\sqrt{2}+2}{64}}$$

السؤال الخامس:

احسب التكاملات الآتية باستخدام التكامل بالتجزئة:

1) $I=\int_1^e(x-1)\ln x\,dx$

الحل: تكامل بالتجزئة

$u=\ln x$	$v'=x-1$
$u'=\frac{1}{x}$	$v=\frac{x^2}{2}-x$

$$I=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{2}x-1\right)dx$$

$$=\left(\left(\frac{e^2}{2}-e\right)\ln e-0\right)-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e+\frac{1}{4}-1$$

$$I=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(e^2-3)\Rightarrow\boxed{I=\frac{1}{4}(e^2-3)}$$

2) $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}(x^2-1)e^x\,dx$

الحل: تكامل بالتجزئة

$u=x^2-1$	$v'=e^x$
$u'=2x$	$v=e^x$

$$I=[(x^2-1)e^x]_{ln2}^{ln3}-\int_{ln2}^{ln3}2x\cdot e^x\,dx$$

نطبق التجزئة مرة ثانية

$u=2x$	$v'=e^x$
$u'=2$	$v=e^x$

$$I=[(x^2-1)e^x]_{ln2}^{ln3}-[2x\cdot e^x]_{ln2}^{ln3}\int_{ln2}^{ln3}2e^x\,dx$$

$$=[(x^2-1)e^x]_{ln2}^{ln3}-[2x\cdot e^x]_{ln2}^{ln3}+[2e^x]_{ln2}^{ln3}$$

$$=((\ln 3)^2-1)e^{\ln 3}-((\ln 2)^2-1)e^{\ln 2}-2\ln 3\cdot e^{\ln 3}+2\ln 2\cdot e^{\ln 2}+2e^{\ln 3}-2e^{\ln 2}$$

$$I=3(\ln 3)^2-3-2(\ln 2)^2+2-6\ln 3+4\ln 2+6-4$$

$$\Rightarrow I=1-2\ln^2(2)+3\ln^2(3)+2\ln\frac{4}{27}$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us
24
23

3) $I = \int_0^1 (2x+1)\cdot e^{-x}\,dx$

الحل:

$u = 2x+1$	$v' = e^{-x}$
$u' = 2$	$v = -e^{-x}$

$$I = [-(2x+1)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -2e^{-x}\,dx$$

$$= (-3e^{-1}+1) - [2e^{-x}]_0^1$$

$$= -3e^{-1} + 1 - 2e^{-1} + 2$$

$$= -\frac{5}{e} + 3 \Rightarrow \boxed{I = 3 - \frac{5}{e}}$$

4) $I = \int_1^2 (t-2)\,e^{2t}dt$

الحل:

$u = t-2$	$v' = e^{2t}$
$u' = 1$	$v = \frac{1}{2}e^{2t}$

$$I = \left[(t-2)\frac{1}{2}e^{2t}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}e^{2t}\,dt$$

$$= -(1-2)\cdot\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[e^{2t}]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{4}e^2$$

$$= \frac{3e^2 - e^4}{4} \Rightarrow \boxed{I = \frac{3e^2 - e^4}{4}}$$

5) $I = \int_0^3 \frac{x+2}{(x+1)^4}\,dx$

الحل: طريقة أولى

$$I = \int_0^3 \frac{x+1-1+2}{(x+1)^4}\,dx$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}\,dx$$

$$= \int_0^3 (x+1)^{-3} + (x+1)^{-4}\,dx$$

$$= \left[\frac{(x+1)^{-2}}{-2} + \frac{(x+1)^{-3}}{-3}\right]_0^3$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^3}\right]_0^3$$

$$= \left[-\frac{1}{32} - \frac{1}{192}\right] - \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = -\frac{7}{192} + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{153}{192} = \frac{51}{64}$$

طريقة ثانية (التجزئة)

$$I = \int_0^3 (x+2)(x+1)^{-4}\,dx$$

$u = x+2$	$v' = (x+1)^{-4}$
$u' = 1$	$v = -\frac{1}{3(x+1)^3}$

$$I = \left[-\frac{1}{3}(x+2)\frac{1}{(x+1)^3}\right]_0^3 - \int_0^3 -\frac{1}{3}(x+1)^{-3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(5)\left(\frac{1}{64}\right) + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2(x+1)^2}\right]_0^3$$

$$= -\frac{5}{192} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{16} - 1\right)$$

$$= \frac{-5+128}{192} + \frac{15}{96} = \frac{123+30}{192} = \frac{153}{192}$$

تمرين:

$$I = \int_1^2 \frac{8x^2 - 4}{4x^2 - 1}\,dx$$

الحل: بالقسمة الإقليدية نجد:

$$I = \int_1^2 2 - 2\frac{1}{4x^2 - 1}\,dx$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
Manal & Moataz
learning math with us!
سوريانا التعليمية
24
23

$$= [2x]_1^2 - \underbrace{\boxed{\int_1^2 \frac{2}{4x^2-1}dx}}_{J}$$

نكامل بتفريق الكسور:

$$I = \int_1^2 \frac{2}{4x^2-1}dx = \int_1^2 \frac{2}{(2x-1)(2x+1)}dx$$

$$I = \int_1^2 \frac{A}{2x-1}dx + \int_1^2 \frac{B}{2x+1}$$

$$\frac{2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+1}$$

بتوحيد المقامات:

$$\frac{2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{(2A+2B)x+A-B}{(2x-1)(2x+1)}$$

بالمقارنة نجد:

$2A + 2B = 0 \quad \cdots$ ①

$A - B = 2 \quad \cdots$ ②

بضرب ② بـ (2) وجمعها مع ① نجد: $4A = 4$

$$\boxed{A = 1} \Longrightarrow \boxed{B = -1}$$

$$\Longrightarrow J = \int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx + \int_1^2 -\frac{1}{2x+1}dx$$

$$J = \int_1^2 \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}dx + \int_1^2 -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+1}dx$$

$$J = \left[\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(2x-1)\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 - 0 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 3$$

السؤال السادس:

في كل من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع f مستفيداً من العلاقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

1) $f(x) = \cos^3 x$

الحل:

$$f(x) = \cos^2 x \cdot \cos x$$

$$f(x) = (1 - \sin^2 x)\cos x$$

$$= \cos x - \underbrace{\cos x}_{u'}\,\underbrace{\sin^2 x}_{u^n}$$

$$\Longrightarrow F(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

2) $f(x) = \sin x + \sin^3 x$

الحل:

$$f(x) = \sin x + \sin^2 x \cdot \sin x$$

$$f(x) = \sin x + (1 - \cos^2 x)\sin x$$

$$= \sin x + \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x$$

$$= 2\sin x \underbrace{- \sin x}_{u'} \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{u^n}$$

$$\Longrightarrow F(x) = -2\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$$

3) $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos^2$

الحل:

$$f(x) = \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x$$

$$= (1 - \cos^2 x)\sin x \cdot \cos^2 x$$

$$= \sin x \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos^4 x$$

$$= -\Big(\underbrace{-\sin x}_{u'} \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{u^n}\Big)\underbrace{-\sin x}_{u'} \cdot \underbrace{\cos^4 x}_{u^n}$$

$$\Longrightarrow F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}$$

السؤال السابع:

1) نريد حساب $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$

احسب $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ ثم $I + J$ واستنتج I

الحل:

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us !

$$J=\int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{\overbrace{2x}^{u'}}{\underbrace{1+x^2}_{u}}\,dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left|1+x^2\right|\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}[\ln 2-\ln 1]=\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\Rightarrow \boxed{J=\ln\sqrt{2}}$$

$$I+J=\int_0^1\frac{x^3+x}{1+x^2}\,dx=\int_0^1\frac{x(x^2+1)}{(1+x^2)}\,dx$$

$$I+J=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left[\frac{1}{2}-0\right]=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I+J=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I=(I+J)-J\Rightarrow \boxed{I=\frac{1}{2}-\ln\sqrt{2}}$$

2) نريد حساب $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$

احسب $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}$ ثم $I+J$

الحل:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{\overbrace{2\cos x}^{u'}}{\underbrace{1+2\sin x}_{u}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|1+2\sin x\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-0\right]=\frac{1}{2}\ln 3$$

$$=\ln\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow J=\boxed{\ln\sqrt{3}}$$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{1+2\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cdot\cos x+\cos x}{1+2\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,(2x\sin x+1)}{1+2\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-0=1$$

$$\boxed{I+J=1}\Rightarrow I=(I+J)-J$$

$$\Rightarrow \boxed{I=1-\ln\sqrt{3}}$$

MOATAZ SHEHADEH
MANAL ALBABA
24 23
سوريانا التعليمية
Manal & Moataz
learning math with us !