تـم تحميـل الملف بواسطـة : بوت مكتبتى التعليمية

انقر هنا للوصول إلى ⇦ بوت مكتبتي التعليمية



بوت مكتبتي التعليمية : عبارة عن مكتبة إلكترونية تعليمية شاملة لغالبية ملفات المراحل الدراسية على تطبيق تيليجرام – يمكن الوصول لها عن طريق الرابط :

https://t.me/Science_2022bot

مكثفة شيفرة الـ 600

ولمساتها الأخيرة في الرياضيات

للثالث الثانوي العلمي



by:Hisham Labanieh
099 88 175 22

إعداد المدرس :

خالد عامر

Syria - Damascus
خالد عامر
0940 916 753

النخبة
ELITE MATH
تم التحميل من
بوت مكتبتي التعليمية
t.me/Science_2022bot
الاتحادي لطلبة سوريا
https://t.me/Science_2022bot

تذكرة وعموميات:

تعريف	لتكن لدينا النقطتين A و B من الفراغ نقول عن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ أنه الانسحاب الذي ينقل A إلى B
نميز	الحالة الأولى: في حالة $A \neq B$ فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يمتلك: * منحى: هو منحى المستقيم (AB) * اتجاه: يتفق مع الانتقال من A إلى B * طولاً أو نظيماً: هو المسافة بين A إلى B ونرمز إلى نظيم الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ ويكون: $\left\|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\right\| = AB$
	الحالة الثانية: في حالة $A = B$ فإن الشعاع $\overrightarrow{AA}$ هو الشعاع الصفري ورمزه $\vec{0}$ حيث: الشعاع الصفري: هو شعاع له نفس البداية ونفس النهاية أي بدايته تنطبق على نهايته نتيجة هامة: إذا كان $\overrightarrow{DN} = \vec{0}$ فهذا يعني أن $D = N$ أي D تنطبق على N

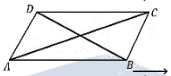
	الشعاعان المتساويان	الشعاعان المتعاكسان
تعريف	الشعاعين المتساويان لهما نفس المنحى ونفس الجهة ونفس الطويلة حيث: نفس المنحى تعني توازي أو انطباق	لهما نفس المنحى ونفس الطويلة ولكن اتجاهين متعاكسين
الفائدة	تفيد في استبدال شعاع بشعاع آخر يساويه	$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

العمليات على الأشعة:

تنويه: ناتج مجموع أشعة هو شعاع

قواعد:

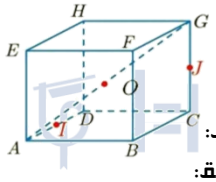
أولا: مجموع شعاعين

متساويين	متعاكسين	في حالة تعاقب	لهما البداية نفسها	غير ذلك
الناتج هو ضعفي أحدهما مثال: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$	الناتج هو الشعاع الصفري مثال: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$	أي نهاية أحد الأشعة هي بداية للشعاع الآخر وهنا نستخدم قاعدة شال في جمع الأشعة وفق: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	نستخدم قاعدة متوازي الأضلاع بحيث يكون مجموع الشعاعين هو قطر متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين والذي له نفس بداية الشعاعين مثال:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$	نحتاج للإصلاحات * الترتيب * الاستبدال * الزرع

ثانيا: طرح شعاعين

لطرح شعاعين نجمع الأول مع معاكس الشعاع الثاني وفق: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ ثم نتابع حسب قواعد جمع الأشعة

التمرين الأول:



مكعب $ABCDEFGH$

I منتصف $[AD]$

J منتصف $[CG]$ والمطلوب:

١. عين موقع M التي تحقق:

$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{CA}$$

٢. أثبت صحة العلاقة:

$$\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{GO}$$

حيث O منتصف $[GA]$

٣. أثبت أنّ: $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$

الحل:

الطلب الأول:

تحديد موقع M :

$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{CA}$$
$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GE}$$
$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IE}$$

تكافئ: $M = E$ بالتالي M تنطبق E

الطلب الثاني:

إثبات صحة العلاقة:

$$\underbrace{\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BA}}_{l_1} = \underbrace{2\overrightarrow{GO}}_{l_2}$$

$$l_1 = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BA}$$
$$= \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GA}$$
$$= 2\overrightarrow{GO} = l_2$$

الطلب الثالث:

$$\underbrace{\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FA}}_{l_1} = \underbrace{\vec{0}}_{l_2}$$

$$l_1 = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FA}$$
$$= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FB} = \vec{0} = l_2$$

ومنهُ محققة.

المعلم في الفراغ	اختيار معلم في الفراغ هو إعطاء نقطة O تسمّى مبدأ المعلم وجملة ثلاثة أشعة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ليست مرتبطة خطياً نرمز إلى هذا المعلم بالرمز $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k},)$ ونسمي الجملة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس أشعة الفراغ.
إحداثيات نقطة في الفراغ	لتكن M نقطة من الفراغ إذاً إحداثيات M وفق: $M(x, y, z)$ حيث: x فاصلة النقطة و y ترتيب النقطة و z راقم النقطة
مركبات شعاع في الفراغ	ليكن $\vec{u}$ في الفراغ مركباته تعطى وفق: $\vec{u}(x, y, z)$ ويمكن أن نكتب $\vec{u}$ بالصيغة: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ويمكن أيضاً أن نكتب $\vec{u}$ وفق عمود وفق: $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
إيجاد مركبات شعاع	لتكن لدينا النقطتين: $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ فإن مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ تعطى وفق: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

https://t.me/Science_2022bot

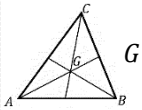
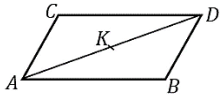
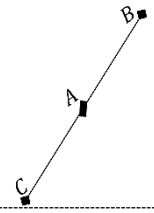
مكثفة شيفرة الـ 600

العمليات على الأشعة:

ليكن لدينا $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ فإنّ:

جداء عدد حقيقي بشعاع	مجموع شعاعين	تساوي شعاعين
هو شعاع مركباته تنتج من ضرب هذا العدد بمركبات الشعاع أي: $K\vec{u} = \begin{pmatrix} Kx_1 \\ Ky_1 \\ Kz_1 \end{pmatrix}$	هو شعاع مركباته تنتج من جمع مركبات الشعاع الأول مع مقابلاتها من الشعاع الثاني أي: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$	إذا كان لدينا $\vec{u} = \vec{v}$ فهذا يكافئ أن: $\vec{u} = \vec{v} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$

إيجاد إحداثيات النقاط:

الفكرة	نص السؤال	فكرة الحل
إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة	ليكن لدينا النقاط: $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ جد إحداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$	إن إحداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ تعطى وفق: $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ 
إحداثيات مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات	ليكن لدينا النقاط: $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ و $C(x_C, y_C, z_C)$ * جد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC * جد إحداثيات G مركز تلاقي المتوسطات	إن إحداثيات G تعطى وفق: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$ 
إحداثيات مركز متوازي الأضلاع	ليكن لدينا النقاط: $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ و $C(x_C, y_C, z_C)$ و $D(x_D, y_D, z_D)$ جد إحداثيات النقطة K مركز متوازي الأضلاع $ABCD$	إن إحداثيات النقطة K مركز متوازي الأضلاع $ABDC$ نقطة تلاقي قطريه أيّ (منتصف أحد أقطاره) أيّ: * إمّا الـ K منتصف $[AD]$ * أو الـ K منتصف $[CB]$ 
إحداثيات نقطة بمعلومية علاقة شعاعية وإحداثيات باقي النقاط	جد إحداثيات النقطة التي تحقق العلاقة الشعاعية (بحيث العلاقة الشعاعية معطاة)	* نفرض النقطة المجهولة (x, y, z) . * نعوض في العلاقة الشعاعية المعطاة. * نطبق العمليات على الأشعة. * نحصل على معادلات من الدرجة الأولى بالمجاهيل z و y و x . * نحل المعادلات السابقة فنحصل على إحداثيات النقطة المطلوبة.
إحداثيات النقطة التي تجعل الرباعي متوازي أضلاع	لتكن لدينا النقاط: $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ و $C(x_C, y_C, z_C)$ جد إحداثيات النقطة M التي تجعل الرباعي $ABCM$ متوازي الأضلاع.	* نفرض النقطة المطلوبة $M(x, y, z)$ * نرسم شكل تقريـــبي: * نأخذ علاقة شعاعية من الشكل. * نعوض في العلاقة. * نطبق العمليات على الأشعة. * نحصل على معادلات من الدرجة الأولى بالمجاهيل z و y و x . * نحل المعادلات السابقة فنحصل على إحداثيات النقطة المطلوبة.
إحداثيات نقطة نظيرة نقطة بالنسبة إلى نقطة	أوجد إحداثيات النقطة C نظيرة B بالنسبة إلى A .	* نفرض النقطة المطلوبة $C(x, y, z)$ * نرسم شكل تقريـــبي، حيث النقطة التي تأتي بعد كلمة بالنسبة تكون في المنتصف. * نأخذ علاقة شعاعية من الشكل ولتكن مثلاً: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$ * مع الانتباه على أن يكون للشعاعين نفس المنحى والجهة. * نعوض في العلاقة. * نطبق العمليات على الأشعة. * نحصل على معادلات من الدرجة الأولى بالمجاهيل z و y و x . * نحل المعادلات السابقة فنحصل على إحداثيات النقطة المطلوبة. 
إحداثيات نقطة نظيرة نقطة بالنسبة إلى المبدأ	جد إحداثيات النقطة B نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ.	تكون إحداثيات النقطة B هي عكس إحداثيات النقطة A أي أننا نغير الإشارات فقط.

مختبر شيفرة 609 الأول

ELITE MATH

تم التحميل من بوت مكتبتي التعليمية t.me/Science_2022bot

https://T.me/Science_2022bot

تمرين:

في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط

$A(3,5,2)$	$B(2,-1,3)$
$C(0,-2,2)$	$D(-2,5,1)$

١. جد مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}(-1,-6,1)$$

٢. جد مركبات الشعاع $\vec{u}$ الذي يحقق العلاقة:

$$\vec{u} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{DC} \quad (*)$$

لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-6,1)$$
$$\overrightarrow{DC}(2,-7,1)$$

نعوض في العلاقة $(*)$ وفق:

$$\vec{u} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$$
$$= -2\begin{pmatrix}-1\\-6\\1\end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2\\12\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\-\frac{35}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2+\frac{10}{3}\\12-\frac{35}{3}\\-2+\frac{5}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{16}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

٣. جد احداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

$$\left.\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+0}{2} = 1 \\ y_I &= \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1-2}{2} = \frac{-3}{2} \\ z_I &= \frac{z_B + z_c}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}\right\} I\left(1,\frac{-3}{2},\frac{5}{2}\right)$$

٤. جد احداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{3+2+0}{3} = \frac{5}{3}$$
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{5-1-2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{2+3+2}{3} = \frac{7}{3}$$
$$\rightarrow G\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$$

٥. جد احداثيات النقطة N التي تجعل الرباعي $ABCN$ متوازي أضلاع

ليكن $N(x,y,z)$

وليكن لدينا:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NC}$$
$$\begin{pmatrix}-1\\-6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-x\\-2-y\\2-z\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ

$$\left.\begin{aligned} -1 &= -x \Rightarrow x = 1 \\ -6 &= -2-y \Rightarrow y = 4 \\ 1 &= 2-z \Rightarrow z = 1 \end{aligned}\right\} N(1,4,1)$$

٦. جد احداثيات النقطة K مركز متوازي الأضلاع $ABCN$

K مركز متوازي الأضلاع في نقطة تلاقي قطريه إما K منتصف $[AC]$ أو K منتصف $[NB]$:

$$\left.\begin{aligned} x_K &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} \\ y_K &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} \\ z_K &= \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \end{aligned}\right\} K\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)$$

٧. جد احداثيات M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

لتكن $M(x,y,z)$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$
$$\begin{pmatrix}x-2\\y+1\\z-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-6\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-3\\-7\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x-2\\y+1\\x-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-6\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-9\\-21\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x-2\\y+1\\z-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-27\\1\end{pmatrix}$$
$$\left.\begin{aligned} x-2 &= -10 \Rightarrow x = -8 \\ y+1 &= -27 \Rightarrow y = -28 \\ z-3 &= 1 \Rightarrow z = 4 \end{aligned}\right\} M(-8,-28,4)$$

٨. جد احداثيات L نظيرة B بالنسبة إلى C

ليكن $L(x,y,z)$ وليكن لدينا:

$$\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{CB}$$
$$\begin{pmatrix}0-x\\-2-4\\2-z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ

$$\left.\begin{aligned} -x &= 2 \Rightarrow x = -2 \\ -2-y &= 1 \Rightarrow y = -3 \\ 2+z &= 1 \Rightarrow z = 1 \end{aligned}\right\} L(-2,-3,1)$$

٩. جد احداثيات النقطة H نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ.

$$H(-3,-5,-2)$$

اللهمَّ همِّةً لا تفتر ولا تنقطع ♡

أنواع المعالم:

المعلم المتجانس	المعلم المتعامد	المعلم الكيفي
نقول إن المعلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ معلم متجانس إذا تحقق: * $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى * نظيم كل من $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ يساوي واحدة الطول أي: $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$	نقول إن المعلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ معلم متعامد إذا تحقق: $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى (أي وجود ثلاثية متعامدة) ملاحظة: المعلم المتعامد يمكن تحويله إلى معلم متجانس	نقول إن المعلم كيفي إذا كانت $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ غير متعامدة مثنى مثنى (عدم وجود ثلاثية متعامدة)

☒ متى يمكن وضع معلم متجانس؟

* في حالة المكعب
* في حالة متوازي المستطيلات بشرط أبعاده معلومة
* في حالة الهرم بشرط وجود ثلاثية متعامدة وبشرط أبعاده معلومة بحيث يكون مبدأ المعلم هو موقع الثلاثيّة المتعامدة.
* في حالة رباعي الوجوه بشرط وجود ثلاثية متعامدة وبشرط أبعاده معلومة

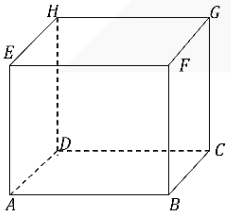
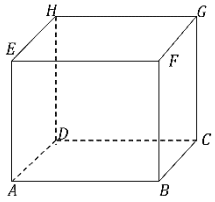
مكثفة شيفرة الـ 600
تم التحميل من بوت مكتبتي التعليمية
https://T.me/Science_2022bot

إيجاد إحداثيات النقاط بالاعتماد على معلم متجانس:

أولاً: المكعب:

تمهيد:

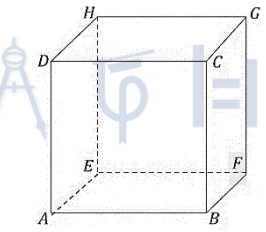
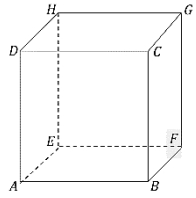
- عندما يكون الشكل مكعب فهذا يعني وجود ثلاثية متعامدة أي وجود معلم متعامد
- عندما يكون طول حرف المكعب غير معلوم يمكننا أن نأخذ معلم متجانس باعتبار طول حرفه هو 1

نص السؤال	فكرة الحل
$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه a باختيار معلم متجانس مبدؤه A , جد إحداثيات النقاط المشكلة لرؤوسه. 	لدينا المعلم المتجانس: $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD},\frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$ إيجاد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب تعطى وفق: بالاعتماد على اسم المعلم نحدد النقاط: $E(0,0,a)$ | $A(0,0,0)$ $D(0,a,0)$ | $B(a,0,0)$ بالاعتماد على المستوي الأرضي نحدد إحداثيات النقطة C حيث يكون لها x و y وليس لها z وفق: $C(a,a,0)$ بالاعتماد على المستوي العلوي نحدد إحداثيات النقاط G و F و H وذلك بأخذ إحداثيات نقاطه من المستوي الأرضي مع تعديل حقل الـ z لأنّ له ارتفاع وفق: $H(0,a,a)$ | $F(a,0,a)$ $G(a,a,a)$
$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 3 باختيار معلم متجانس مبدؤه D , جد إحداثيات النقاط المشكلة لرؤوسه. 	لدينا المعلم المتجانس: $\left(D;\frac{1}{3}\overrightarrow{DA},\frac{1}{3}\overrightarrow{DC},\frac{1}{3}\overrightarrow{DH}\right)$ إيجاد إحداثيات رؤوس المكعب تعطى وفق: $H(0,0,3)$ | $D(0,0,0)$ $E(3,0,3)$ | $A(3,0,0)$ $G(0,3,3)$ | $C(0,3,0)$ $F(3,3,3)$ | $B(3,3,0)$

ثانيًا: متوازي مستطيلات أبعاد معلومة:

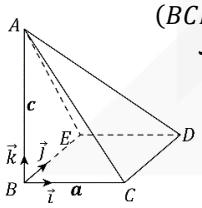
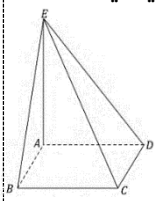
تمهيد:

- في حالة متوازي المستطيلات يوجد ثلاثية متعامدة
- في حالة متوازي المستطيلات الذي أبعاده معلومة يمكن وضع معلم متجانس.
- في حالة متوازي المستطيلات الذي أبعاده غير معلومة لا يمكن وضع معلم متجانس.

نص السؤال	فكرة الحل
$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=a$ و $BF=b$ و $FG=c$ باختيار معلم متجانس مبدؤه A أوجد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب: 	لدينا المعلم المتجانس: $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{b}\overrightarrow{AE},\frac{1}{c}\overrightarrow{AD}\right)$ إيجاد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب تعطى وفق: بالاعتماد على اسم المعلم نحدد النقاط: $D(0,0,c)$ | $A(0,0,0)$ $E(0,b,0)$ | $B(a,0,0)$ بالاعتماد على المستوي الأرضي نحدد إحداثيات النقطة F حيث يكون لها x و y وليس لها z وفق: $F(a,b,0)$ بالاعتماد على المستوي العلوي نحدد إحداثيات النقاط C و G و H وذلك بأخذ إحداثيات نقاطه من المستوي الأرضي مع تعديل حقل الـ z لأنّ له ارتفاع وفق: $H(0,b,c)$ | $C(a,0,c)$ $G(a,b,c)$
$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=4$ و $BF=3$ و $FG=5$ باختيار معلم متجانس مبدؤه E أوجد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب: 	لدينا المعلم المتجانس: $\left(E;\frac{1}{3}\overrightarrow{EA},\frac{1}{4}\overrightarrow{EF},\frac{1}{5}\overrightarrow{EH}\right)$ إيجاد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب تعطى وفق: $H(0,0,5)$ | $E(0,0,0)$ $D(3,0,5)$ | $A(3,0,0)$ $G(0,4,5)$ | $F(0,4,0)$ $C(3,4,5)$ | $B(3,4,0)$

مجتمع شغوفين 009 IT
تم التحميل من بوت مكتبتي التعليمية
https://T.me/Science_2022bot

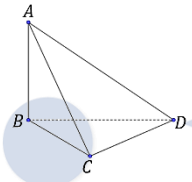
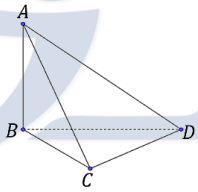
ثالثاً: هرم يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة:

نص السؤال	فكرة الحل
$ABCDE$ هرم رأسه A وقاعدته $BCDE$ مربع طول ضلعه a ولدينا (AB) عمودي على القاعدة $(BCDE)$ و $BA = c$ باختيار معلم متجانس مناسب أوجد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم. 	لدينا المعلم المتجانس: $\left(B;\frac{1}{a}\overrightarrow{BC},\frac{1}{a}\overrightarrow{BE},\frac{1}{c}\overrightarrow{BA}\right)$ انتبه: دائماً في هذه الحالة يكون المبدأ هو الحرف المشترك بين المستقيم العمودي على القاعدة والقاعدة ومنهُ تكون إحداثيات النقاط رؤوس الهرم تعطى وفق: $A(0,0,c)$ | $B(0,0,0)$ $E(0,a,0)$ | $C(a,0,0)$ $D(a,a,0)$
$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته $ABCD$ مستطيل فيه $BC = 4$ و $CD = 3$ ولدينا (AE) عمودي على القاعدة $(ABCD)$ و $AE = 4\sqrt{2}$ باختيار معلم متجانس مناسب أوجد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم. 	لدينا المعلم المتجانس: $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{AE}\right)$ إيجاد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم تعطى وفق: $A(0,0,0)$ | $E(0,0,4\sqrt{2})$ $B(3,0,0)$ | $D(0,4,0)$ $C(3,4,0)$

رابعاً: رباعي وجوه يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة:

تمهيد:

- رباعي الوجوه هو هرم قاعدته مثلث.
- في حال عدم معرفة الأطوال في حالة رباعي الوجوه فهذا يعني عدم إمكانية وضع معلم متجانس

نص السؤال	فكرة الحل
$ABCD$ رباعي وجوه رأسه A وقاعدته BCD مثلث قائم في B وفيه: $BC = a$ و $BD = b$ ولدينا (AB) عمودي على القاعدة (BCD) و يتحقق $AB = c$ باختيار معلم متجانس مناسب أوجد إحداثيات النقاط رؤوس رباعي الوجوه 	لدينا المعلم المتجانس: $\left(B;\frac{1}{a}\overrightarrow{BC},\frac{1}{b}\overrightarrow{BD},\frac{1}{c}\overrightarrow{BA}\right)$ إحداثيات النقاط رؤوس رباعي الوجوه تعطى وفق: $C(a,0,0)$ | $B(0,0,0)$ $A(0,0,c)$ | $D(0,b,0)$
$ABCD$ رباعي وجوه رأسه A وقاعدته BCD مثلث قائم في B وفيه: $BC = 3$ و $BD = 4$ ولدينا (AB) عمودي على القاعدة (BCD) ويتحقق $AB = 4\sqrt{3}$ باختيار معلم متجانس مناسب أوجد إحداثيات النقاط رؤوس رباعي الوجو 	لدينا المعلم المتجانس: $\left(B;\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\frac{1}{4}\overrightarrow{BD},\frac{1}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{BA}\right)$ إحداثيات النقاط رؤوس رباعي الوجوه تعطى وفق: $C(3,0,0)$ | $B(0,0,0)$ $A(0,0,4\sqrt{3})$ | $D(0,4,0)$

تذكير شعاع (المسافة بين نقطتين):

الفكرة	نص السؤال	فكرة الحل
قانون نظيم شعاع	ليكن لدينا الشعاع $\vec{u}(x,y,z)$ ، جد $\|\|\vec{u}\|\|$	$\|\|\vec{u}\|\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
المسافة بين نقطتان	ليكن لدينا النقطتين: $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ جد المسافة AB	$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
انتبه وتذكر	دستور نظيم شعاع ودستور المسافة بين نقطتين لا تطبق إلا في معلم متجانس قيمة نظيم شعاع والمسافة بين نقطتان هي مقدار موجب تماماً	

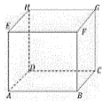
تطبيقات المسافة بين نقطتين في الفراغ:

التطبيق	نص السؤال	فكرة الحل
تحديد نوع المثلث	ليكن لدينا النقاط: $A(x_A,y_A,z_A)$ $B(x_B,y_B,z_B)$ $C(x_C,y_C,z_C)$ والمطلوب: حدد نوع المثلث ABC	نوجد أطوال أضلاع المثلث ونحدد نوعه من حيث أطوال أضلاعه. في حال كان المثلث متساوي الساقين أو مختلف الأضلاع فإننا نختبر كونه قائماً، وفق: - نربع طول الضلع الأطول. - نربع طولي الضلعين الباقيين ونجمعهما ونميز: الحالة الأولى: إذا تحقق: مجموع مربعي الضلعين الباقيين = مربع طول الضلع الأطول يكون المثلث قائم ووتره الضلع الأطول. الحالة الثانية: إذا تحقق: مجموع مربعي الضلعين الباقيين ≠ مربع طول الضلع الأطول فإنّ المثلث غير قائم
انتماء نقطة إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة	هل النقطة M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث: $A(x_A,y_A,z_A)$ $B(x_B,y_B,z_B)$ $C(x_C,y_C,z_C)$	نوجد المسافة MA . نوجد المسافة MB . نميز حالتين: الحالة الأولى: إذا تحقق: $MA = MB$ فإن النقطة M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ الحالة الثانية: إذا تحقق: $MA \neq MB$ فإن النقطة M لا تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

مكتبة شيفرة الـ 600
التحميل من
https://t.me/Science_2022bot

وقوع نقطة على كرة	النمط الأول: هل النقطة M تقع على الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها R	* نوجد المسافة بين النقطة ومركز الكرة ولتكن مثلاً $M\Omega$ * نميز حالتين: ☝ الحالة الأولى: إذا كان $R = M\Omega$ فالنقطة M تقع على الكرة. ✌ الحالة الثانية: إذا كان $R \neq M\Omega$ فالنقطة M لا تقع على الكرة
	النمط الثاني: هل النقاط A و B و C و D و E تقع على الكرة التي مركزها Ω	* نوجد المسافات بين جميع النقاط ومركز الكرة. * نميز حالتين: ☝ الحالة الأولى:إذا كانت جميع المسافات السابقة متساوية فإن جميع النقاط تقع على كرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها هو المسافة بين المركز وإحدى النقاط. ✌ الحالة الثانية: إذا كانت جميع المسافات غير متساوية فالنقاط لا تقع على كرة واحدة.
إحداثيات نقطة تقع على أحد المحاور الإحداثية وتحقق علاقة معطاة	جد على محور (الفواصل-التراتيب-الرواقم) نقطة C تحقق علاقة مُعطاة	* نفرض النقطة المطلوب وفق: - إذا كانت واقعة على محور الفواصل: $C(x,0,0)$ - إذا كانت واقعة على محور التراتيب: $C(0,y,0)$ - إذا كانت واقعة على محور الرواقم: $C(0,0,z)$ * نعوض في العلاقة $(*)$ ونصل وصولاً للمطلوب.

التمرين الأول:



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه: $AB = 2$ و $BC = 1$ و $CG = 1$ والمطلوب:

١. أعطِ معلماً متجانساً مبدؤه A ثم حدد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات.

٢. جد مركبات الشعاع $\vec{u}$ الذي يحقق: $\vec{u} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{DH}$

٣. جد إحداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[DC]$

٤. جد إحداثيات النقطة J مركز ثقل المثلث (ICG)

٥. جد إحداثيات النقطة K مركز الوجه $(ADHE)$

٦. جد إحداثيات النقطة L التي تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{IJ} - 2\overrightarrow{CK}$

٧. جد إحداثيات النقطة M التي تجعل الرباعي $(HDIM)$ متوازي أضلاع

٨. جد إحداثيات النقطة N مركز متوازي الأضلاع $(HDIM)$

٩. جد إحداثيات النقطة O نظيرة النقطة N بالنسبة إلى النقطة M .

١٠. جد إحداثيات النقطة P نظيرة النقطة L بالنسبة إلى النقطة A .

١١. ما نوع المثلث (ICG) ؟

١٢. هل النقطة I تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[HG]$ ؟

١٣. هل النقطة B تقع على الكرة التي مركزها C ونصف قطرها $R = 1$ ؟

١٤. هل النقاط A و D و H و E تقع على كرة واحدة مركزها K ؟

١٥. جد على محور الرواقم نقطة Q ومتساوية البعد عن K و M .

الحل:

الطالب الأول:

المعلم المتجانس: $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

إحداثيات رؤوس متوازي الأضلاع:

$A(0,0,0)$	$B(2,0,0)$
$D(0,1,0)$	$E(0,0,1)$
$C(2,1,0)$	$F(2,01)$
$H(0,1,1)$	$G(2,1,1)$

الطالب الثاني:

مركبات الشعاع $\vec{u}$ الذي يحقق:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{DH}$$
$$\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

الطالب الثالث:

إحداثيات I منتصف القطعة المستقيمة $[DC]$

$$I\left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}, \frac{z_C + z_D}{2}\right)$$
$$I\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$$
$$I(1,1,0)$$

الطالب الرابع:

إحداثيات J مركز ثقل المثلث (ICG) :

$$J\left(\frac{x_I + x_C + x_G}{3}, \frac{y_I + y_C + y_G}{3}, \frac{z_I + z_C + z_G}{3}\right)$$
$$J\left(\frac{1+2+2}{3}, \frac{1+1+1}{3}, \frac{0+0+1}{3}\right)$$
$$J\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$

الطالب الخامس:

إحداثيات K مركز الوجه $(ADHE)$:

- إحداثيات K هي منتصف القطعة $[AH]$:

$$K\left(\frac{x_A + x_H}{2}, \frac{y_A + y_H}{2}, \frac{z_A + z_H}{2}\right)$$
$$K\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right)$$
$$K\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

الطالب السادس:

إحداثيات L التي تحقق: $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{IJ} - 2\overrightarrow{CK}$

- بفرض: $L(x,y,z)$
- لدينا: $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{IJ} - 2\overrightarrow{CK}$

$$\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-0\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-2\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد: $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$

$$L(6,1,0)$$

الطالب السابع:

إحداثيات M التي تجعل الرباعي $(HDIM)$ متوازي الأضلاع:



- بفرض: $M(x,y,z)$
- ولدينا: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{HD}$

$$\begin{pmatrix}1-x\\1-y\\0-z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\left.\begin{array}{l}1-x=0 \Rightarrow x=1\\1-y=0 \Rightarrow y=1\\-z=-1 \Rightarrow z=1\end{array}\right\} M(1,1,1)$$

الطالب الثامن:

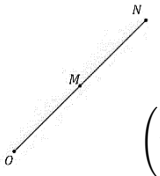
إحداثيات N مركز متوازي الأضلاع $(HDIM)$:

- إحداثيات N هي منتصف القطعة $[HI]$

$$N\left(\frac{x_H + x_I}{2}, \frac{y_H + y_I}{2}, \frac{z_H + z_I}{2}\right)$$
$$N\left(\frac{0+1}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{1+0}{2}\right)$$
$$N\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

الطالب التاسع:

إحداثيات O نظيرة N بالنسبة إلى M:



- بفرض $O(x,y,z)$
- ولدينا: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MN}$

$$\begin{pmatrix}1-x\\1-y\\1-z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

- وهي تكافئ:

$$1 - x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$
$$1 - y = 0 \rightarrow y = 1$$
$$1 - z = -\frac{1}{2} \rightarrow z = \frac{3}{2}$$
$$O\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$$

الطالب العاشر:

إحداثيات P نظيرة L بالنسبة إلى A:

- بما أن A هي المبدأ تكون إحداثيات P عكس إحداثيات L أيّ: $P(-6,-1,0)$

الطالب الحادي عشر:

تحديد نوع المثلث (ICG):

$$\overrightarrow{IC}(1,0,0)$$
$$IC = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 1$$
$$\overrightarrow{IG}(1,0,1)$$
$$IG = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{CG}(0,0,1)$$
$$CG = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2} = 1$$

ومنه المثلث (ICG) متساوي الساقين

لنختبر كونه قائماً، وفق:

$$(IG)^2 = (IC)^2 + (CG)^2$$
$$2 = 1 + 1$$
$$2 = 2$$

إذاً المثلث (ICG) متساوي الساقين وقائم في C ووتره $[IG]$

ELITE MATH
https://T.me/Science_2022bot

الطالب الثاني عشر:

اختبار انتماء I إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[HG]$:

$$\overrightarrow{IH}(-1,0,1)$$
$$IH=\sqrt{(-1)^2+(0)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{IG}(1,0,1)$$
$$IG=\sqrt{(1)^2+(0)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$$

وبما أن $IH=IG$ فإن النقطة I تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[HG]$

الطالب الثالث عشر:

اختبار وقوع B على الكرة التي مركزها C ونصف قطرها $R=1$:

$$\overrightarrow{BC}(0,1,0)$$
$$BC=\sqrt{(0)^2+(1)^2+(0)^2}=1$$

وبما أن $BC=R$ فإن النقطة B تقع على الكرة التي مركزها C ونصف قطرها $R=1$

الطالب الرابع عشر:

اختبار وقوع A و D و H و E على كرة واحدة مركزها K :

$$\overrightarrow{AK}\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$AK=\sqrt{(0)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\overrightarrow{DK}\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$DK=\sqrt{(0)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\overrightarrow{HK}\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$
$$HK=\sqrt{(0)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\overrightarrow{EK}\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$
$$EK=\sqrt{(0)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبما أنّ $AK=DK=HK=EK$ فإن النقاط A و D و H و E تقع على كرة واحدة مركزها K ونصف قطرها $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

الطالب الخامس عشر:

إحداثيات Q نقطة على محور الرواقم ومتساوية البعد عن K و M:

بما أن Q تقع على محور الرواقم فإنّ: $Q(0,0,z)$

وبما أن Q متساوية البعد عن M و K فإنه يتحقق:

$$QM=QK$$
$$\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1-z)^2}=\sqrt{(0)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-z\right)^2}$$
$$\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1-z)^2}=\sqrt{+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-z\right)^2}$$

نربع الطرفين:

$$1+1+(1-z)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-z\right)^2$$
$$2+1-2z+z^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-z+z^2$$
$$3-2z+z^2=\frac{1}{2}-z+z^2$$
$$2z-z=3-\frac{1}{2}\rightarrow z=\frac{5}{2}$$

ومنه: $Q\left(0,0,\frac{5}{2}\right)$

التمرين الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ليكن لدينا النقاط $A(-1,3,0)$ و $B(1,-2,3)$ والمطلوب:

١. جد كل نقطة من محور الفواصل تبعد عن A مسافة قدرها $\sqrt{18}$.

٢. عيّن C نظيرة A بالنسبة إلى B .

الحل:

الطالب الأول:

- بفرض N نقطة من محور الفواصل فإن إحداثياتها تكون: $N(x,0,0)$ وبما أن N تبعد عن A مسافة قدرها $\sqrt{18}$ فإنه يتحقق:

$$AN=\sqrt{18}$$
$$\sqrt{(x+1)^2+(-3)^2+(0)^2}=\sqrt{18}$$
$$\sqrt{(x+1)^2+9}=\sqrt{18}$$

- نربع الطرفين:

$$(x+1)^2+9=18$$
$$(x+1)^2=9$$

إما $x+1=3\Rightarrow x=2$

أو $x+1=-3\Rightarrow x=-4$

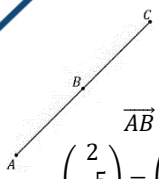
- ومنه النقاط:

$$N_1(2,0,0)\ ,\ N_2(-4,0,0)$$

من محور الفواصل تبعد عن A مسافة قدرها $\sqrt{18}$

الطالب الثاني:

تعيين C:



- بفرض $C(x,y,z)$
- وليكن لدينا: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

$$\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1\\y+2\\z-3\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$2=x-1\Rightarrow x=3$$
$$-5=y+2\Rightarrow y=-7$$
$$3=z-3\Rightarrow z=6$$

ومنه: $C(3,-7,6)$

التمرين الثالث:

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ليكن لدينا النقاط $A(2,3,0)$ و $B(2,3,6)$ و $C(2,\alpha,3)$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ المثلث ABC متساوي الساقين أيّاً تكن α من $\mathbb{R}$.

٢. عيّن قيم α حتى يكون المثلث (ABC) قائم في C .

الحل:

الطالب الأول:

إثبات أن (ABC) متساوي الساقين:

نوجد كلاً من:

$$\overrightarrow{AB}(0,0,6)$$
$$AB=\sqrt{(0)^2+(0)^2+(6)^2}=\sqrt{36}=6$$
$$\overrightarrow{AC}(0,\alpha-3,3)$$
$$AC=\sqrt{(0)^2+(\alpha-3)^2+(3)^2}=\sqrt{(\alpha-3)^2+9}$$
$$\overrightarrow{BC}(0,\alpha-3,-3)$$
$$BC=\sqrt{(0)^2+(\alpha-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{(\alpha-3)^2+9}$$

ومنه:

المثلث (ABC) متساوي الساقين أيّاً تكن α من $\mathbb{R}$

الطالب الثاني:

تعيين α:

المثلث (ABC) قائم في C فإنه يتحقق:

$$(AB)^2=(AC)^2+(BC)^2$$
$$(6)^2=\left(\sqrt{(\alpha-3)^2+9}\right)^2+\left(\sqrt{(\alpha-3)^2+9}\right)^2$$
$$36=(\alpha-3)^2+9+(\alpha-3)^2+9$$
$$36=2(\alpha-3)^2+18$$
$$2(\alpha-3)^2=18$$
$$(\alpha-3)^2=9$$

إما $\alpha-3=3\Longrightarrow\alpha=6$

أو $\alpha-3=-3\Longrightarrow\alpha=0$

الارتباط الخطي لشعاعين:

مبرهنة	يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً إذا وفقط إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي أيّ: إذا وجد عدد حقيقي k يحقق: $\vec{u}=k\vec{v}$ أو إذا وجد عدد حقيقي k' يحقق: $\vec{v}=k'\vec{u}$
المعنى الهندسي للارتباط الخطي لشعاعين	يكون لهما نفس المنحى توازي / انطباق
قراءة علاقة	* إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB}=\frac{-3}{5}\overrightarrow{CD}$ نفهم أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً وبالتالي المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان * إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB}=\frac{-3}{5}\overrightarrow{AC}$ نفهم أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً والنقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.
الفائدة من مفهوم الارتباط الخطي لشعاعين	* معرفة توازي مستقيمان أو نفي ذلك * معرف وقوع ثلاثة نقاط على استقامة واحدة أو نفي ذلك

مكثفة شيفرة الـ 600
ELITE MATH
تم التحميل من بوت مكتبتي التعليمية
https://T.me/Science_2022bot

كيفية اختبار الارتباط الخطي لشعاعين	للاختبار الارتباط الخطي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فإننا نميز الحالات: ✋ الحالة الأولى: إذا كانت مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ جميعها غير صفرية فإننا نختبر تناسب المركبات ونميز: * المركبات متناسبة: يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً. * المركبات غير متناسبة: يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً. ✌ الحالة الثانية: إذا كانت مركبات أحد الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أو كلاهما تحوي أصفار فإننا نميز:

أولاً	ثانياً	ثالثاً
مركبات كل شعاع تحوي صفراً واحداً فقط والأصفار فوق بعضها فإننا نختبر تناسب المركبات المتبقية ونميز: * المركبات متناسبة إذاً الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً * المركبات غير متناسبة إذاً الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً	الأصفار ليست فوق بعضها إذاً الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً ويكون التعليل باستخدام المبرهنة (نلاحظ أنّ أحد الشعاعين لا ينتج عن الآخر بضربه بعدد حقيقي)	مركبات كل شعاع تحوي صفرين والأصفار فوق بعضها إذاً: الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً ويكون التعليل باستخدام المبرهنة (نضع علاقة شعاعية تربط بين الشعاعين

أنماط التمارين:

النمط	نص السؤال	فكرة الحل
الأول	* هل النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة * هل النقطة A تقع على المستقيم (BC) ؟	* نشكل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ * نختبر الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ * ونميز: ✋ الحالة الأولى: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً إذاً النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة ✌ الحالة الثانية: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً إذاً النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة
الثاني	هل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان؟	* نشكل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ * نختبر الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ * ونميز: ✋ الحالة الأولى: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً إذاً (AB) و (CD) متوازيان ✌ الحالة الثانية: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطان خطياً إذاً (AB) و (CD) غير متوازيان
الثالث	* هل النقاط A و B و C تشكّل مستوي؟ * هل النقاط A و B و C تشكل رؤوس مثلث	* نشكل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ * نختبر الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ * ونميز: ✋ الحالة الأولى: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً إذاً النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة فهي لا تشكل مستوي. ✌ الحالة الثانية: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً إذاً النقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي.

التمرين الأول:

في كل من الحالات الآتية

هل الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً؟

الحالة الأولى

$\vec{u}(-3\,,2\,,1)$ ، $\vec{v}(6,-4,-2)$

نلاحظ $\frac{6}{-3}=\frac{-4}{2}=\frac{1}{-2}$ أي أن المركبات متناسبة ومنه الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً

الحالة الثانية:

$\vec{u}(-3\,,2\,,1)$ ، $\vec{v}(6\,,-4\,,2)$

نلاحظ $\frac{6}{-3}=\frac{-4}{2}\neq\frac{1}{2}$ أي أن المركبات غير متناسبة ومنه الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً

الحالة الثالثة:

$\vec{u}(-3\,,2\,,0)$ ، $\vec{v}(6,-4,0)$

نلاحظ $\frac{-3}{6}=\frac{2}{-4}$ أي أن المركبات متناسبة ومنه الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً

الحالة الرابعة:

$\vec{u}(0,2,1)$ ، $\vec{v}(0,4,-2)$

نلاحظ $\frac{2}{4}\neq\frac{1}{-2}$ أي أن المركبات غير متناسبة ومنه الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً

الحالة الخامسة:

$\vec{u}(0,2,1)$ ، $\vec{v}(6,0,-2)$

نلاحظ أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد

الحالة السادسة:

$\vec{u}(-3\,,0,0)$ ، $\vec{v}(7,0,0)$

نلاحظ أنّ: $\vec{u}=\frac{-3}{7}\vec{v}$ أي أن $\vec{u}$ ينتج عن $\vec{v}$ بعد ضربه

ومنه الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً

التمرين الثاني:

نتأمل النقاط:

$B(1,1,0)$	$D(0,0,0)$
$A(1,0,0)$	$O(0,1,2)$
$L(1,0,0)$	$M(-1,-1,0)$
$C(-2,1,0)$	

والمطلوب:

١. بين فيما إذا كانت النقطة A تقع على المستقيم (DB)

٢. هل المستقيمان (AB) و (OD) متوازيان

٣. هل النقاط M و L و C تشكل مستوي

الحل:

الطلب الأول:

$\overrightarrow{AB}(0,1,0)$ ، $\overrightarrow{AD}(-1,0,0)$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين خطياً إذاً النقطة A لا تقع المستقيم (DB)

الطلب الثاني:

$\overrightarrow{AB}(0,1,0)$ ، $\overrightarrow{OD}(0,-1,-2)$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{OD}$ غير مرتبطين خطياً إذاً المستقيمان (AB) و (OD) غير متوازيان

الطلب الثالث:

$\overrightarrow{ML}(2,1,0)$ ، $\overrightarrow{MC}(-1,2,0)$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{ML}$ و $\overrightarrow{MC}$ غير مرتبطين خطياً إذاً النقاط M و L و C تشكل مستوي

التمرين الثالث:

هل يمكن تعيين α ليكون الشعاعين $\vec{u}(a,-1,5)$ و $\vec{v}(-6\,,a\,,2)$ مرتبطين خطياً؟

الحل:

يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً إذا وجد λ يحقق:

$$\vec{u}=\lambda\vec{v}$$

$$\begin{pmatrix}a\\-1\\5\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-6\\a\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\lambda\\a\lambda\\2\lambda\end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}a=-6\lambda\ (1)\\-1=a\lambda\ (2)\\5=2\lambda\ (3)\end{cases}$$

ELITE MATH
تم التحميل من بوت مكتبتي التعليمية https://T.me/Science_2022bot

هذه جملة ثلاث معادلا بمجهولين نأخذ جملة معادلتين ولتكن:

$$\begin{cases} -1 = a\lambda \ \ (2) \\ 5 = 2\lambda \ \ (3) \end{cases}$$

من (3) نجد: $\lambda = \frac{5}{2}$

نعوض في (2): $-1 = \frac{5}{2}a \rightarrow a = -\frac{2}{5}$

نتحقق في (1):

$$a = -6\lambda$$
$$-\frac{2}{5} = -6\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$-\frac{2}{5} \neq -15$$

إذاً لا يمكن تعيين a ليكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً

التمرين الرابع:

أيمكن تعيين α و β لتقع النقاط $A(-4,1,3)$ و $B(-2,0,5)$ و $c(\alpha\ ,-1,\beta)$ على استقامة واحدة؟

الحل:

حتى تكون النقاط A و B و c على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيان ويتحقق ذلك إذا وجد عدد حقيقي λ يحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} \ldots (*)$$

حيث:

$$\overrightarrow{AC}(\alpha + 4, -2, \beta - 3)$$
$$\overrightarrow{AB}(2, -1, 2)$$

نعوض في $(*)$:

$$\begin{pmatrix} \alpha + 4 \\ -2 \\ \beta - 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \alpha + 4 \\ -2 \\ \beta - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} \alpha + 4 = 2\lambda \ldots (1) \\ -2 = -\lambda \ldots (2) \\ \beta - 3 = 2\lambda \ldots (3) \end{cases}$$

هذه جملة ثلاث معادلات لثلاث مجاهيل:

من (2) نجد: $\lambda = 2$

نعوض في (1):

$$\alpha + 4 = 4 \rightarrow \alpha = 0$$

نعوض في (3):

$$\beta - 3 = 4 \rightarrow \beta = 7$$

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

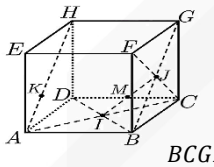
تعريف	نقول عن الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد نقطة O تجعل النقاط O, A, B, C المعرفة وفق: $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ و $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ تقع في مستو واحد.
مبرهنة	$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاثة أشعة نفترض أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً عندئذٍ تكون الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان a و b يحققان: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$
المعنى الهندسي للارتباط الخطي لثلاثة أشعة	إذا كان لدينا ثلاثة أشعة مرتبطة خطياً فهذا يعني أن أحد الأشعة الثلاثة يوازي المستوي المنشأ على الشعاعيين الباقيين
قراءة علاقة	* إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{DE}$ فهذا يعني أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{DE}$ مرتبطة خطياً فالمستقيم (AB) يوازي المستوي (CDE) * إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$ فهذا يعني أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً إذاً النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد
الفائدة من مفهوم الارتباط الخطي لثلاثة أشعة	* إثبات توازي مستقيم ومستوي * إثبات وقوع أربعة نقاط في مستو واحد. * إثبات تقاطع مستقيمين.
كيفية اختبار الارتباط الخطي لشعاعين	* نحدد منها شعاعين غير مرتبطين خطياً ولتكن فرضاً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ * نبحث عن عددين حقيقيين a و b يحققان العلاقة $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ * ونميز: ✌ الحالة الأولى: وجود عددان a و b يحققان العلاقة: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ إذاً الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً. ✌ الحالة الثانية: عدم وجود عددان a و b يحققان العلاقة: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ إذاً الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مرتبطة خطياً.

أنماط التمارين:

النمط	نص السؤال	فكرة الحل
الأول	هل النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد؟	* نأخذ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ * نختبر الارتباط الخطي للأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ (كما ورد معنا سابقاً) * ونميز: ✌ الحالة الأولى: إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً إذاً النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد ✌ الحالة الثانية: إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطة خطياً إذاً النقاط A و B و C و D لا تقع في مستو واحد
الثاني	هل المستقيم (AB) يوازي المستوي (CDE)	* نأخذ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ * نختبر الارتباط الخطي للأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ (كما ورد معنا سابقاً) * ونميز: ✌ الحالة الأولى: إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً إذاً المستقيم (AB) يوازي المتسوي (CDE) ✌ الحالة الثانية: إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ غير مرتبطة خطياً إذاً المستقيم (AB) لا يوازي المتسوي (CDE)
الثالث	لدينا المستقيم d المار من A وشعاع توجيهه $\vec{u}$ ولدينا المستقيم d_2 المار من B وشعاع توجيهه $\vec{v}$ والمطلوب هو إثبات أن المستقيمان d_1 و d_2 متقاطعان	* نثبت أن المستقيمان d_1 و d_2 غير متوازيان وذلك بإثبات أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً * نثبت أن d_1 و d_2 يقعان في مستو واحد وذلك بإثبات أنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً وبالتالي يكون d_1 و d_2 متقاطعان. ☜ ملاحظة: في حال تقاطع مستقيمان فإن تقاطعهما هو نقطة

مكثفة شيفرة الـ 600

التمرين الأول:



مكعب $ABCDEFGH$
طول حرفه يساوي 2
فيه النقطتان I و J
مركزي الوجهين $ABCD$ و $BCGF$
على الترتيب والنقطة M منتصف $[IJ]$ والنقطة K
تحقق $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$ ولنختر المعلم:

$$\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

١. جد إحداثيات كل من رؤوس المكعب وإحداثيات النقاط I وJ و M و K

٢. أثبت أن النقاط B و C و M و H تقع في مستو واحد

٣. أثبت أن النقاط C و M و E لا تقع على استقامة واحدة وتحقق أنّ المستوي (EMC) هو المستوي المحوي للقطعة المستقيمة $[IJ]$

٤. أثبت أن المستقيم (DJ) يوازي المستوي (AFK)

الحل:

١. إحداثيات رؤوس المكعب:

$A(0,0,0)$	$B(2,0,0)$
$F(2,0,2)$	$D(0,2,0)$
$E(0,0,2)$	$H(0,2,2)$
$C(2,2,0)$	$G(2,2,2)$

- إحداثيات I مركز الوجه $ABCD$:

I تمثل منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$ أيّ:

$$I\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2},\frac{z_A+z_C}{2}\right)$$
$$I(1,1,0)$$

- إحداثيات J مركز الوجه $BCGF$:

J تمثل منتصف القطعة المستقيمة $[BG]$ أيّ:

$$J\left(\frac{x_B+x_G}{2},\frac{y_B+y_G}{2},\frac{z_B+z_G}{2}\right)$$
$$J(2,1,1)$$

- إحداثيات M منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$:

$$M\left(\frac{x_I+x_J}{2},\frac{y_I+y_J}{2},\frac{z_I+z_J}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)$$

- إحداثيات K:

بفرض: $K(x,y,z)$

لدينا:

$$\overrightarrow{Ak}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

تكافئ: $x=0\ ,\ y=\frac{2}{3}\ ,\ z=\frac{2}{3}$

ومنه: $K\left(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

٢. حتى تكون النقاط:

B و C و H و M تقع في مستوٍ واحد يجب أن تكون الأشعة $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطة خطياً لدينا:

$$\overrightarrow{BC}\ (0,2,0)$$
$$\overrightarrow{BH}(-2,2,2)$$
$$\overrightarrow{BM}\left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه

لنبحث عن عددين β و α يحققان:

$$\overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BC}+\beta\overrightarrow{BH}$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\alpha\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\beta\\2\beta\\2\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\beta\\2\alpha+2\beta\\2\beta\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}=-2\beta\ \ ...(1)\\1=2\alpha+2\beta\ \ ...(2)\\\frac{1}{2}=2\beta\ \ ...(3)\end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases}1=2\alpha+2\beta\ \ ...(2)\\\frac{1}{2}=2\beta\ \ ...(3)\end{cases}$$

من (3) نجد: $\beta=\frac{1}{4}$

نعوض في (2) فنجد:

$$1=2\alpha+\frac{1}{2}$$
$$2\alpha=1-\frac{1}{2}\rightarrow\alpha=\frac{1}{4}$$

نتحقق في (1) وفق:

$$-\frac{1}{2}=-2\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\rightarrow\text{محققة}$$

ومنه للجملة حل وحيد $\alpha=\frac{1}{4}$ و $\beta=\frac{1}{4}$ يحققان:

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BH}$$

ومنه الأشعة $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطة خطياً

وبالتالي النقاط B و C و H و M تقع في مستوٍ واحد

٣.

إثبات أن النقاط C و M و E لا تقع على استقامة واحدة

لدينا الشعاعين:

$$\overrightarrow{CE}(-2,-2,2)\ \text{و}\ \overrightarrow{CM}\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$$

المركبات غير متناسبة ومنه الشعاعين غير مرتبطين خطياً وبالتالي النقاط C و M و E لا تقع على استقامة واحدة

- التحقق من أن المستوي (EMC) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$

فكرة:

يجب التحقق من أن النقاط C و M و E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$

- اختبار E :

$$\overrightarrow{EI}(1,1,-2)$$
$$EI=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$
$$\overrightarrow{EJ}(2,1,-1)$$
$$EJ=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

بما أنّ: $EI=EJ$ فإن E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$

- اختبار M :

$$\overrightarrow{MI}\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$$
$$MI=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\overrightarrow{MJ}\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$$
$$MJ=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

بما أن $MI=MJ$ فإنّ M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$.

- اختبار C :

$$\overrightarrow{CI}(-1,-1,0)$$
$$CI=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{CJ}(0,-1,1)$$
$$CJ=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

بما أن $CI=CJ$ فإنّ C تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ وبالتالي المستوي (EMC) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$

٤. إثبات أن (DI) يوازي (AFK):

لدينا:

$$\overrightarrow{AF}(2,0,2)$$
$$\overrightarrow{AK}\left(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{DI}(1,-1,0)$$

نلاحظ أن $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AF}$ غير مرتبطان خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد

لنبحث عن عددين a و b يحققان العلاقة:

$$\overrightarrow{DI}=a\overrightarrow{AF}+b\overrightarrow{AK}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\0\\2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}b\\\frac{2}{3}b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\\frac{2}{3}b\\2a+\frac{2}{3}b\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\begin{cases}1=2a\ ...(1)\\-1=\frac{2}{3}b\ \ ...(2)\\0=2a+\frac{2}{3}b\ ...(3)\end{cases}$$

من (1) نجد: $a=\frac{1}{2}$

من (2) نجد: $b=-\frac{3}{2}$

نتحقق في (3):

$$0=1+\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$0=1-1$$
$$0=0\rightarrow\text{محققة}$$

ومنه للجملة حل وحيد:

$$a=\frac{1}{2}\ \text{و}\ b=-\frac{3}{2}$$

- تحقق أنّ:

$$\overrightarrow{DI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AK}$$

وبالتالي الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{DI}$ مرتبطة خطياً

وبالتالي المستقيم (DI) يوازي المستوي (AFK)

التمرين الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ليكن d مستقيماً يمر بالنقطة $A(1,-1,1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(1,2,0)$ وليكن d' مستقيماً يمر بالنقطة $B(7,-1,-3)$ وشعاع توجيهه $\vec{v}(1,-1,-1)$

والمطلوب:

١. بيّن أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً ، ثم أثبت أن الأشعة $\vec{v}$ و $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً.

٢. استنتج أن المستقيمين d و d' متقاطعان، ثم أوجد نقطة تقاطعهما J .

الحل:

١.

- إثبات أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً: نلاحظ أنه لا ينتج إحداهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي إذاً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً .
- إثبات أن $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطة خطياً: لدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً ، نبحث عن عددين a و b يحققان العلاقة:

$$\overrightarrow{AB}=a\,\vec{u}+b\,\vec{v}$$
$$\begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\-b\\-b\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\2a-b\\-b\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\begin{cases}6=a+b\ldots(1)\\0=2a-b\ldots(2)\\-4=-b\ldots(3)\end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases}0=2a-b\ldots(2)\\-4=-b\ldots(3)\end{cases}$$

من (3) نجد: $b=4$

نعوض في (2) فنجد أن:

$$0=2a-4$$
$$2a=4\rightarrow a=2$$

نتحقق في (1) وفق:

$$6=2+4$$
$$6=6\rightarrow \text{محققة}$$

\ومنه للجملة حل وحيد ويوجد عددين $a=2$ و $b=4$ يحققان العلاقة:

$$\overrightarrow{AB}=2\vec{u}+4\vec{v}$$

وبالتالي الأشعة $\vec{v}$ و $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً

٢. استنتاج أن المستقيمين d و d' متقاطعان

- بما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً فإن المستقيمين d و d' غير متوازيان
- وبما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً فإن المستقيمين d و d' يقعان في مستوٍ واحد ومنه نستنتج أن d و d' متقاطعين

إيجاد نقطة التقاطع J:

- لتكن $J(x,y,z)$

وبما أن I نقطة تقاطع المستقيمين d و d' فإن:

- $J\in d$ وبالتالي $\overrightarrow{AI}$ و $\vec{u}$ مرتبطين خطياً
- $J\in d'$ وبالتالي $\overrightarrow{BI}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً
- ولدينا: $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}+4\vec{v}$

حسب شال:

$$\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JB}=2\vec{u}+4\vec{v}$$
$$\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{BJ}=2\vec{u}+4\vec{v}$$

بالمطابقة نجد:

$$\overrightarrow{AJ}=2\,\vec{u}$$
$$\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$x-1=2\Rightarrow x=3$$
$$y+1=4\Rightarrow y=3$$
$$z-1=0\Rightarrow z=1$$

- ومنه:

$$J(3,3,1)$$

مراكز الأبعاد المتناسبة:

	لنقطتين	لثلاثة نقاط	لأربعة نقاط
برهنة الوجود والتعريف	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β) فإنّ: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta\neq 0$	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) فإنّ: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) فإنّ: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$
تجانس مركز الأبعاد (k عدد حقيقي غير معدوم)	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) فإنّ G تكون مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$ حيث k عدد حقيقي	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) فإنّ G مركز الأبعاد المتناسبة لـ: $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$ و $(C,k\gamma)$ حيث K عدد حقيقي	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) فإنّ G مركز الأبعاد المتناسبة لـ: $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$ و $(C,k\gamma)$ و $(D,k\delta)$ حيث k عدد حقيقي
تساوي الأثقال	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,α) فهذا يعني أنّ G هي منتصف $[AB]$	إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,α) و (C,α) تكون G مركز ثقل المثلث (ABC)	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,α) و (C,α) و (D,α) فهذا يعني أنّ النقطة G مركز ثقل رباعي الوجوه $(ABCD)$
إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) فإنّ إحداثيات النقطة G هي: $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$ $z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$	لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) فإنّ إحداثيات النقطة G هي: $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ $z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$	ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) فإنّ إحداثيات النقطة G تعطى وفق: $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ $z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$
علاقة تفيد في الإنشاء	لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β) فإنّ: $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) فإنّ: $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$	
مبرهنة	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) ولدينا M نقطة من الفراغ فإنه يتحقّق: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) ولدينا النقطة M من الفراغ فإنه يتحقّق: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) ولدينا النقطة M من الفراغ فإنه يتحقّق: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\gamma\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$
مفاهيم أساسية	(1)لدينا نقطة مركز أبعاد متناسبة لنقطتين إذا النقاط الثلاثة تقع على استقامة واحدة (2)لدينا نقطة مركز أبعاد متناسبة لثلاثة نقاط إذا النقاط الأربعة تقع في مستو واحد.		
الدمج والفرط	إذا كان لدينا $(B,1)$ و $(B,2)$ فإنه يمكننا الدمج بـ $(B,3)$ ويمكن التطبيق بالشكل المعاكس حيث يمكننا أن نفرط أيّ نقطة حسب حاجة التمرين.		
الخاصة التجميعية	اتجاه اللم		
		لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) • لدينا النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) • فإنه استناداً إلى الخاصّة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ$(I,\alpha+\beta)$ و (C,γ)	ليكن لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) • لدينا I مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α)و(B,β) • لدينا J مركز الأبعاد المتناسبة لـ(C,γ)و(D,δ) • فإنه استناداً إلى الخاصّة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(J,\gamma+\delta)$ و $(I,\alpha+\beta)$
	اتجاه الفك		
		• لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,\alpha+\beta)$ و (C,γ) • لدينا النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) • فإنه استناداً إلى الخاصّة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ)	ليكن لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ$(I,\alpha+\beta)$ و$(J,\gamma+\delta)$. • لدينا I مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β). • لدينا J مركز الأبعاد المتناسبة لـ(C,γ) و(D,δ) • فإنه استناداً إلى الخاصّة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ)

مكثفة شيفرة الـ 600

أنماط التمارين:

النمط الأول	النمط الثاني	النمط الثالث	النمط الرابع
إيجاد إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة: يتم وفق تطبيق القانون المناسب.	قراءة علاقة: يتم بالاعتماد على علاقة الشعاع الصفري أو حسب علاقة الإنشاء.	إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة (إثبات أنّ نقطة تقع على مستقيم): ☜ الخطوات: * بالاعتماد على نص السؤال نضع جميع المعطيات. * نصلح من أجل إثبات أن إحدى النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الباقيتين. * فتكون النقاط الثلاثة على استقامة واحدة.	إثبات وقوع أربع نقاط في مستو واحد (باستخدام مراكز الأبعاد المتناسبة): ☜ الخطوات: * بالاعتماد على نص السؤال نضع جميع المعطيات. * نصلح من أجل إثبات أن إحدى النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثلاث المتبقية * فتكون النقاط الأربعة في مستو واحد.

النمط الخامس	النمط السادس	النمط السابع
إثبات تلاقي مستقيمات: ☜ الخطوات: * بالاعتماد على نص السؤال نضع جميع المعطيات. * نصلح من أجل إثبات وجود نقطة مشتركة بين المستقيمات وبالتالي نثبت تلاقي المستقيمات	توضيع مراكز الأبعاد المتناسبة في شكل: * بالاستفادة من المعطيات نضع علاقة الإنشاء المناسبة. * بالاعتماد على علاقة الإنشاء نوضّع النقطة مركز الأبعاد المتناسبة في شكل. ➢ تنويه: من الممكن أن نستخدم الخاصة التجميعية	تعيين الثوابت: ☜ الخطوات: * نضع علاقة تحوي ثوابت وعلاقة لا تحوي ثوابت وذلك بالاعتماد على معطيات المسألة. * نصلح من أجل أن نجعل العلاقتين متشابهتين. * بالمقارنة نحصل على المطلوب

التمرين الأول:

لتكن لدينا النقاط:

$A(2,-1,3)$	$B(0,1,2)$
$C(-1,1,0)$	$D(-2,1,-3)$

أوجد إحداثيات النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(A,1)$	$(B,2)$	$(C,-1)$	$(D,2)$

الحل:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$
$$=\frac{(1)(2)+(2)(0)+(-1)(-1)+(2)(-2)}{1+2-1+2}$$
$$=\frac{2+0+1-4}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$
$$y_G$$
$$=\frac{(1)(-1)+(2)(1)+(-1)(1)+(2)(1)}{1+2-1+2}$$
$$=\frac{-1+2-1+2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$
$$=\frac{(1)(3)+(2)(2)+(-1)(0)+(2)(-3)}{1+2-1+2}$$
$$=\frac{3+4+0-6}{4}=\frac{1}{4}$$
$$\rightarrow G\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

التمرين الثاني:

اقرأ العلاقات الآتية:

$$3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

تعني أنّ A مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(D,1)$	$(C,-2)$	$(B,3)$

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DM}=\vec{0}$$

تعني أنّ D مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(A,1)$	$(B,1)$	$(M,-3)$

$$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

تعني أنّ B مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(A,2)$	$(D,1)$

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{a}\overrightarrow{BA}$$

تعني أنّ D مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(B,a-1)$	$(A,1)$

$$\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AD}$$

تعني أنّ C مركز أبعاد متناسبة لـ:

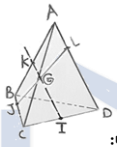
$(A,-4)$	$(D,5)$

$$\overrightarrow{CA}=a\overrightarrow{CB}$$

تعني أنّ A مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(C,1-a)$	(B,a)

التمرين الثالث:



$ABCD$ رباعي وجوه فيه K منتصف $[AB]$ و I منتصف $[CD]$ و L تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ و J تحقق العلاقة: $\overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ وأخيراً G هي منتصف $[JL]$ أثبت أنّ G و I و K تقع على استقامة واحدة.

الحل: لدينا:

* النقطة J تحقق العلاقة: $\overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

إذاً J مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(C,1)$	$(B,3)$

* النقطة L تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

إذاً L مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,3)$	$(D,1)$

* النقطة K منتصف $[AB]$:

إذاً K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,3)$	$(B,3)$

* النقطة I منتصف $[CD]$:

إذاً I مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,1)$	$(C,1)$

* النقطة G منتصف $[JL]$:

إذاً G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(J,4)$	$(L,4)$

ومنهُ استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,3)$	$(B,3)$	$(C,1)$	$(D,1)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(K,6)$	$(I,2)$

ومنهُ النقاط G و I و K تقع على استقامة واحدة.

التمرين الرابع:

$ABCD$ رباعي وجوه تتحقق فيه: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$ أثبت أنّ النقاط: M و B و C و D تقع في مستو واحد.

الحل:

لدينا:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{DA}=0$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\left(\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

إذاً:

النقطة M مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(D,1)$	$(C,1)$	$(B,1)$

ومنهُ M و B و C و D تقع في مستو واحد.

التمرين الخامس:

$ABCDEFGH$ مكعب فيه:

I و J منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[BC]$

ولدينا K مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(A,1)$	$(B,2)$	$(C,1)$	$(H,1)$

أثبت وقوع I و J و K و H في مستو واحد.

الحل:

لدينا:

* النقطة K مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(A,1)$	$(B,2)$	$(C,1)$	$(H,1)$

$(B,1)$ $(B,1)$

* النقطة I منتصف $[AB]$:

إذاً I مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,1)$	$(B,1)$

* النقطة J منتصف $[BC]$:

إذاً J مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(C,1)$	$(B,1)$

ومنهُ:

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون النقطة K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(H,1)$	$(I,2)$	$(J,2)$

إذاً: النقاط J و I و K و H تقع في مستو واحد.

600 أداة شرح وتوضيح

التمرين السادس:

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه L :

ولنعرف النقاط P و Q و R و S كما يأتي:

$\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$

ولتكن G مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(A,1)$	$(B,4)$	$(C,1)$	$(D,3)$

والمطلوب:

الطلب الأول:

بيّن أنّ النقطة G تقع على المستقيم (PQ)

يقصد:

أثبت أنّ النقاط P و Q و G تقع على استقامة واحدة

الحل:

- لدينا: G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,1)$	$(B,4)$	$(C,1)$	$(D,3)$

- لدينا: $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ ومنهُ:

P مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(C,1)$	$(B,4)$

- لدينا: $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ ومنهُ:

Q مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,1)$	$(D,3)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون:

النقطة G مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(P,5)$	$(Q,4)$

ومنهُ النقاط P و Q و G تقع على استقامة واحدة

وبالتالي النقطة G تقع على المستقيم (PQ)

الطلب الثاني:

أثبت أنّ النقطة G تقع على المستقيم (RS):

الحل:

- لدينا النقطة G مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(A,1)$	$(B,4)$	$(C,1)$	$(D,3)$

- لدينا: $\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$:

إذاً النقطة S مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(D,3)$	$(C,1)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون:

النقطة G مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(S,4)$	$(R,5)$

ومنهُ النقاط G و R و S تقع على استقامة واحدة

وبالتالي G تقع على المستقيم (RS)

الطلب الثالث:

استنتج تلاقي المستقيمان (PQ) و (RS) :

فكرة الحل:

نثبت أنّ المستقيمان يشتركان بنفس النقطة.

الحل:

- من الطلب الأول لدينا:

G تقع على المستقيم (PQ)

- من الطلب الثاني لدينا:

G تقع على المستقيم (RS)

- وبالتالي المستقيمان (PQ) و (RS)

يلتقيان بنفس النقطة.

التمرين السابع:

وضع على شكل النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(A,3)$	$(B,1)$

الحل:

- لدينا:

النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,3)$	$(B,1)$

- الإنشاء:



ملاحظة:

- لدينا نقطة مركز أبعاد متناسبة لنقطتين: الشكل هو مستقيم.
- لدينا نقطة مركز أبعاد متناسبة لثلاثة نقاط: الشكل هو مثلث.
- لدينا نقطة مركز أبعاد متناسبة لأربعة نقاط: الشكل هو رباعي وجوه.

التمرين الثامن:

ABC مثلث والمطلوب وضع النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$

الحل:

- لدينا:

النقطة I مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,1)$	$(C,1)$

إذاً I منتصف $[AC]$ ولدينا: $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

- النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(A,1)$	$(B,2)$	$(C,1)$

- استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون:

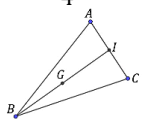
النقطة G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(I,2)$	$(B,2)$

وبالتالي G منتصف $[BI]$ ولدينا:

$$\overrightarrow{IG}=\frac{2}{4}\overrightarrow{IB}\rightarrow\overrightarrow{IG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$$

- الإنشاء:



التمرين التاسع:

$(ABCD)$ رباعي وجوه والمطلوب وضع النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$.

- لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(A,1)$	$(B,2)$

إذاً: $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

- لتكن J مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(D,1)$	$(C,1)$

إذاً J منتصف $[CD]$ وبالتالي $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

- لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(A,1)$	$(B,2)$	$(C,1)$	$(D,1)$

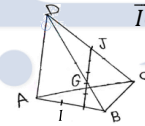
- استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون:

G مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(J,2)$	$(I,3)$

ويكون: $\overrightarrow{IG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{IJ}$

- الإنشاء:



التمرين العاشر:

عين قيمة α و β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة لـ

(A,α)	(B,β)

حيث يتحقق: $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

الحل:

بما أنّ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتان:

(A,α)	(B,β)

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}\ldots(*)$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}-3\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}\ldots(**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ: $\alpha=4\ ,\ \beta=-3$

ومنهُ M مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,4)$ و $(B,-3)$

التمرين الحادي عشر:

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$A(1,1,1)$	$B(1,4,7)$
$C(0,1,2)$	$D(-2,7,16)$

الطلب الأول:

أثبت أنّ النقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.

الحل:

$$\overrightarrow{AB}(0,3,6)\ ,\ \overrightarrow{AC}(-1,0,1)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

الطلب الثاني:

عيّن العددين α و β اللذين يحققان: $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

وهل تقع النقاط A و B و C و D في مستو واحد؟

الحل:

تعيين α و β :

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$
$$\begin{pmatrix}-3\\6\\15\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-3\\6\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\alpha\\6\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\beta\\0\\\beta\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-3\\6\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta\\3\alpha\\6\alpha+\beta\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\begin{cases}-3=-\beta & \ldots(1)\\6=3\alpha & \ldots(2)\\15=6\alpha+\beta & \ldots(3)\end{cases}$$

لدينا الجملة:

$$\begin{cases}-3=-\beta & \ldots(1)\\6=3\alpha & \ldots(2)\end{cases}$$

من (1) نجد أنّ: $-3=-\beta\rightarrow\beta=3$

من (2) نجد أنّ: $6=3\alpha\rightarrow\alpha=2$

نتحقق في (3) :

$$15=6(2)+3$$
$$15=15\rightarrow\text{محققة}$$

ومنه يوجد عددين $\alpha=2$ و $\beta=3$ يحققان:

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

من العلاقة السابقة نجد أنّ الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً , ومنه النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد.

الطلب الثالث:

استنتج أنّ النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

(A,a)	(B,b)	(C,c)

حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل:

بما أنّ D مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة (A,a) و (B,b) و (C,c) فإنه يتحقق:

$$a\overrightarrow{DA}+b\overrightarrow{DB}+c\overrightarrow{DC}=\vec{0}\ldots(*)$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{AD}-2\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)-3\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$
$$-4\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$
$$4\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

ومنه النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(A,4)$	$(B,-2)$	$(C,-3)$

ومنهُ:

$$a=4\ ,\ b=-2\ ,\ c=-3$$

التمرين الثاني عشر:

في الشكل التالي التدريجات متساوية , عين قيمة α و β إذا علمت أنّ النقطة B هي مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (C,β)



الحل:

بما أنّ B مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β)

فإنه يتحقق: $\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BC}=\vec{0}\ldots(*)$

ولدينا من الشكل:

$$\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}}=-\frac{4}{3}$$

انتبه: إشارة الناقص لأن الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ لهما اتجاهين متعاكسين.

$$3\overrightarrow{BA}=-4\overrightarrow{BC}$$
$$3\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{BC}=\vec{0}\ldots(**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

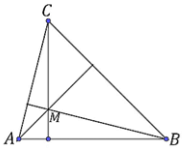
$$\alpha=3\ ,\ \beta=4$$

مكثفة شيفرة الـ 600

الجداء السلمي:

تعريف	في الفراغ , الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{v}$
العبارات المختلفة للجداء السلمي	في الفراغ الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي: $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$
	إذا كان α قياساً للزاوية الهندسية للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ كان: $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos\alpha$
	إذا كانت H هي المسقط القائم في المستوي P للنقطة C على المستوي (AB) فإن: $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$
	العبارة التحليلية للجداء السلمي نفترض أن مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في معلم متجانس هي $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ فإن: $\vec{u}.\vec{v}=(x_1.x_2)+(y_1.y_2)+(z_1.z_2)$
العبارات الشهيرة للجداء السلمي	الجداء السلمي لشعاعين متساويين: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$
	الجداء السلمي لشعاعين متعاكسين: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}=-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$
	الجداء السلمي لشعاعين متعامدين: في حال $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين فإنّ: $\vec{u}.\vec{v}=0$
تنويه	يتم اختيار العبارة المناسبة للجداء السلمي وفقاً للمعطيات
خواص الجداء السلمي	لدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أشعة ولدينا a و b أعداد حقيقية فإنّ: $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$ $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$ $(a\vec{u}).(b\vec{v})=ab.\vec{u}.\vec{v}$

أنماط التمارين:

النمط	نص السؤال	فكرة الحل	
الأول	أوجد الجداء السلمي لشعاعين	عدم وجود شكل	نطبق القانون المناسب وفقاً للمعطيات
		وجود شكل	* نطبق القانون: $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ * شرط التطبيق: ○ معرفة أطوال الأضلاع. ○ معرفة الزاوية. ○ أن تكون البداية نفسها للشعاعين. * وعند اختلال الشرط فإننا نستخدم إصلاحات مناسبة: (الترتيب / الزرع/ الاستبدال)
الثاني	هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان	* نوجد $\vec{u}.\vec{v}$ (وذلك باستخدام إحدى العبارات المناسبة للمعطيات) * نميز: ① الحالة الأولى: إذا تحقق $\vec{u}.\vec{v}=0$ فإنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين. ② الحالة الثانية: إذا تحقق $\vec{u}.\vec{v}\neq 0$ فإنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متعامدين.	
الثالث	عين قيمة الوسيط α ليكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان	* نكتب بما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذاً: $\vec{u}.\vec{v}=0$ * نعوض في العلاقة السابقة فنحصل على معادلة يكون فيها المجهول هو الوسيط وبحل هذه المعادلة نحصل على المطلوب	
الرابع	استنتج النسبة المثلثية للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$	* نوجد $\vec{u}.\vec{v}$ * نوجد $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$ * نضع العبارة: $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ * نعزل $\cos(\vec{u},\vec{v})$ وفق: $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$ * نعوض	
الخامس	أثبت أنّ النقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث	* باستخدام الجداء السلمي نثبت أنّ: ١. (AM) ارتفاع في المثلث أيّ أنّ (AM) و(CB) متعامدان أيّ: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB}=0$ ٢. (BM) ارتفاع في المثلث أيّ أنّ (BM) و(AC) متعامدان أي: $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0$ ٣. (CM) ارتفاع في المثلث أيّ أنّ (CM) و(AB) متعامدان أيّ: $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=0$ إذاً النقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث (ABC)	

التمرين الأول:

أوجد الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{v}$ في الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|=5\ ,\|\vec{u}\|=3\ ,\|\vec{v}\|=4$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=\frac{1}{2}[(5)^2-(3)^2-(4)^2]$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=\frac{1}{2}[25-9-16]=0$$

الحالة الثانية:

$$\|\vec{u}\|=3\ ,\|\vec{v}\|=4\ ,(\vec{u}\ ,\vec{v})=\frac{\pi}{3}$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=3\times 4\times\frac{1}{2}=6$$

الحالة الثالثة:

$$\|\vec{u}\|=2\ ,\|\vec{v}\|=1\ ,(\vec{u}\ ,\vec{v})=\frac{\pi}{4}$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=2\times 1\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

الحالة الرابعة:

$$\|\vec{u}\|=3\ ,\|\vec{v}\|=2\ ,(\vec{u}\ ,\vec{v})=\frac{5\pi}{6}$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=3\times 2\times\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=3\times 2\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=3\times 2-\frac{\sqrt{3}}{2}=-3\sqrt{3}$$

الحالة الخامسة:

$$\vec{u}(2,-1,3)\ ,\vec{v}(1,0,-2)$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=(2\times 1)+(-1\times 0)+(3\times -2)$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=2+0-6=-4$$

الحالة السادسة:

$$\|\vec{u}\|=4\ ,\|\vec{v}\|=5\ ,(\vec{u}\ ,\vec{v})=\frac{2\pi}{3}$$

إيجاد: $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

مرحلة الإصلاح:

$$\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi-\pi}{3}=\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$$

مرحلة الإرجاع:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

إذاً الجداء السلمي:

$$\vec{u}\ .\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}\ ,\vec{v})$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=(4).(5).\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=(20)\left(-\frac{1}{2}\right)=-10$$

600 أوراق شغل مع مفاتيح

التمرين الثاني:

في كل من الحالات الآتية هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان؟

الحالة الأولى:

$$\vec{u}(3,2,1)\ ,\vec{v}(-1,1,1)$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=(3\times-1)+(2\times1)+(1\times1)$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=-3+2+1$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=0$$

إذاً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان

الحالة الثانية:

$$\vec{u}(3,2,1)\ ,\vec{v}(1,-1,1)$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=(3\times1)+(2\times-1)+(1\times1)$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=3-2+1$$
$$\vec{u}\ .\vec{v}=2$$

إذاً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متعامدان

التمرين الثالث:

ليكن لدينا الشعاعين $\vec{u}(3,0,-1)$ و $\vec{v}(2,1,\alpha)$

عين قيمة الوسيط α ليكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان

الحل:

بما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذاً:

$$\vec{u}\ .\vec{v}=0$$
$$(3\times2)+(0\times1)+(-1\times\alpha)=0$$
$$6+0-\alpha=0$$
$$6-\alpha=0$$
$$-\alpha=-6\rightarrow\alpha=6$$

التمرين الرابع:

$\vec{u}(4,2,1)$ و $\vec{v}(0,3,1)$

أوجد النسبة المثلثية للزاوية بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

الحل:

$$\vec{u}\ .\vec{v}=0+6+1=7$$
$$||\vec{u}||=\sqrt{16+4+1}=\sqrt{21}$$
$$||\vec{v}||=\sqrt{0+9+1}=\sqrt{10}$$

لدينا:

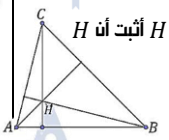
$$\vec{u}\ .\vec{v}=||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u}\ ,\vec{v})$$
$$\cos(\vec{u}\ ,\vec{v})=\frac{\vec{u}\ .\vec{v}}{||\vec{u}||.||\vec{v}||}$$
$$=\frac{7}{\sqrt{21}\ .\sqrt{10}}=\frac{7}{\sqrt{210}}$$

التمرين الخامس:

نتأمل في معلم متجانس النقاط: $A(2,0,0)$

و $B(2,0,0)$ و $C(0,0,1)$ و $H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ أثبت أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

الحل:



$$\overrightarrow{AB}(-2,2,0)$$
$$\overrightarrow{AC}(-2,0,1)$$
$$\overrightarrow{BC}(0,-2,1)$$
$$\overrightarrow{AH}\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{BH}\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{CH}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

إثبات أن (AH) ارتفاع في المثلث (ABC)

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{5}{3}\right)(0)+\left(\frac{1}{3}\right)(-2)+\left(\frac{2}{3}\right)(1)$$
$$=0-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$$

ومنه (AH) ارتفاع في المثلث ABC

إثبات أن (BH) ارتفاع في المثلث (ABC)

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}\right)(-2)+\left(\frac{-5}{3}\right)(0)+\left(\frac{2}{3}\right)(1)$$
$$=-\frac{2}{3}+0+\frac{2}{3}=0$$

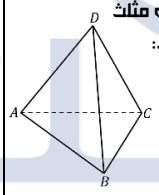
ومنه (BH) ارتفاع في المثلث ABC

إثبات أن (CH) ارتفاع في المثلث (ABC)

$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{3}\right)(-2)+\left(\frac{1}{3}\right)(2)+\left(\frac{-1}{3}\right)(0)$$
$$=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+0=0$$

ومنه (CH) ارتفاع في المثلث ABC وبالتالي النقطة H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث (ABC)

التمرين السادس:



$ABCD$ رباعي وجوه منتظم كل وجه فيه مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a والمطلوب:

١. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

٢. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

٣. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

الحل:

الطلب الأول:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|.\left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$$
$$=a.a.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=a^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a^2}{2}$$

الطلب الثاني:

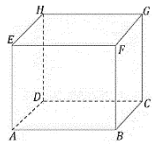
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|.\left|\left|\overrightarrow{AD}\right|\right|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$$
$$=a.a.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=a^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a^2}{2}$$

الطلب الثالث:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})$$
$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$
$$=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$
$$=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$$

التمرين السابع:

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a



١. احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$

٢. احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH}$

٣. احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}$

٤. احسب $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC}$

الحل:

الطلب الأول:

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF})$$
$$=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF}=a^2+0=a^2$$

الطلب الثاني:

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH}$$
$$=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})$$
$$=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}=0+a^2=a^2$$

الطلب الثالث:

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG})$$
$$=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FG}$$
$$=a^2+0=a^2$$

الطلب الرابع:

$$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{EB}$$
$$=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}).(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB})$$
$$=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB}$$
$$=0-a^2+a^2+0=0$$

مكثفة شيفرة الـ 600

معادلات المستوي:

الشكل العام	$ax+by+cz+d=0$ حيث: $\vec{n}(a,b,c)$ هو ناظم المستوي وهو شعاع عمودي على المستوي
كتابة معادلة المستوي	لكتابة معادلة مستوي فإننا نحتاج: * ناظم المستوي: $\vec{n}(a,b,c)$ * نقطة منه: $A(x_A,y_A,z_A)$ * وتكون المعادلة: $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$
تمرين: اكتب معادلة المستوي P المار من $A(1,0,5)$ ويقبل $\vec{n}(1,-1,0)$ ناظماً له	$P: 1(x-1)-1(y-0)+0(z-5)=0$ $P: x-1-y=0 \rightarrow P: x-y-1=0$

حالات معادلة المستوي:

نميز	الحالة	نص السؤال	فكرة الحل
الناظم فوري	مستوي يوازي مستوي آخر	اكتب معادلة المستوي P المار من A والموازي للمستوي Q .	* تحديد $\vec{n}P$ ناظم للمستوي: بما أن المستوي P والمستوي Q متوازيان فإن: $\vec{n}P=\vec{n}Q$ * تحديد النقطة: $(A$ معطاة $)$ * نكتب المعادلة
	مستوي يعامد مستقيم	اكتب معادلة المستوي P المار من A والعمودي على المستقيم d .	* تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P بما أن المستقيم (d) والمستوي P متعامدان فإن: $\vec{n}_P=\vec{u}_d$ حيث $\vec{u}_d$: شعاع توجيه المستقيم (d) * تحديد النقطة: (A معطاة) * نكتب المعادلة
	معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة	اكتب معادلة المستوي P المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$	* تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P: بما أن P هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ فإن: $\vec{n}_P=\overrightarrow{AB}$ * تحديد النقطة: النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ تنتمي إلى المستوي P لذلك نوجد احداثيات I * نكتب المعادلة
	معادلة مستوي مماس لكرة في نقطة	اكتب معادلة المستوي P المماس للكرة في النقطة A	* تحديد $\vec{n}_p$ ناظم المستوي P : بما أن P هو المستوي المماس للكرة S فهذا يعني أنّ: $\vec{n}_p=\overrightarrow{\Omega A}$ حيث Ω هي مركز الكرة S * تحديد النقطة: (A المعطاة) * نكتب المعادلة
الناظم غير فوري	معادلة مستوي مار من نقطة ويحوي شعاعين (يقبل شعاعين توجيه)	اكتب معادلة المستوي P المار من A ويقبل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين موجهين له.	* تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P ليكن: $\vec{n}_P(a,b,c)$ بما أن $\vec{n}_P$ ناظم للمستوي P وبما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من المستوي P فإنّ $\vec{n}_P$ يكون عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أيّ: $\vec{n}_P.\vec{u}=0$ و $\vec{n}_P.\vec{v}=0$ فنحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل c,b,a وبحل هذه الجملة نحصل على مركبات ناظم المستوي $\vec{n}_P$ * تحديد النقطة: (A المعطاة) * نكتب المعادلة
	معادلة مستوي مار من نقطة ويعامد مستويان	اكتب معادلة المستوي P المار من A والعمودي على كل من المستويان R,Q	* تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P : ليكن $\vec{n}_P(a,b,c)$ بما أن المستوي P و Q متعامدان فإن $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ متعامدان أيّ: $\vec{n}_p.\vec{n}_Q=0$ بما أن المستوي P و R متعامدان فإن $\vec{n}_p$ و $\vec{n}_R$ متعامدان أيّ: $\vec{n}_p.\vec{n}_R=0$ مما سبق نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل c,b,a نحلها فنحصل على مركبات $\vec{n}_p$ * تحديد النقطة: (A المعطاة) * نكتب المعادلة
	معادلة مستوي مار من نقطتين ويعامد مستوي آخر	اكتب معادلة المستوي P المار من النقطتين A و B ويعامد المستوي Q	* تحديد $\vec{n}_p$ ناظم المستوي P : ليكن $\vec{n}_p(a,b,c)$ بما أن النقطتان A و B من المستوي P فإن $\vec{n}_p$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان أيّ: $\vec{n}_P.\overrightarrow{AB}=0$ بما أنّ المستويان P و Q متعامدان فهذا يعني أنّ $\vec{n}_p$ و $\vec{n}_Q$ متعامدان أيّ: $\vec{n}_p.\vec{n}_Q=0$ بالتعويض نحصل مما سبق على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل وبحل هذه الجملة نحصل على مركبات $\vec{n}_p$ * تحديد النقطة إما A أو B * نكتب المعادلة
	معادلة مستوي مار من ثلاثة نقاط	صيغة أولى: اكتب معادلة المستوي المار من A و B و C صيغة ثانية: اكتب معادلة المستوي (ABC)	* نتحقق من أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً * نحدد $\vec{n}$ ناظم المستوي (ABC) بما أن النقاط C,B,A من المستوي P فإن $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ أيّ: $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ بالتعويض نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل c,b,a بحل هذه الجملة نحصل على مركبات $\vec{n}$ * تحديد النقطة: إما A أو B أو C * نكتب المعادلة
	معادلة مستوي يحوي مستقيمان متقاطعان	اكتب معادلة المستوي P المحدد بالمستقيمان المتقاطعان d_1 و d_2	* تحديد $\overrightarrow{n_P}$ ناظم المستوي P : ليكن $\overrightarrow{n_P}(a,b,c)$ بما أن المستوي P محدد بالمستقيمان d_1 و d_2 فإنّ: $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_1}=0$ و $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_2}=0$ بالتعويض نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل a و b و c وبحلها نحصل على المطلوب * تحديد النقطة: نقطة تقاطع المستقيمان d_1 و d_2 هي نقطة تنتمي إلى المستوي * نكتب المعادلة.

600 أوراق شرح مفصل

تمرين:

اكتب معادلة المستوي في كل حالة من الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

P مار من $A(1,0,5)$ ويقبل $\vec{n}(1,-1,0)$ ناظماً له.

$$P: a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$(1)(x-1)+(-1)(y-0)+(0)(z-5)=0$$
$$x-1-y=0$$
$$P: x-y-1=0$$

الحالة الثانية:

P مار من $A(-1,2,-3)$ ويوازي المستوي Q الذي معادلته: $Q: 5x-3y+4z=8$

- تحديد النقطة: $A(-1,2,-3)$
- تحديد الناظم: لدينا المستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(5,-3,4)$ وبما أن المستويان Q, P متوازيان فإنّ: $\vec{n}_P(5,-3,4)$ أيّ: $\vec{n}_P=\vec{n}_Q$
- كتابة معادلة المستوي:

$$P: a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$5(x+1)-3(y-2)+4(z+3)=0$$
$$5x+5-3y+6+4z+12=0$$
$$P: 5x-3y+4z+23=0$$

الحالة الثالثة:

P مار من $A(3,-1,5)$ ويعامد من المستقيم d الذي شعاع توجيهه $\vec{u}(-1,2,1)$

- تحديد النقطة: $A(3,-1,5)$
- تحديد الناظم: لدينا المستقيم d والمستوي P متعامدان فإن: $\vec{n}_P=\vec{u}$ أيّ أنّ: $\vec{n}_P(-1,2,1)$
- كتابة معادلة المستوي:

$$P: (-1)(x-3)+(2)(y+1)+(1)(z-5)=0$$
$$-x+3+2y+2+z-5=0$$
$$P: -x+2y+z=0$$

الحالة الرابعة:

P المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(2,-2,3)$ و $B(1,0,1)$

- تحديد النقطة: بما أن P هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فإن النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ تنتمي إلى المستوي P حيث: $I\left(\frac{3}{2},-1,2\right)$
- تحديد الناظم: بما أن المستوي P هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فإنّ: $\vec{n}_P=\overrightarrow{AB}$ أيّ أنّ: $\vec{n}_P(-1,2,-2)$
- كتابة معادلة المستوي:

$$P: (-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)+(2)(y+1)+(-2)(z-2)=0$$
$$-x+\frac{3}{2}+2y+2-2z+4=0$$
$$P: -x+2y-2z+\frac{15}{2}=0$$

الحالة الخامسة:

P المستوي المماس للكرة S التي معادلتها $S: x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$ في النقطة $A(-1,1,0)$:

- تحديد النقطة: $A(-1,1,0)$
- تحديد الناظم: بما أنّ P هو المستوي المماس للكرة S فهذا يعني أن $\vec{n}_P=\overrightarrow{\Omega A}$ حيث:

مركز الكرة: $\Omega(0,2,1)$

النقطة: $A(-1,1,-1)$

إذاً: $\overrightarrow{\Omega A}(-1,-1,-1)$

ومنه: $\vec{n}_P(-1,-1,-1)$

- كتابة معادلة المستوي:

$$P: (-1)(x+1)+(-1)(y-1)+(-1)(z-0)=0$$
$$P: -x-1-y+1-z=0$$
$$P: -x-y-z=0$$

الحالة السادسة:

P مار بالنقطة $A(2,-3,1)$ ويقبل كلاً من $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعي توجيه لـ P

الحل:

- تحديد النقطة: $A(2,-3,1)$
- تحديد الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ وبما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين موجهين للمستوي P فإنّ $\vec{n_P}$ يكون عمودي على كلاً من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أيّ:

$$\vec{n_P}.\vec{u}=0$$
$$(a)(1)+(b)(1)+(c)(-2)=0$$
$$a+b-2c=0\ldots(1)$$

$$\vec{n_P}.\vec{v}=0$$
$$(a)(3)+(b)(-1)+(c)(-1)=0$$
$$3a-b-c=0\ldots(2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$a+b-2c=0\ldots(1)$$
$$3a-b-c=0\ldots(2)$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$4a-3c=0\Rightarrow a=\frac{3}{4}c\ldots(*)$$

نعوض في (1):

$$\frac{3}{4}c+b-2c=0$$
$$b-\frac{5}{4}c=0\Rightarrow b=\frac{5}{4}c\ldots(**)$$

لتكن $c=4$ نعوض في $(*)$ و $(**)$ فنجد:

$$a=3\ ,\ b=5$$
$$\Rightarrow \vec{n_P}(3,5,4)$$

- كتابة معادلة المستوي:

$$P: (3)(x-2)+(5)(y+3)+(4)(z-1)=0$$
$$3x-6+5y+15+4z-4=0$$
$$P: 3x+5y+4z+5=0$$

الحالة السابعة:

P مار من $A(0,1,-2)$ وعمودي على كل من المستويان Q و R حيث:

$$Q: x+2y-z+3=0$$
$$R: 2x-y+z-1=0$$

- تحديد النقطة: $A(0,1,-2)$
- تحديد الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ بما أن المستويان P و Q متعامدان فإنّ: $\vec{n_P}$ و $\vec{n_Q}(1,2,-1)$ متعامدان أيّ أنّ:

$$\vec{n_P}.\vec{n_Q}=0$$
$$a+2b-c=0\ldots(1)$$

بما أن المستويان P و R متعامدان فإن $\vec{n_P}$ و $\vec{n_R}(2,-1,1)$ متعامدان أيّ أنّ:

$$\vec{n_P}.\vec{n_R}=0$$
$$2a-b+c=0\ldots(2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$a+2b-c=0\ldots(1)$$
$$2a-b+c=0\ldots(2)$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$3a+b=0$$
$$b=-3a\ldots(*)$$

نعوض في (1):

$$a-6a-c=0$$
$$-5a-c=0$$
$$c=-5a\ldots(**)$$

بفرض $a=-1$ نعوض في $(*)$ و $(**)$:

$$\Rightarrow b=3\ ,\ c=5$$
$$\vec{n_P}(-1,3,5)$$

- كتابة معادلة المستوي:

$$P: (-1)(x-0)+(3)(y-1)+(5)(z+2)=0$$
$$P: -x+3y-3+5z+10=0$$
$$P: -x+3y+5z+7=0$$

الحالة الثامنة:

P مار من $A(2,3,-1)$ و $B(1,1,1)$ وعمودي على المستوي Q حيث: $Q: 2x+z-4=0$

- تحديد النقطة: $B(1,1,1)$
- تحديد الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$

بما أنّ النقطتان A و B من المستوي P فإنّ $\vec{n}_P$ و $\overrightarrow{AB}(-1,-2,2)$ متعامدان أيّ أنّ:

$$\vec{n_p}.\overrightarrow{AB}=0$$
$$-a-2b+2c=0\ldots(1)$$

بما أن المستويان P و Q متعامدان فهذا يعني أن $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ متعامدان أيّ أنّ: $\vec{n_P}.\vec{n_Q}=0$

$$2a+c=0\ldots(2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$-a-2b+2c=0\ldots(1)$$
$$2a+c=0\ldots(2)$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد (2):

$$-2a-4b+4c=0\ldots(1)'$$
$$2a+c=0\ \ldots(2)$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد:

$$-4b+5c=0\rightarrow b=\frac{5}{4}c\ldots(*)$$

نعوض في (1):

$$-a-\frac{5}{2}c+2c=0$$
$$-a-\frac{1}{2}c=0\rightarrow a=-\frac{1}{2}c\ldots(**)$$

بفرض $c=4$ نعوض في $(*)$ و $(**)$:

$$a=-2\ ,\ b=5$$
$$\Rightarrow \vec{n_P}(-2,5,4)$$

- كتابة معادلة المستوي P:

$$P: (-2)(x-1)+(5)(y-1)+(4)(z-1)=0$$
$$-2x+2+5y+4z-4=0$$
$$P: -2x+5y+4z-7=0$$

الحالة التاسعة:

P مار من: $A(-1,1,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(-1,-2-3)$

الخطوة الأولى:

إثبات أن النقاط A و B و C تعين مستوي:

$$\overrightarrow{AB}(1,0,0)\ ,\ \overrightarrow{AC}(0,-3,-3)$$

نلاحظ أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً إذاً النقاط A و B و C تعيين مستوي.

الخطوة الثانية:

كتابة معادلة المستوي (ABC)

- تحديد النقطة $A(-1,1,0)$
- تحديد الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ بما أن النقاط A و B و C هي نقاط من المستوي P فإنّ: $\vec{n}_P$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ومنه:

$$\vec{n_P}.\overrightarrow{AB}=0$$
$$a=0\ldots(1)$$
$$\vec{n_P}.\overrightarrow{AC}=0$$
$$-3b-3c=0\ldots(2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$a=0\ldots(1)$$
$$-3b-3c=0\ldots(2)$$

من (1) نجد: $a=0$

لدينا من (2):

$$-3b=3c\rightarrow b=-c\ldots(*)$$

بفرض $c=-1$ نعوض في $(*)$:

$$b=1$$
$$\Rightarrow \vec{n_P}(0,1,-1)$$

- كتابة معادلة المستوي:

$$P: (0)(x+1)+(1)(y-1)+(-1)(z-0)=0$$
$$P: y-1-z=0$$
$$P: y-z-1=0$$

مكثفة شيفرة الـ 600

الحالة العاشرة:

P المحدد بالمستقيمان d_1 و d_2 حيث d_1 شعاع توجيهه $\vec{u}_1(1,2,-1)$ و d_2 شعاع توجيهه $\vec{u}_2(3,-1,1)$ كما أنهما يتقاطعان في النقطة $A(2,1,1)$

* تحديد النقطة: هي نقطة التقاطع $A(2,1,1)$
* تحديد الناظم: ليكن $\vec{n}_P(a,b,c)$

بما أن المستوي P محدد بالمستقيمان d_1 الذي شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_1}(1,2,-1)$ و d_2 الذي شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_2}(3,-1,1)$ فإنّ $\vec{n}_P$ عمودي على كل من $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ أي أنّ:

$$\vec{n}_P.\vec{u}_1 = 0$$
$$a + 2b - c = 0 \ \dots (1)$$

$$\vec{n}_P.\vec{u}_2 = 0$$
$$3a - b + c = 0 \ \dots (2)$$

لدينا جملة معادلتين (1) و (2) :

$$a + 2b - c = 0 \ \dots (1)$$
$$3a - b + c = 0 \ \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) :

$$4a + b = 0$$
$$b = -4a \dots (*)$$

نعوض في (2) نجد:

$$3a + 4a + c = 0$$
$$7a + c = 0$$
$$c = -7a \dots (**)$$

بفرض: $a = -1$ نعوض في $(*)$ و $(**)$:

$$b = 4 \ , \ c = 7$$
$$\Rightarrow \vec{n}_P(-1,4,7)$$

* كتابة معادلة المستوي:

$$P: (-1)(x-2) + (4)(y-1) + (7)(z-1) = 0$$
$$P: -x + 24y - 4 + 7z - 7 = 0$$
$$P: -x + 4y + 7z - 9 = 0$$

تطبيقات معادلة المستوي:

التطبيق	نص السؤال	فكرة الحل
انتماء نقطة إلى مستوي	هل النقطة A تنتمي الى المستوي P ؟	* نكتب معادلة المستوي P عند اللزوم * نعوض احداثيات النقطة A في معادلة المستوي P * نميز حالتين: ✌ الحالة الأولى: المعادلة محققة إذاً: $A \in P$ ✌ الحالة الثانية: المعادلة غير محققة اذاً: $A \notin P$
إثبات معادلة مستوي	أثبت أن معادلة المستوي ABC هي (وتكون معطاة)	الطريقة الأبسط في الإجابة: نعوض إحداثيات النقاط A و B و C في المعادلة المعطاة ونثبت أنها محققة
وقوع أربعة نقاط في مستو واحد	هل النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد؟	* نكتب معادلة مستوي مار من ثلاثة نقاط ولتكن (ABC) * نتحقق من انتماء النقطة المتبقية D الى المستوي السابق * نميز: ✌ الحالة الأولى: $D \in (ABC)$ بالتالي تكون: النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد ✌ الحالة الثانية: $D \notin (ABC)$ وبالتالي تكون: النقاط A و B و C و D لا تقع في مستوٍ واحد
بعد نقطة عن مستوي في الفراغ	ليكن لدينا المستوي P معادلته: $P: ax + by + cz + d = 0$ ولدينا النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ والمطلوب: احسب بعد النقطة A عن المستوي P	إنّ بعد النقطة A عن المستوي P يعطى بالقانون: $$dist(A,P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ انتبه شرط تطبيق القانون السابق: أن يكون الطرف الأيمن في معادلة المستوي هو الصفر
البعد بين مستويين متوازيين	ليكن لدينا المستويان P و Q احسب البعد بينهما علماً أنهما متوازيان	* نأخذ نقطة A من المستوي P (مثلاً) وفق: نفرض قيم اختيارية لإحداثيتين من النقطة ولتكن مثلاً x و y * نعوض في معادلة المستوي فنحسب z * وبالتالي نحصل على النقطة المطلوبة * نحسب البعد بين النقطة السابقة عن المستوي Q بتطبيق دستور الـ $dist$
كتابة معادلة مستوي مار من أربعة نقاط	اكتب معادلة المستوي $(ABCD)$	* نكتب معادلة المستوي المار من ثلاثة نقاط ولتكن (ABC) * نتحقق من انتماء النقطة المتبقية ونميز: ✌ الحالة الأولى: $D \in (ABC)$ تكون معادلة المستوي $(ABCD)$ هي ذاتها معادلة المستوي (ABC) ✌ الحالة الثانية: $D \neq (ABC)$ لا يوجد معادلة للمستوي $(ABCD)$
إثبات أنّ شعاع ناظم على مستوي	أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}$ ناظم على المستوي (ABC)	يقصد بها: أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}$ عمودي على المستوي (ABC)

التمرين الأول:

ليكن لدينا المستوي p الذي معادلته:

$$p: 2x - y + 3z + 1 = 0$$

والنقاط: $A\left(1,2,-\frac{1}{3}\right)$ و $B(0,4,1)$ و $C(2,1,1)$

هل النقاط A و B و C تنتمي إلى المستوي p

الحل:

اختبار النقطة A:

$$2(1) - 2 + 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$$
$$2 - 2 - 1 + 1 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

محققة إذاً $A \in p$

اختبار النقطة B :

$$2(0) - (4) + 3(1) + 1 = 0$$
$$-4 + 3 + 1 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

محققة إذاً $B \in p$

اختبار النقطة c:

$$2(2) - 1 + 3(1) + 1 = 0$$
$$4 - 1 + 3 + 1 = 0 \rightarrow 7 \neq 0$$

غير محققة $c \notin P$

التمرين الثاني:

في معلم متجانس $(o; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ لتكن لدينا النقاط: $A(1,-1,0)$ و $B(-1,0,1)$ و $C(0,2,1)$

أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

$$2x - y + 5z - 3 = 0$$

الحل:

تعويض A في معادلة المستوي:

$$2(1) - (-1) + 5(0) - 3 = 0$$
$$2 + 1 - 3 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

محققة

تعويض B في معادلة المستوي:

$$2(-1) - (0) + 5(1) - 3 = 0$$
$$-2 + 5 - 3 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

محققة

تعويض C في معادلة المستوي:

$$2(0) - (2) + 5(1) - 3 = 0$$
$$-2 + 5 - 3 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

محققة

إذاً معادلة المستوي (ABC) هي:

$$2x - y + 5z - 3 = 0$$

التمرين الثالث:

احسب بعد النقطة $A(-1,1,1)$ عن المستوي P حيث P هو المستوي المار بالنقاط $D(-1,-2,-3)$ و $C(-1,1,0)$ و $B(0,1,0)$

نكتب معادلة المستوي P:

$$\overrightarrow{BC}(-1,0,0) \ , \overrightarrow{BD}(-1,-3,-3)$$

نلاحظ أن الشعاعان $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطان خطياً إذاً النقاط B , C , D تشكل مستوي

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$
$$-\alpha = 0 \dots (1)$$
$$\vec{n} \cdot \vec{BD} = 0$$
$$-\alpha - 3b - 3c = 0 \dots (2)$$

بفرض $c = 1$

من (1) نجد: $\alpha = 0$

نعوض في (2) :

$$-3b - 3 = 0 \rightarrow b = -1$$
$$\vec{n}(0,-1,1)$$

النقطة $B(0,1,0)$

نكتب معادلة p وفق:

$$p: 0(x-0)-1(y-1)+1(z-0)=0$$
$$p: -y+1+z=0$$
$$P: -y+z+1=0$$

نحسب بعد A عن p وفق:

$$dist(A,p)=\frac{|-1+1+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

التمرين الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و

$D(0,4,5)$ أثبت أن النقاط تقع في مستو واحد

الحل:

نكتب معادلة p المستوي المار من A , B , C وفق:

$\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(3,-2,1)$

نلاحظ أن $\frac{9}{3}\neq\frac{-1}{-2}$ إذاً الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً إذاً A, B, C تشكل مستوي

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$$
$$9a-b-c=0 \dots (1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$$
$$3a-2b+c=0 \dots (2)$$

بفرض $c=1$:

$$\begin{cases}9a-b-1=0 \dots (1)\\3a-2b+1=0 \dots (2)\end{cases}$$

نضرب (2) بـ (-3) ونجمع

$$5b-4=0\rightarrow b=\frac{4}{5}$$

نعوض في (2):

$$3a-\frac{8}{5}+1=0$$
$$3a=\frac{3}{5}\rightarrow a=\frac{1}{5}$$
$$\vec{n}\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5},1\right)\rightarrow\vec{n}(1,4,5)$$

تحديد النقطة: $A(1,5,4)$

نكتب معادلة p وفق:

$$p: 1(x-1)+4(y-5)+5(z-4)=0$$
$$p: x-1+4y-20+5z-20=0$$
$$p: x+4y+5z-41=0$$

نعوض D في p:

$$0+16+25-41=0\rightarrow \text{محققة}$$

إذاً النقاط A , B , C , D تنتمي إلى مستو واحد

التمرين الخامس:

ليكن لدينا المستويين:

$$P: 2x+y-z=3$$
$$Q: 4x+2y-2z=1$$

١. أثبت أن المستويين P و Q متوازيين

٢. احسب البعد بين المستويين P و Q

الحل:

الطلب الأول:

المستوي P ناظمه $\vec{n}_P(2,1,-1)$

المستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(4,2,-2)$

نلاحظ أن $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان P و Q متوازيان.

الطلب الثاني:

نأخذ نقطة اختيارية تنتمي للمستوي P ولتكن النقطة A تنتمي للمستوي P حيث $x_A=0$ و $y_A=1$ نعوض في معادلة المستوي P لحساب z_A وفق:

$$2(0)+1-z=3$$
$$1-z=3$$
$$z_A=-2$$

ومنه: $A(0,1,-2)$

لحساب البعد بين المستويين P و Q :

لدينا $A(0,1,-2)$ نقطة تنتمي إلى المستوي P ومنه لحساب البعد بين P و Q

نطبق القانون

$$dist\,(A,Q)=\frac{|4(0)+2(1)-2(-2)-1|}{\sqrt{16+4+4}}$$
$$=\frac{|0+2+4-1|}{\sqrt{24}}$$
$$=\frac{|5|}{\sqrt{24}}=\frac{5}{\sqrt{24}}$$

التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ:

الشكل العام	لدينا المستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}$. التمثيلات الوسيطية لمعادلة المستقيم في الفراغ تعطى وفق: $t\in\mathbb{R}$; $(d):\begin{cases}x=\alpha t+x_A\\y=\beta t+y_A\\z=\gamma t+z_A\end{cases}$ حيث: شعاع توجيه المستقيم هو: $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$
كتابة التمثيل	لكتابة التمثيل الوسيطي لأيّ مستقيم في الفراغ فإننا نحتاج: * شعاع توجيه المستقيم: $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ * نقطة منه: $A(x_A,y_A,z_A)$ * نكتب التمثيل الوسيطي وفق: $t\in\mathbb{R}$; $(d):\begin{cases}x=\alpha t+x_A\\y=\beta t+y_A\\z=\gamma t+z_A\end{cases}$
ملاحظة	في التمثيل الوسيطي لـ: * مستقيم تكون: $t\in\mathbb{R}$ * نصف مستقيم تكون: $t\in\mathbb{R}_+^*$ أو $t\in\mathbb{R}_-^*$ * قطعة مستقيمة تكون: $t\in[0,1]$

حالات إيجاد التمثيل الوسيطي:

الحالة	نص السؤال	فكرة الحل
التمثيل الوسيطي لمستقيم يوازي مستقيم	اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة A والموازي للمستقيم Δ	* تحديد النقطة: (A المعطاة) * تحديد شعاع التوجيه $\vec{u}_d$ للمستقيم d : بما أن المستقيمان d و Δ متوازيان فإنّ: $\vec{u}_\Delta=\vec{u}_d$ * نكتب التمثيل الوسيطي
التمثيل الوسيطي لمستقيم يعامد مستوي	اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A والعامودي على المستوي P	* تحديد النقطة: (A معلومة) * تحديد شعاع التوجيه $\vec{u}_d$ للمستقيم d : بما أن المستقيم d والمستوي P متعامدان فإن: $\vec{u}_d=\vec{n}_p$ * نكتب التمثيل الوسيطي
التمثيل الوسيطي للمستقيم المار من نقطتين	① صيغة أولى: اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) ② صيغة ثانية: اكتب التمثيل الوسيطي المار من A و B	* تحديد النقطة: إما A أو B * تحديد $\vec{u}$ شعاع توجيه المستقيم: بما أن المستقيم مار بالنقطتين A و B فإن: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ * نكتب التمثيل الوسيطي
التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لمستويان	اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الفصل المشترك للمستويان P و Q	* نأخذ معادلتي المستويان ثم نعطي قيمة اختيارية للأحد المجاهيل بدلالة t ونعوض في معادلتي المستويان فنحصل على جملة معادلتين بمجهولين * بحل هذه الجملة نحصل على جميع المجاهيل بدلالة t فنحصل على التمثيل الوسيطي للفصل المشترك

مكثفة شيفرة الـ 600

تمرين:

أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d في كل من الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

d المار من $A(-1,2,0)$ ويقبل $\vec{u}(0,1,-1)$ شعاعاً موجهاً له:

$$d:\begin{cases}x=-1\\y=t+2\\z=-t\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

الحالة الثانية:

d المار من $A(1,0,-1)$ والموازي للمستقيم (Δ) الذي يقبل $\vec{u}(2,3,-1)$ شعاعاً موجهاً له.

- تحديد النقطة: $B(1,0,-1)$
- تحديد شعاع التوجيه: بما أنّ المستقيم (d) و (Δ) متوازيان فإن: $\vec{u}_d=\vec{u}_\Delta$

ومنه: $\vec{u}_\Delta(2,3,-1)$

- كتابة التمثيل الوسيطي:

$$(\Delta):\begin{cases}x=2t+1\\y=3t\\z=-t-1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

الحالة الثالثة:

d المستقيم المار من النقطة $A(-1,3,2)$ عمودياً على المستوي P المعطى بالعلاقة:

$$P:2x-y+z+1=0$$

- تحديد النقطة: $A(-1,3,2)$
- تحديد شعاع التوجيه:

بما أن المستقيم d والمستوي P متعامدان فإن: $\vec{u}_d=\vec{n}_P\Rightarrow\vec{u}_d(2,-1,1)$

- كتابة التمثيل الوسيطي:

$$d:\begin{cases}x=2t-1\\y=-t+3\\z=t+2\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

الحالة الرابعة:

d المار من $A(2,1,3)$ و $B(-2,0,1)$

- تحديد النقطة: $A(2,1,4)$
- تحديد شعاع التوجيه:

بما أن المستقيم d مار من A و B فإنّ:

$$\vec{u}_d=\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{u}_d(-4,-1,-2)$$

- كتابة التمثيل الوسيطي:

$$d:\begin{cases}x=-4t+2\\y=-t+1\\z=-2t+3\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

الحالة الخامسة:

d الفصل المشترك للمستويين:

$$P:2x-y+z-4=0$$
$$Q:x+y+2z-5=0$$

لدينا:

$$\begin{cases}P:2x-y+z-4=0\ldots(1)\\Q:x+y+2z-5=0\ldots(2)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$3x+3z-9=0$$
$$3z=-3z+9$$
$$x=-z+3\ldots(*)$$

نعوض في (2) وفق:

$$-z+3+y+2z-5=0$$
$$y+z-2=0$$
$$y=-z+2\ldots(**)$$

لتكن $z=t$ نعوض في $(*)$ و$(**)$

$$x=-t+3\text{ و }y=-t+2$$

تكون المعادلة:

$$d:\begin{cases}x=-t+3\\y=-t+2\\z=t\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

تطبيقات التمثيل الوسيطي لمستقيم:

التطبيق	نص السؤال	فكرة الحل
إثبات تمثيل وسيطي لمستقيم	أثبت أن معادلة المستقيم d (تمثيله الوسيطي معلوم) هو فصل مشترك للمستويين P و Q حيث (معادلتي P و Q معطاة)	الطريقة الأبسط في الإجابة: نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في كل من معادلتي المستويان P و Q ونثبت أن كل منهما محققة
انتماء نقطة إلى مستقيم في الفراغ	ليكن لدينا المستقيم d تمثيله الوسيطي: $(d):\begin{cases}x=\alpha t+x_A\\y=\beta t+y_A\\z=\gamma t+z_A\end{cases};t\in\mathbb{R}$ هل النقطة $B(x_B,y_B,z_B)$ تنتمي الى المستقيم d ؟	• نعوض إحداثيات النقطة في التمثيلات الوسيطية للمستقيم ثم نحدد قيم t • نميز: ☝ الحالة الأولى: قيم t متساوية وبالتالي تكون النقطة B تنتمي إلى المستقيم d ✌ الحالة الثانية: قيم t غير متساوية وبالتالي تكون النقطة B لا تنتمي إلى المستقيم d

التمرين الأول:

ليكن لدينا المستقيم Δ تمثيله الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases}x=t+2\\y=-2t+1\\z=2t-1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

١. هل النقطة $A(2,1,-1)$ تنتمي إلى Δ ؟

٢. هل النقطة $B(0,1,4)$ تنتمي إلى Δ ؟

٣. هل النقطة $C(3,-1,1)$ تنتمي إلى Δ ؟

الحل:

الطلب الأول:

$$2=t+2\Rightarrow t=0$$
$$1=-2t+1\Rightarrow t=0$$
$$-1=2t-1\Rightarrow t=0$$

إذاً: $A\in\Delta$

الطلب الثاني:

$$0=t+2\Rightarrow t=-2$$
$$1=-2t+1\Rightarrow t=0$$

إذاً: $B\notin\Delta$

الطلب الثالث:

$$3=t+2\Rightarrow t=1$$
$$-1=1-2t\Rightarrow t=1$$
$$1=2t-1\Rightarrow t=1$$

إذاً: $C\in\Delta$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا المستويان P و Q حيث:

$$P:2x+y-z+2=0$$
$$Q:x+2y-z+1=0$$

أثبت أن d التمثيل الوسيطي للفصل المشترك للمستويان المعطى وفق:

$$(d):\begin{cases}x=t-1\\y=t\\z=3t\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

نعوض التمثيل الوسيطي في المعادلة P:

$$2t-2+t-3t+2=0$$ محققة

نعوض التمثيل الوسيطي في المعادلة Q:

$$t-1+2t-3t+1=0$$ محققة

إذاً d التمثيل الوسيطي للفصل المشترك للمستويان P و Q.

ELITE MATH

الكرة:

الشكل العام	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ حيث: مركز الكرة: $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ ونصف قطر الكرة: R
كتابة معادلة الكرة	لكتابة معادلة كرة فإننا نحتاج: * مركز الكرة: $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ * نصف قطر الكرة: R * تكون معادلة الكرة وفق: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
تمرين: اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها r	$\Omega(0,5,-1)$ | $r=\sqrt{3}$ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ $x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=3$

حالات معادلة الكرة:

الحالة	نص السؤال	فكرة الحل
معادلة كرة مركزها معلوم وتمر من نقطة	اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمرّ من النقطة A	* تحديد المركز: Ω معلوم * تحديد نصف القطر R: $R=\Omega A$ * نكتب المعادلة
معادلة كرة قطرها $[AB]$	اكتب معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$.	* تحديد المركزΩ: النقطة Ω منتصف $[AB]$ هي مركز هذه الكرة. * تحديد نصف القطر R: - إمّا $R=\Omega A$ أو $R=\Omega B$ أو $R=\frac{1}{2}AB$ * نكتب المعادلة.
معادلة كرة مركزها معلوم وتمس مستوي	اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمسّ المستوي P	* تحديد المركزΩ معلوم * تحديد نصف القطر R: بما أنّ الكرة تمسّ المستوي P فإنّ: $R=\text{dist}(\Omega,P)$ * نكتب المعادلة

تمرين:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ اكتب معادلة الكرة في كل حالة من الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

كرة مركزها $\Omega(1,2,3)$ ونصف قطرها $r=2$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$

الحالة الثانية:

كرة مركزها $\Omega(0,5,-1)$ وتمر بالنقطة $A(1,-2,3)$

تحديد المركز: $\Omega(0,5,-1)$

تحديد نصف القطر:

$R=\Omega A=\sqrt{(1)^2+(-7)^2+(4)^2}$

$=\sqrt{1+49+16}=\sqrt{66}$

كتابة معادلة الكرة:

$(x-0)^2+(y-5)^2+(z+1)^2=\left(\sqrt{66}\right)^2$

$x^2+(y-0)^2+(z+1)^2=66$

الحالة الثالثة:

كرة قطرها $[AB]$ حيث:

$A(1,2,-1)$ ، $B(0,-1,1)$

تحديد المركز: Ω منتصف $[AB]$

$\omega\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

تحديد نصف القطر:

$\overrightarrow{\Omega A}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1\right)$

$R=\Omega A=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+1}=\sqrt{\frac{10}{4}+1}=\sqrt{\frac{14}{4}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

كتابة معادلة الكرة:

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-0)^2=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$

الحالة الرابعة:

كرة مركزها $A(1,1,2)$ وتمس المستوي P حيث:

$P: 2x+y+z+1=0$

تحديد المركز: $A(1,1,2)$

تحديد نصف القطر:

بما أن الكرة تمس المستوي P

$R=dis\,(A,P)=\frac{|(2)(1)+(1)(1)+(1)(2)+1|}{\sqrt{4+1+1}}$

$=\frac{|2+1+2+1|}{\sqrt{6}}=\frac{|6|}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

كتابة معادلة الكرة:

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\left(\sqrt{6}\right)^2$

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6$

معادلات الاسطوانة:

المحور	OX	OY	OZ
مركز قاعدتها الأولى	$A(x_A,0,0)$	$A(0,y_A,0)$	$A(0,0,z_A)$
مركز قاعدتها الثانية	$B(x_B,0,0)$	$B(0,y_B,0)$	$B(0,0,z_B)$
نصف قطر القواعد	r		
شكل المعادلة	$\begin{cases}y^2+z^2=r^2\\x_A\le x\le x_B\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+z^2=r^2\\y_A\le y\le y_B\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+y^2=r^2\\z_A\le z\le z_B\end{cases}$

معادلات المخروط:

المحور	OX	OY	OZ
الرأس	O المبدأ		
مركز قاعدته	$A(x_A,0,0)$	$A(0,y_A,0)$	$A(0,0,z_A)$
نصف قطر القاعدة	r		
شكل المعادلة	$\begin{cases}y^2+z^2=\frac{r^2}{h^2}x^2\\0\le x\le x_A\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+z^2=\frac{r^2}{h^2}y^2\\0\le y\le y_A\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+y^2=\frac{r^2}{h^2}z^2\\0\le z\le z_A\end{cases}$

مكثفة شيفرة الـ 600

أنماط التمارين:

الأنماط	الأول	الثاني	الثالث
نص السؤال	اكتب معادلة (الأسطوانة/ المخروط).	صف مجموع النقاط التي تحقق المعادلة (معطاة).	هل النقطة A تقع على (الأسطوانة/ المخروط)؟
فكرة الحل	قانون وتعويض.	نحدّد ماذا تمثّل المعادلة حسب ما ورد معنا في المخططات السّابقة.	❋ نعوّض إحداثيّات النقطة في المعادلة ❋ ونميز: ☝ الحالة الأولى: تحقق الشرطين إذاً النقطة A تنتمي إلى (الاسطوانة/المخروط) ✌ الحالة الثانية: اختلال أحد الشرطين إذاً النقطة A لا تنتمي إلى (الاسطوانة/المخروط)

التمرين الأول:

اكتب معادلة الأسطوانة في كل حالة من الحالات الآتية:

١. أسطوانة محورها $(o,\vec{\imath})$ ومركزي قاعدتها $A(3,0,0)$ و $B(4,0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$

$$\begin{cases} y^2+z^2=r^2 \\ x_A\le x\le x_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2+z^2=2 \\ 3\le x\le 4 \end{cases}$$

٢. أسطوانة محورها $(o,\vec{\jmath})$ ومركزي قاعدتها $A(0,6,0)$ و $B(0,3,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$

$$\begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ y_B\le y\le y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+z^2=6 \\ 3\le y\le 6 \end{cases}$$

٣. أسطوانة محورها $(o,\vec{k})$ ومركزي قاعدتها $A(0,0,5)$ و $B(0,0,3)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ z_B\le z\le z_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=6 \\ 3\le z\le 5 \end{cases}$$

التمرين الثاني:

اكتب معادلة المخروط في كل حالة من الحالات الآتية:

١. مخروط محوره $(o,\vec{\imath})$ ورأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $A(3,0,0)$ ونصف قطرها 2

$$\begin{cases} y^2+z^2=\dfrac{r^2}{h^2}x^2 \\ 0\le x\le x_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2+z^2=\dfrac{4}{9}x^2 \\ 0\le x\le 3 \end{cases}$$

٢. مخروط محوره $(o,\vec{\jmath})$ ورأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $A(0,2,0)$ ونصف قطرها 4

$$\begin{cases} x^2+z^2=\dfrac{r^2}{h^2}y^2 \\ 0\le y\le y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+z^2=\dfrac{16}{4}y^2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$$

٣. مخروط محوره $(o,\vec{k})$ ورأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $A(0,0,3)$ ونصف قطرها 5

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{r^2}{h^2}z^2 \\ 0\le z\le z_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{25}{9}z^2 \\ 0\le z\le 3 \end{cases}$$

التمرين الثالث:

في كل حالة من الحالات الآتية صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي احداثيتها تحقق العلاقة الآتية:

(1) $\begin{cases} x^2+z^2=9 \\ 3\le y<5 \end{cases}$

معادلة أسطوانة محورها $(o,\vec{\jmath})$ ونصف قطرها $r=3$ ومركزي قاعدتيها $A(0,3,0)$ و $B(0,5,0)$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ 1\le z<7 \end{cases}$

معادلة أسطوانة محورها $(o,\vec{k})$ ونصف قطرها $r=3$ ومركزي قاعدتيها $A(0,0,1)$ و $B(0,0,7)$

(3) $\begin{cases} y^2+z^2=25 \\ 4\le x<8 \end{cases}$

معادلة أسطوانة محورها $(o,\vec{\imath})$ ونصف قطرها $r=5$ ومركزي قاعدتيها $A(4,0,0)$ و $B(8,0,0)$

(4) $\begin{cases} y^2+z^2=36x^2 \\ 0\le x<1 \end{cases}$

معادلة مخروط محوره $(o,\vec{\imath})$ ورأسه o ومركز قاعدته $(1,0,0)$ ونصف قطرها $r=6$

(5) $\begin{cases} x^2+z^2=\dfrac{5}{3}y^2 \\ 0\le y<\sqrt{3} \end{cases}$

معادلة مخروط محوره $(o,\vec{\jmath})$ ورأسه المبدأ o ومركز قاعدته $(0,\sqrt{3},0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{5}$

(6) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{16}{25}z^2 \\ 0\le z<5 \end{cases}$

معادلة مخروط محوره $(o,\vec{k})$ ورأسه o ومركز قاعدته $(0,0,5)$ ونصف قطرها $r=4$

التمرين الرابع:

لدينا معادلة الأسطوانة:

$$\begin{cases} y^2+z^2=4 \\ 1\le x\le 2 \end{cases}$$

ولدينا النقاط $A(1,2,0)$ و $B(0,1,2)$ و $C\left(\frac{3}{2},0,-2\right)$ هل النقاط A و B و C تقع على الأسطوانة؟

الحل:

اختبار النقطة A:

الشرط الأول:

$$(2)^2+(0)^2=4\to 4=4$$

الشرط الثاني:

$$1\le 1\le 2$$

محققة إذا النقطة A تقع على الأسطوانة.

اختبار النقطة B:

الشرط الأول:

$$(1)^2+(2)^2=4$$

$$1+4=4\to 5\neq 4$$

غير محققة إذا النقطة B لا تقع على الأسطوانة

اختبار النقطة C :

الشرط الأول:

$$(0)^2+(-2)^2=4\to 4=4$$

الشرط الثاني:

$$1\le\frac{3}{2}\le 2$$

محققة إذاً النقطة C تقع على الأسطوانة

التمرين الخامس:

لدينا معادلة المخروط

$$\begin{cases} y^2+z^2=\dfrac{6}{4}x^2 \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$$

ولدينا النقاط $D\left(2,1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $C(10,0,0)$ و $B\left(1,0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ هل النقاط C و B و D تقع على المخروط؟

اختبار النقطة D:

الشرط الأول:

$$(1)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{6}{4}(2)^2$$

$$1+\frac{1}{2}=6\to\frac{3}{2}\neq 6$$

غير محققة ومنه D لا تقع على المخروط

اختبار النقطة C:

الشرط الأول:

$$(0)^2+(0)=\frac{6}{4}(10)^2$$

$$0\neq 150$$

غير محققة ومنه C لا تقع على المخروط.

اختبار النقطة B:

الشرط الأول:

$$(0)^2+\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{6}{4}(1)^2$$

$$\frac{6}{4}=\frac{6}{4}$$

الشرط الثاني:

$$0\le 1\le 2$$

محققة إذا B تقع على المخروط.

600 أوراق شغل مع حلول

الأوضاع النسبية:

الوضع النسبي لمستويان في الفراغ:

نص السؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ P و Q متوازيان	نثبت أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ مرتبطان خطّيّاً
أثبت أنّ P و Q متقاطعان	نثبت أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطّيّاً
أثبت أنّ P و Q متعامدان	نثبت أنّ: $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0$
أثبت أنّ P و Q منطبقان	نثبت أنّ معادلتي P و Q متكافئتان أي: إحدى المعادلتين تنتج عن الاخرى بضربها بعدد حقيقي
في حال تقاطع P و Q ما هو تقاطعهما؟	تقاطعهما هو فصل مشترك (مستقيم)
اكتب التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لـ P و Q	الحالة الرّابعة من حالات كتابة التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ

التمرين الأول:

في الحالات الآتية ادرس الوضع النسبي للمستويان P و Q وفي حالة التقاطع أعط تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d .

الحالة الأولى:

$$P: x-y+2z-1=0$$
$$Q: 2x-2y+4z+2=0$$

لدينا المستوي P ناظمه: $\overrightarrow{n_p}(1,-1,2)$

لدينا المستوي Q ناظمه: $\overrightarrow{n_Q}(2,-2,4)$

مرتبطين خطياً لأن المركبات متناسبة ومنه المستويان P و Q متوازين.

الحالة الثانية:

$$P: 2x-y+2z=1$$
$$Q: -x+y+z=3$$

لدينا المستوي P ناظمه: $\overrightarrow{n_P}(2,-1,2)$

لدينا المستوي Q ناظمه: $\overrightarrow{n_Q}(-1,1,1)$

غير مرتبطان خطياً لان المركبات غير متناسبة ومنه المستويان P و Q متقاطعان.

الفصل المشترك d:

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} 2x-y+2z=1 \dots (1) \\ -x+y+z=3 \dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$x+3z=4$$
$$x=-3z+4$$

نعوض في (1) :

$$-6z+8-y+2z=1$$
$$y=-4z+7$$

بفرض $z=-t$ نجد:

$$x=3t+4$$
$$y=4t+7$$ و

$$d: \begin{cases} x=3t+4 \\ y=4t+7 \\ z=-t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

التمرين الثاني:

ادرس تعامد كل زوج من المستويات الآتية:

$$P: 7x+3y-z-1=0$$
$$Q: 6x-11y-5=0$$
$$R: 2x-3y+5z+4=0$$

لدينا:

المستوي P ناظمه: $\overrightarrow{n_P}(7,3,-1)$

المستوي Q ناظمه: $\overrightarrow{n_Q}(6,-11,0)$

المستوي R ناظمه: $\overrightarrow{n_R}(2,-3,5)$

اختبار P و Q:

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=42-33+0=9$$

وبما أنّ $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\neq 0$ فإنّ المستويان P و Q غير متعامدين.

اختبار P و R :

$$\vec{n}_P.\vec{n}_R=14-9-5=0$$

وبما أنّ $\vec{n}_P.\vec{n}_R=0$ فإنّ المستويين P و R متعامدين.

اختبار Q و R:

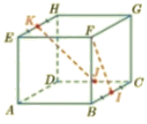
$$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_R}=12-33+0=-21$$

وبما أن $\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_R}\neq 0$ فإنّ المستويين Q و R غير متعامدين.

الوضع النسبي لمستقيمان في الفراغ:

نص السؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ d_1 و d_2 متوازيان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ مرتبطان خطّيّاً * d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة
أثبت أنّ d_1 و d_2 منطبقان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ مرتبطان خطّيّاً * d_1 و d_2 يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط
أثبت أنّ d_1 و d_2 متخالفان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطّيّاً * d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة
أثبت أنّ d_1 و d_2 متقاطعان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطّيّاً * d_1 و d_2 يشتركان بنقطة
أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع d_1 و d_2	بالحلّ المشترك لجملة التمثيلات الوسيطيّة لـ d_1 و d_2
أثبت أنّ d_1 و d_2 متعامدان	نثبت أنّ: $\vec{u}_1.\vec{u}_2=0$
هل d_1 و d_2 يقعان في مستوٍ واحد؟	ندرس الوضع النسبي لـ d_1 و d_2 ونميّز الحالات: حالة ①: d_1 و d_2 متخالفان. إذاً d_1 و d_2 لا يقعان في مستوٍ واحد حالة ②: باقي الحالات إذاً d_1 و d_2 يقعان في مستوٍ واحد.

التمرين الأول:



مكعب طوله $ABCDEFGH$ ضلعه I , فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منتصف $[EH]$

نتأمل $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

1. أعط تمثيلاً وسيطياً لكل من (IK) و (FJ)
2. أيتقاطع المستقيمان (IK) و (FJ) ؟

هل النقاط I و J و K و F في مستوٍ واحد؟

الحل:

الطلب الأول:

$A(0,0,0)$	$E(0,0,1)$
$B(1,0,0)$	$F(1,0,1)$
$D(0,1,0)$	$H(0,1,1)$
$C(1,1,0)$	$G(1,1,1)$
$I\left(1,\frac{1}{2},0\right)$	$J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$
$K\left(0,\frac{1}{2},1\right)$	

كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (IK) :

$$\vec{u}=\overrightarrow{IK}\Rightarrow\vec{u}(-1,0,1)$$

$$(IK)\begin{cases} x=-t+1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (FJ) :

$$\vec{u}=\overrightarrow{FJ}\rightarrow\vec{u}\left(-\frac{1}{2},1,-1\right)$$

$$(FJ)\begin{cases} x=-\frac{1}{2}s+1 \\ y=s \\ z=-s+1 \end{cases} ; s\in\mathbb{R}$$

مكثفة شيفرة الـ 600

الطلب الثاني:

نلاحظ أن $\overrightarrow{IK}$ و $\overrightarrow{FJ}$ غير مرتبطاً خطياً وبالتالي المستقيمان (IK) و (FJ) إما متقاطعان أو متخالفان ,

اختبار الاشتراك بنقطة:

$$\begin{cases} -t+1=-\frac{1}{2}s+1 \dots (1) \\ \frac{1}{2}=s \dots (2) \\ t=-s+1 \dots (3) \end{cases}$$

من (2) و (3) :

$$\frac{1}{2}=s \quad \dots (2)$$

$$t=-s+1 \quad \dots (3)$$

من (2) نجد أنّ: $s=\frac{1}{2}$

نعوض في (3):

$$t=-\frac{1}{2}+1 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

نتحقق في (1):

$$-\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+1$$

$$\frac{1}{2}\neq\frac{3}{4}$$

وهذا غير ممكن إذاً الجملة مستحيلة الحل.

والمستقيمان (IK) و (FJ) لا يشتركان بأيّة نقطة فهما متخالفان وبالتالي (IK) و (FJ) لا يقعان في مستو واحد وبالتالي النقاط I و K و F و J لا تقع في مستو واحد.

التمرين الثاني:

أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d' وبين إذا كان المستقيمان d و d' متوازيان أو كان d منطبقاً على d حيث:

$$d:\begin{cases} x=2t-1 \\ y=2 \\ z=t+1 \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$

$$d':\begin{cases} x+y-2z=3 \\ x-y-2z=5 \end{cases}$$

التمثيل الوسطي لـ d'

$$\begin{cases} x+y-2z=3 \quad \dots (1) \\ x-y-2z=5 \quad \dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$2x-4z=8$$

$$2x=4z+8$$

$$x=2z+4$$

نعوض قيمة x في (1) وفق:

$$2z+4+y-2z=3$$

$$y=-1$$

بفرض $z=s$ نجد أنّ:

$$x=2S+4 \quad , \quad y=-1$$

ومنه:

$$d':\begin{cases} x=2s+4 \\ y=-1 \\ z=s \end{cases} ;s\in\mathbb{R}$$

إثبات توازي أو انطباق المستقيمان d و d'

لدينا:

$$\begin{cases} 2t-1=2S+4 \dots (1) \\ 2=-1 \quad \dots (2) \\ t+1=S \quad \dots (3) \end{cases}$$

من (2) نجد أن المعادلة غير محققة أي أنه ليس للجملة حل وبالتالي المستقيمان d و d' لا يشتركان بأية نقطة فهما متوازيان.

التمرين الثالث:

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطين على الترتيب:

$$(D):\begin{cases} x=-3+2t \\ y=2-t \\ z=1+t \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$

$$(T):\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1+4\lambda \end{cases} ;\lambda\in\mathbb{R}$$

بيّن أن (D) و (T) متقاطعان.

الحل:

لدينا المستقيم (D) شعاع توجيهه $\vec{u}_1(2,-1,1)$

لدينا المستقيم (T) شعاع توجيهه $\vec{u}_2(1,-1,4)$

غير مرتبطين خطياً لأن المركبات غير متناسبة ومنه (D) و (T) إما متقاطعين أو متخالفين.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا:

$$\begin{cases} -3+2t=\lambda \\ 2-t=1-\lambda \\ 1+t=-1+4\lambda \end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases} -3+2t=\lambda \\ 2-t=1-\lambda \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$-1+t=1\rightarrow t=2$$

نعوض في (1) :

$$-3+4=\lambda\rightarrow\lambda=1$$

نتحقق في (3) :

$$1+2=?-1+4$$

$$3=3\rightarrow \text{محققة}$$

ومنه للجملة حل وحيد $t=2$ و $\lambda=1$ وبالتالي المستقيمان (D) و (T) يشتركان بنقطة واحدة I فهما متقاطعان حيث إحداثيات النقطة I :

نعوض قيمة $t=2$ في تمثيلها الوسيطي D فنجد:

$$x=1 \quad , \quad y=0 \quad , \quad z=3$$

$$\rightarrow I(1,0,3)$$

التمرين الرابع: دورة 2017 الثانية:

ليكن لدينا المستقيمان d_1 و d_2 حيث:

$$d_1:\begin{cases} x=t+1 \\ y=-3t+2 \\ z=-3t+3 \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$

$$d_2:\begin{cases} x=s \\ y=-3s+3 \\ z=-s+1 \end{cases} ;s\in\mathbb{R}$$

الطلب الأول:

اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمان d_1 و d_2

الحل:

لدينا المستقيم d_1 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_1}(1,-3,-3)$

لدينا المستقيم d_2 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_2}(1,-3,-1)$

الطلب الثاني:

هل المستقيمان d_1 و d_2 يقعان في مستو واحد علل إجابتك.

الحل:

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d_1 تمثيله الوسيطي:

$$d_1:\begin{cases} x=t+1 \\ y=-3t+2 \\ z=-3t+3 \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$

لدينا المستقيم d_2 تمثيله الوسيطي:

$$d_2:\begin{cases} x=s \\ y=-3s+3 \\ z=-s+1 \end{cases} ;s\in\mathbb{R}$$

فيكون:

$$\begin{cases} t+1=s \quad \dots (1) \\ -3t+2=-3s+3 \dots (2) \\ -3t+3=-s+1 \quad \dots (3) \end{cases}$$

وهذه جملة ثلاثة معادلات بمجهولين نأخذ منها:

$$\begin{cases} t+1=s \quad \dots (1) \\ -3t+2=-3s+3 \dots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد (3) وفق:

$$\begin{cases} 3t+3=3s \quad \dots (1)' \\ -3t+2=-3s-3 \dots (2) \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد أنّ:

$$5=3$$

غير محققة

إذاً ليس للجملة السابقة حل وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة ومنه المستقيمان d_1 و d_2 متخالفان وبالتالي d_1 و d_2 لا يقعان في مستو واحد لأنهما متخالفان.

التمرين الخامس: دورة 2019 الأولى:

لدينا النقطتان $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$ والمطلوب:

الطلب الأول:

اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم d المار من A ويقبل $\vec{u}(2,2,1)$.

الحل:

$$d:\begin{cases} x=2t+1 \\ y=2t \\ z=t+1 \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$

الطلب الثاني:

أثبت أنّ المستقيمان (AB) و d متعامدان.

الحل:

المستقيم (AB) شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$

المستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}(2,2,1)$ ومنه:

$$\overrightarrow{AB}.\vec{u}=-2+2+0=0$$

إذاً المستقيمان d_1 و (AB) متعامدان.

دراسة الوضع النسبي بين مستقيم ومستوي في الفراغ:

نص السؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ P و d متوازيان	نثبت أنّ: $\vec{n}.\vec{u}=0$
أثبت أنّ P و d متقاطعان	نثبت أنّ: $\vec{n}.\vec{u}\neq 0$
أثبت أنّ P و d متعامدان بحيث $\vec{n}$ معلوم	نثبت أنّ $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيّاً
أثبت أنّ P و d متعامدان بحيث $\vec{n}$ غير معلوم	نثبت أنّ شعاع توجيه المستقيم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيّاً من المستوي
أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي P	بالحل المشترك لجملة معادلات المستوي ومعادلات المستقيم نحصل على نقطة التقاطع
هل المستقيم d محتوى في المستوي P ؟	بالحل المشترك لجملة المعادلات الأربعة نلاحظ أن المستقيم والمستوي يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط إذاً المستقيم محتوى في المستوي

التمرين الأول:

نتأمل النقطتين $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$

والمستوي: $P: 2x-y+z-2=0$

الطلب الأول:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) .

الحل:

النقطة: $A(2,1,-2)$

شعاع التوجيه: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ومنه: $\vec{u}(-3,1,3)$

$$(AB):\begin{cases}x=-3t+2\\y=t+1\\z=3t-2\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

الطلب الثاني:

تيقن أنّ (AB) يقطع المستوي P :

الحل:

المستقيم (AB) شعاع توجيه $\vec{u}(-3,1,3)$

والمستوي P ناظمه: $\overrightarrow{n_P}(2,-1,1)$ ومنه:

$\overrightarrow{n_P}.\vec{u}=-6-1+3=-4\neq 0$

إذا المستقيم d والمستوي P متقاطعان.

الطلب الثالث:

حدد إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي P

الحل:

لتكن الجملة:

$$\begin{cases}2x-y+z-2=0\ldots(1)\\x=-3t+2\ldots(2)\\y=t+1\quad\ldots(3)\\z=3t-2\quad\ldots(4)\end{cases}$$

لحل هذه الجملة "دوماً" :

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) :

$$2(-3t+2)-(t+1)+(3t-2)-2=0$$

$$-6t+4-t-1+3t-2-2=0$$

$$-4t-1=0\rightarrow t=-\frac{1}{4}$$

نعوض قيمة t في (2) و (3) و (4) وفق:

$$(2):x=-3\left(-\frac{1}{4}\right)+2\rightarrow x=\frac{11}{4}$$

$$(3):y=\left(-\frac{1}{4}\right)+1\rightarrow y=\frac{3}{4}$$

$$(4):z=3\left(-\frac{1}{4}\right)-2\rightarrow x=-\frac{11}{4}$$

ومنه نقطة التقاطع هي:

$$I\left(\frac{11}{4},\frac{3}{4},-\frac{11}{4}\right)$$

ملاحظة: انتبه هنا لا نضرب بالعدد (4) لأنها نقطة.

التمرين الثاني:

نتأمل النقطتان $A(2,5,3)$ و $B(-1,0,-1)$ ولدينا

مستوي P يقبل: $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(3,-1,-1)$

شعاعين موجهين له والمطلوب: أثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي P .

الحل:

هنا لا نعلم ناظم المستوي P لذلك لإثبات أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي P يكفي إثبات أنّ $\overrightarrow{AB}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي P : نلاحظ أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً (من P)

نعلم أنّ شعاع توجيه المستقيم (AB) هو $\overrightarrow{AB}(-3,-5,-4)$.

ولدينا:

$$\overrightarrow{AB}.\vec{u}=-3-5+8=0$$

إذاً: $\overrightarrow{AB}$ عمودي على $\vec{u}$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AB}.\vec{v}=-9+5+4=0$$

إذاً: $\overrightarrow{AB}$ عمودي على $\vec{v}$

بما أن $\overrightarrow{AB}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من P فهذا يعني أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي P

التمرين الثالث:

ليكن المستقيم d المعطى وفق:

$$d:\begin{cases}x=1\\y=t\\z=-1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

والمستوي P الذي معادله:

$$P: x+2z+1=0$$

أثبت أنّ d محتوى في المستوي P .

الحل:

المستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}(0,1,0)$

والمستوي P ناظمه $\vec{n}(1,0,2)$

وبما أنّ:

$$\vec{u}.\vec{n}=0+0+0=0$$

إذاً المستقيم d والمستوي P متوازيان.

اختبار الاحتواء:

$$\begin{cases}x+2z+1=0\ldots(1)\\x=1\quad\ldots(2)\\y=t\quad\ldots(3)\\z=-1\ldots(4)\end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$1-2+1=0$$

$$0=0$$

محققة

ومنه للجملة عدد لا نهائي من الحلول

أي المستقيم d والمستوي P يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط إذاً المستقيم d محتوى في المستوي P

دراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات في الفراغ:

الأسلوب الأول	تدريج طلبات حيث: الطلب الأول: اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الفصل المشترك لـ P و Q "جملة معادلتين ثم فرضية بدلالة t " الطلب الثاني: أوجد I نقطة تقاطع المستويات P و Q و R : نوجد نقطة تقاطع d و R "أربعة معادلات" وهنا تكون I نقطة تقاطع P و Q و R ذاتها نقطة تقاطع d و R .
الأسلوب الثاني	✌ الخطوة الأولى: نحل جملة معادلات المستويات باستخدام طريقة غاوس وفق: * نرتب المعادلات أو نصلح المعادلات بحيث أمثال الـ x في المعادلة الأولى تكون العدد 1 . * المرحلة الأولى: تحتاج أمرين: $L_1+L_2\rightarrow L_2'$ و $L_1+L_3\rightarrow L_3'$ ثم ننفذ هذه الأوامر. * نصلح المعادلات بحيث نجعل أمثال الـ y في معادلة L_2' هي 1 . * المرحلة الثانية: تحتاج أمر واحد: $L_2'+L_3'\rightarrow L_3''$ ثم ننفذ هذا الأمر. ملاحظة: تنفيذ الأوامر يحتاج طالب يقول العمليات الحسابية لعبتي. ✌ الخطوة الثانية: ننظر إلى L_3'' ونميز: وجود الـ z : للجملة حل وحيد والمستويات P و Q و R تشترك بنقطة واحدة. اختفاء الـ z : محققة: للجملة عدد لا نهائي من الحلول إذاً المستويات P و Q و R تشترك بفصل مشترك. غير محققة: الجملة مستحيلة الحل والمستويات P و Q و R لا تشترك بأية نقطة.

التمرين الأول:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستويات:

$$P: 2x-y+3z=0$$

$$Q: x-2y+z=1$$

$$R: x+y-z=2$$

الطلب الأول:

أثبت أن المستويان P و Q متقاطعان

لدينا المستوي P ناظمه: $\vec{n}_P(2,-1,3)$

لدينا المستوي Q ناظمه: $\vec{n}_Q(1,-2,1)$

نلاحظ أنهما غير مرتبطين خطيان لأن المركبات غير متناسبة ومنه المستويان P و Q متقاطعين

الطلب الثاني:

جد تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d

لدينا الجملة:

$$\begin{cases}2x-y+3z=0\ldots(1)\\x-2y+z=1\ldots(2)\end{cases}$$

نضرب (1) بـ (-2) :

$$\begin{cases}-4x+2y-6z=0\ldots(1)'\\x-2y+z=1\ldots(2)\end{cases}$$

نجمع $(1)'$ و (2) نجد:

$$-3x-5z=1$$

$$3x=-5z-1$$

$$x=-\frac{5}{3}z-\frac{1}{3}$$

نعوض في (2) فنجد:

$$-\frac{5}{3}z-\frac{1}{3}-2y+z=1$$

$$2y=-\frac{2}{3}z-\frac{4}{3}$$

$$y=-\frac{1}{3}z-\frac{2}{3}$$

مكثفة شيفرة الـ 600

بفرض $z = 3t$

و $x = -5t - \frac{1}{3}$ $y = -t - \frac{2}{3}$

ومنه:

$$d: \begin{cases} x = -5t - \frac{1}{3} \\ y = -t - \frac{2}{3} \\ z = 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

الطلب الثالث:

أوجد نقطة تقاطع المستويات P و Q و R

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \dots (1) \\ x = -5t - \frac{1}{3} \dots (2) \\ y = -t - \frac{2}{3} \dots (3) \\ z = 3t \quad \dots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1)

$$-5t - \frac{1}{3} - t - \frac{2}{3} - 3t = 2$$

$$-9t = 3$$

$$t = -\frac{1}{3}$$

نعوض قيمة t في (2) و (3) و (4) فنجد:

$$x = \frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}$$

$$z = -1$$

ومنه نقطة تقاطع المستويات P و Q و R:

$$\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$$

التمرين الثاني:

ادرس الوضع النسبي للمستويات في كل من الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

$$P_1: x + y + z = 1$$
$$P_2: x - 2y + z = 1$$
$$P_3: 3x - 4y + 3z = -1$$

باستخدام طريقة غاوس نحل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \quad (l_1) \\ x - 2y + z = 1 \quad (l_2) \\ 3x - 4y + 3z = -1 \; (l_3) \end{cases}$$

المرحلة الأولى:

$$-l_1 + l_2 \mapsto l'_2$$
$$-3l_1 + l_2 \mapsto l'_2$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \quad (l_1) \\ -3y = 0 \quad (l'_2) \\ -7y = -4 \quad (l'_3) \end{cases}$$

نصلح (l'_2) لجعل أمثال y فيها 1 وفق:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \dots (l_1) \\ y = 0 \dots (l'_2) \\ -7y = -4 \dots (l'_3) \end{cases}$$

المرحلة الثانية:

$$7l'_2 + l'_3 \to l''_3$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \dots (l_1) \\ y = 0 \dots (l'_2) \\ 0 = -4 \dots (l''_3) \end{cases}$$

من (l''_3) نجد أنّ الجملة مستحيلة الحل وبالتالي المستويات P_1 و P_2 و P_3 لا تشترك بأيّة نقطة.

الحالة الثانية:

$$P_1: 2x - y - 4z = 7$$
$$P_2: x - 2y - 3z = 3$$
$$P_3: 3x - 3y - 5z = 8$$

باستخدام طريقة غاوس

نحل جملة المعادلات الآتية، بعد أن نرتب:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \quad (l_1) \\ 2x - y - 4z = 7 \quad (l_2) \\ 3x - 3y - 5z = 8 \quad (l_3) \end{cases}$$

المرحلة الأولى:

$$-2l_1 + l_2 \mapsto l'_2$$
$$-3l_1 + l_2 \mapsto l'_3$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \quad (l_1) \\ 3y + 2z = 1 \quad (l'_2) \\ 3y + 4z = -1 \; (l'_3) \end{cases}$$

نصلح l'_2 لجعل أمثال y فيها 1:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \quad (l_1) \\ y + \frac{2}{3}z = \frac{1}{3} \quad (l'_2) \\ 3y + 4z = -1 \; (l'_3) \end{cases}$$

المرحلة الثانية:

$$-3l'_2 + l'_3 \mapsto l''_3$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \quad (l_1) \\ 3y + 2z = 1 \quad (l'_2) \\ 2z = -2 \; (l''_3) \end{cases}$$

من (l''_3) نجد أن $z = -1$

نعوض في (l'_2): $y = 1$

نعوض في (l_1): $x = 2$

ومنه للجملة حل وحيد

$x = 2$ و $y = 1$ و $z = -1$

إذاً المستويات P_1 و P_2 و P_3 تشترك بنقطة واحدة هي: $(-2,1,-1)$

الحالة الثالثة:

$$P_1: 2x - y + 3z = 2$$
$$P_2: x + 2y + z = 1$$
$$P_3: 3x - 4y + 5z = 3$$

باستخدام طريقة غاوس نحل جملة المعادلات بعد أن نرتب:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \; (l_1) \\ 2x - y + 3z = 2 \; (l_2) \\ 3x - 4y + 5z = 3 (l_3) \end{cases}$$

المرحلة الأولى:

$$-2l_1 + l_2 \mapsto l'_2$$
$$-3l_1 + l_3 \mapsto l'_3$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \; (l_1) \\ -5y + z = 0 \; (l'_2) \\ -10y + 2z = 0 \; (l'_3) \end{cases}$$

نصلح l'_2 لجعل أمثال y فيها 1

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \; (l_1) \\ y - \frac{1}{5}z = 0 \; (l'_2) \\ -10y + 2z = 0 \; (l'_3) \end{cases}$$

المرحلة الثانية:

$$10\, l'_2 + l'_3 \mapsto l''_3$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \; (l_1) \\ -5y + z = 0 \; (l'_2) \\ 0 = 0 \; (l''_3) \end{cases}$$

من (l''_3) نجد أن للجملة عدد لا نهائي من الحلول و بالتالي المستويات P_1 و P_2 و P_3 تشترك بفصل مشترك (d)

إيجاد التمثيل الوسيطي للفصل مشترك d:

لدينا الجملة :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \; (1) \\ -5y + z = 0 \; (2) \end{cases}$$

من (2) نجد:

$$z = 5y$$

نعوض في (1):

$$x = -7y$$

بفرض $y = t$ نجد:

$$x = -7t$$
$$z = 5t$$

ومنه:

$$d: \begin{cases} x = -7t \\ y = t \\ z = 5t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

الوضع النسبي لمستوي وكرة:

الفكرة	نص السؤال	طريقة الإجابة
الوضع النسبي لمستوي وكرة	ليكن لدينا المستوي P والكرة S مركزها Ω، ونصف قطرها R، والمطلوب: إمّا: أثبت أنّ المستوي P مماس للكرة S. أو: أثبت أنّ المستوي P قاطع للكرة S. أو: أثبت أنّ المستوي P خارج للكرة S. أو: ادرس الوضع النسبي للمستوي P والكرة S.	* نحدّد R نصف قطر الكرة وΩ مركزها. * نوجد بُعد مركز الكرة عن المستوي P، أي نوجد $dist(\Omega, P)$ ونميّز: ▪ $dist(\Omega, P) > R$: فإنّ المستوي P خارج الكرة S. ▪ $dist(\Omega, P) = R$: فإنّ المستوي P مماس للكرة S. ▪ $dist(\Omega, P) < R$: فإنّ المستوي P قاطع للكرة S.
ملاحظات	* في المستوي القاطع للكرة يكون القطع هو دائرة ويتحقق استناداً إلى مبرهنة فيثاغورث $R^2 = h^2 + r^2$ حيث: R نصف قطر الكرة و r هو نصف قطر دائرة المقطع و h هو $\text{dist}(\text{المستوي}, \text{مركز الكرة})$ * في حالة المستوي القاطع للكرة يكون مركز الدائرة المقطع هو المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي القاطع * في حالة المستوي المماس للكرة تكون نقطة التماس هي المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي.	

تمرين:

١. ادرس الوضع النسبي بين المستوي:

$P: 2x + 4z - 5 = 0$

والكرة التي مركزها $\Omega(5,0,-1)$

ونصف قطرها $R = 1$

الحل:

نوجد:

$$dist(\Omega, P) = \frac{|10 - 4 - 5|}{\sqrt{4 + 0 + 16}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

٢. حدد طبيعة المقطع واحسب نصف قطرها.

بما أن:

$$dist(\Omega, P) < R$$

فالمستوي P قاطع للكرة S بدائرة نصف قطرها:

$$R^2 = r^2 + h^2$$
$$r^2 = R^2 - h^2$$
$$r = \sqrt{R^2 - \left(dist(\Omega, P)\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{1}{20}} = \sqrt{\frac{19}{20}} = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$$

الوضع النسبي لمستقيم وكرة:

الفكرة	نص السؤال	طريقة الإجابة
الوضع النسبي لمستقيم وكرة	ليكن لدينا المستقيم d والكرة S مركزها Ω، ونصف قطرها R، والمطلوب: إمّا: أثبت أنّ المستقيم d مماس للكرة S أو: أثبت أنّ المستقيم d قاطع للكرة S. أو: أثبت أنّ المستقيم d خارج للكرة S. أو: ادرس الوضع النسبي للمستقيم d والكرة S.	* نعوّض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة الكرة فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالمجهول t * نحل هذه المعادلة ونميز: ▪ للمعادلة حلّان، فالمستقيم قاطع للكرة في نقطتين. ▪ للمعادلة حلّ وحيد، فالمستقيم مماس للكرة في نقطة. ▪ المعادلة مستحيلة الحلّ، فالمستقيم خارج الكرة.
تحديد النقطة المشتركة للمستقيم d والكرة s	ليكن لدينا المستقيم d والكرة S، عيّن إحداثيّات النقاط المشتركة.	نعوّض قيم الحلول في التمثيل الوسيطي فنحصل على المطلوب

تمرين: ادرس الوضع النسبي بين المستقيم d والكرة S

$$d: \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$S: (x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6$$

الحل: نعوض d في S

$$1 + t^2 + (2 + t + 1)^2 = 6$$
$$1 + t^2 + t^2 + 6t + 9 = 6$$
$$2t^2 + 6t + 4 = 0$$
$$2(t^2 + 3t + 2) = 0$$
$$t^2 + 3t + 2 = 0$$
$$(t+2)(t+1) = 0$$

إما $t_1 = -2$

أو $t_2 = -1$

ومنه المستقيم قاطع للكرة في نقطتين.

نعوض t_1 في d:

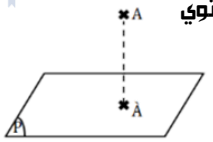
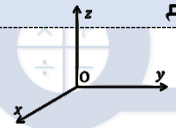
$$x = 0 \, , y = 2 \, , z = -1$$
$$\Rightarrow A(0,2,-1)$$

نعوض t_2 في d:

$$x = 0 \, , y = 1 \, , z = 0$$
$$\Rightarrow B(0,1,0)$$

المساقط القائمة:

المسقط القائم لنقطة على مستوٍ:

المستوي عشوائي	المستوي معلم		
لا تعتمد فكرته على الرّسم إنما تحتاج مهارة الخطوات: * نكتب معادلة المستوي P المراد الإسقاط عليه. * نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المارّ من النقطة A (المراد إيجاد مسقطها) والعمودي على المستوي السّابق P * يكون المسقط القائم هو نقطة تقاطع المستقيم والمستوي 	هو المستوي المرسوم على المحاور الإحداثيّة أو جزء منه. تعتمد فكرته على الرّسم، ونميّز فيه: 		
	المستوي (OXY)	المستوي (OXZ)	المستوي (OYZ)
	نحافظ على فاصلة وترتيب النقطة ونجعل راقم النقطة هو صفر، أيّ: $(x, y, 0)$	نحافظ على فاصلة وراقم النقطة ونجعل ترتيب النقطة هو صفر، أيّ: $(x, 0, z)$	نحافظ على ترتيب وراقم النقطة ونجعل فاصلة النقطة هو صفر أيّ: $(0, y, z)$

تمرين:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقاط $A(2,4,3)$ و $B(4,-2,3)$ و $C(1,-1,1)$ و $D(3,3,-3)$ عين احداثيات D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC)

الحل:

الخطوة (1):

نكتب معادلة المستوي (ABC):

$$\overrightarrow{AB}(2,-6,0) \, , \overrightarrow{AC}(-1,-5,-2)$$

غير مرتبطين خطياً لان المركبات غير متناسبة ومنه النقاط A و B و C تعين مستوي.

تحديد الناظم:

بفرض: $\vec{n}(a,b,c)$

ومنه:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$$
$$2a - 6b = 0 \dots (1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$$
$$-a - 5b - 2c = 0 \dots (2)$$

من (1) نجد:

$$2a = 6b \rightarrow a = 3b$$

نعوض في (2):

$$-3b - 5b - 2c = 0$$
$$c = -4b$$

بفرض: $b = 1$

$$a = 3 \quad , \quad c = -4$$
$$\rightarrow \vec{n}(3,1,-4)$$

تحديد النقطة: $A(2,4,3)$

كتابة المعادلة:

$$3(x-2) + (y-4) - 4(z-3) = 0$$
$$3x + y - 4z + 2 = 0$$

الخطوة (2):

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من D والعمودي على المستوي (ABC):

تحديد شعاع التوجيه: $\vec{u} = \vec{n}(3,1,-4)$

تحديد النقطة: $D(3,3,-3)$

كتابة التمثيل الوسيطي:

$$d: \begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = t + 3 \\ z = -4t - 3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

الخطوة (3):

D' هي نقطة تقاطع المستقيم والمستوي:

$$3x + y - 4z + 2 = 0 \dots (1)$$
$$x = 3t + 3 = \cdots (2)$$
$$y = t + 3 \dots (3)$$
$$z = -4t - 3 \dots (4)$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1):

$$9t + 9 + t + 3 + 16t + 12 + 2 = 0$$
$$26t + 26 = 0 \rightarrow t = -1$$

نعوض في (2) و (3) و (4):

$$x = 0 \, , y = 2 \, , z = 1$$
$$\Rightarrow D'(0,2,1)$$

المسقط القائم لنقطة على مستقيم:

مستقيم عشوائي

لا تعتمد فكرته على الرّسم إنما تحتاج مهارة، لدينا ثلاثة أساليب، حيث نستخدم دائماً الأسلوب الثاني إلّا في حال تدريج الطّلبات نستخدم المناسب

الأسلوب الأول	الأسلوب الثاني	الأسلوب الثالث
* نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d (المراد الإسقاط عليه) * نكتب معادلة المستوي P المارّ من النقطة A (المراد إيجاد مسقطها) والعمودي على المستقيم d * يكون المسقط القائم هي نقطة تقاطع المستوي P والمستقيم d	* نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d (المراد الإسقاط عليه) * نأخذ نقطة A' من المستقيم d (بحيث إحداثيّات A' هي نفسها معادلات المستقيم) يتحقّق: $\vec{u}.\overrightarrow{AA'}=0$ * بالتعويض نحصل على قيمة الوسيط t نعوّض قيمة t في التمثيلات الوسيطيّة للمستقيم d فنحصل على إحداثيّات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d	* نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d (المراد الإسقاط عليه) * نأخذ نقطة A' من المستقيم d (بحيث إحداثيّات A' هي نفسها معادلات المستقيم) * نوجد $(AA')^2$ بدلالة t (الإتمام إلى مربّع كامل) * نحدّد قيمة t التي تجعل $(AA')^2$ أصغر ما يمكن * نعوّض قيمة t في إحداثيّات النقطة A' * فتكون هي ذاتها إحداثيّات النقطة A' المطلوبة.

مستقيم معلم

هو المستقيم المرسوم على أحد المحاور الإحداثيّة تعتمد فكرته على الرّسم، ونميّز فيه:

المحور (OX)	المحور (OY)	المحور (OZ)
نحافظ على فاصلة النقطة ونجعل كلّ من التّرتيب والرّاقم هي أصفار أيّ: $(x,0,0)$	نحافظ على ترتيب النقطة ونجعل كلّ من الفاصلة والرّاقم هي أصفار، أيّ: $(0,y,0)$	نحافظ على راقم النقطة ونجعل كلّ من الفاصلة والتّرتيب هي أصفار أيّ: $(0,0,z)$

التمرين الأول:

لتكن النقاط $A(2,3,0)$ و $B(2,3,6)$ و $M(4,-1,2)$

1. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB).
2. اكتب معادلة المستوي P المار من M والعمودي على المستقيم (AB).
3. استنتج إحداثيات النقطة M' المسقط القائم للنقطة M على المستقيم (AB) .

الحل:

الطلب الأول:

تحديد شعاع التوجيه: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(0,0,6)$

تحديد النقطة: $A(2,3,0)$

ومنه:

$$(AB):\begin{cases}x=2\\y=3\\z=6t\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

الطلب الثاني:

تحديد الناظم: بما أنّ المستوي P عمودي على المستقيم (AB) فإنّ: $\vec{n}=\vec{u}(0,0,6)$

تحديد النقطة: $M(4,-1,2)$.

كتابة المعادلة:

$$P:a(x-x_M)+b(y-y_M)+c(z-z_M)=0$$
$$P:0(x-4)+0(y+1)+6(z-2)=0$$
$$P:6z-12=0$$

الطلب الثالث:

تكون M' هي نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي P :

$$\begin{cases}6z-12=0\ldots(1)\\x=2\ldots(2)\\y=3\ldots(3)\\z=6t\ldots(4)\end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$6(6t)-12=0$$
$$36t-12=0$$
$$36t=12$$
$$t=\frac{12}{36}\to t=\frac{1}{3}$$

نعوض قيمة t في (2) و (3) و (4) وفق:

$$x=2\,,y=3\,,z=2$$

أيّ $M'(2,3,2)$

التمرين الثاني:

نتأمل النقاط $A(0,1,-2)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,4,7)$

جد إحداثيات C' المسقط القائم للنقطة C على المستقيم (AB) .

الحل:

الخطوة الأولى:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) :

النقطة $B(1,2,0)$

شعاع التوجيه: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,1,2)$

التمثيل الوسيطي:

$$(AB):\begin{cases}x=t+1\\y=t+2\\z=2t\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

الخطوة الثانية:

بما أنّ C' من المستقيم (AB) فإنّ:

$$C'(t+1,t+2,2t)$$

تكون C' هي المسقط القائم لـ C على المستقيم (AB) إذا تحقق:

$$\overrightarrow{CC'}.\vec{u}=0\ldots(*)$$

حيث:

$$\vec{u}(1,1,2)$$
$$\overrightarrow{CC'}(t-2,t-2,2t-7)$$

نعوض في $(*)$:

$$(t-2)(1)+(t-2)(1)+(2t-7)(2)=0$$
$$t-2+t-2+4t-14=0$$
$$6t-18=0\to t=3$$

فتكون إحداثيات النقطة C' هي $C'(4,5,6)$.

البعد في الفراغ:

بعد نقطة A عن	نقطة B		نستخدم قانون المسافة بين نقطتين في الفراغ وفق: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
	مستوي P		نستخدم قانون بُعد نقطة عن مستوي في الفراغ وفق: $\text{dist}(A,P)=\frac{\lvert a.x_A+b.y_A+c.z_A+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
	مستقيم d	الحالة الأولى	المستقيم d هو الفصل المشترك لمستويين P و Q متعامدان (حصراً) استناداً إلى مبرهنة فيثاغورث يتحقق $\text{dist}(A,d)=\sqrt{\text{dist}^2(A,P)+\text{dist}^2(A,Q)}$
		الحالة الثانية	يكون بعد نقطة عن مستقيم في الفراغ هو المسافة بين هذه النقطة ومسقطها على هذا المستقيم.
البُعد بين مستويين متوازيين			* نأخذ نقطة A من المستوي P (مثلاً) وفق: نفرض قيم اختيارية لإحداثيتين من النقطة ولتكن مثلاً x و y * نعوض في معادلة المستوي فنحسب z * وبالتالي نحصل على النقطة المطلوبة. * نحسب البعد بين النقطة السابقة عن المستوي Q بتطبيق دستور الـ dist

التمرين الأول:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ولدينا المستويان P و Q معادلاتهما:

$$P: -2x+y+5z-1=0$$
$$Q: x+2y-7=0$$

والمطلوب:

١. أثبت أنّ المستويان P و Q متعامدان.

٢. لتكن لدينا النقطة $C(5,-2,-1)$ والمطلوب:

a) احسب المسافة بين النقطة C والمستوي P ثم المسافة بين النقطة C والمستوي Q

b) استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم Δ الفصل المشترك لـ P و Q.

الحل:

الطلب الأول:

لدينا ناظم المستوي P هو $\vec{n}_P(-2,1,5)$

لدينا ناظم المستوي Q هو $\vec{n}_Q(1,2,0)$

ومنه

$$\vec{n}_P.\vec{n}_Q=(-2)(1)+(1)(2)+(5)(0)$$
$$=-2+2+0=0$$

إذاً المستويان P و Q متعامدان.

الطلب الثاني:

a) المسافة بين C و P :

$$dist(C,P)=\frac{|(-2)(5)+(1)(-2)+(5)(-1)+(-1)|}{\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(5)^2}}$$
$$=\frac{|-10-2-5-1|}{\sqrt{4+1+25}}=\frac{|-18|}{\sqrt{30}}=\frac{18}{\sqrt{30}}$$
$$dist(C,Q)=\frac{|5-4-7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

b) بما أنّ المستويان P و Q متعامدان ومتقاطعان بفصل مشترك Δ فإنّ حسب فيثاغورث يكون:

$$dist(C,\Delta)=\sqrt{\big(dist(C,P)\big)^2+\big(dist(C,Q)\big)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{18}{\sqrt{30}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{\frac{324}{30}+\frac{36}{5}}$$
$$=\sqrt{\frac{324+216}{30}}=\sqrt{\frac{540}{30}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

التمرين الثاني:

نتأمل النقاط $A(2,1,-1)$ و $B(0,-1,3)$ و $M(-1,-4,4)$ أوجد بعد النقطة M عن المستقيم (AB).

الحل:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) حيث:

تحديد شعاع التوجيه: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(-2,-2,4)$

نقطة منه: $A(2,1,-1)$

نكتب التمثيل الوسيطي:

$$(AB):\begin{cases}x=-2t+2\\y=-2t+1\\z=4t-1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

لتكن النقطة

$M'(-2t+2,-2t+1,4t-1)$ هو المسقط القائم للنقطة M على المستقيم (AB) وبالتالي:

$MM'(-2t+3,-2t+5,4t-5)$

يكون شعاع توجيه المستقيم AB و MM' متعامدين: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MM'}=0$

$$(-2)(-2t+3)+(-2)(-2t+5)+(4)(4t-5)=0$$
$$4t-6+4t-10+16t-20=0$$
$$24t-36=0$$
$$24t=36$$
$$t=\frac{36}{24}\to t=\frac{3}{2}$$

إذاً: $M'(-1,-2,5)$ وبالتالي

بُعد النقطة M عن المستقيم (AB) هو:

$$dist\big(M,(AB)\big)=\left|\left|\overrightarrow{MM'}\right|\right|=\sqrt{0+4+1}$$
$$=\sqrt{5}$$

مجموعات النقاط:

نص السؤال	(1) صف مجموعة النقاط (2) ماذا تمثل مجموعة النقاط؟	
فكرة الحل	نميز الحالات الآتية	
	المعطى	الفكرة
	يكون المعطى هو علاقة من الشكل: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$	بالإتمام إلى مربعات كاملة نحصل على: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=k$ نميز الحالات: (1)في حال $k<0$ فإنها تمثل المجموعة خالية (2)في حال $k=0$ فإنها تمثل نقطة (x_0,y_0,z_0) (3)في حال $k>0$ فإنها تمثل كرة مركزها (x_0,y_0,z_0) ونصف قطرها $R=\sqrt{k}$
	يكون المعطى هو علاقة	نعوض في هذه العلاقة ونصلح وصولا إلى معادلة كما سبق.
	يكون المعطى هو علاقة "مساواة" تحوي طويلة "نظيم"	نصلح في هذه العلاقة للوصول إلى: (1) $\left|\left|\overrightarrow{MA}\right|\right|=\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$ فإنها تمثل الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB (2) $\left|\left|\overrightarrow{MA}\right|\right|=\left|\left|\overrightarrow{MB}\right|\right|$ فإنها تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

التمرين الأول: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ في الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

$$x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$$
$$x^2-2x+y^2+6y+z^2-2=0$$

بالإتمام إلى مربع كامل وفق:

$$x^2-2x+1-1+y^2+6y+9-9+z^2-2=0$$
$$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2-12=0$$
$$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=12$$

تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega(1,-3,0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{12}$

الحالة الثانية:

$$x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$$
$$x^2-10x+y^2+z^2+2z+26=0$$

بالإتمام إلى مربع كامل:

$$x^2-10x+25-25+y^2+z^2+2z+1-1+26=0$$
$$(x-5)^2+y^2+(z+1)^2=0$$

تمثل نقطة وحيدة إحداثياتها $\Omega(5,0,-1)$

الحالة الثالثة:

$$x^2+y^2+z^2-4x+5=0$$
$$x^2-4x+y^2+z^2+5=0$$

بالإتمام إلى مربع كامل:

$$x^2-4x+4-4+y^2+z^2+5=0$$
$$(x-2)^2+y^2+z^2+1=0$$
$$(x-2)^2+y^2+z^2=-1$$

تمثل مجموعة خالية من النقاط.

التمرين الثاني

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتان $A(1,1,1)$ و $B(0,-1,-1)$ والمطلوب:

١. أعط معادلة للمجموعة ε مكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $MA=2MB$ وما طبيعة المجموعة ε

٢. أعط معادلة للمجموعة p المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA=MB$ وما طبيعة المجموعة p

الطلب الأول:

$$MA=2MB\to MA^2=4MB^2$$
$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=4[(-x)^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2]$$
$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=4[(x)^2+(1+y)^2+(1+z)^2]$$
$$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2=4x^2+4+8y+4y^2+4+8z+4z^2$$
$$3x^2+3y^2+3z^2+2x+10y+10z+5=0$$
$$3x^2+2x+3y^2+10y+3z^2+10z+5=0$$
$$x^2+\frac{2}{3}x+y^2+\frac{10}{3}y+z^2+\frac{10}{3}z+\frac{5}{3}=0$$
$$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+y^2+\frac{10}{3}y+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+z^2+\frac{10}{3}z+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+\frac{5}{3}=0$$
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2+\left(z+\frac{5}{3}\right)^2=4$$

مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega\left(\frac{-1}{3},\frac{-5}{3},\frac{-5}{3}\right)$ ونصف قطرها $R=2$

الطلب الثاني:

$$MA=MB\to MA^2=MB^2$$
$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=(-x)^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2$$
$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=(x)^2+(1+y)^2+(1+z)^2$$
$$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2=x^2+1+2y+y^2+1+2z+z^2$$
$$-2x-4y-4z+1=0$$

المجموعة p تمثل معادلة مستو وهو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

مكثفة شيفرة الـ 600

التمرين الثالث:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $C(1,2,1)$ و $B(0,2,7)$ و $A(3,2,1)$

١. أوجد إحداثيات النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,3)$ و $(B,2)$ و $(A,1)$

٢. صف Γ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تحقق:

$$\left|\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|\right|=\left|\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right|\right|$$

الحل:

الطلب الأول:

$$x_G=\frac{(3)(1)+(0)(2)+(1)(3)}{1+2+3}=1$$
$$y_G=\frac{(2)(1)+(2)(2)+(2)(3)}{1+2+3}=2$$
$$z_G=\frac{(1)(1)+(7)(2)+(1)(3)}{1+2+3}=3$$
$$\rightarrow G(1,2,3)$$

الطلب الثاني:

نعلم أنّ:

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=(1+2+3)\overrightarrow{MG}$$
$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$

ولدينا:

$$\left|\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|\right|=\left|\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right|\right|$$
$$\left|\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|\right|=\left|\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-6\overrightarrow{MC}\right|\right|$$
$$\left|\left|6\overrightarrow{MG}\right|\right|=\left|\left|6\overrightarrow{MG}-6\overrightarrow{MC}\right|\right|$$
$$\left|\left|6\overrightarrow{MG}\right|\right|=\left|\left|6(\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MC})\right|\right|$$
$$\left|\left|6\overrightarrow{MG}\right|\right|=\left|\left|6(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{CM})\right|\right|$$
$$\left|\left|6\overrightarrow{MG}\right|\right|=\left|\left|6(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MG})\right|\right|$$
$$\left|\left|6\overrightarrow{MG}\right|\right|=\left|\left|6\overrightarrow{CG}\right|\right|$$
$$6\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right|=6\left|\left|\overrightarrow{CG}\right|\right|$$
$$\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right|=\left|\left|\overrightarrow{CG}\right|\right|$$

ومنهُ Γ مجموعة النقاط من الفراغ

تمثل معادلة كرة مركزها G ونصف قطرها $R=CG$

التمرين الرابع:

نتأمل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ نضع $r=\frac{1}{2}AB$ ونعرف I منتصف $[AB]$

١. أثبت أنه في حالة نقطة ما M من الفراغ تتحقق المساواة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-r^2$

٢. أثبت أن مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق أنّ: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r وهي أيضاً الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً فيها.

الحل:

الطلب الأول:

$$\underbrace{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}_{l_1}=\underbrace{MI^2-r^2}_{l_2}$$
$$l_1=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$
$$=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$$
$$=\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$$
$$=\left|\left|\overrightarrow{MI}\right|\right|^2+\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA})-\left|\left|\overrightarrow{IA}\right|\right|^2$$
$$=MI^2+0-r^2=l_2$$

الطلب الثاني:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$$
$$MI^2-r^2=0$$
$$MI=r$$

تمثل معادلة كرة مركزها I ونصف قطرها r .

المساحات:

الشكل	القانون
المثلث	مساحة المثلّث $=\frac{\text{الارتفاع}\times\text{القاعدة}}{2}$
المثلث القائم	مساحة المثلّث القائم $=\frac{\text{جداء الضلعين القائمتين}}{2}$
المثلث متساوي الأضلاع	$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ وارتفاعه: $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ حيث طول الضلع a
متوازي الأضلاع	مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة $\times$ الارتفاع
المستطيل	مساحة المستطيل = الطّول $\times$ العرض
المربع	مساحة المربّع $=(\text{طول الضلع})^2$
شبه المنحرف	مساحة شبه المنحرف $=\frac{\text{ارتفاع المنحرف شبه}\times\text{مجموع طولي القاعدتين}}{2}$ حيث قاعدتي شبه المنحرف: هما الضلعان المتوازيان , ارتفاع شبه المنحرف: هو العمودي على القاعدتين.
الدائرة	$S=\pi r^2$; حيث نصف القطر $=r$

الحجوم:

المجسمات ذات القاعدة الواحدة	
الشكل	القانون
(هرم/ رباعي وجوه/ مخروط/ .....)	حجم المجسم $=\frac{1}{3}(\text{مساحة القاعدة})\times(\text{ارتفاع المجسم})$

المجسمات ذات القاعدتين	
الشكل	القانون
(المكعّب/ متوازي المستطيلات/ متوازي السّطوح/ الموشور القائم/ الأسطوانة)	حجم المجسم $=(\text{مساحة القاعدة})\times(\text{ارتفاع المجسم})$

ملاحظة: لإيجاد حجم الهرم أو رباعي الوجوه:

الخطوة ①: نحدّد قاعدة الهرم بحيث:

(تم حساب مساحتها أو يكون حساب مساحته ممكناً)

الخطوة ② : نحدّد رأس الهرم ونوجد ارتفاع الهرم، حيث:

ارتفاع الهرم: هو بُعد رأس الهرم عن مستوي قاعدته.

ولإيجاد ارتفاع الهرم، نميّز حالتين:

الحالة ❶ : قاعدة الهرم هي مستوي معلم، فإنّنا:

نوجد مسقط رأس الهرم على مستوي القاعدة.

ارتفاع الهرم يكون هو المسافة بين رأس الهرم ومسقطه على مستوي القاعدة

الحالة ❷ : قاعدة الهرم هي مستوي عشوائي يكون:

$$h=dist(\text{مستوي القاعدة}\ ,\ \text{رأس الهرم})$$

الخطوة ③ : نضع القانون:

$$V=\frac{1}{3}S_b.h$$

الخطوة ④ : نعوّض

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(-1,0,1)$	$B(1,1,0)$	$C(1,-1,-4)$	$D(-1,1,2)$

الطلب الأول: أثبت أن المثلث (ABC) قائم واحسب مساحته.

لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(2,1,-1) \to AB = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$\overrightarrow{AC}(1,-1,-5) \to AC = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{26}$$
$$\overrightarrow{BC}(-1,-2,-4) \to BC = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$

ومنه المثلث ABC مختلف الأضلاع , نختبر كونه قائماً وفق:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$27 = 6 + 21 \to 27 = 27$$

ومنه المثلث (ABC) مختلف الأضلاع وقائم في B ووتره $[AC]$

مساحة المثلث:

$$S_{ABC} = \frac{AB.BC}{2} = \frac{\sqrt{6}.\sqrt{21}}{2} = \frac{2\sqrt{14}}{2}$$

الطلب الثاني: عين الشعاع $\vec{u}$ حيث:

$$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0 \quad , \quad \vec{u}.\overrightarrow{BC} = 0$$

بفرض: $\vec{u}(a,b,c)$ ولدينا:

$$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0 \to 2a + b - c = 0 \dots (1)$$
$$\vec{u}.\overrightarrow{BC} = 0 \to -a - 2b - 4c = 0 \dots (2)$$

ومنه:

$$\begin{cases} 2a + b - c = 0 \dots (1) \\ -a - 2b - 4c = 0 \dots (2) \end{cases}$$

نضرب (1) بـ (2):

$$\begin{cases} 4a + 2b - 2c = 0 \dots (1)' \\ -a - 2b - 4c = 0 \dots (2) \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2):

$$3a - 6c = 0$$
$$3a = 6c \to a = 2c$$

نعوض في (2) وفق:

$$-2c - 2b - 4c = 0 \to -2b - 6c = 0$$
$$2b = -6c \to b = -3c$$

بفرض $c = 1$ نجد أنّ:

$$a = -2 \quad , \quad b = -3$$
$$\vec{u}(2,-3,1)$$

الطلب الثالث: استنتج المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)

لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(2,1,-1) \quad , \quad \overrightarrow{BC}(-1,-2,-4)$$

شعاعين غير مرتبطين خطياً ومنه النقاط A و B و C تعيين مستو.

تحديد الناظم: مما سبق وجدنا أنّ:

$$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0 \quad , \quad \vec{u}.\overrightarrow{BC} = 0$$

أيّ أنّ $\vec{u}$ ناظم على المستوي (ABC) أيّ أنّ الناظم على المستوي (ABC) أيّ أنّ الناظم هو: $\vec{u}(2,-3,1)$

تحديد النقطة: $A(-1,0,1)$

المعادلة:

$$(ABC): 2(x+1) - 3(y-0) + 1(z-1) = 0$$
$$(ABC): 2x + 2 - 3y + z - 1 = 0$$
$$(ABC): 2x - 3y + z + 1 = 0$$

الطلب الرابع: احسب بُعد D عن المستوي (ABC)

$$dist(D,(ABC)) = \frac{|2(-1) - 3(1) + 2 + 1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

الطلب الخامس:

احسب حجم الرباعي وجوه $(ABCD)$:

رباعي الوجوه: $(D-ABC)$

قاعدته: الوجه (ABC) ومساحته $S_{ABC} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$

رأسه: النقطة D .

ارتفاعه:

$$h = dist(D,(ABC)) = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

ومنه الحجم:

$$V_{(D-ABC)} = \frac{1}{3}S_{ABC}.h = \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{14}}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) = 1$$

الطلب السادس:

تحقق أنّ معادلة المستوي (BCD) هي: $2x - 5y + 2z + 3 = 0$

تعويض B في معادلة المستوي:

$$2 - 5 + 3 = 0 \to 0 = 0 \to$$ محققة

ومنه B تحقق معادلة المستوي.

تعويض C في معادلة المستوي:

$$5 - 8 + 3 = 0 \to 0 = 0 \to$$ محققة

ومنه C تحقق معادلة المستوي.

تعويض D في معادلة المستوي:

$$-2 - 5 + 4 + 3 = 0 \to 0 = 0 \to$$ محققة

ومنه D تحقق معادلة المستوي.

إذاً: معادلة المستوي (BCD) هي: $2x - 5y + 2z + 3 = 0$

الطلب السابع:

احسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD) .

$$dist(A,(BCD)) = \frac{|-2+0+2+3|}{\sqrt{4+25+4}} = \frac{3}{\sqrt{33}}$$

الطلب الثامن:

استنتج مساحة المثلث (BCD)

لدينا رباعي الوجوه $(A-BCD)$ فيه:

القاعدة:

الوجه: (BCD) مساحته S_{BCD}

الرأس: النقطة A

الارتفاع:

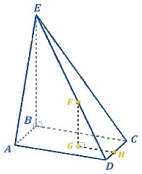
$$h = dist(A(BCD)) = \frac{3}{\sqrt{33}}$$

الحجم: $V_{ABCD} = 1$

أيّ:

$$V_{ABCD} = 1 \to \frac{1}{3}S_{BCD}.h = 1 \to S_{BCD} = \frac{3}{h} = \frac{3}{\frac{3}{\sqrt{33}}} = \sqrt{33}$$

المسألة الثانية:



$E-ABCD$ هرم رأسه E

وقاعدته مستطيل $[BE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$، $CD = 1$ و $AD = 2$ و $F.BE = 3$ نقطة من القطعة $[ED]$ تحقق $5\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{ED}$. المطلوب:

١. جد إحداثيات رؤوس الهرم و F في معلم $\left(B;\overrightarrow{BA},\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}\right)$.

٢. لتكن G المسقط القائم للنقطة F على المستوي $(ABCD)$ و H المسقط القائم للنقطة G على المستقيم (DC) . احسب طول القطعة المستقيمة $[FH]$.

٣. احسب حجم الهرم $E-ABCD$ واستنتج حجم رباعي الوجوه $(ACDE)$.

٤. اكتب معادلة المجسم الناتج عن دوران القطعة المستقيمة BD حول BC ، واحسب حجمه.

الحل:

الطلب الأول:

احداثيات رؤوس الهرم:

$D(1,2,0)$	$E(0,0,3)$	$C(0,2,0)$	$B(0,0,0)$	$A(1,0,0)$

أيجاد إحداثيات النقطة F حيث F نقطة من القطعة $[ED]$ تحقق:

$$5\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{ED}$$

مكثفة شيفرة الـ 600

بفرض: $F(x,y,z)$ ولدينا:

$$5\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{ED}$$
$$5\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5x \\ 5y \\ 5z-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$5x = 3 \to x = \frac{3}{5}$$
$$5y = 6 \to y = \frac{6}{5}$$
$$5z - 15 = -9 \to z = \frac{6}{5}$$
$$\to F\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

الطلب الثاني:

إحداثيات G: بما أن G هي المسقط القائم للنقطة F على المستوي $(ABCD)$

فإنّ: $G\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0\right)$

إحداثيات H:

H المسقط القائم للنقطة G على المستقيم (DC).

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (DC)

تحديد النقطة: $D(1,2,0)$

تحديد شعاع التوجيه: $\overrightarrow{DC}(-1,0,0)$

ومنه:

$$(DC): \begin{cases} x = -t+1 \\ y = 2 \\ y = 0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

بما أن H هي نقطة من المستقيم (DC) فإن: $H(1-t,2,0) \dots (*)$

وبما أن H هي المسقط القائم لـ G على المستقيم (DC) فإنه يحقق:

$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{GH} = 0 \dots (**)$$

حيث $\overrightarrow{GH}\left(\frac{2}{5} - t, \frac{4}{5}, 0\right)$

نعوض في $(**)$:

$$t - \frac{2}{5} = 0 \to t = \frac{2}{5}$$

نعوض في $(*)$ فنجد:

$$H\left(\frac{3}{5}, 2, 0\right)$$

طول القطعة المستقيمة $[FH]$:

لدينا: $\overrightarrow{FH}\left(0, \frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

ومنه:

$$FH = \sqrt{0 + \frac{16}{25} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{52}{25}} = \frac{2\sqrt{13}}{5}$$

الطلب الثالث:

حجم الهرم $E-ABCD$:

القاعدة: المستطيل $(ABCD)$ مساحته: $S_{ABCD} = AB.AD = 2$

الرأس: E

الارتفاع: نوجد E' مسقط E على المستوي $(ABCD)$:

$E'(0,0,0)$ ومنه: $h = EE' = 3$

القانون:

$$V_{E-ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} . h$$
$$V_{E-ABCD} = \frac{1}{3} .2 .3$$
$$V_{E-ABCD} = 2$$

استنتاج حجم رباعي الوجوه $(ACDE)$:

$$V_{ACDE} = \frac{1}{2} V_{E-ABCD}$$
$$V_{ACDE} = \frac{1}{2}(2) = 1$$

الطلب الرابع:

معادلة المجسم الناتج عن دوران القطعة المستقيمة $[BD]$ حول $[BC]$.

عند دوران $[BD]$ حول $[BC]$ ينتج مخروط:

محوره: $(O;\vec{j})$

رأسه: $B(0,0,0)$

مركز قاعدته: $C(0,2,0)$

نصف قطر قاعدته: $r = CD = 1$

ومنه:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = \frac{(r)^2}{(y_c)^2} y^2 \\ 0 \le y \le y_c \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + z^2 = \frac{1}{4} y^2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

حجم المخروط:

$$\text{الحجم} = \frac{1}{3}(\text{مساحة القاعدة})(\text{الارتفاع})$$

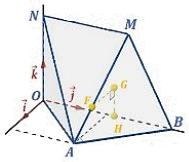
حيث : مساحة القاعدة $= \pi r^2 = \pi$

الارتفاع $= h = BC = 2$

ومنه:

$$V = \frac{1}{3}(\pi)(2) = \frac{2\pi}{3}$$

المسألة الثالثة:



b و m عددان حقيقيان موجبان. نتأمل النقاط

$A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ و $B(0,b,0)$ و $M(0,m,2)$

و $N(0,0,2)$ ، والنقطة F تحقق $3\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{MA}$

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المطلوب:

١. احسب b و m ليكون المثلث OAB قائماً في A ، ومساحة الرباعي $OBMN$ تساوي 5.

إذا علمت أن $b = 3$ و $m = 2$:

٢. احسب حجم المجسم $AOBMN$.

٣. لتكن G المسقط القائم لـ F على المستوي $(OBMN)$ و H المسقط القائم للنقطة G على المستقيم (OB) . احسب طول القطعة المستقيمة $[FH]$.

٤. اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها OB ، ونصف قطرها 3 ،واحسب حجمها

الحل:

الطلب الأول:

بما أن المثلث OAB قائماً في A فإنه يحقق:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = 0 \dots (*)$$

حيث: $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{3}{2}, b-\frac{3}{2}, 0\right)$

$$\overrightarrow{AO}\left(\frac{-3}{2}, \frac{-3}{2}, 0\right)$$

نعوض في $(*)$:

$$\frac{9}{4} - \frac{3}{2}b + \frac{9}{4} = 0$$
$$\frac{3}{2}b = \frac{9}{2} \to b = 3$$

بما أن مساحة الرباعي $OBMN$ تساوي 5 ،فإنه يتحقق:

$$S_{OBMN} = 5$$
$$\frac{OB + MN}{2} . ON = 5$$
$$\frac{3+m}{2} . 2 = 5$$
$$\to m = 2$$

الطلب الثاني:

حجم المجسم $AOBMN$: $V_{AOBMN} = \frac{1}{3} S_{OBMN} . h$

حيث: h هو المسافة بين النقطة A (الرأس) ومسقطها A' على المستوي $OBMN$ ، أيّ: $A'\left(0, \frac{3}{2}, 0\right)$: $h = AA' = \frac{3}{2}$

ومنه:

$$V = \frac{1}{3}(5)(3) = \frac{5}{2}$$

الطلب الثالث:

احداثيات G المسقط القائم لـ F على المستوي $OBMN$:

احداثيات F : بفرض: $F(x,y,z)$ ولدينا:

$$3\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{MA}$$

$$3\begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z-2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x \\ 3y-6 \\ 3z-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$3x = 3 \rightarrow x = 1$$

$$3y - 6 = -1 \rightarrow y = \frac{5}{3}$$

$$3z - 6 = -4 \rightarrow z = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow F\left(1, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

إحداثيات G :

$$G\left(0, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

احداثيات H المسقط القائم للنقطة G على المستقيم (OB) :

$$H\left(0, \frac{5}{3}, 0\right)$$

طول لقطعة المستقيمة $[FH]$:

لدينا: $\overrightarrow{FH}\left(-1, 0, \frac{-2}{3}\right)$ ومنه: $FH = \sqrt{1+0+\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

الطلب الرابع:

معادلة الأسطوانة التي محورها OB ونصف قطرها 3 :

المحور: $(O;\vec{j})$

مركزي قاعدتيها: $O(0,0,0)$ و $B(0,3,0)$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$$

حجم الأسطوانة:

$$\text{الحجم} = (\text{مساحة القاعدة})(\text{الارتفاع})$$

حيث: $\text{مساحة القاعدة} = \pi r^2 = 9\pi$

$$\text{الارتفاع} = h = OB = 3$$

$$\text{الحجم} = (3)(9\pi) = 27\pi$$

فهرس بحث الأشعة:

١. تذكرة وعموميات:
- تعريف الشعاع
- تعريف الشعاع الصفري
- تعريف الشعاعين المتساويين
- تعريف الشعاعين المتعاكسين

٢. العمليات على الأشعة(شعاعياً):
- مجموع شعاعين متساوين
- مجموع شعاعين متعاكسين
- مجموع شعاعين في حالة تعاقب
- مجموع شعاعين لهما نفس البداية
- طرح شعاعين

٣. تمهيد تحليلي:
- المعلم في الفراغ
- إحداثيات نقطة في الفراغ
- مركبات شعاع في الفراغ
- إيجاد مركبات شعاع

٤. العمليات على الأشعة (تحليلياً):
- جداء عدد حقيقي بشعاع
- مجموع شعاعين
- تساوي شعاعين

٥. إيجاد إحداثيات النقاط:
- إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة
- إحداثيات مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات)
- إحداثيات مركز متوازي أضلاع
- إحداثيات نقطة بمعلومية علاقة شعاعية وإحداثيات باقي النقاط
- إحداثيات النقطة التي تجعل الرباعي متوازي أضلاع
- إحداثيات نقطة نظيرة نقطة بالنسبة إلى نقطة
- إحداثيات نقطة نظيرة نقطة بالنسبة إلى المبدأ

٦. أنواع المعالم:
المعلم (المتجانس – المتعامد - الكيفي)

٧. إيجاد إحداثيات النقاط بالاعتماد على معلم متجانس في:
- المكعب
- متوازي مستطيلات أبعاده معلومة
- هرم يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة
- رباعي وجوه يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة

٨. نظيم شعاع (المسافة بين نقطتين في الفراغ):
- قانون نظيم شعاع
- قانون المسافة في الفراغ

٩. تطبيقات المسافة بين نقطتين في الفراغ:
- تحديد نوع المثلث
- انتماء نقطة إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة
- وقوع نقطة على كرة
- إحداثيات نقطة تقع على أحد المحاور الإحداثية ومتساوية البعد عن نقطتين

١٠. الارتباط الخطي لشعاعين:
- إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة "إثبات أن نقطة تقع على مستقيم"
- إثبات أنّ ثلاثة نقاط تشكل مستوي

١١. الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:
- إثبات وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد
- إثبات أن مستقيم يوازي مستوي
- إثبات تقاطع مستقيمان

١٢. مركز الأبعاد المتناسبة (لنقطتين / لثلاثة نقاط/ لأربعة نقاط):
- ايجاد إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة
- قراءة علاقة
- إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة "إثبات أن نقطة تقع على مستقيم"
- إثبات وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد
- إثبات تلاقي مستقيمات
- توضيع مركز الأبعاد المتناسبة في شكل
- تعين ثوابت

١٣. الجداء السلمي في الفراغ:
- أوجد الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$
- هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين
- عين قيمة الوسيط α ليكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين
- استنتج النسبة المثلثية للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$
- أثبت أن النقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث (ABC)

١٤. معادلات المستوي:
- معادلة مستوي يوازي مستوي آخر
- معادلة مستوي يُعامد مستقيم
- معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة
- معادلة مستوي مار من نقطة ويحوي شعاعين موجهين
- معادلة مستوي مار من نقطة ويُعامد مستويان
- معادلة مستوي مار من نقطتين ويُعامد مستوي آخر
- معادلة مستوي مار من ثلاثة نقاط
- معادلة مستوي يحوي مستقيمان متقاطعان
- معادلة مستوي مماس لكرة في نقطة

١٥. تطبيقات معادلة المستوي:
- انتماء نقطة إلى مستوي
- إثبات معدلة مستوي (معطاة)
- وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد
- بعد نقطة عن مستوي في الفراغ
- البعد بين مستويين متوازيين
- كتابة معادلة مستوي مار من أربعة نقاط
- إثبات أن شعاع (معطى) ناظم على المستوي

١٦. التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ:
- التمثيل الوسيطي لمستقيم يوازي مستقيم
- التمثيل الوسيطي لمستقيم يُعامد مستوي
- التمثيل الوسيطي لمستقيم مار من نقطتين
- التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لمستويان

مكثفة شيفرة الـ 600

١٧. تطبيقات التمثيل الوسيطي:
* إثبات تمثيل وسيطي لمستقيم
* انتماء نقطة إلى مستقيم في الفراغ

١٨. الكرة:
* معادلة كرة مركزها معلوم وتمر من نقطة
* معادلة كرة قطرها $[AB]$
* معادلة كرة مركزها معلوم وتمس مستوي

١٩. معادلة المخروط:
* اكتب معادلة المخروط
* صف مجموعة النقاط التي تحقق المعادلة.
* وقوع نقطة على مخروط

٢٠. معادلة لأسطوانة:
* اكتب معادلة لأسطوانة
* صف مجموعة النقاط التي تحقق معادلة (معطاة)
* وقوع نقطة على اسطوانة.

٢١. الأوضاع النسبية:
- الوضع النسبي لمستويان في الفراغ:
* إثبات أن مستويان متوازيان
* إثبات أن مستويان متقاطعان
* إثبات أن مستويان متعامدان
* إثبات أن مستويان منطبقان
* كيفية إيجاد الفصل المشترك لمستقيمان متقاطعان

- الوضع النسبي لمستقيمان في الفراغ:
* إثبات أن مستقيمان متوازيان
* إثبات أن مستقيمان منطبقان
* إثبات أن مستقيمان متخالفان
* إثبات أن مستقيمان متقاطعان
* إثبات أن مستقيمان متعامدان
* كيفية إيجاد إحداثيات نقطة تقاطع مستقيمان
* هل المستقيمان d_1 ،d_2 يقعان في مستوٍ واحد؟

- الوضع النسبي بين مستقيم ومستوي في الفراغ:
* إثبات أن مستقيم ومستوي متوازيان
* إثبات أن مستقيم ومستوي متقاطعان
* إثبات أن مستقيم ومستوي متعامدان بحيث ناظم المستوي معلوم
* إثبات أن مستقيم ومستوي متعامدان بحيث ناظم المستوي غير معلوم
* ايجاد إحداثيات نقطة تقاطع مستقيم ومستوي
* إثبات أنّ مستقيم محتوى في مستوي.

- الوضع النسبي لثلاث مستويات في الفراغ

- الوضع النسبي لمستوي وكرة:
* إثبات أن مستوي مماس لكرة
* إثبات أن مستوي قاطع لكرة
* إثبات أن مستوي خارج الكرة
* تحديد نقطة تماس المستوي والكرة

- الوضع النسبي لمستقيم وكرة:
* إثبات أن مستقيم مماس لكرة
* إثبات أن مستقيم قاطع لكرة
* إثبات أن مستقيم خارج الكرة
* تحديد النقطة المشتركة للمستقيم والكرة

٢٢. المساقط القائمة:
* المسقط القائم لنقطة على مستوي (عشوائي/معلم)
* المسقط القائم لنقطة على مستقيم (عشوائي/معلم)

٢٣. بُعد نقطة عن مستقيم في الفراغ.

٢٤. مجموعات النقاط.

٢٥. المساحات – الحجوم.

النخبة
ELITE MATH

شيفرة الـ 600 في الأعداد العقدية

الأشكال العقدية:

	الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
الشكل	$z = x + iy$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	$z = re^{i\theta}$
حيث	x : هي القسم الحقيقي للعدد العقدي z ويرمز له $\mathrm{Re}(z)$ y : هي القسم التخيلي للعدد العقدي z ويرمز له بـ $\mathrm{Im}(z)$ حيث القسم التخيلي هو أمثال i	$r = \lvert z\rvert$, أي r : هي طويلة العدد العقدي z θ : هي زاوية العدد العقدي z أيّ: $\theta = \arg(z)$	$r = \lvert z\rvert$, أي r : هي طويلة العدد العقدي z θ : هي زاوية العدد العقدي z أيّ: $\theta = \arg(z)$
شروط الشكل	لا يوجد	* r عدد حقيقي موجب تماماً * الإشارة بين الـ sin والـ cos هي $(+)$ حصراً * θ كوني شو ما بدك لكن بشرط θ الـ sin نفسها θ الـ cos * الـ i رفيقة الـ sin حصراً	* r عدد حقيقي موجب تماماً

التمرين الأول:

حدد كلاً من $\mathrm{Re}(z)$ و $\mathrm{Im}(z)$ في الحالات الآتية:

z	$\mathrm{Re}(z)$	$\mathrm{Im}(z)$
$\sqrt{2} - i$	$\sqrt{2}$	-1
5	5	0
$-7i$	0	-7

التمرين الثاني:

حدد كلاً من $\arg(z)$ و $\lvert z\rvert$ في الحالات الآتية:

z	$\lvert z\rvert$	$\arg(z)$
$\ln(2)\left[\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right]$	$\ln(2)$	$\frac{7\pi}{5}$
$\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$	1	$-\frac{\pi}{7}$
$\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{2}{3}e^{-i\frac{\pi}{5}}$	$\frac{2}{2}$	$-\frac{\pi}{5}$

التمرين الثالث:

هل الشكل مثلثي في الحالات الآتية:

الشكل	نعم	لا
$z_1 = -3\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$		
$z_2 = 3i\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$		
$z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$		
$z_4 = 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$		
$z_5 = 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$		
$z_6 = (1+i)\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$		
$z_7 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^5$		
$z_8 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$		

التمرين الرابع:

هل الشكل أسي في الحالات الآتية:

الشكل	نعم	لا
$z_1 = -3e^{i\frac{\pi}{4}}$		
$z_2 = 2ie^{-i\frac{\pi}{4}}$		

العمليات على الأشكال:

	الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
لدينا	$z = x + iy$	$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$	$z = re^{i\theta}$
المرافق	هي العدد العقدي عند تغيير إشارة القسم التخيلي أي: $\bar{z} = x - iy$	هو العدد العقدي عند تغيير إشارة الزاوية أيّ: $\bar{z} = r(cos(-\theta) + isin(-\theta))$	هو العدد العقدي عند تغيير إشارة الزاوية أيّ: $\bar{z} = re^{-i\theta}$
الطويلة	هي عدد موجب حقيقي ناتج عن جمع تربيع القسم الحقيقي والقسم التخيلي تحت الجذر أي: $\lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	هي عدد حقيقي موجب تماماً حيث: $\lvert z\rvert = r$	هي عدد حقيقي موجب تماماً حيث: $\lvert z\rvert = r$
القوة	لدينا $(x+iy)^n$ حيث n عدد طبيعي موجب تماماً فإننا نميز حالتين: الحالة الأولى: لدينا n زوجي: $(x+iy)^n = ((x+iy)^2)^{\frac{n}{2}}$ الحالة الثانية: لدينا n فردي: $(x+iy)^n = (x+iy)(x+iy)^{n-1}$ $= (x+iy)((x+iy)^2)^{\frac{n-1}{2}}$	دستور دوموافر: أياً كان العدد الحقيقي θ والعدد الصحيح n كان: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ نتيجة: $(z)^n = \left(r(\cos\theta + i\sin\theta)\right)^n$ $= r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$	دستور دوموافر: أياً كان العدد الحقيقي θ والعدد الصحيح n كان: $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ نتيجة: $(z)^n = \left(r\left(e^{i\theta}\right)\right)^n$ $= (r)^n\left(e^{i\theta}\right)^n = r^n\left(e^{in\theta}\right)$
لدينا	$z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$	$z_1 = r_1[\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)]$ $z_2 = r_2[\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)]$	$z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$
الجمع	هو جمع القسم الحقيقي من z_1 مع القسم الحقيقي من z_2 وكذلك القسم التخيلي من z_1 مع القسم التخيلي من z_2 وفق: $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$ $= x_1 + x_2 + iy_1 + iy_2$ $= x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i$	لا يوجد قانون ينص على جمع عددان عقديان بالشكل المثلثي ولكن يمكن استخدام أحد الطريقتين: الطريقة الأولى: تتبع الخطوات: * كتابة كل من z_1 و z_2 بالشكل الجبري * جمع كل من z_1 و z_2 بالشكل الجبري * إعادة كتابة ناتج الجمع بالشكل المثلثي الطريقة الثانية: استخدام خواص وقواعد	لا يوجد قانون ينص على جمع عددان عقديان بالشكل الأسي ولكن يمكن استخدام أحد الطريقتين: الطريقة الأولى: تتبع الخطوات: * كتابة كل من z_1 و z_2 بالشكل الجبري * جمع كل من z_1 و z_2 بالشكل الجبري * إعادة كتابة ناتج الجمع بالشكل الأسي الطريقة الثانية: استخدام خواص وقواعد
الضرب	نستخدم النشر مع مراعاة أن $(i)^2 = -1$ وفق: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$ $= x_1x_2 + x_1y_2i + x_2y_1i - y_1y_2$ $= x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)i$	نضرب الطويلة بالطويلة ونجمع الزوايا وفق: $z_1 . z_2$ $= r_1 . r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$	نضرب الطويلة بالطويلة ونجمع الزوايا وفق: $z_1 . z_2 = (r_1 . r_2)e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
ضرب العدد العقدي بمرافقه	$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy)$ $= x^2 + y^2 = r^2$	$z_1 . \bar{z}_1$ $= r(\cos\theta + i\sin\theta) . r(\cos -\theta + i\sin -\theta) = r^2$	$z . \bar{z} = \left(re^{i\theta}\right)\left(re^{-i\theta}\right) = r^2$

ELITE

القسمة	نميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كان المقام لا يحوي i فإننا نستخدم تفريق الكسور الحالة الثانية: إذا كان المقام يحوي i فإننا نضرب البسط والمقام بمرافق المقام	قسم الطويلة على الطويلة ونطرح الزوايا وفق: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ $\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}[\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1)]$	نقسم الطويلة على الطويلة ونطرح الزوايا وفق: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ $\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}$
علاقتا أويلر			$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\rightarrow e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$ $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ $\rightarrow e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta$

التمرين الأول:

لتكن لدينا الأعداد العقدية الآتية:

$z_1=-2-3i$	$z_2=1+i$

أوجد كلاً مما يلي:

1. $\text{Im}(z_1)=-3$
2. $\text{Re}(z_2)=1$
3. $|z_1|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$
4. $|z_2|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$
5. $\overline{z_1}=-2+3i$
6. $\overline{z_2}=1-i$
7. $(z_1)^2=(-2-3i)^2$
$=4+12i-9=-5+12i$
8. $(z_2)^9=(1+i)^9$
$=(1+i)(1+i)^8=(1+i)((1+i)^2)^4$
$=(1+i)(1+2i-1)^4=(1+i)(2i)^4$
$=(1+i)(2)^4(i)^4=(1+i)(16)(1)$
$=16(1+i)=16+16i$
9. $z_1+z_2=-2-3i+1+i=-1-2i$
10. $z_2-z_1=1+i+2+3i=3+4i$
11. $\frac{z_2}{5}=\frac{1+i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}i$
12. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{-2-3i}{1+i}=\frac{(-2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$
$=\frac{-2+2i-3i-3}{1+1}=\frac{-5-i}{2}=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$

التمرين الثاني:

أوجد ناتج ما يلي:

1. $i^7=i.i^6=i.((i)^2)^3$
$=i(-1)^3=i(-1)=-i$

2. $i^{2024}=((i)^2)^{1012}=(-1)^{1012}=1$

3. $i^{99}=i.i^{98}=i.((i)^2)^{49}$
$=i(-1)^{49}=i(-1)=-i$

4. $(1+i)^{2007}=(1+i)(1+i)^{2006}$
$=(1+i)((1+i)^2)^{1003}$
$=(1+i)(1+2i-1)^{1003}$
$=(1+i)(2i)^{1003}$
$=(1+i)(2)^{1003}(i)^{1003}$
$=(1+i)(2)^{1003}(i)(i)^{1002}$
$=(1+i)(2)^{1003}(i)((i)^2)^{501}$
$=(1+i)(2)^{1003}(i)(-1)^{501}$
$=(1+i)(2)^{1003}(i)(-1)$
$=-(2)^{1003}i(1+i)$

5. $(1-i)^{600}=((1-i)^2)^{300}$
$=(1-2i-1)^{300}$
$=(-2i)^{300}=(-2)^{300}.(i)^{300}$
$=(-1)^{300}(2)^{300}((i)^2)^{150}$
$=(1)(2)^{300}(-1)^{150}$
$=(2)^{300}(1)=(2)^{300}$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا العددان العقديان:

$z_1=3[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
$z_2=5\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

أوجد كلاً مما يلي:

1. $\arg(z_1)=-\frac{\pi}{4}$
2. $\arg(z_2)=\frac{\pi}{3}$
3. $|z_1|=3$
4. $|z_2|=5$
5. $\overline{z_1}=3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$
6. $\overline{z_2}=5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$
7. $(z_1)^9=\left(3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)^9$
$=(3)^9\left[\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)\right]$
$=(3)^9\left[\cos\left(\frac{-8\pi-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-8\pi-\pi}{4}\right)\right]$
$=(3)^9\left[\cos\left(-2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-2\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]$
$=(3)^9\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$
8. $(z_2)^3=\left(5\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\right)^3$
$=(5)^3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)\right]$
$=125[\cos(\pi)+i\sin(\pi)]$
9. $z_1.z_2$
$=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].5\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$
$=15\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right]$
$=15\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$
10. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}{5\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]}$
$=\frac{3}{5}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$
$=\frac{3}{5}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

التمرين الرابع:

ليكن لدينا الأعداد العقدية الآتية:

$z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$	$z_2=3.e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$z_3=\sqrt{2}.e^{i\frac{2\pi}{3}}$	

أوجد كلاً مما يلي:

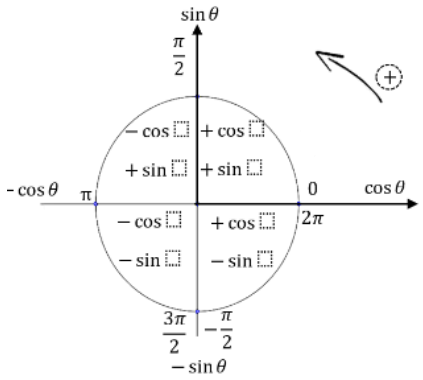
1. $\arg(z_1)=\frac{\pi}{3}$
2. $\arg(z_2)=-\frac{\pi}{4}$
3. $\arg(z_3)=\frac{2\pi}{3}$
4. $|z_1|=1$
5. $|z_2|=3$
6. $|z_3|=\sqrt{2}$
7. $\overline{z_1}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$
8. $\overline{z_2}=3.e^{i\frac{\pi}{4}}$
9. $\overline{z_3}=\sqrt{2}.e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
10. $(z_1)^3=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=e^{i\frac{3\pi}{3}}=e^{i\pi}$
11. $(z_2)^2=\left(3.e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2=9.e^{-i\frac{\pi}{2}}$
12. $(z_3)^4=\left(\sqrt{2}.e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4=4.e^{i\frac{8\pi}{3}}$
$=4.e^{i\frac{8\pi}{3}}=4.e^{i\left(\frac{6\pi+2\pi}{3}\right)}=4.e^{i\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}=4.e^{i\frac{2\pi}{3}}$
13. $z_1.z_2=e^{i\frac{\pi}{3}}.3e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$=3.e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=3.e^{i\frac{\pi}{12}}$
14. $z_1.z_2.z_3=e^{i\frac{\pi}{3}}.3e^{-i\frac{\pi}{4}}.\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$
$=3.e^{i\frac{\pi}{12}}.\sqrt{2}.e^{i\frac{2\pi}{3}}=3\sqrt{2}.e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}$
$=3\sqrt{2}.e^{i\frac{9\pi}{12}}=3\sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}$
15. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3.e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$
16. $\frac{z_2}{z_3}=\frac{3.e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}.e^{i\frac{2\pi}{3}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{3}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

المعلوم	θ	$\sin\theta$ و $\cos\theta$
المجهول	$\sin\theta$ و $\cos\theta$	θ

الخطوات:

الزاوية شهيرة:

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$



الزاوية غير شهيرة ويمكن إشهارها:

لإيجاد النسب المثلثية للزاوية غير الشهيرة فإنّ ذلك يتم على مرحلتين:

المرحلة الأولى: مرحلة الإصلاح:

نحاول في هذه المرحلة كتابة الزاوية غير الشهيرة θ بدلالة زاوية شهيرة.

المرحلة الثانية: مرحلة الإرجاع: وتتم وفق:

المجموعة الأولى	المجموعة الثانية		المجموعة الثالثة
	الحالة الأولى	الحالة الثانية	
$\cos(\pi-x)=-\cos x$ $\sin(\pi-x)=+\sin x$ $\cos(\pi+x)=-\cos x$ $\sin(\pi+x)=-\sin x$ $\cos(-x)=+\cos x$ $\sin(-x)=-\sin x$ $\cos(+x)=+\cos x$ $\sin(+x)=+\sin x$	في حال كانت الزاوية θ من الشكل: $\theta=(\text{عدد زوجي}\ \pi+\theta_1)$ فإننا عند الإرجاع نكتب: $\cos(\text{عدد زوجي}\ \pi+\theta_1)=\cos(\theta_1)$ $\sin(\text{عدد زوجي}\ \pi+\theta_1)=\sin(\theta_1)$ أيّ في هذه الحالة نحذف الـ $(\text{عدد زوجي}\ \pi)$ عند الإرجاع ثم نكمل كما سبق.	في حال كانت الزاوية θ من الشكل: $\theta=(\text{عدد فردي}\ \pi+\theta_1)$ فإننا نكتب الزاوية θ من الشكل: $\theta=(\pi+\theta_1)$ ثم عند الإرجاع نكتب: $\cos(\text{عدد فردي}\ \pi+\theta_1)=\cos(\pi+\theta_1)=-\cos\theta_1$ $\sin(\text{عدد فردي}\ \pi+\theta_1)=\sin(\pi+\theta_1)=-\sin\theta_1$ أيّ أنه في حال وجود عدد فردي من π فإنه يستبدل بـ π ثم نكمل كما سبق.	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=+\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=+\cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=+\cos x$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=+\sin x$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$
الملاحظة الأولى:	آحيانا بعد تطبيق قواعد المجموعة الثانية نحتاج لتطبيق قواعد المجموعة الأولى.		
الملاحظة الثانية:	انتبه للأشكال: $\cos(\theta-\pi)=\cos(-(-\theta+\pi))=\cos(-(\pi-\theta))=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\sin(\theta-\pi)=\sin(-(-\theta+\pi))=\sin(-(\pi-\theta))=-\sin(\pi-\theta)=-\sin\theta$		

الخطوات:

١. ننظر إلى الإشارات ونحدد الربع حيث:

- $\cos$ موجب و $\sin$ موجب فهذا يعني ربع أول
- $\cos$ سالب و $\sin$ موجب فهذا يعني ربع ثاني
- $\cos$ سالب و $\sin$ سالب فهذا يعني ربع ثالث
- $\cos$ موجب و $\sin$ سالب فهذا يعني ربع رابع

٢. ننظر إلى النسب المثلثية دون إشارات ونحدد الزاوية θ_1 بما يتوافق مع جدول النسب المثلثية الشهيرة

٣. نكتب الزاوية θ بدلالة اسم الربع والزاوية الشهيرة θ_1 حيث:

- الربع الأول $+\theta_1$
- الربع الثاني: $\pi-\theta_1$
- الربع الثالث: $\pi+\theta_1$
- الربع الرابع: $-\theta_1$

ملاحظة:

بعد كتابة z بالشكل المثلثي أو الأسي فإننا نفكر بالقياس الأساسي للزاوية θ وعند اللزوم وفق:

- الحالة الأولى: البسط أصغر من المقام فإنّهُ لا يوجد داعي للقياس الأساسي.
- الحالة الثانية: البسط أكبر من المقام: نميز:
  - البسط أكبر من المقام وأصغر من ضعفي المقام فإنّهُ لا داعي للقياس الأساسي.
  - البسط أكبر من المقام وأكبر من ضعفي المقام نوجد القياس الأساسي كما ورد معنا في فكرة الإصلاح.

الزاوية غير شهيرة ولا يمكن إشهارها:

نطبق القانون:

$\cos\theta=\frac{x}{r}$ ← من الشكل المثلثي أو الأسي — من الشكل الجبري →

$\sin\theta=\frac{y}{r}$ ← من الشكل المثلثي أو الأسي — من الشكل الجبري →

التمرين الأول

عيّن النسب المثلثية للزوايا الآتية:

1. $\theta=\frac{13\pi}{6}=\frac{12\pi+\pi}{6}=2\pi+\frac{\pi}{6}$

$\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

2. $\theta=\frac{9\pi}{4}=\frac{8\pi+\pi}{4}=2\pi+\frac{\pi}{4}$

$\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $\theta=\frac{4\pi}{3}=\frac{3\pi+\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$

$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\theta=\frac{71\pi}{3}=\frac{72\pi-\pi}{3}=24\pi-\frac{\pi}{3}$

$\cos\left(24\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$\sin\left(24\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

التمرين الثاني:

حدد θ في كل من الحالات الآتية:

1.	$\cos\theta=1$	$\sin\theta=0$
2.	$\cos\theta=0$	$\sin\theta=1$
3.	$\cos\theta=-1$	$\sin\theta=0$
4.	$\cos\theta=-\frac{1}{2}$	$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$
5.	$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
6.	$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\theta=-\frac{1}{2}$
7.	$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

مكثفة شيفرة الـ 600

الحل:

1. $\theta = 0$	2. $\theta = \frac{\pi}{2}$
3. $\theta = \pi$	4. $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$
5. $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$	6. $\theta = -\frac{\pi}{6}$
7. $\theta = \frac{\pi}{4}$	

التمرين السادس:

عيّن في كل من الحالات الآتية القياس الأساسي للزاوية الموجهة θ:

1. $\theta = \frac{7\pi}{2}$	2. $\theta = -\frac{4\pi}{3}$
3. $\theta = \frac{35\pi}{6}$	4. $\theta = \frac{21\pi}{4}$
5. $\theta = -\frac{202\pi}{3}$	6. $\theta = -18\pi$
7. $\theta = 19\pi$	

الحل:

1. $\theta = \frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi-\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$
2. $\theta = -\frac{4\pi}{3}$ → تبقى كما هي
3. $\theta = \frac{35\pi}{6} = \frac{36\pi-\pi}{6} = 6\pi - \frac{\pi}{6}$
4. $\theta = \frac{21\pi}{4} = \frac{20\pi+\pi}{4} = 5\pi + \frac{\pi}{4}$
5. $\theta = \frac{-202\pi}{3} = \frac{-201\pi-\pi}{3} = -67\pi - \frac{\pi}{3}$
6. $\theta = -18\pi \rightarrow \theta = 0$
7. $\theta = 19\pi \rightarrow \theta = \pi$

التحويلات بين الأشكال:

الفكرة العامة

	التحويل من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي أو الأسي	التحويل من الشكل المثلثي أو الأسي إلى الشكل الجبري
المعلوم	x ، y	θ ، r
المجهول	θ ، r	x ، y
المطلوب	* حسب r من القانون: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ * نوجد كلاً من: $\sin\theta = \frac{y}{r}$ ، $\cos\theta = \frac{x}{r}$ * نحدد θ * نكتب بالشكل المطلوب	* نوجد النسب المثلثية لـ θ * نوجد x وفق: $x = r\cos\theta$ * نوجد y وفق: $y = r\sin\theta$ * نكتب بالشكل الجبري

تحويلات مباشرة

الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
$z = 1$	$z = \cos 0 + i\sin 0$	$z = e^{i0}$
$z = -1$	$z = \cos\pi + i\sin\pi$	$z = e^{i\pi}$
$z = i$	$z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$z = e^{i\frac{\pi}{2}}$
$z = -i$	$z = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

حردات الأشكال

حردات الشكل المثلثي وكيفية إرضائه

الحردة	كيفية الإرضاء
الـ r عدد حقيقي سالب	نعكس إشارة الـ r ونضيف π إلى الزاوية وفق: $z = -r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$
الـ r ليس حقيقي	* نحول كل شيء إلى الشكل المثلثي * نطبق العمليات على الشكل المثلثي أيّ تحويلات ثم عمليات.
الـ i مع الـ cos "حردة الخيانة"	نستبدل $\cos x$ بـ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ونستبدل $\sin x$ بـ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ وفق: $z = r(\sin\theta + i\cos\theta) = r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$
الزوايا مختلفة	* نعوض بقيم النسب المثلثية * نحول من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي
النسب المثلثية نفسها	* نخرج النسبة المثلثية المشتركة عامل مشترك * نحول من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي
حردة الإشارات	* الحالة الأولى: $z = r[-\cos\theta + i\sin\theta] = r[\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)]$ * الحالة الثانية: $z = r[-\cos\theta - i\sin\theta] = r[\cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)]$ * الحالة الثالثة: $z = r[\cos\theta - i\sin\theta] = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$
ملاحظة	عند اجتماع عدة حردات فيجب مراعاة الأولوية في الإرضاء وفق: حردة الخيانة - حردة الإشارات - باقي الحردات

حردات الشكل الأسي وكيفية إرضائه

الحردة	كيفية الإرضاء
الـ r عدد حقيقي سالب	* نخرج (-1) عامل مشترك * نكتب (-1) بالشكل الأسي (تحويلات مباشرة) * نطبق العمليات على الشكل الأسي وفق: $z = -re^{i\theta} = (-1)re^{i\theta} = e^{i\pi}\,re^{i\theta} \rightarrow z = re^{i(\theta+\pi)}$
الـ r ليس حقيقي	* نحول كل شيء إلى الشكل الأسي * نطبق العمليات على الشكل الأسي أي تحويلات ثم عمليات

خفايا التحويلات

نص السؤال	فكرة الحل
اكتب z بالشكل الجبري	* نحول كل شيء إلى الشكل الجبري * نطبق العمليات على الشكل الجبري
اكتب z بالشكل المثلثي	* نحول كل شيء إلى الشكل المثلثي * نطبق العمليات على الشكل المثلثي
اكتب z بالشكل الأسي	* نحول كل شيء إلى الشكل الأسي * نطبق العمليات على الشكل الأسي
ملخص الكلام	تحويلات ثم عمليات

ملاحظات:
* عند وجود عامل مشترك يُنصح بإخراجه قبل إجراء التحويل.
* قبل إجراء العمليات على الشكل المثلثي يجب التأكد أنه مثلثي.
* قبل إجراء العمليات على الشكل الأسي يجب التأكد أنه أسي.

$$= \cos\left(\frac{6\pi}{14}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{14}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

ومنه:

$$z = \left[\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right]^7$$
$$= \cos(3\pi) + i\sin(3\pi)$$
$$= \cos\pi + i\sin\pi$$
$$= -1$$

7. $z = 1 - i + e^{i\frac{3\pi}{4}}$

بفرض:

$$z' = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$
$$= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{4\pi - \pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi - \pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

ومنه:

$$z = 1 - i - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + \frac{(1 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}}i$$

8. $z = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x}$

$$z = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x} = \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{2ix}$$
$$= \cos(2x) + i\sin(2x)$$

وبوضع:

$$a = \cos 2x \quad , \quad b = \sin(2x)$$

فيكون:

$$z = a + ib$$

التمرين الثاني:

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية

الفكرة العامة:

1. $z = 1 + i$

$$x = 1 \quad , \quad y = 1$$
$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$
$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

2. $z = \sqrt{3} - i$

$$x = \sqrt{3} \quad , \quad y = -1$$
$$r = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-1}{2}\end{aligned}\right\} \theta = -\frac{\pi}{6}$$
$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

خفايا التحويلات:

1. $z = (1 - 3i)(5 + 2i)$

$$= 5 + 2i - 15i + 6$$
$$= 11 - 13i$$

2. $z = \frac{1+i}{1-i}$

$$= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1+1}$$
$$= \frac{1 + 2i - 1}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

3. $z = (-1 + \sqrt{3}i)\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

بفرض:

$$z' = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\rightarrow z' = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ومنه:

$$z = (-1 + \sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}$$
$$= -\frac{4}{2} = -2$$

4. $z = (1 - i)e^{i\frac{3\pi}{2}}$

بفرض:

$$z' = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

ومنه:

$$z = (1 - i)(i)$$
$$= i + 1 = 1 + i$$

5. $z = \frac{-\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+i}$

بفرض:

$$z' = -\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$= -\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= -\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2}i$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

ومنه:

$$z = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i}{1+i} = \frac{\frac{-1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}}{1+i}$$
$$= \frac{-1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \frac{(-1-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}$$
$$= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i - \sqrt{6}i - \sqrt{6}}{2+2}$$
$$= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{6})}{4}i$$

6. $z = \left[\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\right]^7$

بفرض:

$$z' = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14}\right)$$

التمرين الأول:

اكتب بالشكل الجبري كلاً من الأعداد العقدية الآتية

الفكرة العامة:

1. $z = \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$r = \sqrt{3} \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$
$$x = r.\cos\theta = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}$$
$$y = r.\sin\theta = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\rightarrow z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2. $z = 4.e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$r = 4 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = r.\cos\theta = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$
$$y = r.\sin\theta = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$
$$\rightarrow z = 2 + 2\sqrt{3}i$$

3. $z = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$r = 1 \quad , \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x = r.\cos\theta = (1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$y = r.\sin\theta = (1)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

4. $z = 2.e^{i\frac{5\pi}{3}}$

$$r = 2$$
$$\theta = \frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$$
$$\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$
$$x = r.\cos\theta = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$
$$y = r.\sin\theta = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$
$$\rightarrow z = 1 - \sqrt{3}i$$

تحويلات مباشرة:

1. $z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\rightarrow z = i$$

2. $z = e^{i\pi}$

$$\rightarrow z = -1$$

التحويلات المباشرة:

1. $z = i$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

2. $z = -i\sqrt{3}$

$$= \sqrt{3}(-i) = \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

3. $z = \sqrt{e} - e$

$$= -(e - \sqrt{e}) = (e - \sqrt{e})(-1)$$
$$= (e - \sqrt{e})[\cos\pi + i\sin\pi]$$

الحرفات:

1. $z = -2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

2. $z = \ln(0.6)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

ملاحظة:
إذا كان مضمون اللوغاريتم أصغر من الواحد
فاللوغاريتم سالب يعني $\ln(0.6)$ مقدار سالب يا
عزيزي الطالب لذلك.
الطريقة الأولى: نعلم أنّ:

$$\ln(0.6) = \ln\left(\frac{3}{5}\right) = \ln(3) - \ln(5)$$

ومنه:

$$z = (\ln 3 - \ln 5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= -(\ln 5 - \ln 3)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= (\ln 5 - \ln 3)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)\right]$$
$$= (\ln 5 - \ln 3)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

الطريقة الثانية:

$$z = \ln(0.6)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= -\left(-\ln(0.6)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)$$
$$= -\ln(0.6)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)\right]$$
$$= -\ln(0.6)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

3. $z = i\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{10}\right)$$

4. $z = -7i\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$$= 7\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right)\right]$$
$$= 7\left[\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 7\left[\cos\left(\frac{12\pi + \pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{12\pi + \pi}{6}\right)\right]$$
$$= 7\left[\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 7\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

5. $z = 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]$$

6. $z = \sqrt{3}\left[\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$$= \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}\right)\right]$$
$$= \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{6}\right)\right]$$
$$= \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

7. $z = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$= 4\left[\cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 4\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 4\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 4\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right] = -2 + 2i$$
$$= 2(-1 + i)$$

بفرض:

$$z' = -1 + i$$
$$x = -1 \ , \ y = 1$$
$$r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

ومنه:

$$z = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

8. $z = 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right]$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)(1 + i)$$

بفرض:

$$z' = 1 + i$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

ومنه:

$$z = 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\left(\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

9. $z = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$$= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)(1 + i)$$

بفرض: $z' = 1 + i$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

ومنه:

$$= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

لدينا:

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3\pi + \pi}{3}\right)$$
$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

ومنه:

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

10. $z = 2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$= 2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

11. $z = 3\left[-\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

$$= 3\left[\cos\left(\pi + \frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{5\pi}{4}\right)\right]$$
$$= 3\left[\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right]$$
$$= 3\left[\cos\left(\frac{8\pi + \pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi + \pi}{4}\right)\right]$$
$$= 3\left[\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

12. $z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

13. $z = -3i\left[-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$= -3i(-1)\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 3i\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 3i\left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 3i\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= 3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

خفايا التحويلات:

1. $z = (1 - i)^2$

بفرض:

$$z' = 1 - i$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

ومنه:

$$z = \left(\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)^2$$
$$= (\sqrt{2})^2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{4}\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$z'' = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

ومنه:

$$z = \frac{z'}{z''} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

2. $z = (-1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}$

بفرض:

$$z' = -1-i$$
$$= \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

ومنه:

$$z = \sqrt{2}.e^{i\frac{5\pi}{4}}.e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$= \sqrt{2}.e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{19}{12}}$$

3. $z = \frac{(\sqrt{3}-i)^5}{(1+i)^4}$

بفرض:

$$z' = \sqrt{3}-i$$
$$x = \sqrt{3}\ ,\ y = -1$$
$$r = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-1}{2}\end{aligned}\right\} \theta = -\frac{\pi}{6}$$
$$z' = 2.e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
$$\rightarrow (z')^5 = \left(2.e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^5$$
$$= 2^5.e^{-i\frac{5\pi}{6}} = 32.e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

بفرض:

$$z'' = 1+i$$
$$= \sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\rightarrow (z'')^4 = \left(\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^4.e^{i\,\pi} = 4.e^{i\,\pi}$$

ومنه:

$$z = \frac{32.e^{-i\frac{5\pi}{4}}}{4.e^{i\,\pi}} = 8e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}-\pi\right)}$$
$$= 8.e^{-i\frac{9\pi}{4}} = 8.e^{i\left(\frac{-8\pi-\pi}{4}\right)}$$
$$= 8.e^{i\left(-2\pi-\frac{\pi}{4}\right)} = 8.e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

4. $z = (1+i)\left[\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right]$

بفرض:

$$z' = 1+i$$
$$= \sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ومنه:

$$z = \sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{i\frac{\pi}{9}} = \sqrt{2}.e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{9}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{36}}$$

5. $z = -2\left[\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$

$$= -2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\right]$$
$$= -2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right]$$
$$= -2e^{i\frac{3\pi}{10}} = 2.e^{i\left(\pi+\frac{3\pi}{10}\right)} = 2.e^{i\frac{13\pi}{10}}$$

التمرين الثالث:

اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

الفكرة العامة:

1. $z = 1-i$

$$z = \sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

2. $z = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$x = \frac{1}{2}\ ,\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$r = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \theta = -\frac{\pi}{3}$$
$$z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

تحويلات مباشرة:

1. $z = -\ln(2).i$

$$= \ln(2)\,(-i) = \ln(2).e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

2. $z = 7i$

$$= 7.e^{i\frac{\pi}{2}}$$

الحدات:

1. $z = -5e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$= 5e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)} = 5e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

2. $z = 2\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right).e^{i\frac{\pi}{3}}$

نعلم أنّ $\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)$ مقدار سالب ومنه:

$$z = -\left(-2\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right).e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$
$$= -2\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right).e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)} = -2\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right).e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

3. $z = (\sqrt{2}i-2i).e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$= -i\left(2-\sqrt{2}\right).e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$= \left(2-\sqrt{2}\right).e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)} = \left(2-\sqrt{2}\right).e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

4. $z = 5i.e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$= 5e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = 5e^{i\frac{\pi}{4}}$$

خفايا التحويلات:

1. $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

بفرض:

$$z' = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

بفرض:

$$z'' = \sqrt{3}+i$$
$$x = \sqrt{3}\ ,\ y = 1$$
$$r = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{6}$$

2. $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$

$$z = \left(\frac{(\sqrt{3}-i)(-i)}{(i)(-i)}\right)^5$$
$$= \left(\frac{-\sqrt{3}i-1}{1}\right)^5 = (-1-\sqrt{3}i)^5$$

بفرض:

$$z' = -1-\sqrt{3}i$$
$$x = -1\ ,\ y = -\sqrt{3}$$
$$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \theta = \pi+\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$
$$z' = 2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

ومنه:

$$z = \left(2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]\right)^5$$
$$= 2^5\left[\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{20\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 32\left[\cos\left(\frac{18\pi+2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{18\pi+2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 32\left[\cos\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 32\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

3. $z = \sqrt{2}-2+(2-\sqrt{2})i$

$$= -(2-\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})i$$
$$= (2-\sqrt{2})(-1+i)$$

بفرض:

$$z' = -1+i$$
$$x = -1\ ,\ y = 1$$
$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \theta = \pi-\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$
$$z' = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

ومنه:

$$z = (2-\sqrt{2})\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$
$$= (2\sqrt{2}-2)\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

4. $z = (-1+i)\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^7$

بفرض:

$$z' = -1+i$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

ومنه:

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^7$$
$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{37\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{37\pi}{12}\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{24\pi+13\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{24\pi+13\pi}{12}\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(2\pi+\frac{13\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{13\pi}{12}\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right]$$

6. $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

الطريقة الأولى:

استخدام الدساتير المثلثية وفق:

$$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

تذكرة:

$$1 + \cos(\text{زاوية}) = 2\cos^2(\text{نصف الزاوية})$$
$$\sin(\text{زاوية}) = 2\sin\left(\frac{\text{نصف}}{\text{الزاوية}}\right).\cos\left(\frac{\text{نصف}}{\text{الزاوية}}\right)$$

$$= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left[e^{i\frac{\pi}{6}}\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$z = \sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{6}}$$

الطريقة الثانية: استخدام قوانين أويلر وفق:

$$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}} + \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)$$
$$= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$$

تذكر:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

ومنه:

$$= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

الطريقة الثالثة:

$$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$$

نحول $e^{i\frac{\pi}{3}}$ إلى الشكل الجبري وفق:

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

نعوّض:

$$z_7 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$x = \frac{3}{2} \quad , \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\theta = \frac{\pi}{6}$$
$$z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

تذكر دوماً كل الطرق تؤدي إلى روما ^_^ *

$$z_2 = i - ie^{i\theta}\ ;\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$$
$$= i(1 - e^{i\theta})$$
$$= ie^{i\frac{\theta}{2}}\left(\frac{1}{e^{i\frac{\theta}{2}}} - \frac{e^{i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\right) = ie^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$= -i\,e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = -ie^{i\frac{\theta}{2}}\left(2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$
$$= -2i^2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

بما أن $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$ (الربع الأول) فإنّ $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ يكون موجب وبالتالي يكون الشكل الأسي المطلوب هو:

$$z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$$

التمرين الرابع:

$$z = \frac{1 + \cos x - i\sin x}{1 + \cos x + i\sin x}$$

بسط كتابة العدد العقدي موضداً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً.

الحل:

يكون المقدار z موجوداً في حال المقام لا يساوي الصفر وهذا يكافئ تحقق الشرطين $\sin x \neq 0$ و $1 + \cos x \neq 0$ وهذا يكافئ: $x \neq \pi + 2\pi$

تبسيط المقدار:

$$z = \frac{1 + \cos x - i\sin x}{1 + \cos x + i\sin x}$$
$$= \frac{1 + e^{-ix}}{1 + e^{ix}} = \frac{e^{-ix}\left(\frac{1}{e^{-ix}} + 1\right)}{1 + e^{ix}}$$
$$= \frac{e^{-ix}(e^{ix} + 1)}{(1 + e^{ix})} = e^{-ix}$$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا العددان العقديان z_1 و z_2 حيث:

$z_1 = 1 + i$	$z_2 = \sqrt{3} + i$

١. اكتب كلاً من z_1 و z_2 بالشكل الأسي ثم أوجد الجذور التربيعية للعدد z_2

٢. اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري والشكل الأسي ثم استنتج قيمة كل من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

الحل:

الطالب الأول:

كتابة z_1 بالشكل الأسي:

$$z_1 = 1 + i$$
$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

كتابة z_2 بالشكل الأسي:

$$z_2 = \sqrt{3} + i$$
$$x = \sqrt{3} \quad , \quad y = 1$$
$$r = \sqrt{3 + 1} = 2$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\theta = \frac{\pi}{6}$$
$$z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

إيجاد الجذور التربيعية لـ z_2 :

أي يجب حل المعادلة: $z^2 = z_2$

الطريقة الأولى:

بفرض $z = x + iy$

والمعادلة $z^2 = \sqrt{3} + i$ تكافئ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |z_2| \\ x^2 - y^2 = Re(z_2) \\ 2xy = Im(z_2) \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \dots (1) \\ x^2 - y^2 = \sqrt{3} \dots (2) \\ 2xy = 1 \dots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2x^2 = 2 + \sqrt{3}$$
$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

إما $x = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$

نعوض في (3) :

$$y = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}}$$

$$z' = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}}i$$

أو $x = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$

نعوض في (3):

$$y = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}}$$

$$z'' = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}}i$$

الطريقة الثانية:

إيجاد الجذور التربيعية لـ z_2 :

أي يجب حل المعادلة: $(z^2 = z_2) \dots (*)$

حيث:

$$z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$z = re^{i\theta}$$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$\left(re^{i\theta}\right)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$r^2e^{i2\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$r^2 = 2 \rightarrow r = \sqrt{2}$$

ونجد أنّ:

$$2\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + \pi k$$

عندما $k = 0$ فإنّ: $\theta = \frac{\pi}{12}$

$$\rightarrow z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

عندما $k = 1$ فإنّ: $\theta = \frac{13\pi}{12}$

$$\rightarrow z'' = \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$$

الطالب الثاني:

كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i}{\sqrt{3} + i}$$
$$= \frac{(1 + i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1}{3 + 1}$$
$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{4} + i\frac{(\sqrt{3} - 1)}{4}$$

كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الأسي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

استنتاج قيمة $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

استنتاج قيمة $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

التمرين الثالث:

لتكن لدينا الأعداد العقدية:

$z=(3+\sqrt{3})+i(-3+\sqrt{3})$	
$u=3+i\sqrt{3}$	$v=\frac{z}{u}$

١. اكتب v بالشكل الجبري

٢. اكتب كلاً من v و u بالشكل المثلثي ثم استنتج z بالشكل المثلثي

٣. استنتج $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

الحل:

الطالب الأول:

كتابة v بالشكل الجبري

$$v=\frac{z}{u}=\frac{(3+\sqrt{3})+i(-3+\sqrt{3})}{3+i\sqrt{3}}$$
$$=\frac{[(3+\sqrt{3})+i(-3+\sqrt{3})](3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}$$
$$=\frac{3(3+\sqrt{3})-i\sqrt{3}(3+\sqrt{3})+i3(-3+\sqrt{3})-i^2\sqrt{3}(-3+\sqrt{3})}{9+3}$$
$$=\frac{9+3\sqrt{3}-3\sqrt{3}i-3i-9i+3\sqrt{3}i-3\sqrt{3}+3}{12}$$
$$=\frac{12-12i}{12}=1-i$$

الطالب الثاني:

كتابة v بالشكل المثلثي:

$$v=1-i$$
$$x=1 \text{ و } y=1$$
$$v=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

كتابة u بالشكل المثلثي:

$$u=3+i\sqrt{3}$$
$$x=3 \text{ و } y=\sqrt{3}$$
$$r=\sqrt{(3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\theta=\frac{\pi}{6}$$
$$u=2\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

استنتاج z بالشكل المثلثي:

لدينا:

$$v=\frac{z}{u}\rightarrow z=v.u$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]2\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=2\sqrt{6}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=2\sqrt{6}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

الطالب الثالث:

استنتاج $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{x}{r}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$$

استنتاج $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{y}{r}=\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$$

طويلة وزاوية عدد عقدي:

	طويلة عدد عقدي	زاوية عدد عقدي
الرمز	$\lvert z\rvert$	$\arg(z)$
قانون	$\lvert z\rvert=r=\sqrt{x^2+y^2}$	
خواص	١. أياً كان العددان العقديان غير المعدومين z_1 و z_2 كان: * $\lvert z_1.z_2\rvert=\lvert z_1\rvert.\lvert z_2\rvert$ * $\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert=\frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$ * $\left\lvert\frac{1}{z_1}\right\rvert=\frac{1}{\lvert z_1\rvert}$ ٢. أياً كان العدد العقدي غير المعدوم z وأياً كان العدد الطبيعي n كان: $\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$	١. يأ كان العددان العقديان غير المعدومين z_1 و z_2 كان: * $\arg(z_1.z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$ * $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$ * $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right)=-\arg(z_1)$ ٢. أياً كان العدد العقدي غير المعدوم z وأياً كان العدد الطبيعي n كان: $\arg(z^n)=n\arg(z)$

التمرين الأول:

ليكن z عدد عقدي بحيث $(z\neq 0)$ $\bar{z}=\frac{9}{z}$ ولتكن $\arg(2iz)=-\frac{2\pi}{3}$ والمطلوب:

١. اكتب z بالشكل المثلثي

٢. استنتج الشكل الجبري لـ z

الطالب الأول:

كتابة z بالشكل المثلثي لدينا:

* $\arg(2iz)=-\frac{2\pi}{3}$

$$\arg(2i)+\arg(z)=-\frac{2\pi}{3}$$
$$\rightarrow \arg(z)=-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=-\frac{7\pi}{6}$$

* $\bar{z}=\frac{9}{z}$

$$\bar{z}.z=9\rightarrow|z|^2=9\rightarrow|z|=3$$

ومنه الشكل المثلثي لـ z هو:

$$z=3\left[\cos\left(\frac{-7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-7\pi}{6}\right)\right]$$

الطالب الثاني:

الشكل الجبري لـ z:

لدينا:

$$z=3\left[\cos\left(\frac{-7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-7\pi}{6}\right)\right]$$

* $r=3$
* $\theta=\frac{-7\pi}{6}=\frac{-6\pi-\pi}{6}=-\pi-\frac{\pi}{6}$
* $\cos\left(-\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

* $\sin\left(-\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$$=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

* $x=r\cos\theta=3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{2}$
* $y=r\sin\theta=3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$

ومنه الشكل الجبري لـ z هو:

$$z=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+i\frac{3}{2}$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا العددان العقديان:

$z_1=\frac{-\sqrt{8}}{2+2i}e^{i\frac{\pi}{6}}$
$z_2=\left[-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^5$

والمطلوب:

١. أثبن أن: $|z_1|=1$ و $\arg(z_1)=\frac{11\pi}{12}$

٢. استنتج الشكل المثلثي لـ z_1

٣. أثبت أن: $z_1=z_2$

الطالب الأول:

إثبات أن: $|z_1|=1$

لدينا:

$$\underbrace{|z_1|}_{l_1}=\underbrace{1}_{l_2}$$
$$l_1=|z_1|$$
$$l_1=\left|\frac{-\sqrt{8}}{2+2i}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|$$
$$=\left|\frac{-\sqrt{8}}{2+2i}\right|\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|=\frac{|-\sqrt{8}|}{|2+2i|}\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|$$

حيث:

* $|-\sqrt{8}|=\sqrt{8}$
* $|2+2i|=\sqrt{(2)^2+(2)^2}=\sqrt{8}$
* $\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|=1$

ومنه:

$$l_1=\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}\right)(1)=1=l_2\rightarrow \text{محققة}$$

إثبات أن: $arg(z_1)=\frac{11\pi}{12}$

لدينا:

$$\underbrace{\arg(z_1)}_{l_1}=\underbrace{\frac{11\pi}{12}}_{l_2}$$
$$l_1=\arg(z_1)=\arg\left(\frac{-\sqrt{8}}{2+2i}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$$
$$=\arg\left(\frac{-\sqrt{8}}{2+2i}\right)+\arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$$
$$=\arg(-\sqrt{8})-\arg(2+2i)+\arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$$

حيث:

* $arg(-\sqrt{8})=\pi$

مكثفة شيفرة الـ 600
ELITE MATH

$$= \left[-\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]^5$$
$$= \left[\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right)\right]^5$$
$$= \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]^5$$
$$= \left[\cos\left(\frac{35\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{35\pi}{12}\right)\right]$$
$$= \cos\left(\frac{24\pi + 11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{24\pi + 11\pi}{12}\right)$$
$$= \cos\left(2\pi + \frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{11\pi}{12}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = l_1$$

محققة

الطالب الثاني:

لدينا:

- $|z_1| = 1$
- $arg(z_1) = \frac{11\pi}{12}$

ومنه:

$$z_1 = \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

الطالب الثالث:

لدينا:

$$\underbrace{z_1}_{l_1} = \underbrace{z_2}_{l_2}$$
$$l_2 = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^5$$
$$= \left[-\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right]^5$$

- $arg(2 + 2i) = ?$

$$x = 2 \quad , \quad y = 2$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$
$$\rightarrow \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}$$

- $\arg(e^{i\frac{\pi}{6}}) = \frac{\pi}{6}$

ومنه:

$$l_1 = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - 3\pi + 2\pi}{12}$$
$$= \frac{11\pi}{12} = l_2 \rightarrow$$ محققة

مرافق عدد عقدي:

تمهيد	❋ مرافق الـ z هو $\bar{z}$ ❋ مرافق الـ $\bar{z}$ هو z ❋ مرافق الـ 3 هو 3 ❋ مرافق الـ $3i$ هو $-3i$
المرافق والعمليات	١. إن مرافق مجموع عددين عقديين يساوي مجموع مرافقيهما أيّ: $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ ٢. إن مرافق جداء عددين عقديين يساوي جداء مرافقيهما أيّ: $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$ ٣. إن مرافق خارج قسمة عددين عقديين يساوي خارج قسمة مرافقيهما أيّ: $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ حيث $w \neq 0$ ٤. في حالة عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ: $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$
نتائج مباشرة	ليكن العدد العقدي $z = x + iy$ وليكن $\bar{z} = x - iy$ فإنّ: ١. مرافق العدد العقدي $\bar{z}$ هو العدد العقدي z أيّ: $\overline{(\bar{z})} = z$ ٢. ناتج جمع z و $\bar{z}$ هو ضعفي القسم الحقيقي أيّ: $z + \bar{z} = 2x$ ٣. ناتج طرح $\bar{z}$ من z هو ضعفي القسم التخيلي أيّ: $z - \bar{z} = 2iy$ ٤. يكون z حقيقياً إذا وفقط إذا كان: $z = \bar{z}$ ٥. يكون z تخيلياً بحتاً إذا وفقط إذا كان: $\bar{z} = -z$ ٦. إن جداء العدد العقدي بمرافقه يساوي طويلة العدد العقدي للتربيع أيّ: $z.\bar{z} = \lvert z\rvert^2$ تعميم: $\left\lvert \text{العدد العقدي} \right\rvert^2 = (\text{مرافقه})\left(\text{العدد العقدي}\right)$, وتطبق بشكل عكسي: $\left\lvert \text{العدد العقدي} \right\rvert^2 = (\text{مرافقه})\left(\text{العدد العقدي}\right)$

أنماط التمارين	النمط الأول	النمط الثاني	النمط الثالث
نص السؤال	أثبت صحة العلاقة	أثبت أنّ z حقيقي	أثبت أنّ z تخيلي بحت
فكرة الحل	لدينا أسلوبان: ❋ ننطلق من أحد الأطراف وصولاً إلى الطرف الثاني. ❋ ننطلق من الطرفين وصولاً إلى نفس النتيجة.	❋ نوجد $\bar{z}$ ❋ نثبت أن $\bar{z} = z$	❋ نوجد $\bar{z}$ ❋ نثبت أنّ $\bar{z} = -z$

التمرين الأول:

ليكن لدينا z عدد عقدي ما, أثبت أنّ:

$$\underbrace{|z + 2i|^2 + |z - 2i|^2}_{l_1} = \underbrace{2|z|^2 + 8}_{l_2}$$
$$l_1 = |z + 2i|^2 + |z - 2i|^2$$
$$= (z + 2i)(\bar{z} - 2i) + (z - 2i)(\bar{z} + 2i)$$
$$= z\bar{z} - 2iz + 2i\bar{z} + 4 + z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} + 4$$
$$= 2z\bar{z} + 8 = 2|z|^2 + 8 = l_2$$

ومنه محققة.

التمرين الثاني:

a و b عددان عقديان حيث $|a| = 1$ و $|b| = 1$ و $a.b \neq -1$ نضع $z = \frac{a+b}{1+ab}$ عبّر عن $\bar{z}$ بدلالة a و b ثم استنتج أن العدد z حقيقي.

الحل:

$$\bar{z} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{1 + \overline{ab}} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{1 + \bar{a}.\bar{b}}$$

استنتاج z حقيقي.

حتى يكون z حقيقياً يجب تحقق:

$$\underbrace{\bar{z}}_{l_1} = \underbrace{z}_{l_2}$$

لدينا:

$$l_1 z = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{1 + \bar{a}.\bar{b}} \ldots (*)$$

لدينا:

$$|a| = 1 \rightarrow |a|^2 = 1 \rightarrow a.\bar{a} = 1 \rightarrow \bar{a} = \frac{1}{a}$$
$$|b| = 1 \rightarrow |b|^2 = 1 \rightarrow b.\bar{b} = 1 \rightarrow \bar{b} = \frac{1}{b}$$

نعوض في $(*)$:

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{a}.\frac{1}{b}} = \frac{\frac{a+b}{1}}{1 + \frac{1}{a.b}}$$
$$= \frac{\frac{a+b}{a.b}}{\frac{a.b+1}{a.b}} = \frac{a+b}{1+a.b} = z = l_2$$

ومنه z حقيقي.

التمرين الثالث:

أولاً:

ليكن z عدداً عقدياً وليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد أثبت أنّ $w = \frac{u.\bar{z}-z}{iu-i}$ عدد تخيلي بحت

الحل:

حتى يكون w تخيلي بحت يجب تحقق:

$$\underbrace{\bar{w}}_{l_1} = \underbrace{-w}_{l_2}$$

الإثبات:

$$l_1 = \bar{w} = \frac{\bar{u}.\bar{z} - \bar{z}}{-i\bar{u} + i} = \frac{\bar{u}.z - \bar{z}}{i - i\bar{u}}$$

لدينا:

$$|u| = 1 \rightarrow |u|^2 = 1 \rightarrow u.\bar{u} = 1 \rightarrow \bar{u} = \frac{1}{u}$$

نعوض:

$$\frac{\frac{1}{u}.z - \bar{z}}{i - i.\frac{1}{u}} = \frac{\frac{z}{u} - \bar{z}}{i - \frac{i}{u}} = \frac{\frac{z - u\bar{z}}{u}}{\frac{iu - i}{u}}$$
$$= \frac{z - u\bar{z}}{iu - i} = -\frac{u\bar{z} - z}{iu - i} = -w = l_2$$

ومنه w تخيلي بحت.

ثانياً:

ليكن العددان العقديان z و w نفترض أن:

$$|z - w|^2 = |1 - z\bar{w}|^2$$

أثبت أنه أما أن تكون $|z| = 1$ أو $|w| = 1$

الحل:

لدينا:

$$|z - w|^2 = |1 - z\bar{w}|^2$$
$$(z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = (1 - z\bar{w})(1 - \bar{z}w)$$

$$z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w} = 1 - \bar{z}w - z\bar{w} + z\bar{z}w\bar{w}$$
$$z\bar{z} + w\bar{w} = 1 + z\bar{z}w\bar{w}$$
$$z\bar{z} + w\bar{w} - 1 - z\bar{z}w\bar{w} = 0$$
$$|z|^2 + |w|^2 - 1 - |z|^2|w|^2 = 0$$
$$|z|^2 - |z|^2|w|^2 - 1 + |w|^2 = 0$$
$$|z|^2(1 - |w|^2) - (1 - |w|^2) = 0$$
$$(1 - |w|^2)(|z|^2 - 1) = 0$$
إما $1 - |w|^2 = 0$
$$|w|^2 = 1 \to |w| = 1$$
أو $|z|^2 - 1 = 0$
$$|z|^2 = 1 \to |z| = 1$$

التمرين الرابع:

ليكن z عدد عقدي ما وليكن u عدد عقدي حيث $u \neq 1$ أثبت أنه إذا كان $w = \frac{uz - \bar{z}}{u+1}$ تخيلي بحت إما أن يكون z تخيلياً بحتاً أو أن يكون $|u| = 1$

الحل:

بما أنّ w تخيلي بحت فإنه يتحقق:

$$\bar{w} = -w$$
$$\frac{\bar{u}\bar{z} - z}{\bar{u} + 1} = -\left(\frac{uz - \bar{z}}{u+1}\right)$$
$$\frac{\bar{u}\bar{z} - z}{\bar{u} + 1} = \frac{-uz + \bar{z}}{u+1}$$
$$(\bar{u}\bar{z} - z)(u+1) = (\bar{u} + 1)(-uz + \bar{z})$$
$$u\bar{u}\bar{z} + \bar{u}\bar{z} - uz - z = -u\bar{u}z + \bar{u}\bar{z} - uz + \bar{z}$$
$$u\bar{u}\bar{z} - z = -u\bar{u}z + \bar{z}$$
$$u\bar{u}\bar{z} - z + u\bar{u}z - \bar{z} = 0$$
$$u\bar{u}\bar{z} + u\bar{u}z - z - \bar{z} = 0$$
$$u\bar{u}(\bar{z} + z) - (z + \bar{z}) = 0$$
$$(\bar{z} + z)(u\bar{u} - 1) = 0$$
إما $\bar{z} + z = 0 \to \bar{z} = -z$
ومنه z تخيلياً بحتاً.
أو $u\bar{u} - 1 = 0 \to u\bar{u} = 1$
$$|u|^2 = 1 \to |u| = 1$$

التمرين الخامس:

ليكن العدد العقدي z الذي يحقق $|z| = 1$
أثبت أنّ $|w| = 1$ حيث:

$$w = \frac{5 + 7z}{7 + 5z}$$

الحل:

$$\bar{w} = \frac{5 + 7\bar{z}}{7 + 5\bar{z}}$$

لدينا:

$$|z| = 1 \to |z|^2 = 1 \to z.\bar{z} = 1 \to \bar{z} = \frac{1}{z}$$

نعوض:

$$\bar{w} = \frac{5 + \frac{7}{z}}{7 + \frac{5}{z}} = \frac{\frac{5z+7}{z}}{\frac{7z+5}{z}} = \frac{7 + 5z}{5 + 7z} = \frac{1}{w}$$
$$\bar{w} = \frac{1}{w} \to w.\bar{w} = 1 \to |w|^2 = 1 \to |w| = 1$$

التمرين السادس:

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين:

$z_A = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$
$z_B = \bar{z_A}$

أثبت أنّ $\frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ واستنتج زاوية العدد العقدي z_A ثم استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

الحل:

إثبات أنّ $\frac{z_A}{z_B} = \underbrace{e^{i\frac{\pi}{6}}}_{l_2}$ ومنه:

$$l_1 = \frac{z_A}{z_B} = \frac{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i}{(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)i}$$
$$= \frac{[(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i].[(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i]}{[(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)i].[(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i]}$$
$$= \frac{\left[(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i\right]^2}{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}$$
$$= \frac{\left[(\sqrt{3}+1)^2 + 2i(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}-1)^2\right]}{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1}$$
$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 2i(3-1) - 3 + 2\sqrt{3} - 1}{8}$$
$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 4i - 3 + 2\sqrt{3} - 1}{8}$$
$$= \frac{4\sqrt{3} + 4i}{8} = \left(\frac{4\sqrt{3}}{8} + \frac{4}{8}i\right)$$
$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad y = \frac{1}{2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$
$$\left.\begin{aligned} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{6}$$
$$\to \frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

استنتاج زاوية العدد العقدي z_A :

$$\frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{6}} \to \frac{z_A}{\bar{z_A}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$\frac{z_A.z_A}{\bar{z_A}.z_A} = e^{i\frac{\pi}{6}} \to \frac{z_A^2}{|z_A|^2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$z_A^2 = |z_A|^2.e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$z_A = \sqrt{|z_A|^2.e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{|z_A|^2}.\sqrt{e^{i\frac{\pi}{6}}}$$
$$= |z_A|.\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = |z_A|.e^{i\frac{\pi}{12}}$$

حساب $|z_A|$ ومنه:

$$z_A = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$$
$$|z_A| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}$$
$$= \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1}$$
$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{12}}$$

ومنه: $\arg(z_A) = \frac{\pi}{12}$

إيجاد النسب المثلثية:

جبري $z_A = z_A$ أسي

$$2\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$$

ومنه:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

المعادلات في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$:

نص السؤال	فكرة الحل
حل المعادلات في $\mathbb{C}$	إيجاد قيمة المجهول z
حل جملة المعادلات	إيجاد قيم جميع المجاهيل

أنواع المعادلات:

نوع المعادلة	فكرة الحل
المعادلات من الدرجة الأولى	* ننقل المجاهيل إلى طرف والمعاليم إلى الطرف الثاني مع تغيير إشارة المنقول * نختزل * نعزل z (أي نقسم الطرفين على أمثال المجهول)
الجداء الصفري	* إما القوس الأول يساوي الصفر * أو القوس الثاني يساوي الصفر * وهاكوذا.. ملاحظة: إذا كان لدينا قوس مرفوع إلى قوة يساوي الصفر فإن القوس بدون قوة يساوي الصفر.
المعادلات التي تحوي $\bar{z}$ فقط	* نأخذ مرافق الأطراف * نكمل كما سبق

المعادلات التي تحوي z و $\bar{z}$		* نصنع معادلة ثانية وذلك بأخذ مرافق الأطراف للمعادلة الأولى * نحصل على جملة معادلتين بمجهولين نحلها إما بالحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض
المعادلة من الدرجة الثانية	تحوي z^2 و z فقط	* ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن * نحلل الطرف الأيسر باستخدام العامل المشترك * نحصل على الجداء الصفري وبحله نحصل على المطلوب
	تحوي z^2 وعدد w	* نعزل z^2 للوصول إلى الشكل $z^2 = w$ ونميز ما يلي: **أولاً: إذا كان العدد w لا يحوي i** الحالة الأولى: إذا كان w عدد موجب يكون للمعادلة حلان $z_1 = +\sqrt{w}, z_2 = -\sqrt{w}$ الحالة الثانية: إذا كان w صفر يكون للمعادلة حل وحيد $z = 0$ الحالة الثالثة: إذا كان w عدد سالب يكون للمعادلة حلان عقديان مترافقان $z_1 = +i\sqrt{-w}, z_2 = -i\sqrt{-w}$ **ثانياً: إذا كان w يحوي i** فإننا نوجد الجذور التربيعية لـ w وفق: * نفرض $z = x + iy$ * والمعادلة $z^2 = w$ تكافئ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \lvert w \rvert \\ x^2 - y^2 = Re(w) \\ 2xy = Im(w) \end{cases}$ * نحل جملة المعادلات السابقة نحصل على المطلوب ملاحظة: نص السؤال يكون بأحد الأشكال: * حل المعادلة $z^2 = w$ في $\mathbb{C}$ حيث w معلوم ويحوي i * أوجد الجذور التربيعية لـ w * حيث w معلوم ويحوي i
المعادلة من الدرجة الثانية	تحوي z^2 و z وعدد	* ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن * نحلل الطرف الأيسر باستخدام طريقة التحليل المباشر فنحصل على الجداء الصفري وفي حال فشل طريقة التحليل المباشر فإننا نلجأ إلى طريقة المميز Δ وفق: * نحسب Δ حيث: $\Delta = b^2 - 4ac$ * ونميز: **أولاً: إذا كان ناتج Δ لا يحوي i** فإننا نميز ثلاث حالات: الحالة الأولى: إذا كان $\Delta > 0$ يكون للمعادلة حلان حقيقيان $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ الحالة الثانية: إذا كان $\Delta = 0$ يكون للمعادلة حل وحيد $z = -\frac{b}{2a}$ الحالة الثالثة: إذا كان $\Delta < 0$ تكون المعادلة مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$ ولكن في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ لها حلان عقديان وفق: $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ملاحظة: إذا كانت الأمثال a و b و c حقيقية يكون للمعادلة حلّان عقديان مترافقان **ثانياً: إذا كان ناتج Δ يحوي i** * نوجد الجذور التربيعية لـ Δ أيّ نحل المعادلة $w^2 = \Delta$ حيث الجذور التربيعية هي w_1 و w_2 * تكون حلول المعادلة هي: $z_1 = \frac{-b + w_1}{2a}$ $z_2 = \frac{-b + w_2}{2a}$
المعادلات من الدرجة الثالثة وما فوق		* ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن * نحلل الطرف الأيسر باستخدام القسمة الإقليدية * نحصل على الجداء الصفري * نتابع كما سبق
جملة معادلتين تحوي z_1 و z_2		نحلها إما الحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض.
الجذور من المرتبة n		نعطى عدداً عقدياً غير الصفر $w = x + iy$ ونهدف إلى حل المعادلة $z^n - w = 0$ وفق: ١. نعزل z^n للوصول إلى الشكل $(*)(z^n = w)$ ٢. نكتب كُلاً من z و w بالشكل الأسي وفق: $z = re^{i\theta}, w = r_1 e^{i\theta_1}$ ٣. نعوض في $(*)$ وفق: $(re^{i\theta})^n = r_1 e^{i\theta_1} \rightarrow r^n e^{in\theta} = r_1 e^{i\theta_1}$ ملاحظة: تساوي عددين عقديين بالشكل الأسي وليكن $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ يعني أنّ: $z_1 = z_2 \rightarrow r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$ وهذا يكافئ: $r_1 = r_2$ ويكافئ أيضاً: $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$ حيث k هو عدد الدورات. ٤. بالمطابقة نوجد كلاً من r و θ وفق: $r^n = r_1 \rightarrow r = \sqrt[n]{r}$ و $\theta = \theta_1 + 2\pi k$ حيث k تمثل عدد الدورات وتبدأ قيمتها من الصفر وصولاً إلى $n - 1$ ملاحظة: * إذا كان المطلوب إيجاد الجذور التربيعية لـ $z^2 = w$ فإن قيم k تكون $k = 0,1$ * إذا كان المطلوب إيجاد الجذور التكعيبية لـ $z^3 = w$ فإن قيم k تكون $k = 0,1,2$ * إذا كان المطلوب إيجاد الجذور لـ $z^7 = w$ فإنّ قيم k تكون $k = 0,1,2,3,4,5,6$ * وهكذا.. ٥. نكتب الجذور بشكلها الاسي

التمرين الأول:

المعادلات العقدية:

حل في C كلاً من المعادلات الآتية:

1. $-3z-5=z+3i$

$$-3z-z=3i+5$$
$$-4z=5+3i$$
$$z=\frac{-5}{4}-\frac{3}{4}i$$

2. $(z-i)(5-5iz)(2-3z)=0$

إما $z=i$

أو $5-5iz=0$

$$5iz=5\rightarrow z=\frac{1}{i}$$
$$z=\frac{(1)(-i)}{i(-i)}=-i$$

أو $2-3z=0$

$$3z=2\rightarrow z=\frac{2}{3}$$

3. $\bar{z}+2=5i-3\bar{z}$

نأخذ مرافق للطرفين:

$$z+2=-5i-3z$$
$$4z=-2-5i$$
$$z=-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}i$$

4. $3iz+\bar{z}=2+2i$

نأخذ مرافق للطرفين:

$$-3i\bar{z}+z=2-2i$$

ومنه نحصل على جملة معادلتين:

$$\begin{cases}3iz+\bar{z}=2+2i\ ...(1)\\ z-3i\bar{z}=2-2i\ ...(2)\end{cases}$$

نضرب (1) بـ $(3i)$:

$$\begin{cases}-9z+3i\bar{z}=6i-6\ ...(1)\\ z-3i\bar{z}=2-2i\ ...(2)\end{cases}$$

نجمع:

$$-8z=-4+4i$$
$$z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

5. $2iz^2=5z$

$$2iz^2-5z=0$$
$$z(2iz-5)=0$$

إما $z=0$

أو $2iz-5=0$

$$2iz=5\rightarrow z=\frac{5}{2i}$$
$$z=\frac{5(-2i)}{(2i)(-2i)}=-\frac{10i}{4}=-\frac{5}{2}i$$

6. $z^2-4=0$

$$z^2=4$$

إما $z=2$

أو $z=-2$

7. $z^2+i=i$

$$z^2=0\rightarrow z=0$$

8. $z^2+9=0$

$$z^2=-9$$

المعادلة حللان عقديان مترافقان وفق:

$$z_1=i\sqrt{-(-9)}=3i$$
$$z_2=\bar{z_1}=-3i$$

9. $z^2+7=24i$

$$z^2=-7+24i$$

بفرض أنّ: $z=x+iy$

وأنّ: $w=-7+24i$

والمعادلة: $z^2=w$ تكافئ:

$$\begin{cases}x^2+y^2=|w|\\ x^2-y^2=Re(w)\\ 2xy=Im(w)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=25\ ...(1)\\ x^2-y^2=-7\ ...(2)\\ 2xy=24\ ...(3)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2):

$$2x^2=18\rightarrow x^2=9$$

إما $x=3$

نعوض في (3):

$$6y=24\rightarrow y=4$$
$$\rightarrow z_1=3+4i$$

أو $x=-3$

نعوض في (3):

$$-6y=24\rightarrow y=-4$$
$$\rightarrow z_2=-3-4i$$

10. $z^2+5z=14$

$$z^2+5z-14=0$$
$$(z+7)(z-2)=0$$

إما $z=-7$

أو $z=2$

11. $2z^2+3=5z$

$$2z^2-5z+3=0$$
$$a=2\ ,b=-5\ ,c=3$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=25-24=1$$
$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-1}{4}=1$$
$$z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$$

12. $3z^2+\frac{49}{48}=\frac{7}{2}z$

$$3z^2-\frac{7}{2}z+\frac{49}{48}=0$$
$$a=3\ ,b=-\frac{7}{2}\ ,c=\frac{49}{48}$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=\frac{49}{4}-4(3)\left(\frac{49}{48}\right)=\frac{49}{4}-\frac{49}{4}=0$$

المعادلة حل وحيد:

$$z=-\frac{b}{2a}=\frac{\frac{7}{2}}{6}=\frac{7}{12}$$

13. $z^2-2iz-1=0$

$$a=1\ \ ,\ \ b=-2i\ \ ,\ \ c=-1$$
$$\Delta=b^2-4ac=-4+4=0$$

المعادلة حل وحيد:

$$z=-\frac{b}{2a}=\frac{2i}{2}=i$$

14. $z^2-2(1+\sqrt{2})z+2(\sqrt{2}+2)=0$

$$a=1\ ,b=-2-2\sqrt{2}\ ,c=2\sqrt{2}+4$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=\left(-2-2\sqrt{2}\right)^2-4(1)(2\sqrt{2}+4)$$
$$=4+8\sqrt{2}+8-8\sqrt{2}-16=-4$$

المعادلة حللان عقديان:

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2+2\sqrt{2}-2i}{2}$$
$$z_1=1+\sqrt{2}-i$$
$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2+2\sqrt{2}+2i}{2}$$
$$z_2=1+\sqrt{2}+i$$

15. $z^2-(4\cos\alpha)z+4=0\ ;\alpha\in\mathbb{R}$

$$a=1\ ,b=-4\cos\alpha\ \ ,c=4$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=16\cos^2\alpha-16=-16(1-\cos^2\alpha)$$
$$=-16\sin^2\alpha\rightarrow\sqrt{-\Delta}=4\sin\alpha$$

المعادلة حللان عقديان مترافقان وفق:

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{4\cos\alpha-4i\sin\alpha}{2}$$
$$z_1=2\cos\alpha-2i\sin\alpha$$
$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{4\cos\alpha+4i\sin\alpha}{2}$$
$$z_2=2\cos\alpha+2i\sin\alpha$$

16. $z^2+(1+4i)z-5-i=0$

$$a=1\ ,b=1+4i\ ,c=-5-i$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=1+8i-16+20+4i$$
$$=5+12i$$

Δ يحوي i فإننا نوجد الجذور التربيعية لـ Δ أي نحل المعادلة $w^2=\Delta$ بفرض أن: $w=x+iy$

والمعادلة $w^2=5+12i$ تكافئ:

$$\begin{cases}x^2+y^2=|\Delta|\\ x^2-y^2=Re(\Delta)\\ 2xy=Im(\Delta)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=13\ ...(1)\\ x^2-y^2=5\ ...(2)\\ 2xy=12\ ...(3)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2):

$$2x^2=18\rightarrow x^2=9$$

إما $x=3$

نعوض في (3):

$$6y=12\rightarrow y=2$$
$$\rightarrow w_1=3+2i$$

أو $x=-3$

نعوض في (3):

$$-6y=12\rightarrow y=-2$$
$$\rightarrow w_2=-3-2i$$

ومنه:

$$z_1=\frac{-b+w_1}{2a}=\frac{-1-4i+3+2i}{2}$$
$$=\frac{2-2i}{2}=1-i$$
$$z_2=\frac{-b+w_2}{2a}=\frac{-1-4i-3-2i}{2}$$
$$=\frac{-4-6i}{2}=-2-3i$$

مكثفة شيفرة الـ 600

17. $z^3 = 27$

$$z^3 - 27 = 0$$
$$(z-3)(z^2+3z+9) = 0$$
إما $z = 3$
أو $z^2 + 3z + 9 = 0$
$$a = 1\,, b = 3\,, c = 9$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 9 - 4(1)(9) = -27$$
للمعادلة حلان عقديان مترافقان:
$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{-3 - \sqrt{27}i}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{27}}{2}i$$
$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{-3 + \sqrt{27}i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{27}}{2}i$$

18. $2z^3 + 7z^2 + 8z + 3 = 0$

نلاحظ أن $z = -1$ يعدم المقدار أي نقسم على المقدار $z + 1$ باستخدام القسمة الاقليدية نجد:
$$2z^3 + 7z^2 + 8z + 3 = 0$$
$$(z+1)(2z^2 + 5z + 3) = 0$$
إما $z = -1$
أو $2z^2 + 5z + 3 = 0$
$$a = 2\,, b = 5\,, c = 3$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 25 - 24 = 1$$
للمعادلة حلان:
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2}$$
$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+1}{4} = -1$$

19. $z^3 = -3 - 3i$

$$z^3 = -3 - 3i \ldots (*)$$
نكتب كلاً من z^3 و $-3-3i$ بالشكل الأسي وفق:
بفرض: $z = re^{i\theta}$ ومنه: $z^3 = r^3 e^{3i\theta}$
لدينا:
$$-3 - 3i$$
$$x = -3 \ , \ y = -3$$
$$r = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$
$$\left.\begin{matrix}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\} \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$
$$\rightarrow -3 - 3i = 3\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}$$
نعوض في $(*)$:
$$r^3 e^{3i\theta} = 3\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}$$
بالمقارنة نجد أنّ:
$$r^3 = \sqrt{18} \Rightarrow r = \sqrt[3]{(18)^{\frac{1}{2}}}$$
$$r = \sqrt[6]{18}$$
ونجد أيضاً:
$$3\theta = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \rightarrow \theta = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k$$

عندما: $k = 0$ فإنّ: $\theta = \frac{5\pi}{12}$
$$\rightarrow z_1 = \sqrt[6]{18}e^{\frac{5i\pi}{12}}$$
عندما $k = 1$ فإنّ: $\theta = \frac{13\pi}{12}$
$$\rightarrow z_2 = \sqrt[6]{18}e^{\frac{13i\pi}{12}}$$
عندما $k = 2$ فإنّ: $\theta = \frac{21\pi}{12}$
$$\rightarrow z_3 = \sqrt[6]{18}e^{\frac{21i\pi}{12}}$$

التمرين الثاني:

حل في $\mathbb{C}$ جملة المعادلتين:
$$\begin{cases} 3z - z' = 2 - 5i \ldots (1) \\ z - z' = -2 + i \ldots (2) \end{cases}$$
نضرب (2) بـ (-1):
$$\begin{cases} 3z - z' = 2 - 5i \ldots (1) \\ -z + z' = 2 - i \ldots (2)' \end{cases}$$
نجمع:
$$2z = 4 - 6i$$
$$z = 2 - 3i$$
نعوض في (2):
$$2 - 3i - z' = -2 + i$$
$$z' = 4 - 4i$$

تطبيقات المعادلات:

التطبيق	نص السؤال	فكرة الحل
الأول	تحقق أنّ $z = \alpha$ هو حل للمعادلة (مُعطاة)	نعوض α في المعادلة ونميز حالتين: * المعادلة محققة: يكون $z = \alpha$ حل للمعادلة * المعادلة غير محققة: يكون $z = \alpha$ ليس حل للمعادلة
الثاني	إذا كان لدينا معادلة من الشكل: $az^2 + bz + c = 0$ فإن حلولها تحقق: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ ، $z_1 . z_2 = \frac{c}{a}$	تفيد في: حساب z_1 أو z_2 أو a أو b أو c بمعرفة ثلاثة منها
الثالث	استنتج الحل الآخر للمعادلة (مُعطاة)	نميز حالتين: ✌ الحالة الأولى: إذا كانت المعادلة من الدرجة الثانية $az^2 + bz + c = 0$ فإن حلولها z_1 و z_2 تحقق: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ و $z_1 . z_2 = \frac{c}{a}$ بالاستفادة من العلاقات السابقة نوجد المطلوب. ✌ الحالة الثانية: إذا كانت المعادلة من الدرجة الثالثة وما فوق فإننا: نحل المعادلة باستخدام القسمة الاقليدية وبذلك نكون قد حصلنا على المطلوب.
الرابع	حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (مُعطاة) علماً أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً	* بما أنّ المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً فإنّ حل المعادلة يكون من الشكل $z = ib$ * نعوض في المعادلة * بالمطابقة نكون قد حصلنا على الحل التخيلي الأول * ثم نكمل كما سبق وفقاً لنوع المعادلة
الخامس	حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (مُعطاة) علماً أنها تقبل حلاً حقيقياً	* بما أنّ المعادلة تقبل حلاً حقيقياً فإنّ حل المعادلة يكون من الشكل $z = a$ * نعوض في المعادلة * بالمطابقة نكون قد حصلنا على الحل الحقيقي الأول * ثم نكمل كما سبق وفقاً لنوع المعادلة
السادس	معادلتين متكافئتين إحداهما تحوي ثوابت والمطلوب إيجاد قيم هذه الثوابت.	* نحول إحدى المعادلتين إلى شكل المعادلة الأخرى باستخدام إصلاحات مناسبة (النشر – القسمة الإقليدية – توحيد مقامات ...) * نقارن بين المعادلتين ونحدد الثوابت.

التمرين الأول:

ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغير z المعرف كما يلي:

$$P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (5+4i)z - 5i$$

١. تحقق أن $P(2+i) = 0$ ثم جد كثير الحدود $Q(z)$ الذي يحقق:

$$P(z) = (z - 2 - i)Q(z)$$

٢. حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $P(z) = 0$

الحل:

الطالب الأول:

التحقق أنّ: $P(2+i) = 0$

$$P(2+i) = (2+i)^3 - (4+i)(2+i)^2 + (5+4i)(2+i) - 5i$$
$$= 2 + 11i - 8 - 19i + 6 + 13i - 5i = 0$$

إيجاد $Q(z)$:

بالقسمة الإقليدية نجد أنّ:

$$z^3 - (4+i)z^2 + (5+4i)z - 5i$$
$$= (z - 2 - i)(z^2 - 2z + 1 + 2i)$$

ومنهُ:

$$Q(z) = z^2 - 2z + 1 + 2i$$

الطالب الثاني:

$$P(z) = 0$$
$$(z - 2 - i)(z^2 - 2z + 1 + 2i) = 0$$

إما $z - 2 - i = 0 \to z = 2 + i$

أو $z^2 - 2z + 1 + 2i = 0$

$$a = 1\,,b = -2\,,c = 1 + 2i$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 4 - 4 - 8i = -8i$$

إيجاد الجذور التربيعية لـ Δ أي يجب حل المعادلة $w^2 = \Delta$ بفرض $w = x + iy$ فإن المعادلة $w^2 = -8i$ تكافئ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \dots (1) \\ x^2 - y^2 = 0 \dots (2) \\ 2xy = -8 \dots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) :

$$2x^2 = 8$$
$$x^2 = 4$$

إما $x = 2$

نعوض في (3):

$$y = -2$$
$$w_1 = 2 - 2i$$

أو $x = -2$

نعوض في (3):

$$y = 2$$
$$w_2 = -2 + 2i$$

إذاً حلول المعادلة:

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{2 + 2 - 2i}{2} = 2 - i$$
$$z_2 = \frac{-b + w_2}{2a} = \frac{2 - 2 + 2i}{2} = i$$

التمرين الثاني:

جد عددين عقديين p و q كي تقبل المعادلة $pz^2 + (-1+3i)z + q = 0$ العددين $z_1 = -2i$ و $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ جذرين لها.

الحل:

$$pz^2 + (-1+3i)z + q = 0$$
$$a = p\ ,b = -1 + 3i\ ,c = q$$

ولدينا:

$$z_1 = -2i \quad , \quad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

حلولها تحقق:

$$\boxed{z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}}$$
$$-2i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1 - 3i}{p}$$
$$\frac{1 - 3i}{2} = \frac{1 - 3i}{p}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{p}$$
$$p = 2$$

$$\boxed{z_1 . z_2 = \frac{c}{a}}$$
$$(-2i)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{q}{2}$$
$$1 - i = \frac{q}{2}$$
$$q = 2 - 2i$$

ومنهُ:

$$2z^2 + (-1+3i)z + 2 - 2i = 0$$

التمرين الثالث:

نعتبر مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$2z^2 - \left[1 + i(2+\sqrt{3})\right]z + i - \sqrt{3} = 0$$

١. تحقق أن $z = i$ حل لهذه المعادلة

٢. استنتج الحل الآخر واحسب كلاً من طويلتهُ وزاويتهُ.

الحل:

الطالب الأول:

$$2(i)^2 - \left[1 + i(2+\sqrt{3})\right]i + i - \sqrt{3} = 0$$
$$2(-1) - \left[1 + 2i + \sqrt{3}i\right]i + i - \sqrt{3} = 0$$
$$-2 + \left[-1 - 2i - \sqrt{3}i\right]i + i - \sqrt{3} = 0$$
$$-2 - i + 2 + \sqrt{3} + i - \sqrt{3} = 0$$
$$0 = 0$$

إذاً $z = i$ حل للمعادلة.

الطالب الثاني:

الاستنتاج:

$$a = 2\,,b = -1 - (2+\sqrt{3})i\,,c = -\sqrt{3} + i$$
$$z_1 . z_2 = \frac{c}{a}$$
$$iz_2 = \frac{i - \sqrt{3}}{2} \to \frac{\frac{i - \sqrt{3}}{2}}{i}$$
$$z_2 = \frac{i - \sqrt{3}}{2i} = \frac{(i - \sqrt{3})(-2i)}{(2i)(-2i)}$$
$$= \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

حساب الطوية والزاوية: $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$

إذاً: $\arg(z_2) = \frac{\pi}{3}\,,|z_2| = 1$

التمرين الرابع:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^3 - (3+4i)z^2 - 6(3-2i)z + 72i = 0$$

إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

الحل:

بفرض: $z = ib$

نعوض في المعادلة:

$$(ib)^3 - (3+4i)(ib)^2 - 6(3-2i)(ib) + 72i = 0$$
$$-ib^3 + 3b^2 + 4ib^2 - 18ib - 12b + 72i = 0$$
$$3b^2 - 12b + i(-b^3 + 4b^2 - 18b + 72) = 0$$

بما أنّ المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً فإنه يجب أن يتحقق:

$$3b^2 - 12b = 0$$
$$3b(b-4) = 0$$

إما $3b = 0 \to b = 0$

مرفوض لأنهُ لا يحقق المعادلة

أو $b - 4 = 0 \to b = 4$

مقبول إذاً المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً هو: $z = 4i$

حل المعادلة:

بالقسمة الإقليدية على $z - 4i$ نجد أنّ:

$$z^3 - (3+4i)z^2 - 6(3-2i)z + 72i$$
$$= (z - 4i)(z^2 - 3z - 18)$$

ومنهُ:

$$(z - 4i)(z^2 - 3z - 18) = 0$$

إما $z - 4i = 0 \to z = 4i$

أو $z^2 - 3z - 18 = 0$

$$(z-6)(z+3) = 0$$

إما $z = 6$

أو $z = -3$

التمرين الخامس:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0$$

إذا علمت أنها تقبل حلاً حقيقياً

الحل:

بفرض: $z = a$

نعوض في المعادلة:

$$a^3 + (5+i)a^2 + (10+2i)a + 8 = 0$$
$$a^3 + 5a^2 + a^2 i + 10a + 2ai + 8 = 0$$
$$a^3 + 5a^2 + 10a + 8 + (a^2 + 2a)i = 0$$

بما أن المعادلة تقبل حلاً حقيقياً فإنه يجب أن يتحقق:

$$a^2 + 2a = 0$$
$$a(a+2) = 0$$

إما $a = 0$ مرفوض لأنه لا يحقق المعادلة

أو $a + 2 = 0 \to a = -2$ مقبول

إذاً المعادلة تقبل حلاً حقيقياً:

$$z = -2$$

حل المعادلة

بالقسمة الإقليدية على $z + 2$ نجد أنّ:

$$z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8$$
$$= (z+2)(z^2 + (3+i)z + 4)$$

ومنهُ:

$$z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0$$
$$(z+2)(z^2 + (3+i)z + 4) = 0$$

إما $z + 2 = 0 \to z_1 = -2$

أو $z^2 + (3+i)z + 4 = 0$

$$a = 1\ ,b = 3 + i\ ,c = 4$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 9 + 6i - 1 - 16 = -8 + 6i$$

Δ يحوي i فإننا نوجد الجذور التربيعية لـ Δ أي نحل المعادلة $w^2 = \Delta$ بفرض أنّ: $w = x + iy$

والمعادلة $w^2 = -8 + 6i$ تكافئ:

مكثفة شيفرة الـ 600

$$\begin{cases} x^2+y^2=|\Delta| \\ x^2-y^2=Re(\Delta) \\ 2xy=Im(\Delta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10\dots(1) \\ x^2-y^2=-8\dots(2) \\ 2xy=6\dots(3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) :

$$2x^2=2$$
$$x^2=1$$

إما $x=1$

نعوض في (3):

$$2y=6\rightarrow y=3$$
$$w_1=1+3i$$

أو $x=-1$

نعوض في (3):

$$-2y=6\rightarrow y=-3$$
$$w_2=-1-3i$$

ومنه:

$$z_1=\frac{-b+w_1}{2a}=\frac{-3-i+1+3i}{2}$$
$$=\frac{-2+2i}{2}=-1+i$$

$$z_2=\frac{-b+w_2}{2a}=\frac{-3-i-1-3i}{2}$$
$$=\frac{-4-4i}{2}=-2-2i$$

التمرين السادس:

ليكن لدينا كثير الحدود

$$P(z)=z^4+4z^3+19z^2+30z+50$$

أ. عين عددين a و b يحققان:

$$P(z)=(z^2+az+b)(z^2+az+2b)$$

ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

الحل:

الطالب الأول: تعيين a و b:

لدينا:

$$P(z)=z^4+4z^3+19z^2+30z+50\dots(*)$$

ولدينا:

$$P(z)=(z^2+az+b)(z^2+az+2b)$$
$$=z^4+az^3+2bz^2+az^3+a^2z^2+2abz+bz^2+abz+2b^2$$
$$=z^4+2az^3+(a^3+3b)z^2+3ab.z+2b^2\dots(**)$$

بالمطابقة بين (*) و (**) :

$$\begin{cases} 2a=4\dots(1) \\ a^2+3b=19\dots(2) \\ 3ab=30\dots(3) \\ 2b^2=50\dots(4) \end{cases}$$

من (1) نجد: $a=2$

نعوض في (3) وفق:

$$3(2)(b)=30\rightarrow b=5$$

نتحقق في (2) وفق:

$$(2)^2+3(5)=19$$
$$4+15=19$$
$$19=19$$

محققة

نتحقق في (4) وفق:

$$2(5)^2=50$$
$$50=50$$

محققة

إذاً:

$$b=5\ ,\ a=2$$

ومنه:

$$P(z)=(z^2+2z+5)(z^2+2z+10)$$

الطالب الثاني:

حل: $P(z)=0$

$$(z^2+2z+5)(z^2+2z+10)=0$$

إما $(z^2+2z+5)=0$

$$a=1\ ,b=2\ ,c=5$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(2)^2-4(1)(5)$$
$$=4-20=-16<0$$

المعادلة حللان عقديان مترافقان حيث: $\sqrt{-\Delta}=4$

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2-4i}{2}=-1-2i$$
$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i$$

أو $(z^2+2z+10)=0$

$$a=1\ \ ,b=2\ ,c=10$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(2)^2-4(1)(10)$$
$$=4-40=-36<0$$

المعادلة حللان عقديان مترافقان حيث: $\sqrt{-\Delta}=6$

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2-6i}{2}=-1-3i$$
$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i$$

التمرين السابع:

ليكن $\alpha=e^{i\frac{2\pi}{5}}$ نضع:

$A=\alpha+\alpha^4$ و $B=\alpha^2+\alpha^3$

الطالب الأول:

أثبت أنّ $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$

واستنتج أن A و B هما جذرا المعادلة من الدرجة الثانية

$$(1):x^2+x-1=0$$

الحل:

إثبات أنّ: $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$

$l_1=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$

l_1 تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية

أساسها $q=\alpha$ وحدها الأول 1 وعدد الحدود فيها 5 ومنه:

$$l_1=(\text{الحد الأول}).\left[\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right]=1.\left[\frac{1-\alpha^5}{1-\alpha}\right]$$

ولكن نعلم أنّ $\alpha=e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ومنه:

$$l_1=\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5}{1-\alpha}=\frac{1-e^{i2\pi}}{1-\alpha}=\frac{1-1}{1-\alpha}$$
$$=0=l_2$$

استنتاج أنّ A جذراً للمعادلة (1) :

لدينا:

$$A=\alpha+\alpha^4$$
$$(1):x^2+x-1=0$$

نعوض A في المعادلة (1) وفق:

$$(\alpha+\alpha^4)^2+(\alpha+\alpha^4)-1=0$$
$$l_1=\alpha^2+2\alpha^5+\alpha^8+\alpha+\alpha^4-1$$
$$=\alpha+\alpha^2+\alpha^4+2\alpha^5+\alpha^8-1$$

نعلم أنّ $\alpha=e^{i\frac{2\pi}{5}}$ وأنّ:

$$\alpha^5=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5=e^{i2\pi}=1$$

نعوض في l_1 وفق:

$$=\alpha+\alpha^2+\alpha^4+2(1)+\alpha^3.\alpha^5-1$$
$$=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+2-1$$
$$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$$

من الطلب السابق لدينا:

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$$

ومنه:

$$l_1=0\rightarrow l_1=l_2$$

محققة ومنه A جذراً للمعادلة (1).

استنتاج أنّ B جذراً للمعادلة (1) :

لدينا:

$$A=\alpha^2+\alpha^3$$
$$(1):x^2+x-1=0$$

نعوض B في المعادلة (1) وفق:

$$(\alpha^2+\alpha^3)^2+(\alpha^2+\alpha^3)-1=0$$
$$l_1=\alpha^4+2\alpha^5+\alpha^6+\alpha^2+\alpha^3-1$$
$$=\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+2\alpha^5+\alpha^6-1$$

نعلم أنّ $\alpha=e^{i\frac{2\pi}{5}}$ وأنّ:

$$\alpha^5=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5=e^{i2\pi}=1$$

نعوض في l_1 وفق:

$$=\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+2(1)+\alpha.\alpha^5-1$$
$$=\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+2(1)+\alpha.(1)-1$$
$$=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+2-1$$
$$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$$

من الطلب السابق لدينا:

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$$

ومنه:

$$l_1=0\rightarrow l_1=l_2$$

محققة ومنه B جذراً للمعادلة (1).

الطالب الثاني: عبّر عن $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ بدلالة A

الحل:

$$A=\alpha+\alpha^4=e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{10\pi-2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{10\pi-2\pi}{5}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

الطالب الثالث:

حل المعادلة (1) واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

الحل:

$$x^2+x-1=0$$
$$a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-1$$
$$\Delta=b^2-4(a)(c)$$
$$=1-4(1)(-1)=5>0$$

للمعادلة حللان وفق:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

استنتاج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ وفق:

لدينا $A=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ مقدار موجب لأنّ $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ تقع في الربع الأول ووجدنا أنّ حل المعادلة (1) المعطى وفق: $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ مقدار موجب أيضاً ومنه:

$$A=x_2\rightarrow 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

مجتمع الرياضيات ـــ 009 ـــ

شيفرة الـ 600 في تطبيقات الأعداد العقدية:

تمهيد:

في هذه الوحدة نتأمل معلماً متجانساً $(O;\vec{u},\vec{v})$ في المستوي.

رموز عقدية:

الرمز	معناه
A	نقطة
a	عدد عقدي
Z_A	العدد العقدي الممثل للنقطة A
$A(a)$	النقطة A التي يمثلها العدد العقدي a
$Z_{\overrightarrow{AB}}$	العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$
AB	المسافة بين a و b

القسم الأول:

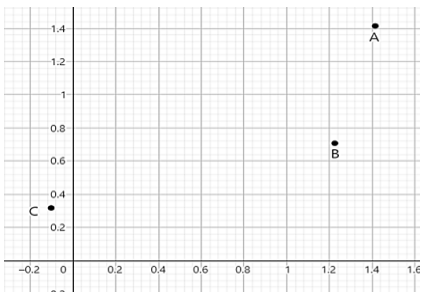
الفكرة	تمهيد	نص السؤال	فكرة الحل
العدد العقدي الممثل لنقطة.	✌ كل نقطة $A(x_A,y_A)$ يمثلها عدد عقدي a أو Z_A بحيث يكون من الشكل: $Z_A=x_A+iy_A$ أو $a=x_A+iy_A$ أيّ: * فاصلة النقطة هي القسم الحقيقي * ترتيب النقطة هو القسم التخيلي	يكون المُعطى هو أعداد عقدية بالشكل الجبري تمثل نقاط والمطلوب وضع هذه النقاط في شكل.	① نستفيد من كون أنّ: * فاصلة النقطة هي القسم الحقيقي * ترتيب النقطة هو القسم التخيلي ② نحدد هذه النقاط على الشكل
		يكون المُعطى هو أعداد عقدية بالشكل (المثلثي أو الأسي) تمثل نقاط والمطلوب وضع هذه النقاط في شكل	① نحدد طويلة وزاوية كل من هذه الأعداد ② ثم نعيّن النقاط في الشكل
	✌ كل عدد عقدي $z_B=x_B+iy_B$ أو $b=x_B+iy_B$ تمثلهُ نقطة $B(x_B,y_B)$ أيّ: * القسم الحقيقي هو فاصلة النقطة. * القسم التخيلي هو ترتيب النقطة.	يكون المعُطى شكل مزود بنقاط والمطلوب تحديد الأعداد العقدية التي تمثل هذه النقاط بالشكل الجبري	① نستفيد من كون أنّ: * فاصلة النقطة هي القسم الحقيقي * ترتيب النقطة هو القسم التخيلي ② نكتب الشكل الجبري الموافق.

التمرين الأول:

لتكن لدينا النقاط A و B و C تمثلها الأعداد العقدية:

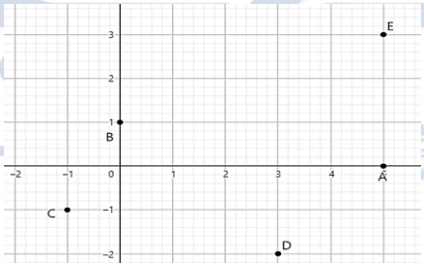
$z_A=2.e^{i\frac{\pi}{4}}$	$z_B=\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{6}}$
$z_C=\frac{1}{3}.e^{i\frac{3\pi}{5}}$	

الحل:



التمرين الثاني:

نتأمل في المستوي العقدي المزود بالمعلم المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A و B و C و D و E والمطلوب: أوجد الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C و z_D و z_E التي تمثل النقاط السابقة بالترتيب.

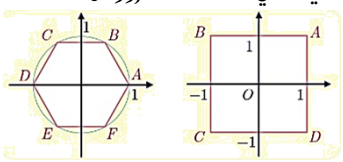


الحل:

$z_A=5$	$z_B=i$
$z_C=-1-i$	$z_D=3-2i$
$z_E=5+3i$	

التمرين الثالث:

في الشكل المجاور مثلنا في معلم متجانس مربعاً $ABCD$ ومسدساً $ABCDEF$, أعطِ الأعداد العقدية التي تمثل كلاً من رؤوس كل منهما.



الحل:

الرؤوس التي تمثل المربع:

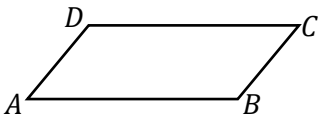
النقطة	العدد العقدي
$A(1,1)$	$z_A=1+i$
$B(-1,1)$	$z_B=-1+i$
$C(-1,-1)$	$z_C=-1-i$
$D(1,-1)$	$z_D=1-i$

الرؤوس التي تمثل المسدس:

تذكر: في المثلث المتساوي الأضلاع طول ضلعه a يكون طول الارتفاع $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ومنهُ:

النقطة	العدد العقدي
$A(1,0)$	$z_A=1$
$D(-1,0)$	$z_D=-1$
$B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$z_B=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$C\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$z_C=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$E\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$z_E=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$F\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$z_F=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

مكتشفة شيفرة الـ 600

الفكرة	نص السؤال	فكرة الحل
العدد العقدي الممثل بشعاع	لتكن النقاط A و B تمثلها الأعداد العقدية Z_A و Z_B جد العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ أو أوجد $\overrightarrow{AB}$	إن العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ يُعطى وفق: $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$
العدد العقدي الممثل لنقطة منتصف القطعة المستقيمة	أوجد العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$	نطبق القانون: $Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$
العدد العقدي الممثل للنقطة مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات)	صيغة أولى: أوجد العدد العقدي Z_M الممثل للنقطة M مركز ثقل المثلث ABC صيغة ثانية: أوجد العدد العقدي Z_M الممثل للنقطة M نقطة تلاقي المتوسطات في المثلث ABC	نطبق القانون: $Z_M = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$
العدد العقدي الممثل لنقطة مركز الأبعاد المتناسبة	أوجد العدد العقدي z_G الممثل للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة: $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ التي تمثلها الأعداد العقدية: $z_1, z_2, \dots, z_n$	يُعطى العدد العقدي z_G الممثل للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقاط بالعلاقة: $z_G = \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$
متوازي الأضلاع	النمط الأول: هل الرباعي ABCD متوازي أضلاع 	* نوجد كلاً من $Z_{\overrightarrow{AB}}$ و $Z_{\overrightarrow{DC}}$ * نميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كان: $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$ فإن هذا يكافئ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ وبالتالي يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع الحالة الثانية: إذا كان $Z_{\overrightarrow{AB}} \neq Z_{\overrightarrow{DC}}$ وبالتالي يكون الرباعي $ABCD$ ليس متوازي أضلاع
	النمط الثاني: أوجد العدد العقدي Z_D الممثل للنقطة D التي تجعل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع 	بما أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع فإن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ وهذا يكافئ $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$ $Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$ $Z_D = Z_A - Z_B - Z_C$ * أي نعزل Z_D ثم نعوض
المسافة بين نقطتان	لتكن لدينا النقاط A و B تمثلها الأعداد العقدية Z_A و Z_B جد المسافة AB	* إن المسافة بين A و B تحسب وفق: $AB = \lvert Z_{\overrightarrow{AB}} \rvert = \lvert Z_B - Z_A \rvert$ * ثم نعوض ونصلح * تعميم: $AB = \sqrt{\left(\frac{\text{القسم}}{\text{الحقيقي}}\right)^2 + \left(\frac{\text{القسم}}{\text{التخيلي}}\right)^2}$

تطبيقات المسافة:

	نص السؤال	فكرة الحل
تحديد نوع المثلث	حدد نوع المثلث ABC	* نحسب أطوال أضلاع المثلث * نحدد نوعه من حيث أطوال أضلاعه * في حالة المثلث متساوي الساقين أو مختلف الأضلاع نختبر كونه قائماً حسب عكس فيثاغورث الملاحظة الأولى: من المستحيل أن يكون المثلث متساوي الأضلاع قائماً الملاحظة الثانية: اختبار كون المثلث قائماً: * نربع طول الضلع الأول * نربع طولي الضلعين الباقيين ونجمعهما * نميز: ① الحالة الأولى: إذا تحقق مربع طول الضلع الأطول يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمتين بالتالي يكون المثلث قائم ووتره الضلع الأطول ② الحالة الثانية: إذا تحقق مربع طول الضلع الأطول لا يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمتين وبالتالي يكون المثلث غير قائم

مذكرة شاملة وفق المنهاج السوري 2025

انتماء نقطة إلى دائرة	النمط الأول: هل النقطة A تنتمي إلى الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها r	* نوجد المسافة بين النقطة A ومركز الكرة Ω (أي نوجد $A\Omega$) * نقارن هذه المسافة مع نصف قطر الدائرة * ونميز: ① الحالة الأولى إذا تحقق $A\Omega = r$ بالتالي النقطة A تنتمي إلى الدائرة ② الحالة الثانية: إذا تحقق $A\Omega \neq r$ بالتالي النقطة A لا تنتمي إلى الدائرة
	النمط الثاني: هل النقاط A و B و C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها Ω	* نوجد جميع المسافات بين هذه النقاط ومركز الدائرة (أي نوجد ΩA و ΩB و ΩC و ΩD) * نقارن هذه المسافات * نميز حالتين: ① الحالة الأولى: إذا كانت جميع المسافات متساوية بالتالي تكون النقاط A و B و C و D تنتمي إلى الدائرة ② الحالة الثانية: إذا كانت المسافات غير متساوية بالتالي تكون النقاط A و B و C و D لا تنتمي إلى الدائرة
انتماء نقطة إلى محور قطعة مستقيمة	هل النقطة M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[AB]$	* نوجد المسافة بين النقطة M والنقطة A (طرف القطعة المستقيمة أي نوجد MA) * نوجد المسافة بين النقطة M والنقطة B (طرف القطعة المستقيمة أي نوجد MB) * نميز حالتين: ① الحالة الأولى: إذا تحقق $MA = MB$ بالتالي تكون النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ ② الحالة الثانية: إذا تحقق $MA \neq MB$ بالتالي تكون النقطة M لا تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$

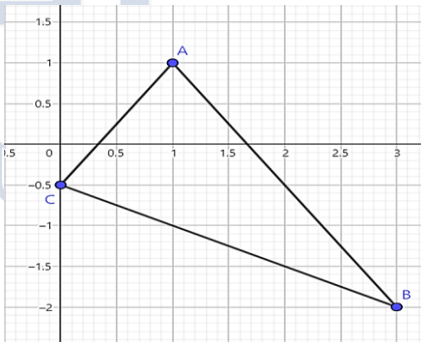
التمرين الأول:

لتكن لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$a = 1 + i$	$b = 3 - 2i$
$c = -\frac{1}{2}i$	

الطلب الأول:

وضع النقاط A و B و C في شكل.



الطلب الثاني:

احسب الأعداد العقدية التي تمثل الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.

الحل:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$
$$= 3 - 2i - 1 - i = 2 - 3i$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A$$
$$= -\frac{1}{2}i - 1 - i = -1 - \frac{3}{2}i$$

$$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B$$
$$= -\frac{1}{2}i - 3 + 2i = -3 + \frac{3}{2}i$$

الطلب الثالث:

احسب أطوال أضلاع المثلث ABC ثم حدد نوعهُ.

$$z_{\overrightarrow{AB}} = 2 - 3i$$
$$AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |2 - 3i|$$
$$= \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = -1 - \frac{3}{2}i$$
$$AC = |z_{\overrightarrow{AC}}| = \left|-1 - \frac{3}{2}i\right|$$
$$= \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$z_{\overrightarrow{BC}} = -3 + \frac{3}{2}i$$
$$BC = |z_{\overrightarrow{BC}}| = \left|-3 + \frac{3}{2}i\right|$$
$$= \sqrt{9 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

ومنهُ المثلث ABC مختلف الأضلاع.

نختبر كونهُ قائماً حسب عكس فيثاغورث.

$$(AB)^2 = 13$$
$$(AC)^2 + (BC)^2 = \frac{13}{4} + \frac{45}{4} = \frac{58}{4}$$

نلاحظ أنّ:

$$(AB)^2 \neq (AC)^2 + (BC)^2$$

ومنهُ المثلث ABC ليس قائماً.

الطلب الرابع:

أوجد العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

الحل:

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1 + i + 3 - 2i}{2}$$
$$= \frac{4 - i}{2} = 2 - \frac{1}{2}i$$

الطلب الخامس:

أوجد العدد العقدي z_G الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$
$$= \frac{1 + i + 3 - 2i - \frac{1}{2}i}{3}$$
$$= \frac{4 - \frac{3}{2}i}{3} = \frac{4}{3} - \frac{\frac{3}{2}i}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}i$$

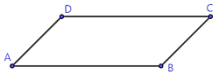
الطلب السادس:

أوجد العدد العقدي z_M الممثل للنقطة M مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A, 1)$ و $(B, -1)$ و $(C, -1)$.

$$z_M = \frac{(1)z_A - (1)z_B - (1)z_C}{1 - 1 - 1}$$
$$= \frac{1 + i - 3 + 2i + \frac{1}{2}i}{-1}$$
$$= -1 + 3 - i - 2i - \frac{1}{2}i$$
$$= 2 - 3i - \frac{1}{2}i = 2 - \frac{7}{2}i$$

الطلب السابع:

أوجد العدد العقدي z_D الممثل للنقطة D التي تجعل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.



لدينا:

بما أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع فإنه يتحقق:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

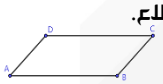
تكافئ:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$$
$$z_B - z_A = z_C - z_D$$
$$z_D = z_C - z_B + z_A$$
$$= -\frac{1}{2}i - 3 + 2i + 1 + i = -2 + \frac{5}{2}i$$

مكثفة شيفرة الـ 600

الطالب الثامن:

أثبت أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.



لدينا:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$
$$= 3 - 2i - 1 - i = 2 - 3i$$
$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D$$
$$= -\frac{1}{2}i + 2 - \frac{5}{2}i = 2 - \frac{6}{2}i = 2 - 3i$$

نلاحظ أنّ:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$$

تكافئ:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

ومنهُ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

الطالب التاسع:

هل النقطة C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r = \frac{1}{2}$.

$$OC = |z_{\overrightarrow{OC}}| = |z_C - z_O| = \left|-\frac{1}{2}i - 0\right|$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = r$$

ومنهُ النقطة C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r = \frac{1}{2}$.

الطالب العاشر:

هل النقطة A تنتمي إلى الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $r = \sqrt{13}$.

$$BA = |z_{\overrightarrow{BA}}| = |z_A - z_B|$$
$$= |1 + i - 3 + 2i| = |-2 + 3i|$$
$$= \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} = r$$

ومنهُ النقطة A تنتمي إلى الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $r = \sqrt{13}$.

القسم الثاني:

تمهيد

ليكن لدينا العدد العقدي:

$$w = \frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}} = \frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C}$$

ونعلم أنّ لكل عدد عقدي طويلة وزاوية , حيث:

$$|w| = \frac{AB}{CD} \quad , \quad \arg(w) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$$

كيفية إيجاد $|w|$

* نصلح w (يكتب بالشكل الجبري)
* نطبق القانون: $|w| = \sqrt{\left(\text{القسم الحقيقي}\right)^2 + \left(\text{القسم التخيلي بدون } i\right)^2}$

كيفية إيجاد $\arg(w)$

* نصلح w ونميز:

w حقيقي موجب	$\arg(w) = 0$
w حقيقي سالب	$\arg(w) = \pi$
w تخيلي بحت موجب	$\arg(w) = \frac{\pi}{2}$
w تخيلي بحت سالب	$\arg(w) = \frac{3\pi}{2}$
w غير ذلك	* نوجد r * نوجد كلاً من: $\sin\theta = \frac{y}{r}, \cos\theta = \frac{x}{r}$ * نحدد θ تكون $\arg(w) = \theta$

رموز

* $\left|\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}}\right| = \frac{AB}{AC}$
* $\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$
* $\arg(\overrightarrow{AB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$
* $\arg(Z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA})$

ملاحظة

النسبة الذهبية يجب أن تكون أربعة أعداد عقدية وفي حال كانت أقل من ذلك فإننا نستفيد من المبدأ من أجل إكمالها إلى أربعة أعداد عقدية.

أمثلة:

* في حال كان المبدأ O وكان لدينا:

$$w = \frac{Z_A}{Z_B - Z_C} = \frac{Z_A - Z_O}{Z_B - Z_C} = \frac{Z_{\overrightarrow{OA}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}$$
$$|w| = \frac{OA}{CB}$$
$$\arg(w) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{OA})$$

* في حال كان المبدأ A وكان لدينا:

$$w = \frac{Z_C}{-Z_D} = \frac{Z_C - Z_A}{Z_A - Z_D} = \frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{DA}}}$$
$$|w| = \frac{AC}{DA}$$
$$\arg(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AC})$$

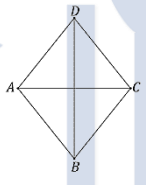
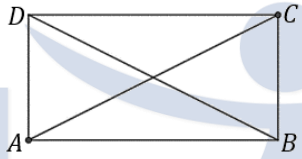
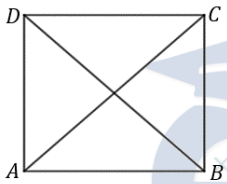
* لإثبات أنّ Z حقيقي يمكن استعمال الخاصة الآتية: $\arg(z) = 0$ أو π
* لإثبات أنّ Z تخيلي بحت يمكن استعمال الخاصة الآتية: $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$

600 أوراق شغل وفروض

إثباتات:

الفكرة	نص السؤال	فكرة الحل
إثبات أن مستقيمان متوازيان	أثبت أن المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان	❋ نوجد w وفق: $w=\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}}$ ❋ نصاغ ❋ نثبت أنّ: π أو $\arg(w)=0$
إثبات أن مستقيمان متعامدان	أثبت أن المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان	❋ نوجد w وفق: $w=\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}}$ ❋ نصاغ ❋ نثبت أنّ: $\frac{3\pi}{2}$ أو $\arg(w)=\frac{\pi}{2}$
إثبات أن ثلاثة نقاط تقع على استقامة واحدة	أثبت أن النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة	❋ نوجد w وفق: $w=\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}}$ ❋ نصاغ ❋ نثبت أنّ: π أو $\arg(w)=0$
إثبات صحة علاقة تحوي أطوال أضلاع	أثبت أن $MN=\alpha EA$	❋ نوجد w وفق: $w=\frac{Z_{\overrightarrow{MN}}}{Z_{\overrightarrow{EA}}}$ ❋ نصاغ ❋ نوجد طويلة w وفق: $\lvert w\rvert=\frac{MN}{EA}$ ❋ نعوض ثم نطبق جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين (فنحصل على المطلوب)
نسبة واستنتاج	يكون المعطى هو نسبة مطلوب إيجادها ثم ماذا تستنتج	❋ نوجد النسبة كما تعلمنا ❋ نوجد كل من الطويلة والزاوية ونفسر النتائج التي حصلنا عليها

إثبات الأشكال:

	المعين	المستطيل	المربع
			
تعريف	❋ هو متوازي أضلاع قطراه متعامدان ❋ هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان	❋ هو متوازي أضلاع قطراه متساويان ❋ هو متوازي أضلاع فيه كل ضلعان متجاوران متعامدان	❋ هو متوازي أضلاع قطراه متعامدان ومتساويان ❋ هو متوازي أضلاع فيه كل ضلعان متجاوران متعامدان متساويان
نص السؤال	أثبت أن الرباعي $ABCD$ معين	أثبت أن الرباعي $ABCD$ مستطيل	أثبت أن الرباعي $ABCD$ مربع
فكرة الحل	✌ الخطوة الأولى: نثبت أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع (تم سابقاً) ✌ الخطوة الثانية: ① الأسلوب الأول: نثبت أنّ قطراه متعامدان ② الأسلوب الثاني: نثبت أنّ فيه ضلعان متجاوران متساويان	✌ الخطوة الأولى: نثبت أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع (تم سابقاً) ✌ الخطوة الثانية: ① الأسلوب الأول: نثبت أنّ قطراه متساويان ② الأسلوب الثاني: نثبت أنّ فيه ضلعان متجاوران متعامدان	✌ الخطوة الأولى: نثبت أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع (تم سابقاً) ✌ الخطوة الثانية: ① الأسلوب الأول: نثبت أنّ قطراه متعامدان ومتساويان ② الأسلوب الثاني: نثبت أنّ فيه ضلعان متجاوران متعامدان متساويان

التمرين الأول:

لتكن لدينا النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

$z_A=i$	$z_B=1+2i$
$z_C=-2-3i$	$z_D=-1-2i$

أثبت أنّ المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان.

الحل:

$$w=\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}}=\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}$$
$$=\frac{1+2i-i}{-1-2i+2+3i}=\frac{1+i}{1+i}=1$$
$$\arg(w)=\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}}\right)=(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB})=0$$

ومنهُ المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان.

التمرين الثاني:

لتكن لدينا النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

$z_A=-1-2i$	$z_B=-1+2i$
$z_C=2+i$	$z_D=-3+i$

أثبت أنّ المستقيمان (AB) و (CD) متعامدين.

الحل:

$$w=\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}}=\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}$$
$$=\frac{-1+2i+1+2i}{-3+i-2-i}=\frac{4i}{-5}=-\frac{4}{5}i$$
$$\arg(w)=\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}}\right)=(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB})=\frac{3\pi}{2}$$

ومنهُ المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان.

التمرين الثالث:

لتكن لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

$a=-4+2i$	$b=2-4i$
$C=-2i$	

أثبت أنّ النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.

الحل:

$$w=\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$$
$$=\frac{2-4i+4-2i}{-2i+4-2i}=\frac{6-6i}{4-4i}$$
$$=\frac{6(1-i)}{4(1-i)}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$
$$\arg(w)=\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}\right)=(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=0$$

ومنهُ النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة

مكثفة شيفرة الـ 600

التمرين الرابع:

لتكن لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

$z_A = -1+i$	$z_B = 2+i$
$z_C = 1+i$	

أثبت أنّ $AC = \frac{2}{3}AB$.

الحل:

$$w = \frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$
$$= \frac{1+i+1-i}{2+i+1-i} = \frac{2}{3}$$
$$|w| = \left|\frac{2}{3}\right| \to \left|\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right| = \frac{2}{3}$$
$$\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3} \to 3AC = 2AB \to AC = \frac{2}{3}AB$$

التمرين الخامس:

لتكن النقاط A و B و C نقاط المستوي التي تمثل الأعداد العقدية بالترتيب.

$a = 2$	$b = 1+\sqrt{3}i$
$c = -1+\sqrt{3}i$	

احسب $\frac{a-b}{c-b}$ وماذا تستنتج؟

الحل:

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{2-1-\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}i}{-2} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

حساب الطويلة:

$$\left|\frac{a-b}{c-b}\right| = \left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$$
$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}\right| = \left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$$
$$\frac{BA}{BC} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} \to \frac{BA}{BC} = 1 \to BA = BC$$

حساب الزاوية:

$$\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = \arg\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}\right) = \arg\left(\underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}_{z'}\right)$$

لدينا:

$$z' = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$x = -\frac{1}{2} \quad , \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$r = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

ومنه:

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

ومنه نستنتج:

المثلث ABC مثلث متساوي الساقين ومنفرج الزاوية رأسه B حيث $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$

التمرين السادس:

نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية.

$a = 6-i$	$b = -6+3i$
$c = -18+7i$	

احسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ وماذا تستنتج؟

الحل:

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}$$
$$= \frac{-12+4i}{-24+8i} = \frac{4(-3+i)}{8(-3+i)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

حساب الطويلة:

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \to \left|\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}\right| = \frac{1}{2}$$
$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \to AC = 2AB$$

حساب الزاوية:

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) = 0$$

الاستنتاج:

ومنه النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة

التمرين السابع:

١. اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة:

$$(z^2+3\sqrt{3}.z+9)(z^2-3\sqrt{3}.z+9) = 0$$

٢. أثبت أنّ النقاط A و B و C و D التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل.

الحل:

الطالب الأول:

حل المعادلة:

$$(z^2+3\sqrt{3}.z+9)(z^2-3\sqrt{3}.z+9) = 0$$

إما $z^2+3\sqrt{3}z+9=0$

$$a=1 \quad , \quad b=3\sqrt{3} \quad , \quad c=9$$
$$\Delta = b^2-4ac = 27-36 = -9 < 0$$

ومنهُ للمعادلة حلان عقديان مترافقان.

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{-3\sqrt{3}+3i}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$
$$z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{-3\sqrt{3}-3i}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

كتابة الحلول المعادلة بالشكل الأسي:

$$z_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i = \frac{3}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(2.e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) = 3.e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

وبما أنّ z_2 مرافق الـ z_1 فإنّ:

$$z_2 = \bar{z}_1 \to z_2 = 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

أو $z^2-3\sqrt{3}.z+9=0$

$$a=1 \quad , \quad b=-3\sqrt{3} \quad , \quad c=9$$
$$\Delta = b^2-4ac = 27-36 = -9 < 0$$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان.

$$z_3 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}+3i}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$
$$z_4 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}-3i}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

كتابة حلول المعادلة بالشكل الأسي:

$$z_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(2.e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = 3.e^{i\frac{\pi}{6}}$$

وبما أنّ z_4 مرافق الـ z_3 فإنّ:

$$z_4 = \bar{z}_3 \to z_4 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

الطالب الثاني:



إثبات أن حلول المعادلة تمثل رؤوس مستطيل.

حيث حلول المعادلة:

$z_A = -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$
$z_B = -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$
$z_C = \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$
$z_D = \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

الخطوة الأولى:

إثبات أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع:

* $z_{\overrightarrow{AD}} = z_D - z_A$
$= \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$
* $z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B$
$= \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

نلاحظ أنّ: $z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{BC}}$

تكافئ: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

ومنهُ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

الخطوة الثانية:

الطريقة الأولى: إثبات أنّ فيه ضلعان متجاوران متعامدان.

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_B}$$
$$= \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}{\frac{3\sqrt{3}}{3}-\frac{3}{2}i+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i}$$
$$= \frac{-\frac{6}{2}i}{\frac{6\sqrt{3}}{2}} = \frac{-6i}{6\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}i$$

نوجد الزاوية:

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}\right)=\arg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)$$

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB})=\frac{3\pi}{2}$$

نجد أنّ: المستقيمان (AB) و (BC) متعامدان.

ومنه الرباعي $ABCD$ مستطيل.

الطريقة الثانية: إثبات أنّ قطراه متساويان.

$$\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{BD}}}=\frac{z_C-z_A}{z_D-z_B}$$

$$=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}{\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i}$$

$$=\frac{\frac{6\sqrt{3}}{2}-\frac{6}{2}i}{\frac{6\sqrt{3}}{2}+\frac{6}{2}i}=\frac{3\sqrt{3}-3i}{3\sqrt{3}+3i}$$

$$=\frac{3(\sqrt{3}-i)}{3(\sqrt{3}+i)}=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-1}{3+1}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

نوجد الطويلة:

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{BD}}}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$$

$$\frac{AC}{BD}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$\frac{AC}{BD}=1\rightarrow AC=BD$$

ومنه الرباعي $ABCD$ مستطيل.

التمرين الثامن:

لتكن لدينا النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية:

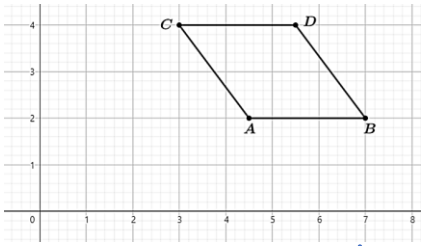
$z_A=\frac{9}{2}+2i$	$z_D=\frac{11}{2}+4i$
$z_B=7+2i$	$z_C=3+4i$

١. وضع النقاط في شكل.

٢. أثبت أنّ الرباعي $ABDC$ معيّن.

الحل:

الطالب الأول:



الطالب الثاني:

الخطوة الأولى:

إثبات أنّ الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.

$$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$$

$$=7+2i-\frac{9}{2}-2i=\frac{5}{2}$$

$$z_{\overrightarrow{CD}}=z_D-z_C$$

$$=\frac{11}{2}+4i-3-4i=\frac{5}{2}$$

نلاحظ أنّ: $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{CD}}$

تكافئ: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

ومنه الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.

الخطوة الثانية: إثبات أن قطراه متعامدان.

$$\frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}=\frac{z_D-z_A}{z_B-z_C}$$

$$=\frac{\frac{11}{2}+4i-\frac{9}{2}-2i}{7+2i-3-4i}$$

$$=\frac{\frac{2}{2}+2i}{4-2i}=\frac{(1+2i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}$$

$$=\frac{4+2i+8i-4}{16+4}=\frac{10}{20}i=\frac{1}{2}i$$

نوجد الزاوية:

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}i\right)$$

$$(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$$

نجد أنّ المستقيمان (CB) و (AD) متعامدان.

ومنه الرباعي $ABDC$ معين.

التمرين التاسع:

لتكن لدينا النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية:

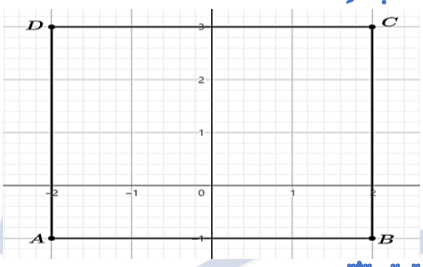
$z_A=-2-i$	$z_B=2-i$
$z_c=2+3i$	$z_D=-2+3i$

١. وضع النقاط في شكل.

٢. أثبت أنّ الرباعي $ABCD$ مربع.

الحل:

الطالب الأول:



الطالب الثاني:

الخطوة الأولى:

إثبات أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

$$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$$

$$=2-i+2+i=4$$

$$z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D$$

$$=2+3i+2-3i=4$$

نلاحظ أنّ: $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}$

تكافئ: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

الخطوة الثانية:

إثبات أن فيه ضلعان متجاوران متعامدان متساويان.

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_B}$$

$$=\frac{2-i+2+i}{2+3i-2+i}=\frac{4}{4i}=\frac{1}{i}$$

$$\frac{(1)(-i)}{(i)(-i)}=-\frac{i}{1}=-i$$

نوجد الزاوية:

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}\right)=\arg(-i)$$

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB})=\frac{3\pi}{2}$$

ومنه المستقيمان (AB) و (BC) متعامدان.

نوجد الطويلة:

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}\right|=|-i|$$

$$\frac{AB}{BC}=1\rightarrow AB=BC$$

ومنه الرباعي $ABCD$ مربع.

التمرين العاشر:

في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية.

$z_A=-2\sqrt{3}$	$z_B=2\sqrt{3}.e^{-i\frac{\pi}{3}}$
$z_C=2i$	

الطالب الأول:

اكتب z_A و z_C بالشكل الأسي و z_A بالشكل الجبري

الحل:

كتابة z_A و z_C بالشكل الأسي:

$$z_A=-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}(-1)=2\sqrt{3}e^{i\,\pi}$$

$$z_C=2i=2(i)=2.e^{i\frac{\pi}{2}}$$

كتابة z_B بالشكل الجبري:

$$z_B=2\sqrt{3}.e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$=2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\sqrt{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$=\sqrt{3}-3i$$

الطالب الثاني:

عين العدد العقدي z_E الممثل للنقطة E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلين $(A,1)$ و $(C,3)$.

الحل:

$$z_E=\frac{1.z_A+3.z_C}{1+3}$$

$$=\frac{(1)(-2\sqrt{3})+3(2i)}{4}$$

$$=\frac{-2\sqrt{3}+6i}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

الطالب الثالث:

احسب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_E}$ واستنتج ماذا يمثل المستقيم (BE) في المثلث (ABC).

الحل:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_E}=\frac{2i+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3i+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}$$

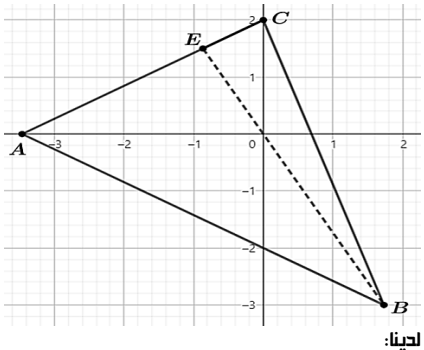
$$=\frac{2\sqrt{3}+2i}{\frac{3\sqrt{3}-9i}{2}}=\frac{4\sqrt{3}+4i}{3\sqrt{3}-9i}$$

$$=\frac{4(\sqrt{3}+i)}{3\sqrt{3}(1-\sqrt{3}i)}=\frac{4\left(2.e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}{3\sqrt{3}\left(2.e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}$$

$$=\frac{4.e^{i\frac{\pi}{6}}}{3\sqrt{3}.e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}.e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}.e^{i\frac{3\pi}{6}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}.e^{i\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج ماذا يمثل المستقيم (BE) في المثلث ABC.



لدينا:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_E}=\frac{4}{3\sqrt{3}}.e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_E}\right)=\arg\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}.e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$

مكثفة شيفرة الـ 600

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{EB}}}\right)=\arg\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}.e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$$

ومنه المستقيمان (EB) و (AC) متعامدان.

ومنه المستقيم (BE) ارتفاع في المثلث ABC.

التمرين الحادي عشر:

لتكن لدينا النقاط A و B و C الممثلة للأعداد العقدية

$z_A=\sqrt{3}-i$	$z_B=-\sqrt{3}-3i$
$z_C=\frac{4.z_B}{3\sqrt{3}.z_A}$	

الطالب الأول:

اكتب كلاً من الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C بالشكل الأسي.

الحل:

$$z_A=\sqrt{3}-i=2.e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_B=-\sqrt{3}-3i=\sqrt{3}(-1-\sqrt{3}i)$$
$$=\sqrt{3}\left(2.e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)=2\sqrt{3}.e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$z_C=\frac{4.z_B}{3\sqrt{3}.z_A}=\frac{4\left(2\sqrt{3}.e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)}{3\sqrt{3}\left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)}$$
$$=\frac{4.e^{i\frac{4\pi}{3}}}{3.e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\frac{4}{3}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$=\frac{4}{3}e^{i\frac{9\pi}{6}}=\frac{4}{3}e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

الطالب الثاني:

احسب العدد $\frac{z_B}{z_A}$ واستنتج نوع المثلث AOB.

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{2\sqrt{3}.e^{i\frac{4\pi}{3}}}{2.e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\sqrt{3}.e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{3}.e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

استنتاج نوع المثلث AOB.

لدينا من دقيقة:

$$\frac{z_B}{z_A}=\sqrt{3}.e^{i\frac{3\pi}{2}}$$
$$\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\sqrt{3}.e^{i\frac{3\pi}{2}}$$
$$\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}=\sqrt{3}.e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

حساب الطويلة:

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right|=\left|\sqrt{3}.e^{i\frac{3\pi}{2}}\right|$$
$$\frac{OB}{OA}=\sqrt{3}\rightarrow OB=\sqrt{3}.OA$$

حساب الزاوية:

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right)=\arg\left(\sqrt{3}.e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$$
$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{3\pi}{2}$$

ومنه المستقيمان (OA) و (OB) متعامدان.

ومنه نجد أنّ المثلث ABC قائم في O.

الطالب الثالث:

لتكن النقطة I منتصف $[AB]$ أوجد العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I.

الحل:

$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-3i}{2}$$
$$=\frac{-4i}{2}=-2i$$

الطالب الرابع:

أوجد قياساً للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC})$ واستنتج أنّ النقاط O و C و I تقع على استقامة واحدة.

الحل:

إيجاد قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC})$:

$$(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC})=\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OC}}}{z_{\overrightarrow{OI}}}\right)$$
$$=\arg\left(\frac{z_C-z_O}{z_I-z_O}\right)=\arg\left(\frac{z_C}{z_I}\right)$$
$$=\arg\left(\frac{\frac{4}{3}e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2.e^{i\frac{3\pi}{2}}}\right)=\arg\left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right)$$
$$=\arg\left(\frac{2}{3}\right)=0$$

استنتاج أنّ النقاط O و C و I تقع على استقامة واحدة:

لدينا من دقيقة:

$$(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC})=0$$

ومنه النقاط O و C و I تقع على استقامة واحدة.

الطالب الخامس:

تحقق أنّ النقطة C مركز ثقل المثلث OAB.

$$\frac{z_O+z_A+z_B}{3}=\frac{0+\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-3i}{3}$$
$$=-\frac{4}{3}i=\frac{4}{3}(-i)=\frac{4}{3}.e^{i\frac{3\pi}{2}}=z_C$$

ومنه النقطة C مركز ثقل المثلث OAB

التمرين الثاني عشر:

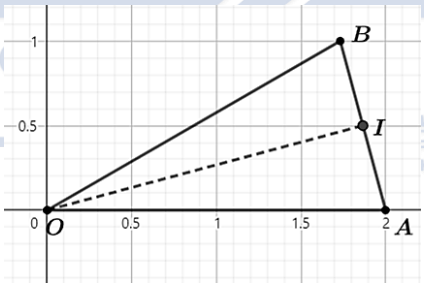
نتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان:

$z_A=2$	$z_B=2.e^{i\frac{\pi}{6}}$

وليكن I منتصف $[AB]$ والمطلوب:

الطالب الأول:

ارسم شكلاً مناسباً وبيّن طبيعة المثلث OAB.



طبيعة المثلث OAB:

$$\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}=\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\frac{z_B}{z_A}=\frac{2.e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

نوجد الطويلة:

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|$$
$$\frac{OB}{OA}=1\rightarrow OA=OB$$

نوجد الزاوية:

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right)=\arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\rightarrow(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{6}$$

ومنه المثلث OAB مثلث متساوي الساقين.

الطالب الثاني:

استنتج قياس الزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$:

لدينا المثلث OAB مثلث متساوي الساقين ولدينا I منتصف $[AB]$ إذاً (OI) هو متوسط متعلق برأس المثلث OAB ولأنه مثلث متساوي الساقين يكون المتوسط المتعلق بالرأس هو منصف لزاوية الرأس أيّ أنّ:

$$(\vec{u},\overrightarrow{OI})=\frac{(\vec{u},\overrightarrow{OA})+(\vec{u},\overrightarrow{OB})}{2}$$
$$=\frac{\arg(z_A)+\arg(z_B)}{2}$$
$$=\frac{\arg(2)+\arg\left(2.e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}{2}$$
$$=\frac{0+\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\pi}{12}$$

الطالب الثالث:

احسب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بصيغتيه الجبرية والأسيّة.

كتابة z_I بالصيغة الجبرية:

لدينا النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$$

سنود بعد قليل:

كتابة z_B بالشكل الجبري.

$$z_B=2.e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right]=\sqrt{3}+i$$

عدنا:

$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{2+\sqrt{3}+i}{2}$$
$$z_I=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

كتابة z_I بالصيغة الأسية.

$$z_I=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$
$$x=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\quad,\quad y=\frac{1}{2}$$

حساب الطويلة:

$$r=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4}+\frac{1}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{4+4\sqrt{3}+3}{4}+\frac{1}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

حساب الزاوية:

لدينا من الطلب السابق:

$$(\vec{u},\overrightarrow{OI})=\arg(z_I)=\frac{\pi}{12}$$

ومنه:

$$z_I=\sqrt{2+\sqrt{3}}.e^{i\frac{\pi}{12}}$$

الطالب الرابع:

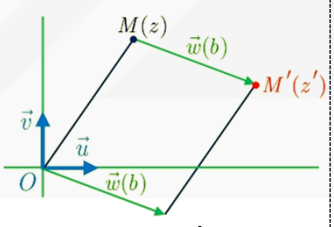
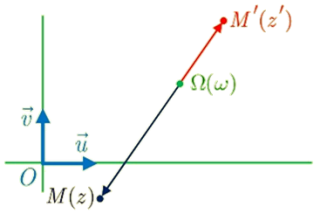
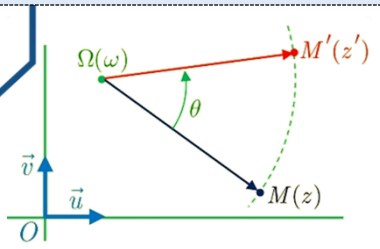
استنتج قيمة كل من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

لدينا:

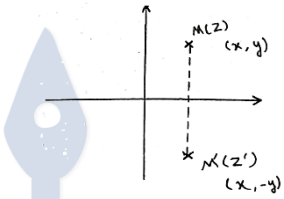
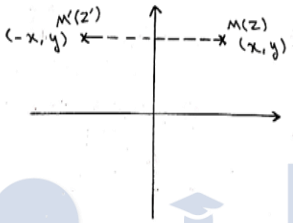
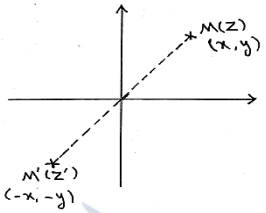
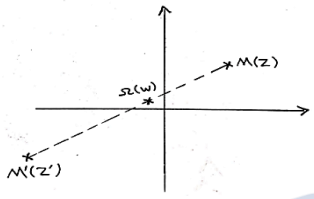
$$\underbrace{z_I}_{\text{أسي}}=\underbrace{z_I}_{\text{جبري}}$$
$$\sqrt{2+\sqrt{3}}.e^{i\frac{\pi}{12}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{x}{r}=\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2.\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{y}{r}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

الانسحاب	التحاكي	الدوران
		
لدينا النقطة M' صورة النقطة M وفق الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}} = Z_{\text{قديم}} + Z_{\text{شعاع}}$ أيّ: $Z' = Z + b$	لدينا النقطة M' صورة النقطة M وفق التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته K الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}} - Z_{\text{مركز}} = k(Z_{\text{قديم}} - Z_{\text{مركز}})$ أيّ: $Z' - w = k(Z - w)$ حيث k عدد حقيقي.	لدينا النقطة M' صورة النقطة M وفق دوران مركزه Ω وزاويته θ الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}} - Z_{\text{مركز}} = e^{i\theta}(Z_{\text{قديم}} - Z_{\text{مركز}})$ أيّ: $Z' - w = e^{i\theta}(Z - w)$

التناظر

التناظر المحوري		التناظر المركزي	
الذي محوره Ox	الذي محوره Oy	الذي مركزه المبدأ O	الذي مركزه Ω
			
النقطة M' صورة النقطة M وفق التناظر المحوري الذي محوره (OX) محور الفواصل الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}} = \bar{Z}_{\text{قديم}}$ أيّ: $Z' = \bar{Z}$	النقطة M' صورة النقطة M وفق التناظر المحوري الذي محوره (OY) محور التراتيب الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}} = -\bar{Z}_{\text{قديم}}$ أيّ: $Z' = -\bar{Z}$	النقطة M' صورة النقطة M وفق التناظر المركزي الذي مركزه المبدأ الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}} = -Z_{\text{قديم}}$ أيّ: $Z' = -Z$	النقطة M' صورة النقطة M وفق التناظر المركزي الذي مركزه Ω الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}} = 2Z_{\text{مركز}} - Z_{\text{قديم}}$ أيّ: $Z' = 2w - Z$

أنماط التمارين	
النمط الأول: إيجاد z جديد	النمط الثاني: تعيين طبيعة التحويل
نضع الصيغة العقدية المناسبة لنوع التحويل ثم نعوّض ونصلح ونعزل z جديد.	نكتب العلاقة بصيغة تشبه أحد التحويلات الهندسية ثم نحدد نوع التحويل الموافق.

التمرين الأول:

لتكن A النقطة التي يمثلها العدد العقدي $z_A = 1 + i$ والمطلوب:

الطلب الأول:

أوجد العدد العقدي z_B الممثلة للنقطة B صورة النقطة A وفق التناظر المحوري الذي محوره OX.

$$z_B = \bar{z}_A$$
$$z_B = 1 - i$$

الطلب الثاني:

أوجد العدد العقدي z_C الممثلة للنقطة C صورة النقطة A وفق التناظر المحوري الذي محوره OY.

$$z_C = -\bar{z}_A$$
$$z_C = -(1 - i) = -1 + i$$

الطلب الثالث:

أوجد العدد العقدي z_D الممثلة للنقطة D صورة النقطة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه المبدأ

$$z_D = -z_A$$
$$z_D = -1 - i$$

الطلب الرابع:

أوجد العدد العقدي z_E الممثلة للنقطة E صورة النقطة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه $\Omega(3 + i)$.

$$z_E = 2w - z_A$$
$$z_E = 2(3 + i) - (1 + i)$$
$$= 6 + 2i - 1 - i = 5 + i$$

الطلب الخامس:

أوجد العدد العقدي z_F الممثل للنقطة F صورة النقطة A وفق التحاكي الذي مركزه: $\Omega(-2 + 2i)$ ونسبته $k = 3$.

$$f - \omega = k(a - \omega)$$
$$f + 2 - 2i = 3(1 + i + 2 - 2i)$$
$$f + 2 - 2i = 3(3 - i)$$
$$f = 9 - 3i - 2 + 2i$$
$$f = 7 - i$$

الطلب السادس:

أوجد العدد العقدي z_G الممثل للنقطة G صورة النقطة A وفق التحاكي الذي مركزه المبدأ ونسبته $k = \frac{2}{3}$.

$$g - o = k(a - o)$$
$$g = \frac{2}{3}(1 + i) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

الطلب السابع:

أوجد العدد العقدي z_H الممثل للنقطة H صورة النقطة A وفق الدوران الذي مركزه $\Omega(5 - 2i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$h - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - \omega)$$
$$h - 5 + 2i = i(1 + i - 5 + 2i)$$
$$h - 5 + 2i = i(-4 + 3i)$$
$$h = -4i - 3 + 5 - 2i$$
$$h = 2 - 6i$$

التمرين الثاني:

لتكن لدينا النقطتان A و B تمثلها الأعداد العقدية a و b , عين طبيعة التحويل الهندسي الموافق.

1. $b = \bar{a}$

النقطة B صورة النقطة A وفق التناظر المحوري الذي محوره OX.

2. $b = -\bar{a}$

النقطة B صورة النقطة A وفق التناظر المحوري الذي محوره OY.

مكثفة شيفرة الـ 600

3. $b = -a$

- النقطة B صورة النقطة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه المبدأ.
- النقطة B صورة النقطة A وفق التحاكي الذي مركزه المبدأ ونسبته $k = -1$.

4. $b = e^{i\pi}.a$

النقطة B صورة النقطة A وفق الدوران الذي مركزه المبدأ وزاويته $\theta = \pi$.

5. $b = 2 - 4i - a$

النقطة B صورة النقطة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه $\Omega(1 - 2i)$.

6. $b = a + 2 - i$

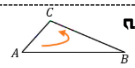
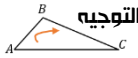
النقطة b صورة النقطة A وفق الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$.

7. $b = -a + 2 - i$

النقطة B صورة النقطة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه $\Omega\left(1 - \frac{1}{2}i\right)$.

القسم الرابع: أسلوب تسميع الكلام والشاطر يفهم.

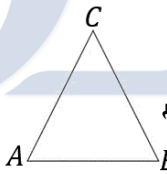
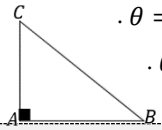
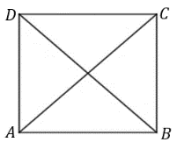
أولاً: كلمة ومعنى

الكلمة	المعنى
دوران دورة كاملة	$\theta = 2\pi$
دوران نصف دورة	$\theta = \pi$
دوران ربع دورة	$\theta = \frac{\pi}{2}$
ABC مثلث مباشر التوجيه 	تسمية المثلث وفق الدوران بالإتجاه الموجب "عكس عقارب الساعة"
ABC مثلث غير مباشر التوجيه 	تسمية المثلث وفق الدوران بالإتجاه السالب"مع عقارب الساعة"

ثانياً: التحويل الهندسي الموافق

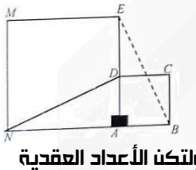
لدينا	نفهم
النقطة A صورة B وفق دوران مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$	أن الشكل ABC مثلث قائم في C ومتساوي الساقين
النقطة A صورة B وفق دوران مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$	أن الشكل ABC متساوي الأضلاع

ثالثاً: الأشكال ومعانيها "قراءة شكل"

الشكل	معناه	مثال
المثلث متساوي الأضلاع	في المثلث متساوي الأضلاع يوجد دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$ أو $-\frac{\pi}{3}$ وذلك حسب اتجاه الدوران والمركز يمكن أن يكون أي نقطة من رؤوس المثلث.أي يوجد 6 صيغ للدوران بحيث يتم اختيار الصياغة المناسبة لنص السؤال. 	ABC مثلث متساوي الأضلاع والمطلوب: اكتب صيغ الدورانات الموجودة. ١. النقطة A صورة النقطة B وفق دوران مركزه C وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{3}$. ٢. النقطة B صورة النقطة A وفق دوران مركزه C وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$. ٣. النقطة B صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{3}$. ٤. النقطة C صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$. ٥. النقطة C صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{3}$. ٦. النقطة A صورة النقطة C وفق دوران مركزه B وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$.
المثلث القائم المتساوي الساقين	في المثلث القائم ومتساوي الساقين يوجد دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$ وذلك حسب اتجاه الدوران والمركز يمكن أن يكون موقع الزاوية القائمة حصراً أي يوجد 2 صيغة للدوران بحيث يتم اختيار الصياغة المناسبة لنص السؤال.	ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين والمطلوب اكتب صيغ الدورانات الموجودة. ١. النقطة B صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$. ٢. النقطة C صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$. 
المثلث المتساوي الساقين	يوجد دوران مركزه رأس المثلث وزاويته θ (معطاة)	
المربع	في المربع يوجد دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$ وذلك حسب اتجاه الدوران والمركز يمكن أن يكون أي رأس من رؤوس المربع والنقطة وصورتها هما رأسيين غير متتاليين من رؤوس المربع أي يوجد 8 صيغة للدوران بحيث يتم اختيار الصياغة المناسبة لنص السؤال. 	١. النقطة B صورة النقطة D وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ٢. النقطة B صورة النقطة D وفق دوران مركزه C وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ٣. النقطة D صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ٤. النقطة D صورة النقطة B وفق دوران مركزه C وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ٥. النقطة A صورة النقطة C وفق دوران مركزه D وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ٦. النقطة A صورة النقطة C وفق دوران مركزه B وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ٧. النقطة C صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ٨. النقطة C صورة النقطة A وفق دوران مركزه D وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

مختصر شـــامل 600 برهنة

التمرين الأول:



تأمل الشكل المرسوم
جانباً $AEMN$ و $ABCD$
مربعان نختار معلم متجانس
مباشر التوجيه $(A;\vec{u},\vec{v})$ ولتكن الأعداد العقدية
a و b و c و d و e و m و n و s الممثلة للنقاط
A و B و C و D و E و M و N و S والمطلوب:

الطالب الأول:

أثبت أنّ $d = ib$ و $e = -in$.

الحل:

إثبات أنّ $d = ib$.

لدينا الرباعي $ABCD$ مربع فيه النقطة D صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$d - o = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - o)$$
$$d = ib$$

إثبات أنّ $e = -in$.

لدينا الرباعي $AEMN$ مربع فيه النقطة E صورة النقطة N وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = \frac{-\pi}{2}$

$$e - o = e^{-i\frac{\pi}{2}}(n - o)$$
$$e = -in$$

الطالب الثاني:

احسب $\frac{e-b}{d-n}$ واكتبه بالشكل الأسي واستنتج أنّ $(EB) \perp (ND)$ و $EB = ND$.

الحل:

$$\frac{e-b}{d-n} = \frac{-in-b}{ib-n} = \frac{i(-n+ib)}{-n+ib} = i$$
$$\frac{e-b}{d-n} = i \rightarrow \frac{e-b}{d-n} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومنه:

$$\frac{z_{\overrightarrow{BE}}}{z_{\overrightarrow{ND}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

نوجد الزاوية:

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BE}}}{z_{\overrightarrow{ND}}}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{ND}, \overrightarrow{BE}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه $(EB) \perp (ND)$

نوجد الطويلة:

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{BE}}}{z_{\overrightarrow{ND}}}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right| \rightarrow \frac{BE}{ND} = 1$$
$$BE = ND$$

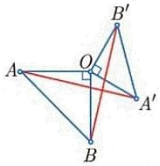
الطالب الثالث:

إذا كانت S صورة D وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AC}$,
اكتب s بدلالة c و d.

الحل:

$$s = d + z_{\overrightarrow{AC}}$$
$$s = d + c - a$$
$$s = d + c$$

التمرين الثاني:



في الشكل المجاور المثلثان
OAB و $OA'B'$ كل منهما
قائم في O ومتساوي الساقين
لتكن الأعداد العقدية a و b و a' و b' الممثلة
للنقاط A و B و A' و B' نختار معلماً متجانساً
مبدؤه O والمطلوب:

الطالب الأول:

جد بدلالة a' و b العددين العقديين b' و a

الحل:

B' صورة A' وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$b' - o = e^{i\frac{\pi}{2}}(a' - o)$$
$$b' = ia'$$

A صورة B وفق دوران مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

$$a - o = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b - o)$$
$$a = -ib$$

الطالب الثاني:

اكتب العدد $\frac{b'-b}{a'-a}$ بالشكل الجبري

الحل:

$$\frac{b'-b}{a'-a} = \frac{ia'-b}{a'+ib} = \frac{i(a'+ib)}{a'+ib} = i$$

الطالب الثالث:

أثبت أنّ $AA' = BB'$ وأن (AA') و (BB') متعامدان.

الحل: لدينا:

$$\frac{b'-b}{a'-a} = i \rightarrow \frac{z_{\overrightarrow{BB'}}}{z_{\overrightarrow{AA'}}} = i$$

نوجد الطويلة:

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{BB'}}}{z_{\overrightarrow{AA'}}}\right| = |i|$$
$$\frac{BB'}{AA'} = 1 \rightarrow BB' = AA'$$

نوجد الزاوية:

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BB'}}}{z_{\overrightarrow{AA'}}}\right) = \arg(i)$$
$$\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه المستقيمان (AA') و (BB') متعامدان.

الطالب الرابع:

بفرض O مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(A',1)$ و $(B',3)$ احسب $\frac{b}{a'}$ واستنتج أنّ $OB = \sqrt{5}.OA'$.

الحل:

$$o = \frac{a + b + a' + 3b'}{6}$$
$$-ib + b + a' + 3ia' = 0$$
$$b - ib = -a' - 3ia'$$
$$(1-i)b = (-1-3i)a'$$

نقسم على a':

$$\frac{(1-i)b}{a'} = -1 - 3i$$

نقسم على $(1-i)$:

$$\frac{b}{a'} = \frac{-1-3i}{1-i} = \frac{(-1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{-1-i-3i+3}{1+1} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

ومنه:

$$\frac{b}{a'} = 1 - 2i \rightarrow \frac{b-o}{a'-o} = 1 - 2i$$
$$\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{OD'}} = 1 - 2i$$

نوجد الطويلة:

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{OD'}}\right| = \sqrt{1+4} \rightarrow \frac{OB}{OD'} = \sqrt{5}$$
$$OB = \sqrt{5}.OD'$$

مجموعات النقاط:

المجموعة	الحالة	معناها
الأولى	عدد $Re(z) =$	تمثل المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x =$ عدد
	عدد $Im(z) =$	تمثل المستقيم الأفقي الذي معادلته $y =$ عدد
الثانية	$\arg(z) = \alpha$	تمثل نصف مستقيم مفتوح بدايته المبدأ ويصنع زاوية α مع محور الفواصل
	$arg(z) = 0$	تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة
	$arg(z) = \pi$	تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة
	$arg(z) = \pi/2$	تمثل مجموعة الأعداد التخيلية البحتة الموجبة
	$arg(z) = 3\pi/2$	تمثل مجموعة الأعداد التخيلية البحتة السالبة
الثالثة	$\|z-a\| = k$	تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = K$
	$\|z-a\| = \|a-b\|$	تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = AB$
	$\|z-a\| = \|c-b\|$	تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = BC$
	$\|z-a\| = \|z-b\|$	تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$

مكثفة شيفرة الـ 600

التمرين الأول:

في كل من الحالات الآتية عين مجموعة النقاط M التي تحقق العدد العقدي z الذي يمثلها الشرط المعطى:

1. $Re(z) = 3$

تمثل المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = 3$

2. $Im(z) = -2$

تمثل المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = -2$

3. $arg(z) = \frac{\pi}{6}$

تمثل نصف مستقيم مفتوح بدايته المبدأ ويصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل

4. $arg(z) = 0$

تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

5. $arg(z) = \pi$

تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة

6. $arg(z) = \frac{\pi}{2}$

تمثل مجموعة الأعداد التخيلية البحتة الموجبة

7. $arg(z) = \frac{3\pi}{2}$

تمثل مجموعة الأعداد التخيلية البحتة السالبة

8. $|z| = 2$

تمثل دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها 2

9. $|z - 5 + i| = 3$

تمثل دائرة مركزها $A(5,-1)$ ونصف قطرها $r = 3$

ومعادلتها: $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 9$

10. $|z - 1 - i| = |z - 6|$

تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث:

$A(1,1)$ ، $B(6,0)$

التمرين الثاني:

في حالة عدد عقدي $z \neq 1$ نضع $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ ونفترض أن $z = x + iy$ و $Z = X + iY$ حيث x و y و X و Y هي أعداد حقيقية.

١. احسب X و Y بدلالة العددين x و y

٢. أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة

٣. أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منه نقطة

الحل:

الطالب الأول:

$$u = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$X + iY = \frac{2 + x - iy}{1 + x - iy}$$

$$X + iY = \frac{(2 + x - iy)(1 + x + iy)}{(1 + x - iy)(1 + x + iy)}$$

$$X + iY = \frac{2 + 2x + 2iy + x + x^2 + ixy - iy - ixy + y^2}{(1+x)^2 + y^2}$$

$$X + iY = \frac{2 + 3x + x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2} + i\frac{y}{(1+x)^2 + y^2}$$

بالمطابقة نجد:

$$X = \frac{2 + 3x + x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2}$$

$$Y = \frac{y}{(1+x)^2 + y^2}$$

الطالب الثاني:

بما أن u حقيقي فإن:

$$Im(u) = 0$$

$$\frac{y}{(1+x)^2 + y^2} = 0$$

$$y = 0$$

معادلة مستقيم باستثناء النقطة $(-1,0)$ وبالتالي تمثل معادلة مستقيم محذوف منه نقطة.

الطالب الثالث:

بما أن u تخيلي بحت فإن:

$$Re(u) = 0$$

$$\frac{2 + 3x + x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2} = 0$$

$$2 + 3x + x^2 + y^2 = 0$$

$$x^2 + 3x + y^2 + 2 = 0$$

الإتمام إلى مربع كامل

$$\underbrace{x^2 + 3x + \frac{9}{4}} - \frac{9}{4} + y^2 + 2 = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

هذه معادلة دائرة مركزها $(-\frac{3}{2}, 0)$ ونصف قطرها $R = \frac{1}{2}$

وبالتالي $M(z)$ تمثل دائرة محذوف منها نقطة $(-1,0)$

التمرين الثالث:

ليكن a عدداً عقدياً معطى، لتكن ε مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق: $z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$ عين المجموعة ε ومثلها في مستو مزود بمعلم

بفرض: $Z = x + yi$ و $a = \alpha + \beta i$

الحل:

$$z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2$$

$$(z - \bar{z})(z + \bar{z}) = (a - \bar{a})(a + \bar{a})$$

$$(2yi)(2x) = (2\beta i)(2\alpha)$$

$$xy = \alpha\,\beta$$

المجموعة الأولى:

$$\alpha\,\beta = 0$$

$$xy = 0$$

إما $x = 0$ أي مجموعة الأعداد العقدية z هي الأعداد التخيلية البحتة وتمثل بمحور التراتيب

أو $y = 0$ أي مجموعة الأعداد العقدية z هي الأعداد الحقيقة ويمثل بمحور الفواصل

المجموعة الثانية:

$$\alpha\,\beta < 0$$

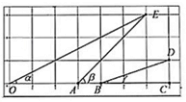
أي مجموعة الأعداد العقدية Z تمثل بنقاط قطع زائد فرعاه في الربعين الثاني والرابع

المجموعة الثالثة:

$$\alpha\,\beta > 0$$

أي مجموعة الأعداد العقدية Z تمثل بنقاط قطع زائد فرعاه في الربعين الأول والثالث.

التمرين الرابع:



في الشكل المجاور α و β و γ هي القياسات للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE})$ و $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ و $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ بالترتيب:

١. اكتب كلاً من الأعداد العقدية الآتية بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي $Z_{\overrightarrow{BD}}$ و $Z_{\overrightarrow{AE}}$ و $Z_{\overrightarrow{OE}}$

٢. اكتب العدد العقدي $Z_{\overrightarrow{OE}} \cdot Z_{\overrightarrow{AE}} \cdot Z_{\overrightarrow{BD}}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي.

٣. استنتج المجموع $\alpha + \beta + \gamma$.

الحل:

فرض المعلم: $(O; \vec{u}, \vec{v})$

احداثيات النقاط: بالاعتماد على الشكل

$$O(0,0)$$

$$A(3,0) \rightarrow Z_A = 3$$

$$B(4,0) \rightarrow Z_B = 4$$

$$C(7,0) \rightarrow Z_C = 7$$

$$E(6,3) \rightarrow Z_E = 6 + 3i$$

$$D(7,1) \rightarrow Z_D = 7 + i$$

الطالب الأول:

إيجاد $Z_{\overrightarrow{BD}}$:

الشكل الجبري:

$$Z_{\overrightarrow{BD}} = Z_D - Z_B = 3 + i$$

الشكل الأسي:

$$x = 3\,,y = 1 \rightarrow r = \sqrt{10}$$

$$Z_{\overrightarrow{BD}} = \sqrt{10}e^{i\gamma}$$

إيجاد $Z_{\overrightarrow{AE}}$:

الشكل الجبري:

$$Z_{\overrightarrow{AE}} = Z_E - Z_A = 3 + 3i$$

الشكل الأسي:

$$x = 3\,,y = 3 \rightarrow r = 3\sqrt{2}$$

$$Z_{\overrightarrow{AE}} = 3\sqrt{2}e^{i\beta} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

إيجاد $Z_{\overrightarrow{OE}}$:

الشكل الجبري:

$$Z_{\overrightarrow{OE}} = Z_E - Z_O = 6 + 3i$$

الشكل الأسي:

$$x = 6\,,y = 3 \rightarrow r = 3\sqrt{5}$$

$$Z_{\overrightarrow{OE}} = 3\sqrt{5}e^{i\alpha}$$

الطالب الثاني:

كتابة العدد $Z_{\overrightarrow{OE}} \cdot Z_{\overrightarrow{AE}} \cdot Z_{\overrightarrow{BD}}$ بالشكل الجبري:

$$Z_{\overrightarrow{OE}} \cdot Z_{\overrightarrow{AE}} \cdot Z_{\overrightarrow{BD}} = (3 + i)(3 + 3i)(6 + 3i)$$

$$= (9 + 9i + 3i - 3)(6 + 3i)$$

$$= (6 + 12i)(6 + 3i)$$

$$= 36 + 18i + 72i - 36 = 90i$$

الشكل الأسي:

$$Z_{\overrightarrow{OE}} \cdot Z_{\overrightarrow{AE}} \cdot Z_{\overrightarrow{BD}} = 90e^{i\frac{\pi}{2}}$$

الطالب الثالث:

استنتاج $\alpha + \beta + \gamma$:

$$Z_{\overrightarrow{OE}} \cdot Z_{\overrightarrow{AE}} \cdot Z_{\overrightarrow{BD}} = 90e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ولدينا:

$$Z_{\overrightarrow{OE}} \cdot Z_{\overrightarrow{AE}} \cdot Z_{\overrightarrow{BD}} = (3\sqrt{5}e^{i\alpha})(3\sqrt{2}e^{i\beta})(\sqrt{10}e^{i\gamma})$$

$$= 90e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$$

بالمقارنة نجد:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

وحسب الشكل $k = 0$ إذاً:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

استنتاج $\alpha + \gamma$:

$$\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta \rightarrow \alpha + \gamma = \frac{\pi}{4}$$

لأن: $\beta = \frac{\pi}{4}$

التمرين الخامس:

ليكن المثلث ABC أثبت تكافؤ الخاصيتين الآتيتين:

الطالب الأول:

المثلث متساوي الساقين

الحل:

المثلث متساوي الساقين ورأسه A ... (1)

$$(2) \rightarrow (1)$$

$$2\sin\bar{B}\cos\bar{C} = \sin\bar{A}$$

$$2\left[\frac{1}{2}\sin(\bar{B} + \bar{C}) + \sin(\bar{B} - \bar{C})\right] = \sin\bar{A}$$

$$\sin(\bar{B} + \bar{C}) + \sin(\bar{B} - \bar{C}) = \sin\bar{A}$$

$$\sin\bar{A} + \sin(\bar{B} - \bar{C}) = \sin\bar{A}$$

$$\sin(\bar{B} - \bar{C}) = 0 \rightarrow \bar{B} - \bar{C} = 0 \rightarrow \bar{B} = \bar{C}$$

إذاً المثلث متساوي الساقين ورأسه $\bar{A}$

الطالب الثاني:

$$2\sin\bar{B}\cos\bar{C}=\sin\bar{A}$$

الحل:

$$2\sin\bar{B}\cos\bar{C}=\sin\bar{A}\ldots(2)$$

$$(1)\rightarrow(2)$$

مجموع زوايا المثلث 180

$$\sin\theta=\sin(180-\theta)$$

إذاً:

$$\sin\bar{A}=\sin(\bar{B}+\bar{C})$$

$$\sin\bar{A}=\sin\bar{B}\cos\bar{C}+\cos\bar{B}\sin\bar{C}$$

وبما أن $\bar{B}=\bar{C}$ إذاً:

$$\sin\bar{A}=2\sin\bar{B}\cos\bar{C}$$

التمرين السادس:

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$z_A=\sqrt{3}+i\ ,z_B=\sqrt{3}-i\ ,z_C=3\sqrt{3}+i$$

١. اكتب العدد العقدي $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

٢. عين $(\mathcal{E})$ مجموعة النقاط $M\neq B$ التي تجعل $\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}$ تخيلياً بحتاً

عين $(\mathcal{F})$ مجموعة النقاط $M\neq B$ التي تجعل $\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}$ حقيقياً.

الحل:

الطالب الأول:

$$\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}=\frac{3\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i}=\frac{2\sqrt{3}}{-2i}=\frac{\sqrt{3}}{-i}$$

$$\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}=\sqrt{3}i\rightarrow\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}=\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$$

نوجد الطويلة:

$$\left|\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right|=\sqrt{3}$$

$$\frac{AC}{AB}=\sqrt{3}\rightarrow AC=\sqrt{3}\,AB$$

نوجد الزاوية:

$$\arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$$

ومنه المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان.

إذاً (ABC) قائم في A.

الطالب الثاني:

عين مجموعة $(\mathcal{E})$ النقاط $M\neq B$

التي تجعل $\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}$ تخيلياً بحتاً.

ليكن: $Z_M=x+iy$

$$\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}=\frac{x+iy-3\sqrt{3}-i}{x+iy-\sqrt{3}+i}$$

$$=\frac{x-3\sqrt{3}-i+iy}{x-\sqrt{3}+i+iy}$$

$$\frac{(x-3\sqrt{3}-i+iy)(x-\sqrt{3}-i-iy)}{(x-\sqrt{3}+i+iy)(x-\sqrt{3}-i-iy)}$$

$$=\frac{x^2-\sqrt{3}x-ix-ixy-3\sqrt{3}x+9+3\sqrt{3}i+3\sqrt{3}iy-ix+\sqrt{3}i-i+y+ixy-\sqrt{3}iy+y+y^2}{(x-\sqrt{3})^2+(1+y)^2}$$

$$\frac{x^2-4\sqrt{3}-2ix+8+4\sqrt{3}i+2\sqrt{3}iy+2y+y^2}{(x-\sqrt{3})^2+(1+y)^2}$$

$$=\frac{x^2-4\sqrt{3}x+y^2+2y+8}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}+\frac{i(-2x+2\sqrt{3}y+4\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$$

طريقة أولى:

يكون تخيلي بحت إذا كان:

$$\frac{x^2-4\sqrt{3}x+y^2+2y+8}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}=0$$

$$x^2-4\sqrt{3}x+y^2+2y+8=0$$

$$x^2-4\sqrt{3}x+12-12+y^2+2y+1-1+8=0$$

$$(x-2\sqrt{3})^2+(y+1)^2=5$$

يمثل دائرة مركزها $\Omega(2\sqrt{3},-1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{5}$ محذوف منها النقطة $(\sqrt{3},-1)$.

$\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}$ حقيقي $;M\neq B$

يكون $\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}$ حقيقي إذا تحقق:

$$Im\left(\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}\right)=0$$

$$\frac{-2x+2\sqrt{3}y+4\sqrt{3}}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}=0$$

$$-2x+2\sqrt{3}y+4\sqrt{3}=0$$

الأمثال لاتنعدم تمثل مستقيم محذوف منه النقطة $(\sqrt{3},-1)$

طريقة ثانية:

$\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}$ تخيلي بحت.

$$\arg\left(\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k\rightarrow(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CM})=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

يمثل دائرة محذوف منها $B(\sqrt{3},-1)$

$\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}$ حقيقي:

$$\arg\left(\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}\right)=0+\pi k\rightarrow(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CM})=\pi k$$

إذاً M و B و C على استقامة واحدة.

إذاً يمثل مستقيم محذوف منه $B(\sqrt{3},-1)$.

فهرس بحث الأعداد العقدية وتطبيقاتها:

١. الأشكال العقدية والعمليات عليها.
٢. التحويلات العقدية.
٣. المرافق وخواصه.
٤. المعادلات وتطبيقاتها.
٥. العقدي والأشعة.
٦. النسبة الذهبية.
٧. التحويلات الهندسية.
٨. قراءة شكل.
٩. مجموعات النقاط.

مكثفة شيفرة الـ 600
ELITE MATH

أولاً: الحسابات:

أولاً: العاملي:

الرمز	!	
	القانون	مثال
القوانين	القانون الأول: قانون الفك: هو ضرب تنازلي وصولاً إلى الواحد.	$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ $n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 2 \times 1$
	القانون الثاني: قانون التخفيض: هو ضرب تنازلي وعند الوقوف عند حد مختلف عن الواحد نضع الرمز !	$5! = 5 \times 4 \times 3!$ $n! = n(n-1)(n-2)!$ $(2n+1)! = (2n+1)(2n)(2n-1)!$
	القانون الثالث: قانون اللم: $(\text{الحد الكبير})! = (\text{حد أصغر منه بواحد}) \times (\text{حد})$	$5 \times 4! = 5!$ $n(n-1)! = n!$ $n!(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$
أنماط التمارين	النمط	فكرة الحل
	النمط الأول: الحساب	نطبق القانون المناسب.
	النمط الثاني: الاختزال	(1)نطبق القانون المناسب (2)نجري العمليات الحسابية المناسبة.

تمرين:

اختزل المقادير الآتية:

1. $\frac{13!-12!}{12!}$

$$= \frac{13 \times 12! - 12!}{12!} = \frac{12!(13-1)}{12!} = 12$$

2. $\frac{4}{12!} - \frac{4}{11!} + \frac{4}{10!}$

$$= \frac{4}{12 \times 11 \times 10!} - \frac{4}{11 \times 10!} + \frac{4}{10!}$$

نقوم بتوحيد المقامات وفق:

$$= \frac{4}{12 \times 11 \times 10!} - \frac{(4)(12)}{12 \times 11 \times 10!} + \frac{4(12)(11)}{12 \times 11 \times 10!}$$

$$= \frac{4 - 4(12) + 4(12)(11)}{12 \times 11 \times 10!}$$

$$= \frac{4(1 - 12 + (12)(11))}{12 \times 11 \times 10!}$$

$$= \frac{(-11 + (12)(11))}{3 \times 11 \times 10!}$$

$$= \frac{11(-1+12)}{3 \times 11 \times 10!} = \frac{11}{3 \times 10!}$$

3. $\frac{64!}{1\times3\times5\times\dots\times63}$

$$= \frac{64 \times 63 \times 62 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 63}$$

نلاحظ أن البسط يحوي جداء الأعداد الزوجية والأعداد الفردية والمقام يحوي جداء الأعداد الفردية لذلك نختزل الأعداد الفردية من البسط مع الأعداد الفردية من المقام ومنه تبقى الأعداد الزوجية في البسط وفق:

$$= 64 \times 62 \times 60 \times \dots \times 6 \times 4 \times 2$$

$$= 2(32) \times 2(31) \times (2)(30) \times \dots (2)(3) \times (2)(2) \times 2$$

$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 \times 2}_{(2)^{32}} \times \underbrace{32 \times 31 \times 30 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}_{32!}$$

$$= (2)^{32} \times 32!$$

4. $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$$= \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)(n)(n-1)!}$$

نقوم بتوحيد المقامات:

$$= \frac{(n+1)(n)-1}{(n+1)(n)(n-1)!} = \frac{n^2+n-1}{(n+1)!}$$

5. $\frac{n!}{n} - (n-1)!$

$$= \frac{n(n-1)!}{n} - (n-1)!$$

$$= (n-1)! - (n-1)! = 0$$

ثانياً: التراتيب:

الرمز	P_n^r حيث n : العدد الكلي (الكبير) و r : العدد الجزئي (الصغير) أيّ أنّ $1 \le r \le n$	
	القانون	مثال
القوانين	القانون الأول: $P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ * تعميم: $P^{\text{كبير}}_{\text{صغير}} = \frac{(\text{كبير})!}{(\text{صغير}-\text{كبير})!}$	* $P_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = \frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)!}{(2)!} = 2520$ * $P_7^3 = \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n^3 - 3n^2 + 2n$
	القانون الثاني: $P_n^r = n(n-1) \dots (n-r+1)$ أيّ ندرج العدد الكلي (الكبير) بعدد مرات العدد الجزئي (الصغير) أيّ أنّ عدد الحدود من قيمة العدد الصغير r تنبيه: في هذا القانون نحدد حد البدء (الكبير) وحد التوقف (الكبير ناقص الصغير زائد واحد) ثم نملأ ما بينهما.	* $P_5^3 = (5)(4)(3) = 60$ * $P_7^2 = (7)(6) = 42$ * $P_n^3 = (n)(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$
أنماط التمارين	النمط	فكرة الحل
	النمط الأول: الحساب	نطبق القانون المناسب.
	النمط الثاني: تعيين قيمة n (حل المعادلة)	(1)تحديد شرط الحل (2)نطبق القانون المناسب (3)نصل للوصول إلى معادلة بالمجهول n (4)نحل هذه المعادلة (5)نحدد الحلول المقبولة والمرفوضة

تمرين:

عيّن قيمة n في كل من الحالات الآتية:

1. $P_n^2 = 5\,P_{n-1}^1$

إيجاد شرط الحل:

* P_n^2 معرف بشرط: $n \ge 2$
* P_{n-1}^1 معرف بشرط: $n-1 \ge 1 \to n \ge 2$
* ومنه يكون شرط الحل: $n \ge 2$

$$P_n^2 = 5\,P_{n-1}^1$$

$$n(n-1) = 5(n-1) \to n = 5$$ مقبول

2. $P_{n+2}^3 = 4\,P_{n+1}^2$

إيجاد شرط الحل:

* P_{n+2}^3 معرف بشرط: $n+2 \ge 3 \to n \ge 1$
* P_{n+1}^2 معرف بشرط: $n+1 \ge 2 \to n \ge 1$
* ومنه يكون شرط الحل: $n \ge 1$

$$P_{n+2}^3 = 4\,P_{n+1}^2$$

$$(n+2)(n+1)(n) = 4(n+1)(n)$$

$$n+2 = 4 \to n = 2$$ مقبول

3. $P_{n+2}^5 = 45\,P_{n+1}^5$

إيجاد شرط الحل:

* P_{n+2}^5 معرف بشرط: $n+2 \ge 5 \to n \ge 3$
* P_{n+1}^5 معرف بشرط: $n+1 \ge 5 \to n \ge 4$
* ومنه يكون شرط الحل: $n \ge 4$

$$P_{n+2}^5 = 45\,P_{n+1}^5$$

$$(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2)$$

$$= 45(n+1)(n)(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$(n+2) = 45(n-3)$$

$$n+2 = 45n - 135$$

$$45n - n = 135 + 2$$

$$44n = 137 \to n = \frac{137}{44}$$ مرفوض

4. $P_{n+2}^3 = 6\,P_{n+2}^1$

إيجاد شرط الحل:

* P_{n+2}^3 معرف بشرط: $n+2 \ge 3 \to n \ge 1$
* P_{n+2}^1 معرف بشرط: $n+2 \ge 1 \to n \ge -1$
* ومنه يكون شرط الحل: $n \ge 1$

$$P_{n+2}^3 = 6\,P_{n+2}^1$$

$$(n+2)(n+1)(n) = 6(n+2)$$

$$n^2 + n = 6$$

$$n^2 + n - 6 = 0$$

$$(n+3)(n-2) = 0$$

مرفوض $\to$ إما $n = -3$

مقبول $\to$ أو $n = 2$

5. $2P_n^2 + 50 = P_{2n}^2$

إيجاد شرط الحل وفق:

* P_n^2 معرّف بشرط: $n \ge 2$
* P_{2n}^2 معرف بشرط: $2n \ge 2 \to n \ge 1$
* ومنه شرط الحل: $n \ge 2$

$$2P_n^2 + 50 = P_{2n}^2$$

$$2(n)(n-1) + 50 = 2n(2n-1)$$

$$2(n^2 - n) + 50 = 4n^2 - 2n$$

$$2n^2 - 2n + 50 = 4n^2 - 2n$$

$$4n^2 - 2n^2 = 50$$

$$2n^2 = 50 \to n^2 = 25$$

مقبول $\to$ إما $n = 5$

مرفوض $\to$ أو $n = -5$

الرمز	$\binom{n}{r}$ حيث n : العدد الكلي (الكبير) و r : العدد الجزئي (الصغير) أيّ أنّ: $0 \le r \le n$	
	القانون ومتى يستخدم؟	مثال
القوانين	القانون الأول: الحساب $\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$ * ويستخدم عندما يكون الصغير معلوم.	* $\binom{5}{2} = \frac{P_5^2}{2!} = \frac{(5)(4)}{(2)(1)} = \frac{20}{2} = 10$ * $\binom{n-1}{3} = \frac{P_{n-1}^3}{3!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(3)(2)(1)}$
	القانون الثاني: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ * تعميم: $\binom{\text{كبير}}{\text{صغير}} = \frac{(\text{كبير})!}{(\text{صغير})!(\text{صغير}-\text{كبير})!}$ * ويُستخدم عندما يكون الصغير مجهول	* $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ * $\binom{n+1}{n-r} = \frac{(n+1)!}{(n-r)!(1+r)!}$
	النمط	فكرة الحل
أنماط التمارين	النمط الأول: الحساب والاختزال	نطبق القانون المناسب
	النمط الثاني: إثبات صحة علاقة	الأسلوب الأول: ننطلق من أحد الأطراف وصولاً إلى الطرف الثاني. الأسلوب الثاني: ننطلق من الطرفين وصولاً إلى نفس النتيجة.
	النمط الثالث: تعيين قيمة n	(1) نحدد شرط الحل (2) نطبق القانون المناسب. (3) نصل وصولاً إلى معادلة بالمجهول n (4) نحل هذه المعادلة. (5) نحدد الحلول المقبولة والحلول المرفوضة.
	النتيجة	مثال
نتائج مباشرة	$\binom{n}{n} = 1$	$\binom{7}{7} = 1$
	$\binom{n}{1} = n$	$\binom{7}{1} = 7$
	$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{7}{0} = 1$
الخواص	الخاصة الأولى: تبسيط الحساب: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ وتعميمها: $\binom{\text{كبير}}{\text{صغير}} = \binom{\text{كبير}}{\text{صغير}-\text{كبير}}$ مثلاً: * $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{P_8^3}{3!} = \frac{(8)(7)(6)}{(3)(2)(1)} = 56$ * $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{P_7^3}{3!} = \frac{(7)(6)(5)}{(3)(2)(1)} = 35$ الخاصة الثانية: تفيد في حل المعادلات (تعيين قيمة n) $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ تكافئ: إما $p = q$ أو $p + q = n$ مثلاً: $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$ إما $3n = n + 2 \to 2n = 2 \to n = 1$ أو $3n + n + 2 = 10 \to n = 2$	
ملاحظة	لإيجاد التقاطع في شرط الحل نميز الحالتين: الحالة الأولى: إذا كانت الشروط جميعها أكبر أو يساوي فإنّ التقاطع يكون أكبر أو يساوي العدد الكبير الحالة الثانية: إذا كانت الشروط جميعها أصغر أو يساوي فإنّ التقاطع يكون أصغر أو يساوي العدد الصغير	

التمرين الأول:

أثبت صحة العلاقات الآتية:

1. $n\binom{n-1}{r-1} = r\binom{n}{r}$

* لدينا:

$$\underbrace{n\binom{n-1}{r-1}}_{l_1} = \underbrace{r\binom{n}{r}}_{l_2}$$

* الإثبات:

$$l_1 = n\binom{n-1}{r-1}$$
$$= n\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = r\frac{n(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!}$$
$$= r\frac{n!}{r!(n-r)!} = r\binom{n}{r} = l_2$$

ومنه العلاقة صحيحة

2. $\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}$

* لدينا:

$$\underbrace{\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}}_{l_1} = \underbrace{\frac{n+1}{r+1}}_{l_2}$$

* الإثبات:

$$l_1 = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{\frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}}{\frac{n!}{r!(n-r)!}}$$
$$= \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!} \cdot \frac{r!(n-r)!}{n!}$$
$$= \frac{(n+1)n!}{(r+1)r!} \cdot \frac{r!}{n!} = \frac{(n+1)}{(r+1)} = l_2$$

ومنه العلاقة صحيحة.

3. $m\binom{2n}{m} = 2n\binom{2n-1}{m-1}$

* لدينا:

$$\underbrace{m\binom{2n}{m}}_{l_1} = \underbrace{2n\binom{2n-1}{m-1}}_{l_2}$$

* الإثبات:

$$l_1 = m\binom{2n}{m} = m\frac{(2n)!}{(m)!(2n-m)!}$$
$$= m\frac{(2n)(2n-1)!}{m(m-1)!(2n-m)!}$$
$$= 2n\frac{(2n-1)!}{(m-1)!(2n-m)!}$$
$$= 2n\binom{2n-1}{m-1} = l_2$$

ومنه العلاقة صحيحة

التمرين الثاني:

عين قيمة العدد الطبيعي n في كل من الحالات الآتية:

1. $\binom{n}{2} = 15$

تحديد شرط الحل:

* $\binom{n}{2}$ معرف بشرط: $n \ge 2$
* ومنه شرط الحل: $n \ge 2$.

إيجاد قيمة n :

$$\binom{n}{2} = 15$$
$$\frac{n(n-1)}{(2)(1)} = 15 \to n^2 - n = 30$$
$$n^2 - n - 30 = 0$$
$$(n-6)(n+5) = 0$$

مقبول إما $n - 6 = 0 \to n = 6$

مرفوض أو $n + 5 = 0 \to n = -5$

2. $\binom{2n-1}{2} = 36$

تحديد شرط الحل:

* $\binom{2n-1}{2}$ معرف بشرط:

$$2n - 1 \ge 2 \to 2n \ge 3 \to n \ge \frac{3}{2} \to n \ge 2$$

* ومنه شرط الحل: $n \ge 2$.

مكثفة شيفرة الـ 600

10. $\binom{n}{4}=\frac{1}{4}P_n^3$

تحديد شرط الحل:

* P_n^3 معرف بشرط: $n\geq 3$
* $\binom{n}{4}$ معرف بشرط: $n\geq 4$
* ومنه شرط الحل: $n\geq 4$

إيجاد قيمة n:

$$\binom{n}{4}=\frac{1}{4}P_n^3$$
$$\frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{(4)(3)(2)(1)}=\frac{1}{4}(n)(n-1)(n-2)$$
$$\frac{n-3}{6}=1\rightarrow n-3=6\rightarrow n=9$$

مقبول

التمرين الثالث:

احسب قيمة r علمت أنّ:

$$\frac{-1}{\binom{6}{r}}=\frac{1}{\binom{5}{r+1}}-\frac{1}{\binom{4}{r}}$$

الحل:

* شرط الحل: $0\leq r\leq 4$ لدينا:

$$\frac{-1}{\binom{6}{r}}=\frac{1}{\binom{5}{r+1}}-\frac{1}{\binom{4}{r}}$$
$$-\frac{1}{\frac{6!}{r!\,(6-r)!}}=\frac{1}{\frac{5!}{(r+1)!\,(4-r)!}}-\frac{1}{\frac{4!}{r!\,(4-r)!}}$$
$$\frac{-r!\,(6-r)(5-r)(4-r)!}{6\times 5\times 4!}=\frac{(r+1)r!\,(4-r)!}{5\times 4!}-\frac{r!\,(4-r)!}{4!}$$
$$\frac{-(6-r)(5-r)}{30}=\frac{r+1}{5}-1$$
$$-30+11r-r^2=6r+6-30$$
$$r^2-5r+6=0$$
$$(r-3)(r-2)=0$$

مقبول إما $r=3$

مقبول أو $r=2$

التمرين الرابع:

احسب قيمة كل من n و r في الحالات الآتية:

(1): $6\binom{n}{r}=7\binom{n}{r-1}$ و $\binom{n}{r}=\binom{n}{r+1}$

تحديد شرط الحل:

* $\binom{n}{r}$ معرف بشرط $n\geq r$
* $\binom{n-1}{r}$ معرف بشرط: $n-1\geq r\rightarrow n\geq r+1$
* $\binom{n}{r-1}$ معرف بشرط: $n\geq r-1$
* ومنه يكون شرط الحل: $n\geq r+1$

لدينا من الجهة الأولى:

$$\binom{n}{r}=n\binom{n-1}{r}$$
$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=n\frac{(n-1)!}{r!\,(n-1-r)!}$$
$$\frac{n!}{(n-r)(n-r-1)!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1-r)!}$$
$$\frac{n!}{n-r}=n!\rightarrow\frac{1}{n-r}=1$$
$$n-r=1\ldots(1)$$

لدينا من الجهة الثانية:

$$r\binom{n}{r}=(r-1)\binom{n}{r-1}$$
$$r\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=(r-1)\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$
$$\frac{r}{r(r-1)!\,(n-r)!}=\frac{r-1}{(r-1)!\,(n-r+1)(n-r)!}$$
$$1=\frac{r-1}{n-r+1}$$
$$n-r+1=r-1$$
$$n-2r=-2\ldots(2)$$

حصلنا على جملة معادلتين بمجهولين:

$$\begin{cases}n-r=1\ldots(1)\\ n-2r=-2\ldots(2)\end{cases}$$

نضرب (1) بـ (-2) وفق:

$$\begin{cases}-2n+2r=-2\ldots(1)'\\ n-2r=-2\ldots(2)\end{cases}$$

نجمع $(1)'$ و (2) نجد:

$$-n=-4\rightarrow n=4$$

نعوض قيمة n في (2):

$$4-2r=-2$$
$$2r=6\rightarrow r=3$$

ومنه: $n=4$ و $r=3$

5. $\binom{14}{2n}=\binom{14}{n+2}$

تحديد شرط الحل:

* $\binom{14}{2n}$ معرف بشرط:
$$14\geq 2n\rightarrow 2n\leq 14\rightarrow n\leq 7$$
* $\binom{14}{n+2}$ معرف بشرط:
$$14\geq n+2\rightarrow n+2\leq 14\rightarrow n\leq 12$$
* ومنه شرط الحل: $n\leq 7$

إيجاد قيمة n:

$$\binom{14}{2n}=\binom{14}{n+2}$$

مقبول إما $2n=n+2\rightarrow n=2$

أو $2n+n+2=14$

مقبول $3n=12\rightarrow n=4$

6. $\binom{5}{n}=\binom{5}{n+1}$

تحديد شرط الحل:

* $\binom{5}{n}$ معرف بشرط: $5\geq n\rightarrow n\leq 5$
* $\binom{5}{n+1}$ معرف بشرط:
$$5\geq n+1\rightarrow n+1\leq 5\rightarrow n\leq 4$$
* ومنه شرط الحل: $n\leq 4$

إيجاد قيمة n:

$$\binom{5}{n}=\binom{5}{n+1}$$

إما $n=n+1\rightarrow 0\neq 1$

وهذا غير ممكن.

أو $n+n+1=5$

مقبول $2n=4\rightarrow n=2$

7. $\binom{9}{n}=\binom{9}{2n}$

تحديد شرط الحل:

* $\binom{9}{n}$ معرف بشرط: $9\geq n\rightarrow n\leq 9$
* $\binom{9}{2n}$ معرف بشرط:
$$9\geq 2n\rightarrow 2n\leq 9\rightarrow n\leq\frac{9}{2}\rightarrow n\leq 4$$
* ومنه شرط الحل: $n\leq 4$

إيجاد قيمة n:

$$\binom{9}{n}=\binom{9}{2n}$$

مقبول إما $n=2n\rightarrow n=0$

مقبول أو $n+2n=9\rightarrow 3n=9\rightarrow n=3$

8. $P_n^3=6\binom{n}{4}$

تحديد شرط الحل:

* P_n^3 معرف بشرط: $n\geq 3$
* $\binom{n}{4}$ معرف بشرط: $n\geq 4$
* ومنه شرط الحل: $n\geq 4$

إيجاد قيمة n:

$$P_n^3=6\binom{n}{4}$$
$$n(n-1)(n-2)=6.\frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{(4)(3)(2)(1)}$$
$$1=\frac{n-3}{4}\rightarrow n-3=4\rightarrow n=7$$

مقبول

9. $P_n^2=2\binom{n}{3}$

تحديد شرط الحل:

* P_n^2 معرف بشرط: $n\geq 2$
* $\binom{n}{3}$ معرف بشرط: $n\geq 3$
* ومنه شرط الحل: $n\geq 3$

إيجاد قيمة n:

$$P_n^2=2\binom{n}{3}$$
$$n(n-1)=2.\frac{(n)(n-1)(n-2)}{(3)(2)(1)}$$
$$1=\frac{n-2}{3}\rightarrow n-2=3\rightarrow n=5$$

مقبول

إيجاد قيمة n:

$$\binom{2n-1}{2}=36$$
$$\frac{(2n-1)(2n-2)}{(2)(1)}=36$$
$$4n^2-4n-2n+2=72$$
$$4n^2-6n-70=0$$
$$2n^2-3n-35=0$$
$$a=2\ ,\ b=-3\ ,\ c=-35$$
$$\Delta=(-3)^2-4(2)(-35)$$
$$=9+280=289>0$$

ومنه للمعادلة حلان حيث: $\sqrt{\Delta}=\sqrt{289}=17$

$$n_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-17}{4}=-\frac{14}{4}$$
$$n_1=-\frac{7}{2}$$

مرفوض

$$n_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+17}{4}=\frac{20}{4}$$
$$n_2=5$$

مقبول

3. $\binom{n}{3}+\binom{n}{2}=8n$

تحديد شرط الحل:

* $\binom{n}{3}$ معرف بشرط: $n\geq 3$
* $\binom{n}{2}$ معرف بشرط: $n\geq 2$
* ومنه شرط الحل: $n\geq 3$.

إيجاد قيمة n:

$$\binom{n}{3}+\binom{n}{2}=8n$$
$$\frac{(n)(n-1)(n-2)}{(3)(2)(1)}+\frac{(n)(n-1)}{(2)(1)}=8n$$
$$\frac{(n^2-n)(n-2)}{6}+\frac{n^2-n}{2}=8n$$
$$\frac{n^3-2n^2-n^2+2n+3n^2-3n}{6}=8n$$
$$\frac{n^3-n}{6}=8n\rightarrow n^3-n=48n$$
$$n^3-49n=0\rightarrow n(n^2-49)=0$$

مرفوض إما $n=0$

أو $n^2-49=0$

$(n-7)(n+7)=0$

مقبول إما $n=7$

مرفوض أو $n=-7$

4. $9\binom{n}{2}=2\binom{2n}{2}$

تحديد شرط الحل:

* $\binom{n}{2}$ معرف بشرط: $n\geq 2$
* $\binom{2n}{2}$ معرف بشرط: $n\geq 1\leftarrow 2n\geq 2$
* ومنه شرط الحل: $n\geq 2$.

إيجاد قيمة n:

$$9\binom{n}{2}=2\binom{2n}{2}$$
$$9.\frac{(n)(n-1)}{(2)(1)}=2.\frac{(2n)(2n-1)}{(2)(1)}$$
$$\frac{9(n)(n-1)}{2}=(2n)(2n-1)$$
$$9(n)(n-1)=2(4n^2-2n)$$
$$9n^2-9n=8n^2-4n$$
$$n^2-5n=0\rightarrow n(n-5)=0$$

مرفوض إما $n=0$

مقبول أو $n-5=0\rightarrow n=5$

رابعاً: منشور ذو الحدين:

القوانين	❋ $(a+b)^n=\binom{n}{0}(a)^n(b)^0+\binom{n}{1}(a)^{n-1}(b)^1+\binom{n}{2}(a)^{n-2}(b)^2+\cdots+\binom{n}{n}(a)^0(b)^n$ ❋ $(a-b)^n=(a+(-b))^n=\binom{n}{0}(a)^n(-b)^0+\binom{n}{1}(a)^{n-1}(-b)^1+\binom{n}{2}(a)^{n-2}(-b)^2+\cdots+\binom{n}{n}(a)^0(-b)^n$
أنماط التمارين	النمط: فكرة الحل النمط الأول: النشر والاختزال: نطبق القانون فوراً النمط الثاني: تعيين حد: (1) نحدد a و b و n (2) نكتب القانون: $T_r=\binom{n}{r}(a)^{n-r}.(b)^r$ (3) نصلح (باستخدام خواص القوى) (4) بالاعتماد على نص السؤال نضع علاقة فنحصل على معادلة بالمجهول r وبحلها نحصل على المطلوب ☜ ملاحظة: ○ الحد المستقل عن x يعني x^0 والحد الثابت يعني x^0 ○ الحد x^{-2} يعني $\frac{1}{x^2}$ ○ وهكذا...

التمرين الأول:

عين في منشور $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^{12}$ الحد الذي يحوي x^{12} والحد المستقل عن x.

الحل: لدينا:

$$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^{12}=\left(x^2+\left(-\frac{2}{x}\right)\right)^{12}$$

حيث: $n=12$ و $b=-\frac{2}{x}$ و $a=x^2$

ولدينا:

$$T_r=\binom{n}{r}(a)^{n-r}(b)^r$$
$$=\binom{12}{r}(x^2)^{12-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r$$
$$=\binom{12}{r}(x)^{24-2r}\frac{(-2)^r}{(x)^r}$$
$$=\binom{12}{r}(x)^{24-2r}.(-2)^r.(x)^{-r}$$
$$\boxed{T_r=\binom{12}{r}(-2)^r(x)^{24-3r}\ldots(*)}$$

تعيين الحد الذي يحوي x^{12}:

يظهر الحد الذي يحوي x^{12} عندما:

$$24-3r=12\to 3r=24-12$$
$$3r=12\to r=4$$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$T_4=\binom{12}{4}(-2)^4(x)^{24-3(4)}$$
$$=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}(16)(x)^{12}$$
$$=7920\,x^{12}$$

تعيين الحد المستقل عن x:

يظهر الحد المستقل عن x، عندما:

$$24-3r=0$$
$$3r=24\to r=8$$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$T_8=\binom{12}{8}(-2)^8(x)^{24-3(8)}$$
$$=\binom{12}{4}(256)(x)^0=126720$$

التمرين الثاني:

في منشور $\left(\frac{2}{x}+x\right)^{16}$ اكتب صيغة الحد T_r وهل يحتوي هذا المنشور على حد فيه x^4؟ علل إجابتك.

الحل:

صيغة الحد T_r:

لدينا: $n=16$ و $b=x$ و $a=\frac{2}{x}$

ومنه:

$$T_r=\binom{16}{r}\left(\frac{2}{x}\right)^{16-r}(x)^r$$
$$=\binom{16}{r}\frac{(2)^{16-r}}{(x)^{16-r}}(x)^r$$
$$=\binom{16}{r}(2)^{16-r}(x)^{r-16}(x)^r$$
$$\boxed{T_r=\binom{16}{r}(2)^{16-r}(x)^{2r-16}\ldots(*)}$$

يحتوي هذا المنشور على حد فيه x^4، عندما:

$$2r-16=4\to 2r=4+16$$
$$2r=20\to r=10$$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$T_{10}=\binom{16}{10}(2)^{16-10}(x)^{2(10)-16}=\binom{16}{6}(2)^6(x)^4$$
$$=\frac{16\times15\times14\times13\times12\times11}{6\times5\times4\times3\times2\times1}.(2)^6\,x^4$$
$$T_{10}=512512\,x^4$$

إذاً يحتوي هذا المنشور على حد فيه x^4 لأن r طبيعي.

التمرين الثالث:

في منشور ذي الحدين $\left(2x+\frac{3}{x^2}\right)^7$ والمطلوب:

١. اكتب صيغة الحد T_r

٢. أثبت أن هذا المنشور لا يحوي حداً ثابتاً مستقلاً عن x

الحل:

الطلب الأول:

صيغة الحد T_r لدينا: $n=7$ و $b=\frac{3}{x^2}$ و $a=2x$

ومنه:

$$T_r=\binom{n}{r}(a)^{n-r}(b)^r$$
$$=\binom{7}{r}(2x)^{7-r}\left(\frac{3}{x^2}\right)^r$$
$$=\binom{7}{r}(2x)^{7-r}\frac{(3)^r}{(x)^{2x}}$$
$$=\binom{7}{r}(2)^{7-r}(x)^{7-r}\ (3)^r(x)^{-2x}$$
$$\boxed{T_r=\binom{7}{r}(2)^{7-r}\ (3)^r(x)^{7-3x}}$$

الطلب الثاني:

إثبات أن المنشور لا يحوي حداً مستقلاً عن x:

نوجد دليل الحد المستقل عن x وفق:

$$7-3r=0\to 3r=7\to r=\frac{7}{3}$$

وبما أنّ r ليس عدداً طبيعياً فإنّ المنشور لا يحوي حداً مستقلاً عن x.

التمرين الرابع:

في المنشور $\left(x^5+\frac{1}{x^2}\right)^{2n}$ والمطلوب:

١. اكتب صيغة الحد T_r

٢. ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحوي هذا المنشور على حد ثابت مستقل عن x؟

الحل:

الطلب الأول:

صيغة الحد T_r لدينا:

$$a=x^5\ \text{و}\ b=\frac{1}{x^2}\ \text{و}\ n=2n$$

ومنه:

$$T_r=\binom{n}{r}(a)^{n-r}(b)^r$$
$$=\binom{2n}{r}(x^5)^{2n-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$
$$=\binom{2n}{r}(x)^{10n-5r}\frac{1}{(x)^{2r}}$$
$$=\binom{2n}{r}(x)^{10n-5r}\ (x)^{-2r}$$
$$\boxed{T_r=\binom{2n}{r}(x)^{10n-7r}}$$

الطلب الثاني:

يظهر الحد المستقل عن x عندما:

$$10n-7r=0\to 7r=10n\to r=\frac{10}{7}n$$

الشرط على العدد الطبيعي n كي يحوي المنشور على حد ثابت مستقل عن x، أن تكون قيمة n من مضاعفات العدد 7

التمرين الخامس:

انشر العبارة الآتية $(1-x)^n$

واستنتج قيم المجاميع الآتية:

$$x_n=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+\cdots+2^r\binom{n}{r}+\cdots+2^n\binom{n}{n}$$
$$y_n=\binom{n}{0}-i\binom{n}{1}+\cdots+(-i)^r\binom{n}{r}+\cdots+(-i)^n\binom{n}{n}$$

الحل:

نشر العبارة $(1-x)^n$:

لدينا:

$$(1-x)^n=(1+(-x))^n=\binom{n}{0}(1)^n(-x)^0$$
$$+\binom{n}{1}(1)^{n-1}(-x)^1+\cdots+\binom{n}{r}(1)^{n-r}(-x)^r$$
$$+\cdots+\binom{n}{n}(1)^{n-n}(-x)^n$$
$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}(-x)+\cdots+\binom{n}{r}(-x)^r$$
$$+\cdots+\binom{n}{n}(-x)^n$$

قيمة المجموع x_n:

نلاحظ أن المجموع x_n ناتج عن المنشور السابق بوضع $x=-2$، ومنه نجد أن:

$$x_n=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+\cdots+2^r\binom{n}{r}+\cdots+2^n\binom{n}{n}$$
$$x_n=(1-(-2))^n=3^n$$

قيمة المجموع y_n:

نلاحظ أن المجموع y_n ناتج عن المنشور السابق بوضع $x=i$، ومنه نجد أن:

$$y_n=\binom{n}{0}-i\binom{n}{1}+\cdots+(-i)^r\binom{n}{r}+\cdots+(-i)^n\binom{n}{n}$$
$$y_n=(1-(i))^n=(1-i)^n$$

التمرين السادس:

ما احاد وعشرات ومئات وألوف العدد $(12)^6$؟

الحل:

الطريقة الأولى:

$$(12)^6=(2+10)^6=\binom{6}{0}(2)^6(10)^0$$
$$+\binom{6}{1}(2)^5(10)^1+\binom{6}{2}(2)^4(10)^2$$
$$+\binom{6}{3}(2)^3(10)^3+\binom{6}{4}(2)^2(10)^4$$
$$+\binom{6}{5}(2)^1(10)^5+\binom{6}{6}(2)^0(10)^6$$
$$=64+1920+24000+170000+1200000+1000000$$
$$=2985984=2985984$$

ومنه نجد أنّ:

الآحاد: 4 والعشرات: 8 والمئات: 9 والألوف: 5

الطريقة الثانية:

$$(12)^6=(2+10)^6$$
$$a=2\ \text{و}\ b=10\ \text{و}\ n=6$$
$$T_r=\binom{n}{r}(a)^{n-r}(b)^r=\binom{6}{r}(2)^{6-r}(10)^r$$

نوجد الحدود:

$$T_0=\binom{6}{0}(2)^6(10)^0=64$$
$$T_1=\binom{6}{1}(2)^5(10)^1=1920$$
$$T_2=\binom{6}{2}(2)^4(10)^2=24000$$
$$T_3=\binom{6}{3}(2)^3(10)^3=160000$$

إذاً جميع الحدود من T_2 إلى T_6 هي من مضاعفات العدد 100 وإضافتها لا تؤثر في آحاد وعشرات ومئات وألوف العدد ومنه:

$$T_0+T_1+T_2+T_3=185984$$

ومنه نجد أنّ:

الآحاد: 4 والعشرات: 8 والمئات: 9 والألوف: 5

مكثفة شيفرة الـ 600

التمرين السابع:

ليكن كثير الحدود:

$$F(x)=(1+ax)^7(1+bx)^8$$

حيث a و b عددان طبيعيان فإذا علمت أنّ أمثال x تساوي 56 فما هي القيم الممكنة للمجموع $a+b$ ؟

الحل:

لدينا:

$$(1+ax)^7=\binom{7}{0}(1)^7(ax)^0+\binom{7}{1}(1)^6(ax)^1+\binom{7}{2}(1)^5(ax)^2+\binom{7}{3}(1)^4(ax)^3+\binom{7}{4}(1)^3(ax)^4+\binom{7}{5}(1)^2(ax)^5+\binom{7}{6}(1)^1(ax)^6+\binom{7}{7}(1)^0(ax)^7$$
$$=1+7ax+21a^2x^2+35a^3x^3+35a^4x^4+21a^5x^5+7a^6x^6+a^7x^7$$

ولدينا:

$$(1+bx)^8=\binom{8}{0}(1)^8(ax)^0+\binom{8}{1}(1)^7(ax)^1+\binom{8}{2}(1)^6(ax)^2+\binom{8}{3}(1)^5(ax)^3+\binom{8}{4}(1)^4(ax)^4+\binom{8}{5}(1)^3(ax)^5+\binom{8}{6}(1)^2(ax)^6+\binom{8}{7}(1)^1(ax)^7+\binom{8}{8}(1)^0(ax)^8$$
$$=1+8ax+28a^2x^2+56a^3x^3+70a^4x^4+56a^5x^5+28a^6x^6+8a^7x^7+a^8x^8$$

ومنه:

$$F(x)=(1+ax)^7(1+bx)^8$$
$$=\begin{pmatrix}1+7ax+21a^2x^2+35a^3x^3\\+35a^4x^4+21a^5x^5+7a^6x^6+a^7x^7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1+8ax+28a^2x^2+56a^3x^3+70a^4x^4\\+56a^5x^5+28a^6x^6+8a^7x^7+a^8x^8\end{pmatrix}$$

وبعد النشر نجد أنّ:

$$7ax+8bx=56x$$
$$7a+8b=56$$
$$7a+8b=56$$

حالة (1): نقوم بإضافة a

$$8a+8b\geq 56$$
$$8(a+b)\geq 56$$
$$a+b\geq\frac{56}{8}\rightarrow a+b\geq 7$$

حالة (2): نقوم بطرح b

$$7a+7b\leq 56$$
$$7(a+b)\leq 56$$
$$a+b\leq\frac{56}{7}\rightarrow a+b\leq 8$$

ومنه: أيّ أنّ $7\leq a+b\leq 8$

$$a+b\in\{7,8\}$$

التمرين الثامن:

ليكن A_n العدد المعرف بالصيغة:

$$A_n=(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n$$

1. **احسب A_0 و A_1 و A_2.**
2. **أثبت أنّ $A_n\in\mathbb{N}$ أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 0$**

الحل:

الطلب الأول:

$$A_0=(1+\sqrt{5})^0+(1-\sqrt{5})^0=1+1=2$$
$$A_1=(1+\sqrt{5})^1+(1-\sqrt{5})^1$$
$$=1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}=2$$
$$A_2=(1+\sqrt{5})^2+(1-\sqrt{5})^2$$
$$=(1+\sqrt{5})^2+(1-\sqrt{5})^2$$
$$=(1)^2+2(1)(\sqrt{5})+(\sqrt{5})^2+(1)^2-2(1)(\sqrt{5})+(\sqrt{5})^2$$
$$=1+2\sqrt{5}+5+1-2\sqrt{5}+5$$
$$=6+6=12$$

الطلب الثاني:

الحد ذو الدليل r في منشور $(1+\sqrt{5})^n$:

$$T_r=\binom{n}{r}(\sqrt{5})^r$$

الحد ذو الدليل r في منشور $(1-\sqrt{5})^n$:

$$T'_r=\binom{n}{r}(-\sqrt{5})^r$$

$$T_r+T'_r=\binom{n}{r}(\sqrt{5})^r+\binom{n}{r}(-1)^r(\sqrt{5})^r$$
$$=\binom{n}{r}\left[(\sqrt{5})^r+(-1)^r(\sqrt{5})^r\right]$$

مناقشة:

* $\binom{n}{r}$ **مقدار طبيعي**

* $(\sqrt{5})^r+(-1)^r(\sqrt{5})^r$

إذا كان r عدداً زوجياً يكون:

$(-1)^r=1$ **طبيعي و** $(\sqrt{5})^r$ **طبيعي**

أي $T_r+T'_r$ طبيعي

إذا كان r عدداً فردياً يكون:

$(-1)^r=-1$ **أي** $T_r+T'_r=0$

وهذا عدد طبيعي أيضاً

ولكن A_n يساوي مجموع جميع هذه الحدود ولأنها أعداد طبيعية كان مجموعها عدداً طبيعياً أيّ:

$$A_n\in\mathbb{N}$$

علاقة أويلر:

أياً كان العدد الحقيقي θ فإنّ:

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\rightarrow e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x$$
$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\rightarrow e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x$$

تمرين:

اكتب المقادير الآتية بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزوية x ، ثم أجب عن السؤال الموافق:

الطلب الأول:

$\sin^3 x$ واستنتج قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3\sin x}{\tan^3 x}$

الحل: بتطبيق دستور أويلر: $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ **ومنه:** $sin^3 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$

باستخدام منشور ذو الحدين نجد أنّ:

$$a=e^{ix}\ ,b=-e^{-ix}\ ,n=3$$
$$sin^3 x=-\frac{1}{8i}\left[\binom{3}{0}(e^{ix})^3(-e^{-ix})^0+\binom{3}{1}(e^{ix})^2(-e^{-ix})^1+\binom{3}{2}(e^{ix})^1(-e^{-ix})^2+\binom{3}{3}(e^{ix})(-e^{-ix})^3\right]$$
$$=\frac{-1}{8i}(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x})=\frac{-1}{8i}(3e^{-ix}-3e^{ix}+e^{ix}-e^{-i3x})$$
$$=\frac{-1}{8i}(-3(e^{ix}-e^{-ix})+e^{i3x}-e^{-i3x})=\left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{1}{2i}\right)(-3(e^{ix}-e^{-ix})+e^{i3x}-e^{-i3x})$$
$$=\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2i}\right)(-6i\sin x+2i\sin 3x)=\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2i}\right)(2i)(-3\sin x+\sin 3x)$$
$$=-\frac{1}{4}(-3\sin x+\sin 3x)=-\frac{1}{4}(\sin 3x-3\sin x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3\sin x}{\tan^3 x}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\frac{\sin 3x-3\sin x}{\tan^3 x}=\frac{-4\sin^3 x}{\tan^3 x}=-4.\frac{\sin^3 x}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}}=-4\cos^3 x$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3\sin x}{\tan^3 x}=\lim_{x\to 0}(-4\cos^3 x)=-4$$

الطلب الثاني: **$\sin^4 x$ واستنتج قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\ dx$**

نطبق دستور أويلر: $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ **ومنه:**

$$\sin^4 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\frac{(e^{ix}-e^{-ix})^4}{(2i)^4}=\frac{1}{16}(e^{ix}-e^{-ix})^4$$
$$a=e^{ix}\ ,\ b=-e^{-ix}\ ,n=4$$
$$\sin^4 x=\frac{1}{16}\left[\begin{matrix}\binom{4}{0}(e^{ix})^4(-e^{-ix})^0\\+\binom{4}{1}(e^{ix})^3(-e^{-ix})'+\binom{4}{2}(e^{ix})^2(-e^{-ix})^2\\+\binom{4}{3}(e^{ix})(-e^{-ix})^3+\binom{4}{4}(e^{ix})^0(-e^{-ix})^4\end{matrix}\right]$$
$$=\frac{1}{16}(e^{i4x}-4e^{2ix}+6-4e^{-i2x}+e^{-i4x})$$
$$=\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(e^{i4x}+e^{-i4x}-4(e^{i2x}+e^{-i2x})+6)$$
$$=\frac{1}{8}\left[\left(\frac{e^{i4x}-e^{-i4x}}{2}\right)-4\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2}\right)+6\right]$$
$$=\frac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3)=\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$$

استنتاج قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\ dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}$$

طرائق العد:

التمرين الأول: لدينا حديقة لها أربعة أبواب:

١. بكم طريقة يمكن الدخول إلى الحديقة؟

٢. بكم طريقة يمكن الدخول والخروج من الحديقة؟

٣. بكم طريقة يمكن لـ لانا الدخول إلى الحديقة علماً أن أحد الأبواب عليه كلب؟
(حيث لانا تخاف من الكلاب)

٤. بكم طريقة يمكن لـ لانا الدخول والخروج من الحديقة؟

٥. بكم طريقة يمكن لـ لانا الدخول والخروج من الحديقة علماً أن الكلب راح مشوار بعد دخولها إلى الحديقة؟

الحل:

١. أربعة طرق

٢. مرحلة الدخول وتتم بأربعة طرق
مرحلة الخروج وتتم بأربعة طرق
$$\text{عدد الطرق} = 4 \times 4 = 16$$

٣. ثلاثة طرق

٤. تسعة طرق

٥. مرحلة الخول وتتم بثلاثة طرق.
مرحلة الخروج وتتم بأربعة طرق
$$\text{عدد الطرق} = 4 \times 3 = 12$$

التمرين الثاني:

في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن سبعة أسئلة من عشرة والمطلوب:

١. بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة

٢. بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية

الحل:

1. $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{(10)(9)(8)}{(3)(2)(1)} = 120$
2. $\binom{6}{3} = \frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} = 20$

التمرين الثالث:

يلتقي عشرة أشخاص في حفل منهم أربعة متخاصمين كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل؟؟

ملاحظة:

إنّ عدد مصافحات n شخص منهم m شخص متخاصم يساوي $\binom{n}{2} - \binom{m}{2}$

الحل:

$$\text{عدد المصافحات} = \binom{10}{2} - \binom{4}{2}$$
$$= \frac{(10)(9)}{(2)(1)} - \frac{(4)(3)}{(2)(1)}$$
$$= \frac{90}{2} - \frac{12}{2} = 45 - 6 = 39$$

التمرين الرابع:

نتأمل مضلع محدب مكون من n رأس والمطلوب:

١. ما عدد القطع المستقيمة المشكلة من رؤوس المضلع؟
$$\text{عدد القطع المستقيمة} = \binom{n}{2} = \frac{(n)(n-1)}{(2)(1)}$$

٢. ما عدد القطع المستقيمة التي تقبل A طرفاً لها حيث A رأس في المضلع؟
$$\text{عدد القطع المستقيمة} = \binom{n-1}{1} = n-1$$

٣. ما عدد المثلثات الممكن تشكيلها من رؤوس المضلع؟
$$\text{عدد المثلثات} = \binom{n}{3} = \frac{(n)(n-1)(n-2)}{(3)(2)(1)}$$

٤. ما عدد المثلثات التي تقبل A رأساً لها حيث A رأس في المضلع
$$\text{عدد المثلثات} = \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{(2)(1)}$$

٥. ما عدد المثلثات التي تقبل $[AB]$ ضلعاً فيها حيث A و B رأسين في المضلع؟
$$\text{عدد المثلثات} = \binom{n-2}{1} = n-2$$

٦. ما عدد المضلعات الرباعية الممكن تشكيلها من رؤوس المضلع؟
$$\text{عدد المضلعات} = \binom{n}{4}$$
$$= \frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{(4)(3)(2)(1)}$$

٧. ما عدد المضلعات الرباعية التي تقبل $[AB]$ ضلعاً فيها؟
$$\text{عدد المضلعات} = \binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{(2)(1)}$$

٨. ما عدد المضلعات الرباعية التي تقبل ABC مثلث فيها؟
$$\text{عدد المضلعات} = \binom{n-3}{1} = n-3$$

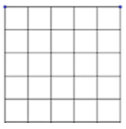
٩. ما عدد المضلعات السداسية التي تقبل $[AB]$ ضلع فيه؟
$$\text{عدد المسدسات} = \binom{n-2}{4}$$
$$= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(4)(3)(2)(1)}$$

١٠. ما عدد أقطار المضلع حيث $n \geq 4$ ؟
$$\text{عدد الأقطار} = \binom{n}{2} - n = \frac{(n)(n-1)}{(2)(1)} - n$$

١١. ما عدد نقاط تقاطع الأقطار حيث $n \geq 4$
(يفترض في الحالة العامة لا يلتقي ثلاثة أقطار في نقطة واحدة)
$$\text{عدد نقاط تقاطع الأقطار} = \binom{n}{4} + n$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(4)(3)(2)(1)} + n$$

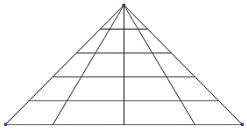
انتبه تمارين الأشكال:
في تمارين الأشكال لا يوجد قوانين ثابتة إنما نعتمد تحليل الشكل.

التمرين الخامس:



في الشكل المجاور نتأمل شبكة منتظمة مرسومة في مربع $ABCD$ والمطلوب:
ما عدد متوازيات الأضلاع أو المستطيلات المرسومة في الشبكة؟
$$\text{عدد متوازيات الأضلاع} = \binom{6}{2} \times \binom{6}{2}$$
$$= \frac{30}{2} \times \frac{30}{2} = 15 \times 15 = 225$$

التمرين السادس:

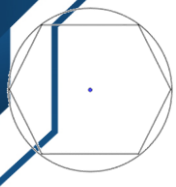


تأمل الشكل المجاور شبكة مرسومة في مثلث ABC والمطلوب:

١. ما عدد جميع المثلثات في الشبكة؟
كل مثلث يتشكل من ضلعان شاقوليان وضلع أفقي.
$$\text{عدد المثلثات} = \binom{5}{2} \times \binom{5}{1} = 50$$

٢. ما عدد أشباه المنحرفات في الشبكة؟
كل شبه منحرف يتشكل من التقاء ضلعان شاقوليان وضلعان أفقيان.
$$\text{عدد أشباه المنحرفات} = \binom{5}{2} \times \binom{5}{2} = 100$$

التمرين السابع:



في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط A و B و C و D و E و F موزعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدس منتظم نجري التجربة الآتية:
نصل بين أي ثلاث نقاط لنحصل على مثلث والمطلوب:

١. ما عدد جميع المثلثات الممكن تشكيلها من الرؤوس؟
$$\text{عدد المثلثات} = \binom{6}{3} = \frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} = 20$$

٢. ما عدد المثلثات القائمة الممكن تشكيلها من الرؤوس؟ ملاحظة: كل قطر من الدائرة يقابل 4 مثلثات قائمة ولدينا 3 أقطار.
$$\text{عدد المثلثات القائمة} = 4 \times 3 = 12$$

٣. ما عدد المثلثات منفرجة الزاوية الممكن تشكيلها من الرؤوس؟ ملاحظة: الزوايا المنفرجة تكون حصراً على رؤوس المضلع المحدب ولدينا 6 رؤوس إذاً:
$$\text{عدد المثلثات المنفرجة} = 6$$

٤. ما عدد المثلثات الحادة الممكن تشكيلها من الرؤوس؟
$$\text{عدد المثلثات الحادة} = \text{عدد المثلثات الكلي} - \text{عدد المثلثات القائمة} - \text{عدد المثلثات المنفرجة}$$
$$\rightarrow = 20 - 12 - 6 = 2$$

٥. ما عدد أقطار المسدس وما عدد نقاط تقاطع أقطاره؟
$$\text{عدد الأقطار} = \binom{n}{2} - n$$
$$\rightarrow \text{عدد الأقطار} = \binom{6}{2} - 6 = 9$$
$$\text{عدد نقاط تقاطع أقطاره} = \binom{n}{4} + n$$
$$\rightarrow \binom{6}{4} + 4 = 19$$

التمرين الثامن:

لتكن C دائرة مركزها O وضعنا فيها ستة أقطار مختلفة ولتكن $S = \{A_1, A_2, \dots, A_{12}\}$ أطراف هذه الأقطار والمطلوب:

١. ما عدد المثلثات الممكن تشكيلها من رؤوس S؟
$$\text{عدد المثلثات} = \binom{12}{3}$$
$$= \frac{(12)(11)(10)}{(3)(2)(1)} = 220$$

٢. ما عدد المضلعات الرباعي التي رؤوسها من عناصر S؟
$$\text{عدد المضلعات الرباعية} = \binom{12}{4}$$
$$= \frac{(12)(11)(10)(9)}{(4)(3)(2)(1)} = 495$$

٣. كم مستطيل رؤوسه من عناصر S؟
كل مستطيل يحتاج قطران ولدينا ستة أقطار إذاً:
$$\text{عدد المستطيلات} = \binom{6}{2} = \frac{(6)(5)}{(2)(1)} = 15$$

مكثفة شيفرة الـ 600

التمرين التاسع:

أعلنت إحدى الشركات عن وظيفتين شاغرتين فتقدم لملء هاتين الوظيفتين 3 رجال و 4 سيدات والمطلوب:

١. بكم طريقة يمكن ملء الوظيفتين الشاغرتين؟

$$\binom{7}{2} = 21$$

٢. بكم طريقة يمكن تعيين رجل وامرأة في هاتين الوظيفتين؟

$$\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 12$$

التمرين العاشر:

اشترك مئة متسابق في سباق للدراجات يجري فيه توزيع ثلاثة ميداليات (ذهبية وفضية وبرونزية), كم نتيجة ممكنة لهذا السباق؟

عدد النتائج $= P_{100}^3$

$$= (100)(99)(98) = 970200$$

التمرين الحادي عشر:

يتألف مجلس إدارة نادي من سبعة أعضاء, بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب للرئيس وأمين سر للنادي

الحل:

$$P_7^3 = (7)(6)(5) = 210$$

التمرين الثاني عشر:

نريد تأليف لجنة مكوّنة من (مدير ونائب مدير وأمين سرّ) من مجموعة تضم خمسة أشخاص، بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللّجنة علماً بأنّ من المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللّجنة ذاتها؟

الحل:

لدينا مجموعة الأشخاص: $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ حيث a و b متخاصمان واللجان التي تحوي a و b معاً:

a, b, c	a, b, d	a, b, e
a, c, b	a, d, b	a, e, b
b, a, c	b, a, d	b, a, e
b, c, a	b, d, a	b, e, a
c, a, b	d, a, b	e, a, b
c, b, a	d, b, a	e, b, a

إذاً عدد اللجان التي تحوي متخاصمان تساوي 18 لجنة.

عدد اللجان الكلّي هو:

لجنة $60 = 5 \times 4 \times 3 = P_5^3 =$ عدد اللجان الكلي

ونعلم أن:

عدد اللجان التي تحوي متخاصمين معاً = عدد اللجان الكلي − عدد اللجان المطلوب

$$= 60 - 18 = 42$$

التمرين الثالث عشر:

١. بكم طريقة يمكن توزيع ثلاثة جوائز (ذهبية وفضية وبرونزية) على n شخص بحيث يحصل كل شخص على جائزة واحدة فقط؟

٢. بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع n جائزة على n شخص بحيث يحصل كل شخص على جائزة واحدة فقط؟

٣. بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع $n+1$ جائزة على n شخص بحيث يحصل كل شخص على جائزة واحدة فقط؟

الحل:

١. $P_n^3 = (n)(n-1)(n-2)$

٢. عدد الطرق $= n!$

٣. تتم التجربة على مرحلتين:

المرحلة الأولى: مرحلة اختيار (2) هدية منها ودمجها معاً وتتم بـ $\binom{n+1}{2}$

المرحلة الثانية:

مرحلة توزيع n هدية على n تلميذ وتتم بـ $n!$

عدد الطرق $= \binom{n+1}{2} . n!$ ←

التمرين الرابع عشر:

لتكن لدينا مجموعة الأرقام $S = \{1,2,3,4,5\}$:

١. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من منزلتين؟

الخانة	احاد	عشرات
عدد الطرق	5 ط	5 ط

طريقة $25 = 5 \times 5 =$ عدد الطرق

٢. بكم طريقة يمكن اختيار عد مؤلف من منزلتين ومختلف الأرقام؟

الخانة	احاد	عشرات
عدد الطرق	5 ط	4ط

طريقة $20 = 4 \times 5 =$ عدد الطرق

٣. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من منزلتين وزوجي؟

الخانة	احاد	عشرات
عدد الطرق	2 ط	5 ط

طريقة $10 = 2 \times 5 =$ عدد الطرق

٤. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من منزلتين وزوجي ومختلف الأرقام؟

الخانة	احاد	عشرت
عدد الطرق	2 ط	4ط

طريقة $8 = 4 \times 2 =$ عدد الطرق

٥. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من ثلاثة منازل؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات
عدد الطرق	5 ط	5 ط	5 ط

طريقة $125 = 5 \times 5 \times 5 =$ عدد الطرق

٦. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من ثلاثة منازل ومختلف الأرقام؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات
عدد الطرق	5 ط	4ط	3ط

طريقة $60 = 3 \times 4 \times 5 =$ عدد الطرق

٧. بكم طريقة يمكن اختيار عدد زوجي مختلف الأرقام ومؤلف من ثلاثة منازل؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات
عدد الطرق	2ط	4ط	3ط

طريقة $24 = 3 \times 4 \times 2 =$ عدد الطرق

٨. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل بحيث أرقامه مختلفة ومأخوذة من S ؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	5 ط	4ط	3ط	2ط	1ط

طريقة $120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 =$ عدد الطرق

٩. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل بحيث أرقامه مختلفة ومأخوذة من S وليس من مضاعفات الخمسة؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	4ط	4ط	3ط	2ط	1ط

طريقة $96 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 4 =$ عدد الطرق

١٠. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل بحيث أرقامه مختلفة ومأخوذة من S ومن مضاعفات الخمسة؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	1ط	4ط	3ط	2ط	1ط

طريقة $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1 =$ عدد الطرق

ملاحظة هامة جداً:

في شروط الأكبر والأصغر من عدد

ننظر إلى الخانة الأخيرة في هذا العدد ونميز:

* الشروط أصغر: نضع في الخانة الأخيرة الأعداد الأصغر تماماً من هذا العدد
* الشروط أكبر: نضع في الخانة الأخيرة الأعداد الأكبر أو التي تساوي هذا العدد.

١١. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل بحيث أرقامه مختلفة ومأخوذة من S وأكبر من 20000 ؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	4ط	3ط	2ط	1ط	4ط

طريقة $96 = 4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 =$ عدد الطرق

١٢. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل بحيث أرقامه مختلفة ومأخوذة من S وأصغر من 20000 ؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	4ط	3ط	2ط	1ط	1ط

طريقة $24 = 1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 =$ عدد الطرق

٣ ا. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل مختلفة ومأخوذة من S وأصغر من 30000

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	4ط	3ط	2ط	1ط	2ط

طريقة $48 = 2 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 =$ عدد الطرق

٤ ا. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل مختلفة الأرقام ومأخوذة من S , بحيث تكون من مضاعفات الـ 5 وأصغر من 20000 ؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	1ط	3ط	2ط	1ط	1ط

طريقة $6 = 1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 1 =$ عدد الطرق

التمرين الخامس عشر:

رمز في سيارة مؤلف من 4 خانات يمكن لأي خانة أن تأخذ أحد الأرقام $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$:

١. ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف
عدد الطرق	10ط	10ط	10ط	10 ط

طريقة $10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 =$ عدد الطرق

٢. ينطلق الإنذار من السيارة إذا لم يجر إدخال أي خانة صحيحة في مكانها ما عدد الرمازات التي تسبب انطلاق الإنذار؟

$9999 = 1 - 10000 =$ الصحيح $-$ الكلي $=$ عدد الرمازات

٣. ما هو عدد الرمازات المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى تصلح للقفل؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف
عدد الطرق	10ط	9ط	8ط	7 ط

طريقة $5040 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 =$ عدد الطرق

٤. تذكر المالك أن الرماز الصحيح مكون من الأرقام $\{1,2,9,9\}$, كم رماز مختلف يمكن للمالك أن يكون من هذه الأرقام؟

- يمكن وضع الرقم 1 بأربع طرق.
- يمكن وضع الرقم 2 بثلاث طرق
- يمكن وضع الرقم 9 بطريقة واحدة
- يمكن وضع الرقم 9 بطريقة واحدة

ومنه:

$12 = 4 \times 3 \times 1 \times 1 =$ عدد الرمازات

التمرين السادس عشر:

نتأمل كلمة DAMASCUS والمطلوب:

١. ما عدد الكلمات ذات الأربعة أحرف يمكن تشكيلها؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4
عدد الطرق	6ط	6ط	6ط	6 ط

$1296 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 =$ عدد الطرق

٢. ما عدد الكلمات مختلفة الأحرف المكونة من 5 أحرف ممكن تشكيلها؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5
عدد الطرق	6ط	5ط	4ط	3ط	2ط

$720 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 =$ عدد الطرق

٣. ما عدد الكلمات مختلفة الأحرف المكونة من 3 أحرف بحيث الأول A والأخير S ؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3
عدد الطرق	1ط	4ط	1ط

$4 = 1 \times 4 \times 1 =$ عدد الطرق

٤. ما عدد الكلمات المكونة من 3 أحرف ولا تحوي الحرف A ممكن تشكيلها؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3
عدد الطرق	5ط	5ط	5ط

$125 = 5 \times 5 \times 5 =$ عدد الطرق

التمرين السابع عشر:

نتأمل كلمة "شوكولامو" والمطلوب:

ما عدد الكلمات ذات الثلاثة أحرف الممكن تشكيلها؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3
عدد الطرق	6 ط	6 ط	6 ط

طريقة $216 = 6 \times 6 \times 6 =$ عدد الطرق

ما عدد الكلمات مختلفة الأحرف المكونة من أربعة أحرف حيث يكون الحرف الأول (ميم) والحرف الأخير (كاف).

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4
عدد الطرق	1ط	4ط	3ط	1 ط

طريقة $12 = 1 \times 4 \times 3 \times 1 =$ عدد الطرق

التمرين الثامن عشر:

يريد طالب أن يدرس 5 كتب بشكل متتابع والمطلوب:

١. ما عدد طرق ترتيب الكتب؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5
عدد الطرق	5ط	4ط	3ط	2ط	1ط

$120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$ عدد الطرق

٢. ما عدد طرق ترتيب الكتب بشرط الأول رياضيات والأخير علوم

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5
عدد الطرق	1ط	3ط	2ط	1ط	1ط

$6 = 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 =$ عدد الطرق

التمرين التاسع عشر:

رف يحوي 9 كتب لمؤلفين أربعة كتب للمؤلّف A وخمسة للمؤلّف B ؟

١. بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرّف إذا كانت الكتب الثّلاث الأولى للمؤلّف B ؟

الخانة	خانة 1	خانة 2	خانة 3	خانة 4	خانة 5	خانة 6	خانة 7	خانة 8	خانة 9
عدد الطرق	5ط	4ط	3ط	6ط	5ط	4ط	3ط	2ط	1ط

$43200 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 3 \times 4 \times 5 =$ عدد الطرق

٢. بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرّف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيّناً للمؤلّف B في البداية.

الخانة	خانة 1	خانة 2	خانة 3	خانة 4	خانة 5	خانة 6	خانة 7	خانة 8	خانة 9
عدد الطرق	1ط	8ط	7ط	6ط	5ط	4ط	3ط	2ط	1ط

$40320 = 1 \times 8! =$ عدد الطرق

التمرين العشرون:

لتكن المجموعة $S = \{1,2,3, \dots ,20\}$

الطلب الأول:

كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاث عناصر مجموعها من مضاعفات العدد 3

نجزء المجموعة إلى ثلاث مجموعات تبعاً لباقي قسمة كل منها على (3)

- المجموعة التي يكون باقي القسمة هو صفر:

$$A_0 = \{3,6,9,12,15,18\}$$

- المجموعة التي يكون باقي القسمة هو واحد:

$$A_1 = \{1,4,7,10,13,16,19\}$$

- المجموعة التي يكون فيها باقي هو اثنين:

$$A_2 = \{2,5,8,11,14,17,20\}$$

ويتحقق المطلوب عندما:

3 عناصر من A_0 أو 3 عناصر من A_1 أو 3 عناصر من A_2 أو عنصر من A_0 وعنصر من A_1 وعنصر من A_2

$$\text{عدد النتائج} = \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \binom{7}{3} + \binom{6}{1}.\binom{7}{1}.\binom{7}{1} = 594$$

الطلب الثاني:

ما هو عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر مجموعها فردياً؟

يكون المجموع فردياً عندما يكون العدد:

(فردي فردي فردي) أو (زوجي زوجي فردي)

ولدينا في S : 10 أرقام فردية و 10 أرقام زوجية ومنه:

$$\text{عدد المجموعات} = \binom{10}{3} + \binom{10}{2}\binom{10}{1} = 570$$

الطلب الثالث:

ما هو عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين مجموعها زوجياً؟

يكون المجموع زوجياً عندما يكون العدد:(فردي فردي) أو (زوجي زوجي)

ولدينا في S : 10 أرقام فردية و 10 أرقام زوجية ومنه:

$$\text{عدد المجموعات} = \binom{10}{2} + \binom{10}{2} = 90$$

مكثفة شيفرة الـ 600

مسائل سحب الكرات:

نوع السحب	معاً	على التتالي	
		مع إعادة	دون إعادة
القانون المستخدم	$\binom{n}{r}$	n^r	P_n^r
تباديل الحالة	لا يوجد تباديل للحالة	يوجد تباديل للحالة	

تباديل الحالة: عندما يكون السحب على التتالي يجب الضرب بتباديل الحالة حيث نميز:

حالات الضرب بتباديل الحالة				
حالة تماثل	حالة تخصيص	مقداران مختلفان	ثلاثة مقادير اثنان منها متشابهان	ثلاثة مقادير مختلفة
مثلاً: ثلاث كرات زرقاء	مثلاً: الأولى زرقاء والثانية حمراء والثالثة خضراء	مثلاً: كرة زرقاء وكرة حمراء	مثلاً: كرتين حمراء وكرة زرقاء	مثلاً: كرة حمراء وكرة زرقاء وكرة خضراء
لا يوجد تباديل للحالة		نضرب بالعدد 2	نضرب بالعدد 3	نضرب بالعدد 6

كيفية حل مسائل سحب الكرات:

الخطوات:

- ننظر إلى نوع السحب ونحدد القانون المناسب
- نوجد $n(\Omega)$ حتى ولو لم يطلب إلينا ذلك
- نكتب عربي بالاعتماد على نص الطلب ثم نترجم مع مراعاة أن:
- أو $\leftarrow (+)$, و $\leftarrow (\times)$
- مع الانتباه في حال السحب على التتالي (لا تنسى) الضرب بتباديل الحالة

التمرين الأول:

صندوق يحوي 10 كرات, 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء, نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة:

١. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب؟

٢. كم عدد النتائج المختلفة التي تحوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه؟

٣. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان؟

٤. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد؟

٥. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل؟

٦. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل؟

الحل:

بما أنّ السحب على التتالي مع إعادة فإنّ القانون المستخدم في حل المسألة هو n^r ولا ننسى أيضاً أنه يوجد تباديل للحالة.

الطالب الأول:

$$\text{عدد النتائج المختلفة} = 10^3 = 1000$$

الطالب الثاني:

النتائج التي تحوي على كرتين من اللون نفسه هي:

$1B$ و $2W$ أو $1R$ و $2W$ أو $1B$ و $2R$ أو $1W$ و $2R$

$1W$ و $2B$ أو $1R$ و $2B$ أو

$$\text{عدد النتائج} = 6^2.3^1.(3) + 6^2.1^1(3) + 3^2.6^1(3) + 1^2.6^1(3) + 1^2.3^1(3) = 648$$

الطالب الثالث:

$$1R \text{ و } 1W \text{ و } 1B = 6^1.3^1.1^1(6) = 108$$

ملاحظة:

يُنصح باستخدام طريقة المتمم عند:

- ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد فالمتمم لها: هو ثلاث كرات جميعها من لون واحد
- تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل فالمتمم لها: هو لا تشتمل على أي كرة حمراء

الطالب الرابع:

الطريقة الأولى: طريقة المتمم:

نوجد عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاثة كرات جميعها من لون واحد وتتم وفق:

$3R$ أو $3W$ أو $3B$

$$\text{عدد النتائج} = 6^3 + 3^3 + 1^3 = 244$$

ومنه: عدد الكرات التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد تساوي عدد النتائج الممكنة للسحب ناقص عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاثة كرات جميعها من لون واحد أيّ:

$$\rightarrow 1000 - 244 = 756$$

الطريقة الثانية: الترجمات

$1R$ و $2W$ أو $1B$ و $2R$ أو $1W$ و $2B$ أو

$1W$ و $2B$ أو $1R$ و $2B$ أو $2W$ أو

$1W$ و $1B$ و $1R$ أو

بتروح بتحسبهم عزيزي الطالب مع الانتباه لوجود الضرب بتباديل الحالة فبيطلع معك عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد هي: 756

الطالب الخامس:

إيجاد عدد النتائج التي لا تشتمل على أي كرة حمراء:

$1B$ و $2W$ أو $1W$ و $2B$ أو $3B$ أو $3W$

$$\text{عدد النتائج} = 3^3 + 1^3 + 1^2.3^1(3) + 3^2.1^1(3)$$

$$= 9 + 1 + 9 + 27 = 64$$

ومنه: عدد الكرات التي تشتمل على كرة حمراء على الأقل يساوي عدد النتائج الممكنة للسحب ناقص عدد النتائج التي لا تشتمل على أيّة كرة حمراء أيّ:

$$\rightarrow 1000 - 64 = 936$$

الطالب السادس:

إيجاد عدد النتائج التي لا تشتمل على أي كرة سوداء:

$1R$ و $2W$ أو $1W$ و $2R$ أو $3B$ أو $3W$

$$\text{عدد النتائج} = 3^3 + 6^3 + 6^2.3^1(3) + 3^2.6^1(3)$$

$$= 27 + 216 + 324 + 162 = 729$$

ومنه: عدد الكرات التي تشتمل على كرة حمراء على الأقل يساوي عدد النتائج الممكنة للسحب ناقص عدد النتائج التي لا تشتمل على أيّة كرة حمراء أيّ:

$$\rightarrow 1000 - 729 = 271$$

التمرين الثاني:

صندوق يحوي 10 كرات, 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء, نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة:

١. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب؟

٢. كم عدد النتائج المختلفة التي تحوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه؟

٣. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان؟

٤. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد؟

٥. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل؟

٦. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل؟

الحل:

بما أنّ السحب على التتالي دون إعادة فإنّ القانون المستخدم في حل المسألة هو P_n^r ولا ننسى أيضاً أنه يوجد تباديل للحالة.

الطالب الأول:

$$\text{عدد النتائج} = P_{10}^3 = (10)(9)(8) = 720$$

الطالب الثاني:

$1B$ و $2W$ أو $1R$ و $2w$ أو $1B$ و $2R$ أو $1W$ و $2R$

$$\text{عدد النتائج} = P_6^2.P_3^1(3) + P_6^2.P_1^1(3)$$

$$+P_3^2.P_6^1(3) + P_3^2.P_1^1(3) = 486$$

الطالب الثالث:

$1R$ و $1W$ و $1B$

$$\text{عدد النتائج} = P_6^1.P_3^1.P_1^1(6) = 108$$

الطالب الرابع:

نوجد عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاثة كرات جميعها من لون واحد وتتم وفق:

$3R$ أو $3W$

$$\text{عدد النتائج} = P_6^3 + P_3^3 = 126$$

ومنه: عدد الكرات التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد تساوي عدد النتائج الممكنة للسحب ناقص عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاثة كرات جميعها من لون واحد أيّ:

$$\rightarrow 720 - 126 = 594$$

الطالب الخامس:

إيجاد عدد النتائج التي لا تشتمل على أي كرة حمراء:

$1B$ و $2W$ أو $3W$

$$\text{عدد النتائج} = P_3^3 + P_3^2.P_1^1.(3) = 24$$

ومنه: عدد الكرات التي تشتمل على كرة حمراء على الأقل يساوي عدد النتائج الممكنة للسحب ناقص عدد النتائج التي لا تشتمل على أيّة كرة حمراء أيّ:

$$\rightarrow 720 - 24 = 696$$

الطالب السادس:

إيجاد عدد النتائج التي لا تشتمل على أي كرة سوداء:

$1R$ و $2W$ أو $1W$ و $2R$ أو $3W$ أو $3R$

$$\text{عدد النتائج} = P_3^3 + P_6^3 + P_6^2.P_3^1(3) + P_3^2.P_6^1(3)$$

$$= 6 + 120 + 270 + 108 = 504$$

ومنه: عدد الكرات التي تشتمل على كرة سوداء على الأقل يساوي عدد النتائج الممكنة للسحب ناقص عدد النتائج التي لا تشتمل على أيّة كرة سوداء أيّ:

$$\rightarrow 720 - 540 = 216$$

شيفرة الـ 600 في الاحتمالات

مفاهيم أساسية:

المفهوم	خصائصه
فضاء العينة	(1) تعريفه: هو جميع النتائج الممكنة لتجربة ما (2) رمزه: Ω (3) رمز عدد عناصره: $n(\Omega)$
الحدث	(1) تعريفه: هو مجموعة جزئية من فضاء العينة (2) رمزه: أحرف كبيرة $A, B, \dots$ (3) رمزه عدد عناصر: $n(A)$
قانون الاحتمال	ليكن A حدثاً من فضاء العينة إن احتمال الحدث A: (1) تعريفه: هو عدد يعبر عن إمكانية وقوع الحدث A (2) رمزه: $P(A)$ (3) يحقق: $0 \le P(A) \le 1$ (4) قانونه: * إذا كان الحدث A مؤلف من مرحلة واحدة نستخدم القانون: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{(عدد عناصر الحدث } A\text{)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$ * إذا كان الحدث A مؤلف من عدة مراحل فإننا: (1) نحسب احتمال كل مرحلة على حدا. (2) يكون احتمال A هو: (مجموع احتمالات المراحل المؤلفة للحدث A) $P(A) =$

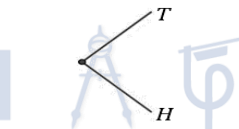
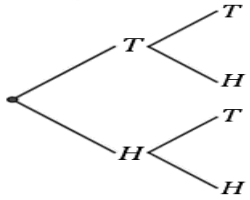
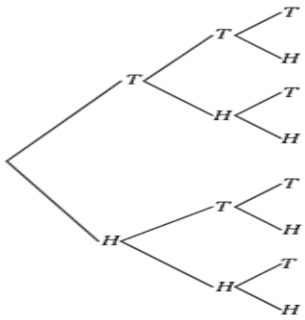
أحداث مميزة:

الحدث	خصائصه
الحدث البسيط	(1) تعريفه: هو كل مجموعة جزيئة من فضاء العينة مكونة من عنصر واحد. (2) رمزه: أحرف كبيرة $A, B \dots$ (3) رمزه عدد عناصره: $n(A)$
الحدث الأكيد	(1) تعريفه: هو الحدث المؤلف من جميع النتائج الممكنة أي (هو الحدث الأكيد وقوعه وهو نفسه فضاء العينة). (2) رمزه: Ω (3) رمزه عدد عناصره: $n(\Omega)$ (4) ملاحظة: احتمال الحدث الأكيد هو الواحد أيّ $P(\Omega) = 1$
الحدث المستحيل	(1) تعريفه: هو الحدث الذي لا يحتوي على أية نتيجة ويقابله المجموعة الخالية $\phi = \{\}$ أيّ هو الحدث الذي لا يمكن وقوعه (2) رمزه: ϕ (3) رمز عدد عناصره: $n(\phi)$ (4) ملاحظة: احتمال الحدث المستحيل هو الصفر: $P(\phi) = 0$
الحدث المعاكس	(1) تعريفه: الحدث المعاكس لـ A هو الحدث الذي يقع عندما لا يقع الحدث A. (2) رمزه: A' (3) قانونه: $P(A) + P(A') = 1$
A و B	(1) تعريفه: هو الحدث الذي يقع عندما يقع الحدثان A و B في آن معاً وهذا الحدث يوافق المجموعة الجزئية $A \cap B$ أي مجموعة نتائج التجربة التي تنتمي إلى كل من A, B. (2) رمزه: $A \cap B$ (3) انتبه: عندما يكون: $A \cap B = \phi$ نقول إن الحدثين A و B منفصلان.
A أو B	(1) تعريفه: هو الحدث الذي يقع عندما يقع أحد الحدثين A أو B على الأقل وهذا الحدث يوافق $A \cup B$ أيّ مجموعة نتائج التجربة التي تنتمي إلى أيّ من المجموعتين A و B أو إلى كليهما. (2) رمزه: $A \cup B$

تنويه:

(1) التقاطع والاجتماع عمليات تبديله أي: $A \cup B = B \cup A$ و $A \cap B = B \cap A$ (2) أحد الحدثين على الأقل = اجتماع ∪ =أو =+جمع (3) الحدثين معاً = تقاطع ∩ = و = × جداء

فضاءات عينة شهيرة:

الحالة		الفضاء المستخدم
رمي قطع نقود متوازنة	رمي قطعة نقود متوازنة	$\Omega = \{T, H\}$ $n(\Omega) = 2$
	رمي قطعتي نقود متوازنتين	$\Omega = \{TT, \overset{TH}{HT}, HH\}$ $n(\Omega) = 4$
	رمي ثلاث قطع نقود متوازنة	$\Omega = \left\{\begin{matrix} HHT\ TTH \\ HHH\ HTH\ THT\ TTT \\ THH\ HTT \end{matrix}\right\}$ $n(\Omega) = 8$
رمي قطع نقود غير متوازنة	رمي قطعة غير نقود متوازنة	
	رمي قطعتي نقود غير متوازنتين	
	رمي ثلاث قطع نقود غير متوازنة	
الولادات والأطفال	لدى عائلة طفل واحد	$\Omega = \{F, M\}$ $n(\Omega) = 2$
	لدى عائلة طفلان	$\Omega = \left\{FF, \overset{FM}{MF}, MM\right\}$ $n(\Omega) = 4$
	لدى عائلة ثلاثة أطفال	$\Omega = \left\{\begin{matrix} FFM\ MMF \\ FFF\ FMF\ MFM\ MMM \\ MFF\ FMM \end{matrix}\right\}$ $n(\Omega) = 8$

رمي أحجار نرد	لدى عائلة أربعة أطفال	$\Omega = \left\{\begin{matrix} MMFF \\ MMMF\ FFMM\ FFFM \\ MMFM\ FMMF\ FFMF\ FFFF \\ MFMM\ MFFM\ FMFF \\ FMMM\ FMFM\ MFFF \\ MFMF \end{matrix}\right\}$ $n(\Omega) = 16$
	رمي حجر نرد مرة واحدة	$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $n(\Omega) = 6$
	رمي حجري نرد أو رمي حجر نرد مرتين متتاليتين	نستخدم الجدول وفق: القطر الرئيسي حيث: $n(\Omega) = 36$
سحب الكرات	سحب كرة واحدة	نستخدم التمثيل الشجري
	سحب كرتين	يمكن استخدام القوانين لكن يُنصح باستخدام الشبكة ونميز الحالات الآتية وفقاً لنوع السحب: * السحب معاً: نحذف القطر الرئيسي وما تحتهُ. * السحب على التتالي دون إعادة: نحذف القطر الرئيسي. * السحب على التتالي مع إعادة: نحافظ على القطر الرئيسي.
	سحب ثلاث كرات	نستخدم الكتابة عربي ثم الترجمة إلى رياضي بالاستفادة من القوانين ونميز الحالات الآتية وفقاً لنوع السحب: * السحب معاً: نستخدم التوافيق $\binom{n}{r}$ * السحب على التتالي دون إعادة: نستخدم التراتيب P_n^r * السحب على التتالي مع إعادة: نستخدم القوائم المكررة n^r

المسائل التي تحوي نسب مئوية والمسائل التي تحوي عدة صناديق وباقي المسائل	نستخدم التمثيل الشجري
برنولي	كل شي يزيد عن حده يقلب برنولي حيث الحد هو فضاءات العينة الشهيرة

الاستقلال الاحتمالي:

تعريف	إذا كان A و B حدثين في تجربة احتمالية وكان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر نقول إنّ A و B مستقلان احتمالاً وعندئذٍ يتحقق: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$
نص السؤال	هل A و B مستقلان احتمالياً؟؟
فكرة الحل	(1) نوجد كلاً من: $P(A)$ و $P(B)$ و $P(A).P(B)$ و $P(A\cap B)$ (2) ونميز الحالات الآتية: ① إذا تحقق: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ ومنهُ: يكون الحدثان A و B مستقلان احتمالياً ② إذا تحقق: $P(A\cap B)\neq P(A).P(B)$ ومنهُ: يكون الحدثان A و B غير مستقلان احتمالياً

تمرين: نلقي قطعة نقود مرتين ولنرمز بـ A لحدث ظهور الصورة في الرمية الأولى و B لحدث ظهور الصورة في الرمية الثانية و C لحدث ظهور الصورة مرة واحدة فقط في الرميتين والمطلوب بيّن فيما إذا كانت الأحداث مستقلة أم لا؟

الحل:

$$\Omega\left\{TT\ HT\ TH\ HH\right\},\ n(\Omega)=4$$

- $A=\{(HH),(HT)\}\rightarrow P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
- $B=\{(HH),(TH)\}\rightarrow P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
- $C=\{(HT),(TH)\}\rightarrow P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
- $A\cap B=\{(HH)\}=\frac{1}{4}$
- $A\cap C=\{(HT)\}=\frac{1}{4}$
- $B\cap C=\{(T,H)\}=\frac{1}{4}$
- $(A\cap B\cap C)=\phi$

اختبار الاستقلال الاحتمالي للحدثين A و B :

- $P(A).P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
- $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

نلاحظ أنّ: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

ومنهُ الحدثان A و B مستقلان احتمالياً.

اختبار الاستقلال الاحتمالي للحدثين A و C :

- $P(A).P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
- $P(A\cap C)=\frac{1}{4}$

نلاحظ أنّ: $P(A\cap C)=P(A).P(C)$

ومنهُ الحدثان A و C مستقلان احتمالياً.

اختبار الاستقلال الاحتمالي للحدثين B و C :

- $P(B).P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
- $P(B\cap C)=\frac{1}{4}$

نلاحظ أنّ: $P(B\cap C)=P(B).P(C)$

ومنهُ الحدثان C و B مستقلان احتمالياً.

ومنهُ الأحداث A و B و C مستقلة مثنى مثنى ولكن:

اختبار الاستقلال الاحتمالي للأحداث A و B و C :

- $P(A).P(B).P(C)=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
- $P(A\cap B\cap C)=\phi$

نلاحظ أنّ:

$P(A\cap B\cap C)\neq P(A).P(B).P(C)$

وهذا يعني أنّ الأحداث A و B و C غير مستقلة.

الاحتمال الشرطي:

الرمز	$P(A\|B)$
قراءة الرمز	(1) احتمال A علماً أن B قد وقع. (2) احتمال A بعد وقوع B (3) احتمال A مشروطاً بالحدث B.
تعريف	ليكن B حدثاً $P(B)\neq 0$ ولنفترض أننا نعلم أنه قد وقع عندئذٍ نعرّف الاحتمال لوقوع حدث A علماً أن B قد وقع بالصيغة: $P(A\|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
كيفية معرفة وجود الاحتمال الشرطي	وجود إحدى الكلمات الآتية: (1) علماً أن (2) بعد وقوع (3) إذا علمت (4) إذا كان
كيفية حل المسائل التي تحوي احتمال شرطي	(1) نضع فضاء العينة الشهيرة المناسب. (2) نحدد وجود احتمال شرطي بالاعتماد على وجود إحدى دلالاته. (3) ترميز المطلوب بحيث: هو الحدث الذي يأتي بعد دلالات وجود الاحتمال الشرطي ← $P(\ \|\ )$ → هو الحدث الذي يأتي بعد كلمة ما احتمال

الصيغة	الاحتمال المطلوب
إذا كان B ما احتمال A	$P(A\|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
إذا علمت أن E ما احتمال C	$P(C\|E)=\frac{P(C\cap E)}{P(E)}$
ما احتمال F علماً أن D	$P(F\|D)=\frac{P(F\cap D)}{P(D)}$
احتمال G بعد وقوع H	$P(G\|H)=\frac{P(G\cap H)}{P(H)}$

تمرين:

يحوي صندوق على 5 بطاقات تحمل الأرقام 2 و 0 و 0 و 1 و 1 نسحب بطاقتين من الصندوق على التتالي مع إعادة والمطلوب: إذا علمت أن البطاقتين المسحوبتين تحملان الرقم ذاته ما احتمال أن يكون مجموعهما 2 .

الحل:

$$n(\Omega)=25$$

نفرض

A : البطاقتان تحملان الرقم ذاته.

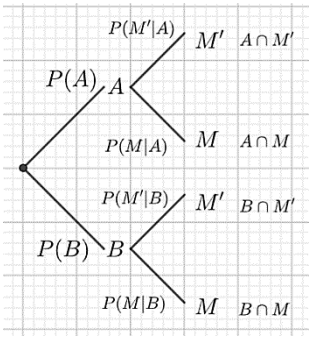
B : مجموع رقمي البطاقتين 2.

	0	0	1	1	2
0	A	A			B
0	A	A			B
1			$A\ B$	$A\ B$	
1			$A\ B$	$A\ B$	
2	B	B			A

$$P(B\backslash A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{25}}{\frac{9}{25}}=\frac{4}{9}$$

التمثيل الشجري والاحتمال الشرطي:

كيفية التعامل معهُ	كما في قواعد التمثيل الشجري أيّ أنّ: $P(A\cap M)=P(A).P(M\|A)\rightarrow P(M\|A)=\frac{P(A\cap M)}{P(A)}$
أنماط التمارين	النمط: — فكرة الحل النمط الأول: معطيات الشجرة كاملةً — نضع الشجرة المناسبة؛ نتابع كما تعلمنا في قوانين التعامل مع الشجرة النمط الثاني: معطيات الشجرة ناقصة — نوجد جميع المجاهيل من أجل إكمال الشجرة؛ نتابع كما في النمط الأول



التمرين الأول:

في أحد المجتمعات تظهر أعراض مرض سرطان الرئة على 20% من الأشخاص و 70% منهم مدخنون و 80% من الأشخاص الذين لا تظهر عليهم علامات المرض لا يدخنون , نختار عشوائياً شخصاً من هذا المجتمع ونعتبر الحدثين:

A : الشخص المختار تظهر عليه الأعراض.

B : الشخص المختار مدخن.

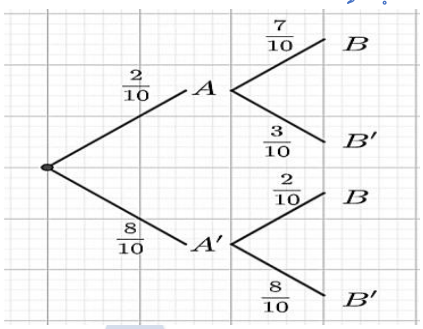
١. أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.

٢. احسب احتمال أن يكون الشخص المختار مدخن.

٣. إذا علمت أنّ الشخص المختار مدخن فما احتمال أن تظهر عليه أعراض مرض سرطان الرئة.

الحل:

الطلب الأول:



الطلب الثاني:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$$
$$= \frac{2}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{3}{10}$$

الطلب الثالث:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{10} \times \frac{7}{10}}{\frac{30}{100}} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

التمرين الثاني:

صندوق يحتوي على 9 كرات , كرتين بيضاوان w و ثلاث كرات سوداء B وأربع كرات حمراء R نسحب عشوائياً كرة من الصندوق , نسجل لونها ثم نزيل جميع الكرات التي لها نفس لون الكرة المسحوبة ثم نسحب كرة أخرى والمطلوب:

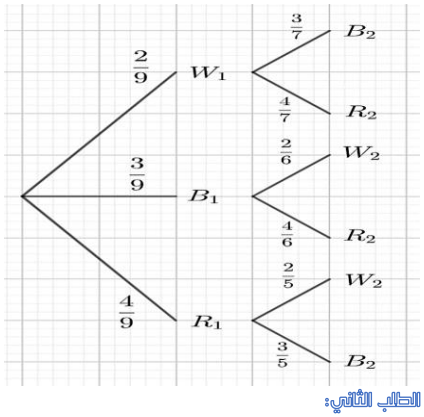
١. أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.

٢. احسب احتمال الحدث B_2 "الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية"

٣. إذا علمت أنّ الكرة المسحوبة في السحبة الثانية سوداء فما احتمال أن تكون الأولى بيضاء.

الحل:

الطلب الأول:



الطلب الثاني:

$$P(B_2) = P(B_2 \cap W_1) + P(B_2 \cap R_1)$$
$$= \frac{2}{9} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{38}{105}$$

الطلب الثالث:

$$P(W_1|B_2) = \frac{P(W_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{2}{9} \times \frac{3}{7}}{\frac{38}{105}} = \frac{5}{19}$$

التمرين الثالث:

في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب ونعلم أن مدرستنا تضم 60% من الذكور وأن 55% من هؤلاء لا يلعبون كرة المضرب.

١. ارسم مخطط للشجرة.

٢. احسب احتمال اختيار طالبة ولا تمارس كرة المضرب

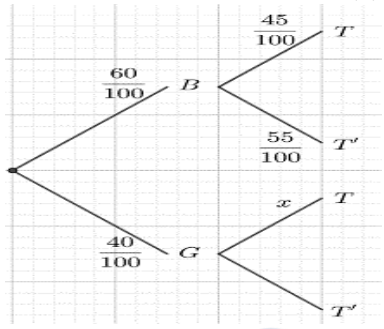
٣. ما احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين طالبات المدرسة اللواتي لا يمارسون كرة المضرب.

* نرمز للذكور بالرمز B
* نرمز للإناث بالرمز G
* نرمز لمن يمارسون كرة المضرب بـ T
* نرمز لمن لا يمارسون كرة المضرب بـ T'

الحل:

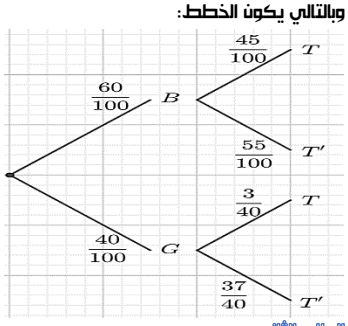
الطلب الأول:

نلاحظ أن المخطط غير كامل ولكن لدينا احتمال $P(T)$ الموجود في نهاية المخطط وعليه نكتب:



$$P(T) = P(T \cap G) + P(T \cap B)$$
$$\frac{30}{100} = x.\frac{40}{100} + \frac{45}{100}.\frac{60}{100}$$
$$\frac{3}{10} = \frac{4}{10}x + \frac{9}{20}.\frac{6}{10}$$
$$\frac{3}{10} = \frac{4}{10}x + \frac{9}{20}.\frac{3}{5}$$
$$\frac{3}{10} = \frac{4}{10}x + \frac{27}{100}$$
$$\frac{4}{10}x = \frac{3}{10} - \frac{27}{100}$$
$$\frac{4}{10}x = \frac{30-27}{100}$$
$$\frac{4}{10}x = \frac{3}{100}$$
$$x = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{4}{10}} \Rightarrow x = \frac{3}{100}.\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{40}$$

وبالتالي يكون الخطط:



الطلب الثاني:

$$P(G \cap T') = \frac{40}{100} + \frac{37}{40} = \frac{37}{100}$$

الطلب الثالث:

G: حدث اختيار طالبة عشوائياً.

T': حدث الطالبة لا تمارس كرة المضرب.

$$P(T'|G) = \frac{P(T \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{37}{40}.\frac{40}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{37}{40}$$

التمرين الرابع:

غالباً ما يعقب الزلازل هزات ارتدادية نفترض أنّ احتمال حدوث هزة ارتدادية في الساعة الأولى بعد الزلزال يساوي $\left(\frac{2}{3}\right)$, إذا حدثت هزة ارتدادية في الساعة n كان احتمال أن تحدث هزة ارتدادية في الساعة التي تليها يساوي $\left(\frac{4}{5}\right)$ وإذا لم تحدث هزة ارتدادية في الساعة n فإنّ احتمال أن تحدث هزة ارتدادية في الساعة التي تليها يساوي $\left(\frac{1}{2}\right)$. ليكن A_n حدث وقوع هزة ارتدادية في الساعة n و B_n حدث عدم وقوع هزة ارتدادية في الساعة n نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n \geq 1$ ولدينا $P_n = \mathbb{P}(A_n)$ و $q_n = \mathbb{P}(B_n)$ والمطلوب:

١. احسب P_2

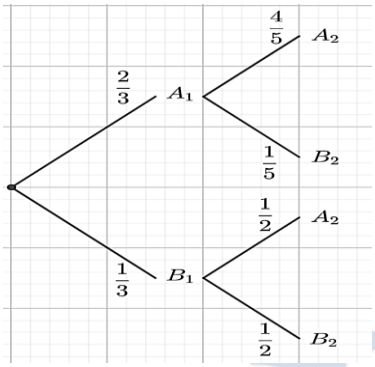
٢. عبر عن P_n بدلالة P_{n+1}

٣. لتكن المتتالية التي حدها العام $u_n = P_n - \frac{5}{7}$ أثبت انّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ هندسية ثم اكتب عبارة u_n بدلالة n

٤. استنتج P_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

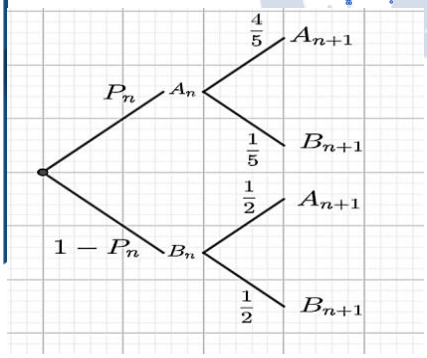
الحل:

الطلب الأول:



$$P_2 = P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap B_1)$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$$

الطلب الثاني:



$$P_{n+1} = P(A_{n+1})$$
$$= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n)$$
$$= \frac{4}{5}P_n + \frac{1}{2}(1 - P_n) = \frac{3}{10}P_n + \frac{1}{2}$$

الطلب الثالث:

$$u_{n+1} = P_{n+1} - \frac{5}{7} = \left(\frac{3}{10}P_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{7}$$
$$= \frac{3}{10}P_n - \frac{3}{14} = \frac{3}{10}\left(P_n - \frac{5}{7}\right)$$

نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3}{10}\left(P_n - \frac{5}{7}\right)}{P_n - \frac{5}{7}} = \frac{3}{10}$$

ومنه المتتالية u_n هندسية أساسها $q = \frac{3}{10}$ وحدها الأول:

$$u_1 = P_1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{3} - \frac{5}{7} = -\frac{1}{21}$$

كتابة u_n بدلالة n :

$$u_n = u_1.q^{n-1} = -\frac{1}{21}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} = -\frac{10}{63}\left(\frac{3}{10}\right)^n$$

الطلب الرابع:

$$P_n = u_n + \frac{5}{7} \to P_n = -\frac{10}{63}\left(\frac{3}{10}\right)^n + \frac{5}{7}$$

إيجاد النهاية:

لما كان $-1 < \frac{3}{10} < 1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^n = 0$ ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{5}{7}$$

مكثفة شيفرة الـ 600

المتحولات العشوائية:

أولاً: القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي:

الطلب	الأول		
نص السؤال	اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X		
الخطوات	١. نضع فضاء العينة الشهير المناسب ٢. نحدد قيم المتحول العشوائي وتكون معطاة صراحة أو تستنتج ٣. نوجد احتمالات قيم X ٤. ننظم جدول القانون الاحتمالي وفق:		
	المجموع	قيم X	x_i
	1	احتمالات قيم X	p_i

الطلب	الثاني	الثالث	الرابع
نص السؤال	احسب التوقع الرياضي	احسب التباين	احسب الانحراف المعياري
الخطوات	* نكتب القانون الاحتمالي * نطبق القانون: $E(X)=\sum_{i=1}^{m} x_i p_i$	نطبق القانون: $V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$ حيث $E(X^2)=\sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i$	نطبق القانون $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

التمرين الأول:

في تجربة إلقاء حجري نرد متوازنين ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على أكبر العددين الظاهرين.

١. اكتب مجموعة قيم X وجدول قانونه الاحتمالي.
٢. احسب توقعه الرياضي $E(X)$.
٣. إذا علمت أنّ أكبر العددين الظاهرين هو 6 فما احتمال ظهور العدد 1 .

الحل:

الطالب الأول:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$n(\Omega)=36$$
$$X=\{1,2,3,4,5,6\}$$
$$P(X=1)=\frac{1}{36}\ ,\ P(X=2)=\frac{3}{36}$$
$$P(X=3)=\frac{5}{36}\ ,\ P(X=4)=\frac{7}{36}$$
$$P(X=5)=\frac{9}{36}\ ,\ P(X=6)=\frac{11}{36}$$

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

الطالب الثاني:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i.p_i$$
$$=(1)\left(\frac{1}{36}\right)+(2)\left(\frac{3}{36}\right)+(3)\left(\frac{5}{36}\right)$$
$$+(4)\left(\frac{7}{36}\right)+(5)\left(\frac{9}{36}\right)+(6)\left(\frac{11}{36}\right)$$
$$=\frac{1+6+15+28+45+66}{36}=\frac{161}{36}$$

الطالب الثالث:

ليكن B الحدث "أكبر العددين الظاهرين هو 6"
و A الحدث "ظهور العدد 1 "

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

حيث:

$$P(A\cap B)=\frac{2}{36}\ ,\ P(B)=\frac{11}{36}$$
$$\rightarrow P(A|B)=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{2}{11}$$

التمرين الثاني:

صندوق يحتوي على خمس كرات , كرتان بيضاوان مرقمتان بالرقمين 1 و 2 وثلاث كرات سوداء مرقمة بالأرقام -1 و 1 و 2 , نسحب من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة , نتأمل الحدثين:

A : الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين.
B : للكرتين المسحوبتين الرقم ذاته.

١. عيّن $P(A)$ و $P(B)$.
٢. إذا علمت أنّ الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين فما احتمال أن تحملا الرقم ذاته.
٣. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين , عيّن قانون X واحسب توقعه الرياضي.
٤. احسب احتمال الحدث C مجموع رقمي الكرتين يساوي 2 على الأكثر.

الحل:

	W_1	W_2	$B_{(-1)}$	B_1	B_2
W_1			A	A B	A
W_2			A	A	A B
$B_{(-1)}$	A	A			
B_1	A B	A			
B_2	A	A B			

$$n(\Omega)=20$$

الطالب الأول:

$$P(A)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}\ ,\ P(B)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

الطالب الثاني:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{20}}{\frac{12}{20}}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

الطالب الثالث:

	W_1	W_2	$B_{(-1)}$	B_1	B_2
W_1		3	0 C	2 C	3
W_2	3		1 C	3	4
$B_{(-1)}$	0 C	1 C		0 C	1 C
B_1	2 C	3	0 C		3
B_2	3	4	1 C	3	

$$n(\Omega)=20$$
$$X=\{0,1,2,3,4\}$$
$$P(X=0)=\frac{4}{20}=\frac{2}{10}\ ,\ P(X=1)=\frac{4}{20}=\frac{2}{10}$$
$$P(X=2)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}\ ,\ P(X=3)=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$$
$$P(X=4)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5} x_i.p_i=(0)\left(\frac{2}{10}\right)$$
$$+(1)\left(\frac{2}{10}\right)+(2)\left(\frac{1}{10}\right)+(3)\left(\frac{4}{10}\right)+(4)\left(\frac{1}{10}\right)$$
$$\frac{2+2+12+4}{10}=\frac{20}{10}=2$$

الطالب الرابع:

$$P(C)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

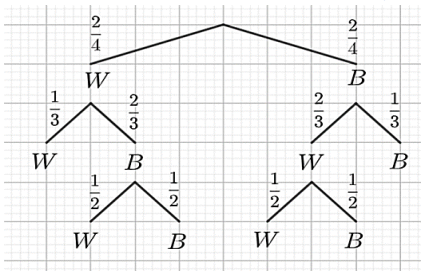
التمرين الثالث:

نتأمل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين وكرتين بيضاوين , نكرر عملية السحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته , ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة والمطلوب:

١. عين مجموعة قيم X وجدول قانونه الاحتمالي.
٢. احسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل:

الطالب الأول:



$$X=\{2,3\}$$
$$P(X=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ ,\ P(X=3)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

x_i	2	3
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

الطالب الثاني:

حساب التوقع الرياضي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{2} x_i.p_i=(2)\left(\frac{1}{3}\right)+(3)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

حساب التباين:

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$

حيث:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{2} x_i^2.p_i=(4)\left(\frac{1}{3}\right)+(9)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{22}{3}$$

ومنه:

$$V(X)=\frac{22}{3}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{22}{3}-\frac{64}{9}=\frac{66-64}{9}=\frac{2}{9}$$

بحث في 600 تمرين

التمرين الرابع: يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء W و كرتان سوداوين B وكرة حمراء R , نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات وفي آنٍ معاً وليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة والمطلوب:

١. اكتب مجموعة قيم X .

٢. احسب $P(X=1)$ و $P(X=3)$ واستنتج $P(X=2)$

٣. احسب $E(X)$.

الحل:

نوجد $n(\Omega)$ وفق:

$$n(\Omega)=\binom{6}{3}=\frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)}=20$$

الطلب الأول:

$$X=\{1,2,3\}$$

الطلب الثاني:

$$P(X=1)=\frac{\binom{3}{3}}{20}=\frac{1}{20}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{1}.\binom{2}{1}.\binom{1}{1}}{20}=\frac{6}{20}$$

استنتاج $P(X=2)$:

$$P(X=2)=1-\big(P(X=1)+P(X=3)\big)$$

$$=1-\left(\frac{1}{20}+\frac{6}{20}\right)=1-\frac{7}{20}=\frac{13}{20}$$

الطلب الثالث:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{6}{20}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i.p_i$$

$$=(1)\left(\frac{1}{20}\right)+(2)\left(\frac{13}{20}\right)+(3)\left(\frac{6}{20}\right)=\frac{9}{4}$$

ثانياً: القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية:

نص السؤال	اكتب القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)
الخطوات	(1) نضع فضاء العينة الشهير المناسب (2) نحدد قيم المتحول العشوائي X ونوجد احتمالاتها (3) نحدد قيم المتحول العشوائي Y ونوجد احتمالاتها (4) ننظم جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)

X \ Y	قيم Y	قانون X
قيم X	التقاطعات	احتمالات قيم X
قانون Y	احتمالات قيم Y	1

تمرين: في تجربة إلقاء حجر نرد ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة العدد الظاهر على (2) وليكن Y المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة العدد الظاهر على (3) والمطلوب:

١. عين قيم X وجدول قانونه الاحتمالي.

٢. عين قيم Y وجدول قانونه الاحتمالي.

٣. عين جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) .

الحل:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

الطلب الأول:

$$X=\{0,1\}$$

$$P(X=0)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\ ,\ P(X=1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

x_i	0	1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

الطلب الثاني:

$$Y=\{0,1,2\}$$

$$P(Y=0)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ ,\ P(Y=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

y_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

الطلب الثالث:

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
قانون Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين:

تعريف	نقول عن X و Y أنهما مستقلان احتمالياً إذا تحقق: $P(X=x_i)\cap(Y=y_i)=P(X=x_i).P(Y=y_i)$ أي احتمال التقاطع يساوي جداء الاحتمالات	
أنماط التمارين	النمط الأول	النمط الثاني
نص السؤال	هل X و Y مستقلان احتمالياً	إكمال جدول القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية
فكرة الحل	١. نوجد كلاً من: • $P(X=x_i)$ • $P(Y=y_i)$ • $P(X=x_i).P(Y=y_i)$ • $P\big((X=x_i)\cap(Y=y_i)\big)$ ٢. ونميز: ① إذا تحقق: $P\big((X=x_i)\cap(Y=y_i)\big)=P(X=x_i).P(Y=y_i)$ وبالتالي يكون X و Y مستقلان احتمالياً ② إذا تحقق: $P\big((X=x_i)\cap(Y=y_i)\big)\neq P(X=x_i).P(Y=y_i)$ وبالتالي يكون X و Y غير مستقلان احتمالياً	١. نستخدم الجمع الشاقولي أو الأفقي (وهي طريقة تنفع دوماً) ٢. نستخدم القانون $P(X=x_i)\cap(Y=y_i)=P(X=x_i).P(Y=y_i)$ نستخدمه فقط عندما يذكر لنا بنص السؤال بشكل صريح أنّ X و Y مستقلان احتمالياً ملاحظة: عندما يكون X و Y مستقلان احتمالياً فإنّ: $\text{الداخل}=\frac{\text{الإطار}}{\text{اطار}}\ ,\ (\text{إطار})(\text{إطار})=\text{الداخل}$

التمرين الأول:

صندوق يحتوي على خمس كرات مرقمة بالأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 نسحب من الصندوق كرتين معاً ليكن S متحول عشوائي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين وليكن X متحول عشوائي يدل على باقي قسمة S على 2 وليكن Y متحول عشوائي يدل على باقي قسمة S على 3 والمطلوب:

١. عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S .

٢. عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب $E(X)$.

٣. عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y واحسب $E(Y)$.

٤. عين القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)

٥. هل المتحولان العشوائيان X و Y مستقلان احتمالياً.

الحل:

الطلب الأول:

	1	2	3	4	5
1		3	4	5	6
2			5	6	7
3				7	8
4					9
5					

$$n(\Omega)=10$$

$$S=\{3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$P(S=3)=\frac{1}{10}\ ,\ P(S=4)=\frac{1}{10}$$

$$P(S=5)=\frac{2}{10}\ ,\ P(S=6)=\frac{2}{10}$$

$$P(S=7)=\frac{2}{10}\ ,\ P(S=8)=\frac{1}{10}$$

$$P(S=9)=\frac{1}{10}$$

s_i	3	4	5	6	7	8	9
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

الطلب الثاني:

$$X=\{0,1\}$$

$$P(X=0)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\ ,\ P(X=1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

x_i	0	1
p_i	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{2}x_i.p_i=(0)\left(\frac{2}{5}\right)+(1)\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}$$

الطلب الثالث:

$$Y=\{0,1,2\}$$

$$P(Y=0)=\frac{4}{10}\ ,\ P(Y=1)=\frac{3}{10}$$

$$P(Y=2)=\frac{3}{10}$$

y_i	0	1	2
p_i	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}y_i.p_i=(0)\left(\frac{4}{10}\right)+(1)\left(\frac{3}{10}\right)+(2)\left(\frac{3}{10}\right)$$

$$=\frac{3+6}{10}=\frac{9}{10}$$

الطلب الرابع:

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{5}$
قانون Y	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

الطلب الخامس:

$$P(X=0)=\frac{2}{5}\ ,\ P(Y=0)=\frac{4}{10}$$

$$P(X=0).P(Y=0)=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{10}\right)=\frac{8}{50}=\frac{4}{25}$$

$$P\big((X=0)\cap(Y=0)\big)=\frac{2}{10}$$

ومنه نلاحظ أنّ:

$$P\big((X=0)\cap(Y=0)\big)\neq P(X=0).P(Y=0)$$

ومنه المتحولان العشوائيان X و Y غير مستقلان احتمالياً.

مكثفة شيفرة الـ 600

التمرين الثاني:

أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X,Y) علماً أنّ المتحولين العشوائيين X و Y مستقلان احتمالياً.

X / Y	0	1	2	قانون X
0				0.3
1			0.14	
قانون Y		0.4		1

الحل:

X / Y	0	1	2	قانون X
0				$\frac{3}{10}$
1			$\frac{14}{100}$	$\frac{7}{10}$
قانون Y		$\frac{4}{10}$		1

بما أنّ المتحولان العشوائيان X و Y مستقلان احتمالياً فإنهُ يتحقق:

$$P((X=x_i)\cap(Y=y_i)) = P(X=x_i).P(Y=y_i)$$

ومنهُ:

$$P((X=1)\cap(Y=2)) = \frac{14}{100}$$

$$P(X=1) = \frac{7}{10} \quad , \quad P(Y=2) = x$$

نعوض:

$$P((X=1)\cap(Y=2)) = P(X=1).P(Y=2)$$

$$\frac{14}{100} = \frac{7}{10}.x$$

$$x = \frac{\frac{14}{100}}{\frac{7}{10}} = \frac{14}{100}.\frac{10}{7} = \frac{2}{10}$$

X / Y	0	1	2	قانون X
0	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{28}{100}$	$\frac{28}{100}$	$\frac{14}{100}$	$\frac{7}{10}$
قانون Y	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

ثالثاً: المتحولات العشوائية الحدّية (برنولي):

حكمة	كل شي بزيد عن حده يقلب برنولي حيث الحد هو فضاءات العينة الشهيرة
مقدمة لا بُدّ منها	هذه تجربة برنولية ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات الحصول على ... عند تكرار التجربة $\cdots = n$ مرة علماً أن احتمال الحصول على ... في المرة الواحدة هو $\cdots = p$
خطوات حل مسائل برنولي	(1) نحدد أنها تجربة برنولية (2) نحدد n (عدد مرات تكرار التجربة) (3) نوجد P حيث P هو احتمال الحدث الهدف في المرة الواحدة وذلك بالاعتماد على فضاءات عينة شهيرة (4) نوجد q حيث q يعطى بالعلاقة: $q = 1-p$ (5) نضع القانون وفق: $P(X=K) = \binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$ (6) نحدد قيمة K من نص الطلب ثم نعوض
ملاحظات	الملاحظة الأولى: في المسائل التي تحوي برنولي يكون: (1) التوقع الرياضي يعطى بالقانون: $E(X)=n.p$ (2) التباين يعطى بالقانون: $V(X)=n.p.q$ الملاحظة الثانية: * قيمة K تحقق $0 \le K \le n$ حيث n هو عدد مرات تكرار التجربة * قيمة K تتغير من طلب لآخر وتحدد وفق: ○ فقط $P(X=K)$ ○ على الأكثر $P(X\le K)$ ويكون الاحتمال المعاكس له معطى وفق: $P(X\le K)=1-P(X>K)$ ○ على الأقل $P(X\ge K)$ ويكون الاحتمال المعاكس له معطى وفق: $P(X\ge K)=1-P(X<K)$ انتبه يا صديقي الطالب: نستخدم الحدث المعاكس لتبسيط الحساب (يعني عشان راحتك) عند الصعود نصل إلى n وعند النزول نصل إلى الصفر.

أنماط التمارين	فكرة الحل
النمط الأول: إيجاد احتمال حدث ما	* نضع قانون المسألة * نحدد المطلوب ونوجده من خلال التعويض في القانون المناسب للمسألة
النمط الثاني: برنولي ومتحول عشوائي	* نضع قانون مناسب * نحدد قيم X ونوجد احتمالات قيم X من خلال التعويض في المسألة.
النمط الثالث: إكمال جدول تجربة برنولية	* نضع قانون المسألة * نوجد المطلوب
النمط الرابع: إيجاد التوقع الرياضي والتباين	* $E(X)=n.p$ * $V(X)=n.p.q$

التمرين الأول:

نلقي 5 قطع نقود متوازنة في آن معاً والمطلوب:

ما احتمال الحصول على الوجه H ثلاث مرات فقط؟

ما احتمال الحصول على الوجه H مرة على الأكثر؟

ما احتمال الحصول على الوجه H أربع مرات على الأكثر؟

ما احتمال الحصول على الوجه H مرة على الأقل؟

ما احتمال الحصول على الوجه H أربع مرات على الأقل؟

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات الحصول على الوجه H , ما هي قيم X ؟

اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X .

احسب توقعه الرياضي وتباينهُ وانحرافه المعياري.

الحل:

هذه تجربة برنولية حيثُ: $n=5$

إيجاد p : حيث p هو احتمال الحصول على الوجه H في المرة الواحدة حيث فضاء العينة للمرة الواحدة هو:

$$n(\Omega)=\{T\ ,H\} \rightarrow p=\frac{1}{2}$$

إيجاد q وفق: $q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

نطبق القانون:

$$P(X=K)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$$

$$P(X=K)=\binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}$$

الطلب الأول:

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=10\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{10}{32}$$

الطلب الثاني:

$$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X+1)$$

$$=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$=(1)(1)\left(\frac{1}{32}\right)+(5)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$=\frac{1+5}{32}=\frac{6}{32}$$

الطلب الثالث:

$$P(X\le 4)=1-P(X>4)=1-\left(P(X=5)\right)$$

$$=1-\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

الطلب الرابع:

$$P(X\ge 1)=1-P(X<1)$$

$$=1-P(X=0)=1-\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

الطلب الخامس:

$$P(X\ge 4)=P(X=4)+P(X=5)$$

$$=\binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$=1\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+1\left(\frac{1}{32}\right)(1)=\frac{2}{32}$$

الطلب السادس:

$$X=\{0,1,2,3,4,5\}$$

الطلب السابع:

$$P(X=0)=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

$$P(X=1)=\binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32}$$

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{10}{32}$$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}$$

$$P(X=4)=\binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32}$$

$$P(X=5)=\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{32}$$

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

الطلب الثامن:

$$E(X)=n.p=5\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

$$V(X)=n.p.q=5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

التمرين الثاني:

يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء , عدد الكرات الحمراء يساوي ضعفي عدد الكرات البيضاء.

١. نسحب عشوائياً كرة , ما احتمال أن تكون حمراء.

٢. نسحب من الصندوق أربع كرات على التتالي مع الإعادة , ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

a) عين مجموعة قيم X وجدول قانونه الاحتمالي.

b) احسب $E(X)$ و $V(X)$.

الحل:

الطلب الأول:

نفترض أنّ عدد الكرات البيضاء هو n .

فيكون عدد الكرات الحمراء هو $2n$.

ومنهُ احتمال أن تكون الكرة حمراء هو:

$$P(R)=\frac{2n}{3n}=\frac{2}{3}$$

الطلب الثاني:

$(a$:

قيم المتحول العشوائي X

$$X=\{0,1,2,3,4\}$$

كتابة القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي:

هذه تجربة برنولية حيث: $n=4$

p احتمال الحصول على كرة حمراء في المرة الواحدة: $p=\frac{2}{3}$

إيجاد q وفق: $q=1-p=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

نطبق القانون:

$$P(x=k)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$$

$$\boxed{P(X=k)=\binom{4}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}}$$

ومنهُ:

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$$

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$$

$$P(X=4)=\binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{16}{81}$$

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

$(b$:

$$E(X)=n.p=4\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

$$V(X)=n.p.q=4\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{9}$$

التمرين الثالث:

صندوق يحتوي على 6 بطاقات مرقمة بالأرقام 0 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 , نسحب من الصندوق 4 بطاقات على التتالي مع الإعادة وليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور رقم فردي والمطلوب:

اكتب مجموعة قيم X وقانونهُ الاحتمالي.

احسب توقعه الرياضي وتباينهُ وانحرافه المعياري.

الحل:

الطلب الأول:

هذه تجربة برنوليّة حيث $n=4$

p احتمال الحصول على عدد فردي في المرة الواحدة:

$$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\text{ و }q=1-p=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

نطبق القانون:

$$P(x=k)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$$

$$\boxed{P(X=k)=\binom{4}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}}$$

قيم X : $X=\{0,1,2,3,4\}$ ومنهُ:

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$$

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$$

$$P(X=4)=\binom{4}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}$$

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

الطلب الثاني:

$$E(X)=n.p=4\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

$$V(X)=n.p.q=4\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

التمرين الرابع:

يتواجه فريقان A و B في لعبة كرة القدم في مباراة مكونة من ثلاثة أدوار , يكسب الفريق A الدور الواحد باحتمال يساوي $\frac{2}{5}$, ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الأدوار التي يكسبها الفريق A .

١. عين قيم X وقانونهُ الاحتمالي.

٢. يربح المباراة الفريق الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار , ما احتمال أن يربح الفريق A المباراة؟

٣. احسب توقع X وانحرافه المعياري.

الحل:

الطلب الأول:

هذه تجربة برنوليّة حيث $n=3$

p احتمال أن يكسب الفريق A في الدور الواحد: $p=\frac{2}{5}$

$$q=1-p=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

القانون:

$$P(x=k)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$$

$$\boxed{P(X=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{3-k}}$$

قيم X : $X=\{0,1,2,3\}$.

$$P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$$

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{36}{125}$$

$$P(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{8}{125}$$

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

الطلب الثاني:

يربح الفريق A عندما يكسب دورين على الأقل ويتحقق ذلك وفق:

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X+3)$$
$$=\frac{36}{125}+\frac{8}{125}=\frac{44}{125}$$

الطلب الثالث:

$$E(X)=n.p=3\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{6}{6}$$

$$V(X)=n.p.q=3\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{18}{25}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{18}{25}}=\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

صندوق القوانين:

- $P(\Omega)=1\ ,\ P(\phi)=0\ ,\ 0\leq P(A)\leq 1$
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
- $P(A')=1-P(A)$
- $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')$
- $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')$
- $(A\cap B)'=A'\cup B'$ و $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ويسمى بقانونا دومورغان
- A و B مستقلان احتمالياً $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

  A و B مستقلان احتمالياً $\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$ أو $P(A|B)=P(A)$
- قانون الاحتمال الشرطي: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

  $P(A\cap B)=P(B|A).P(A)$ و $P(A\cap B)=P(A|B).P(B)$
- التقاطع والاجتماع عملية تبديلية أيّ: $A\cup B=B\cup A$ و $A\cap B=B\cap A$

فهرس التحليل التوافقي والاحتمالات:

١. الحسابات.

٢. طرائق العد.

٣. مفتاح المسائل.

٤. الاستقلال الاحتمالي.

٥. الاحتمال الشرطي.

٦. المتحولات العشوائية.

مكثفة شيفرة الـ 600

ELITE MATH

لأن من أحسن البداية كان في منتصف الطريق سنبدأ بالتأسيس.. اعقد العزم وابدأ معنا.. بسم الله..

تمهيد

حل معادلة: إيجاد قيم المجهول.

حل متراجحة: إيجاد قيم المجهول التي تحقق المتراجحة وتكون (مجال – قيم محددة – مجموعة خالية)

انتبه: موقع الـ x هو الذي يحدد نوع المعادلة أو المتراجحة

نميز	معادلة	متراجحة
الدرجة الأولى	* ننقل المعاليم إلى طرف والمجاهيل إلى طرف مع تغيير إشارة المنقول. * نختزل "أهم من حياتي" * نعزل المجهول.	نعزل x ونحدد S وفق: * $x > a \rightarrow S =]a, +\infty[$ * $x \geq a \rightarrow S = [a, +\infty[$ * $x < a \rightarrow S =]-\infty, a[$ * $x \leq a \rightarrow S =]-\infty, a]$
الدرجة الثانية	**تحوي x^2 و x** * ننقل كل شي إلى الطرف الأيسر. * نحلل الطرف الأيسر باستخدام العامل المشترك. * نحصل على الجداء الصفري.	* ننقل كل شي إلى الطرف الأيسر. * نحول إلى معادلة. * نحل هذه المعادلة. * ننظم جدول الإشارة "أهم من حياتي" * نحدد S وهي قيم x التي تقابل كلمة محققة.
	تحوي x^2 وعدد * نعزل الـ x^2 ونميز: * $x^2 =$ عدد سالب $\rightarrow$ مستحيلة الحل * $x^2 =$ عدد موجب $\rightarrow$ إما $x = \sqrt{\text{عدد}}$ أو $x = -\sqrt{\text{عدد}}$	
	تحوي x^2 و x وعدد * ننقل كل شي إلى الطريف الأيسر * نحلل الطرف الأيسر باستخدام التحليل المباشر فنحصل على الجداء الصفري وفق حال فشل التحليل المباشر فإننا نلجأ إلى طريقة المميز Δ	
الدرجة الثالثة	* ننقل كل شيء إلى الطرف الأيسر * نحلل الطرف الأيسر باستخدام القسمة الإقليدية أو المطابقات التكعيبية * نحصل على الجداء الصفري. * تذكر: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$	* ننقل كل شيء إلى الطرف الأيسر. * نحول إلى معادلة ونحل هذه المعادلة. * ننظم جدول الإشارة. * نحدد S وهي قيم x التي تقابل كلمة محققة.
الكسرية	* نصل وصولاً إلى الشكل: $(0 = \text{كسر})$ * نعدم البسط فقط ونحدد حلول المعادلة. ملاحظة: عندما يكون لدينا $(0 = \text{كسر})$ والبسط لا يحوي x فهذا يعني أن المعادلة (مستحيلة الحل)	* نصل وصولاً إلى الشكل: $\left(0 \begin{matrix}\text{إشارة} \\ \text{تراجح}\end{matrix} \text{كسر}\right)$ * نعدم البسط. * نعدم المقام. * ننظم جدول الإشارة. * نحدد S ملاحظة: * ظهور العدد صفر في حقل المقام يقابله $(\|\|)$ في حقل الكسر. * عند القيمة التي تقابل الرمز $(\|\|)$ يكون المجال مفتوحاً مهما كان نوع المتراجحة.

كيفية وضع الإشارات في جدول الإشارة

المقدار من الدرجة الأولى يكون:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
A	يخالف إشارة x		0		يوافق إشارة أمثال x

المقدار من الدرجة الثانية

مستحيلة الحل

x	$-\infty$	$+\infty$
A	يوافق إشارة أمثال x^2	

حل وحيد

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
A	يوافق إشارة أمثال x^2		0		يوافق إشارة أمثال x^2

حلان

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
A	يوافق إشارة أمثال x		0		يخالف إشارة x^2		يوافق إشارة أمثال x

غير ذلك يمكن استخدام طريقة القيم التجريبية بحيث نأخذ قيمة اختيارية من المجال الموافق ونعوضها في المقدار الذي نريد معرفة إشارته

600 الـ شيفرة مفتاحية

أنواع التوابع:

أولاً: التابع الصحيح:

هو كثير حدود من الشكل:

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+cx+d$$

شرط التعريف: $\mathbb{R}$

ثانيًا: التابع الكسري:

هو تابع كسري بسطه ومقامه كثيري حدود.

شرط التعريف: $\mathbb{R}\backslash\{\text{القيم التي تعدم المقام}\}$

ثالثًا: تابع الجذر التربيعي:

هو تابع من الشكل:

$$f(x)=\sqrt{g(x)}$$

شرط التعريف: $g(x)\geq 0$

رابعًا: التابع اللوغاريتمي:

١. التابع اللوغاريتمي بالأساس a:

رمزه: $f(x)=\log_a(g(x))$

قاعدة: $\log_a(b)=\frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

٢. التابع اللوغاريتمي بالأساس 10 :

رمزه: $f(x)=\log(g(x))$

قاعدة: $\log(b)=\frac{\ln(b)}{\ln(10)}$

٣. التابع اللوغاريتمي بالأساس e :

رمزه: $f(x)=\ln(g(x))$

شرط تعريفه: مضمون اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر أيّ شرط الحل هو حل المتراجحة:

$$g(x)>0$$

خامسًا: التابع الأسي:

١. التابع الأسي بالأساس a :

رمزه:

$$f(x)=a^{g(x)}\ ;a>0$$
$$f(x)=\exp_a(g(x)$$

٢. التابع الأسي بالأساس e :

رمزه:

$$f(x)=e^{g(x)}$$
$$f(x)=\exp(g(x))$$

شرط تعريفه:

هو شرط تعريف أسه.

سادسًا: التابع المثلثي:

هو من أحد الأشكال الآتية:

$$f(x)=\sin(g(x))$$
$$f(x)=\cos(g(x))$$

شرط تعريفه: هو شرط تعريف مضمونه

$$f(x)=\tan(g(x))$$
$$f(x)=\cot(g(x))$$

شرط تعريفه:

هو شرط تعريف مضمونه والمقام لا ينعدم.

سابعًا: تابع الجزء الصحيح:

رمزه: $E(x)$

التخلص من $E(x)$ على مجال:

نجزئ المجال إلى مجالات بحيث بداية المجال يكون مغلق ونهاية المجال يكون مفتوح.

كتابة التابع $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$:

- نتخلص من $E(x)$ على المجال الموافق "كما سبق"
- نعوض في التابع $f(x)$ حيث:

نعوض قيمة $E(x)$ دوماً ونعوض قيمة x فقط عندما تكون محددة أما إذا كانت غير محددة فإنها تبقى x .

رسم تابع الجزء الصحيح:

- نكتب التابع f بصيغة مستقلة عن $E(x)$
- نرسم كل فرع على حدا حيث نحدد لكل فرع: نقطة بداية ونقطة نهاية بحيث فواصل هذه النقاط من المجال والتراتيب نحصل عليها من التعويض في التابع.

انتبه:

- النقطة التي تقابل المجال المغلق تكون مطموسة.
- النقطة التي تقابل المجال المفتوح تكون مفرغة.
- ثم نصل بين هاتين النقطتين ونميز:
- إذا كان التابع عدد أو درجة أولى يكون الخط مستقيم.
- إذا كان التابع غير ذلك يكون الخط البياني منحني.

تمرين:

f تابع معرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=5x-1+E(x)$$

١. اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,3]$

٢. ارسم f على المجال $[0,3]$

الحل:

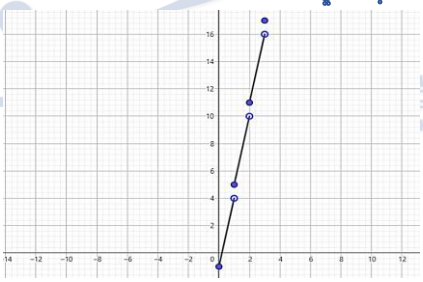
الطلب الأول:

$$E(x)\begin{cases}0 & ;[0,1[\\1 & ;[1,2[\\2 & ;[2,3[\\3 & ;x=3\end{cases}$$

ومنه:

$$f(x)\begin{cases}5x-1 & ;[0,1[\\5x & ;[1,2[\\5x+1 & ;[2,3[\\17 & ;x=3\end{cases}$$

الطلب الثاني:



سابعًا: تابع الـ min :

$$f(x)=\min(g(x),h(x))$$

للتخلص من الـ min على مجال فإننا:

ندرس إشارة الفرق: $g(x)-h(x)$

نختار الصغير على المجالات الموافقة.

تمرين:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0,2]$ وفق:

$$f(x)=\min(x^2,2-x)$$

١. تخلص من الـ min على المجال $[0,2]$

نلاحظ أنه أياً كان: $0\leq x\leq 1$ يكون:

$$x^2+x-2\leq 0\rightarrow x^2\leq 2-x$$

نلاحظ أنه أياً كان: $1\leq x\leq 2$ يكون:

$$x^2+x-2\geq 0\rightarrow x^2\geq 2-x$$

ومنه:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & ;0\leq x\leq 1\\2-x & ;1\leq x\leq 2\end{cases}$$

٢. ارسم الخط البياني:



ثامنًا: تابع الـ max :

$$f(x)=\max(g(x),h(x))$$

للتخلص من الـ max على مجال فإننا:

ندرس إشارة الفرق: $g(x)-h(x)$

نختار الكبير على المجالات الموافقة.

تمرين:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0,2]$ وفق:

$$f(x)=\max(1-x^2,x-1)$$

١. تخلص من الـ max على المجال $[0,2]$

التخلص من الـ max على المجال $[0,2]$.

ندرس إشارة الفرق:

$$1-x^2-(x-1)$$
$$1-x^2-x+1$$
$$-x^2-x+2=0$$
$$a=-1\ ,\ b=-1\ ,\ c=2$$
$$\Delta=b^2-4ac=1-4(-1)(2)=9$$
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+3}{-2}=-2$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-3}{-2}=-1$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
الفرق		$-$	0	$+$	0	$-$	

عندما $x\in[0,1]$ فإنّ:

$$-x^2-x+2\geq 0$$
$$1-x^2-(x-1)\geq 0$$
$$1-x^2\geq x-1$$

أي أنّ max التابع f على المجال $[0,1]$ هو: $1-x^2$

عندما $x\in[1,2]$ فإن:

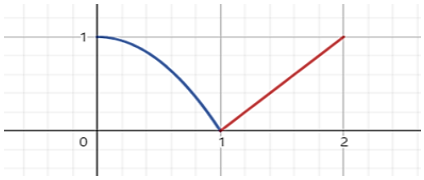
$$-x^2-x+2\leq 0$$
$$1-x^2-(x-1)\leq 0$$
$$1-x^2\leq x-1$$

أي أنّ max التابع f على المجال $[1,2]$ هو: $x-1$

ومنه:

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2;x\in[0,1]\\x-1\ ;x\in[1,2]\end{cases}$$

٢. ارسم الخط البياني للتابع f .



عاشرًا: تابع القيمة المطلقة:

رمزه: $f(x)=|g(x)|$

خواص:

- $|a|^2=a^2$
- $|a|.|b|=|a\times b|$
- $\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|$

التخلص من القيمة المطلقة:

ندرس إشارة المضمون ونميز:

- المضمون موجب: نفس المضمون.
- المضمون سالب: عكس المضمون.

مكثفة شيفرة الـ 600

تمرين:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ وفق:

$$f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$$

اكتب التابع $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة.

الحل:

ندرس إشارة المضمون وفق:

$$x+1 = 0 \rightarrow x = -1$$

ننظم جدول القيمة المطلقة وفق:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$\lvert$	$x+1$

ومنه:

$$f(x) = \begin{cases} -x-1+\frac{x}{x^2-1} ; x \in]-\infty,-1[\\ x+1+\frac{x}{x^2-1} ; x \in]-1,1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

الحادي عشر: التابع المركب:

رمزه: $fog(x)$

يُقرأ: f دائرة g أو f يلي g .

القانون: $fog(x) = f(g(x))$

كتابة f دائرة g بدلالة x :

نطبق القانون:

$$fog(x) = f(g(x))$$

نكمل بفكرة التصوير يعني اذهب إلى التابع الموافق واستبدل كل x بما في داخل الأقواس

تمرين:

ليكن لدينا التابعان f و g اللذان يحققان:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3} ; D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$$
$$g(x) = \sqrt{x-3} ; D_g = [3,+\infty[$$

والمطلوب:

١. أوجد قاعدة ربط التابع $fog(x)$.

$$fog(x) = f(g(x))$$
$$= f(\sqrt{x-3}) = \frac{2\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}-3}$$

٢. اكتب $gof(x)$ بدلالة x .

$$gof(x) = g(f(x))$$
$$= g\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}-3}$$
$$= \sqrt{\frac{2x+1-3x+9}{x-3}} = \sqrt{\frac{-x+10}{x-3}}$$

٣. اكتب $f(f(x))$ بصيغة تحوي x .

$$f(f(x)) = f\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$$
$$= \frac{2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)+1}{\frac{2x+1}{x-3}-3} = \frac{\frac{4x+2}{x-3}+1}{\frac{2x+1}{x-3}-3}$$
$$= \frac{\frac{4x+2+x-3}{x-3}}{\frac{2x+1-3x+9}{x-3}} = \frac{5x-1}{-x+10}$$

٤. أوجد قاعدة ربط $g(g(x))$.

$$g(g(x)) = \sqrt{\sqrt{x-3}-3}$$

التابع المركب يمكن أن يعطى بأحد الأشكال:

- لوغاريتم مضمونهُ تابع آخر $g(x)$.
- مثلثي مضمونهُ تابع آخر $g(x)$.
- جذري مضمونهُ تابع آخر $g(x)$.
- قوة أساسها تابع آخر $g(x)$.
- أسي أسه تابع آخر $g(x)$.

الثاني عشر: تابع التقابل العكسي:

رمزهُ: $f^{-1}(x)$

إيجاد التابع العكسي f^{-1} للتابع f :

- نستبدل $f(x)$ بـ y
- نبادل المتغيرات أي: نستبدل كل y بـ x وكل x بـ y
- نعزل y
- نستبدل y بـ $f^{-1}(x)$

تمرين:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = 2x-3$$

أوجد التابع الذي يمثل التقابل العكسي للتابع f .

الحل:

$$f(x) = 2x-3$$
$$y = 2x-3$$
$$x = 2y-3$$
$$2y = x+3$$
$$y = \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

إن أعظم النجاحات تأتي بعد
تخطي أصعب العوائق 💙🔥

إثبات أنّ g هو تقابل عكسي للتابع f .

- نوجد $f(g(x))$
- يجب أن يكون الناتج هو x .

تمرين:

ليكن لدينا التابعان:

$$f(x) = \ln(x) \quad , \quad g(x) = e^x$$

أثبت أنّ التابع g هو التقابل العكسي للتابع f

الحل:

$$f(g(x)) = f(e^x)$$
$$= \ln(e^x) = x.\ln(e) = x$$

ومنهُ التابع g هو التقابل العكسي للتابع f

الثالث عشر: مقصور تابع:

تعريف:

نثبت أنّ $D_g \subseteq D_f$ "أيّ نثبت أنّ مجموعة تعريف التابع g محتواة في مجموعة تعريف التابع f "

نثبت أنّ $f(x) = g(x)$ "أيّ نثبت أنّ قاعدة ربط التابع g هي نفسها قاعدة ربط التابع f "

تمرين:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

والتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-3}}$$

والمطلوب:

الطالب الأول:

أثبت أنّ مجموعة تعريف التابع g هي $[1,3[\cup]3,+\infty[$.

$$\frac{x^2-4x+3}{x-3} \geq 0$$

نعدم البسط وفق:

$$x^2-4x+3 = 0$$
$$(x-3)(x-1) = 0$$

إما $x = 3$ أو $x = 1$

نعدم المقام وفق:

$$x-3 = 0 \rightarrow x = 3$$

x	$-\infty$		1		3	$+\infty$
البسط	$+$		0	$-$	0	$+$
المقام	$-$		$-$		0	$+$
الكسر	$-$		0	$+$	$\lVert$	$+$
≥ 0	غير محققة	$\lvert$	محققة	$\lvert$	غير محققة	محققة

الطالب الثاني:

أثبت أنّ g مقصور f على $[1,3[\cup]3,+\infty[$

لدينا $D_g = [1,3[\cup]3,+\infty[$ ولدينا $D_f = [1,+\infty[$ ونلاحظ أنّ: $D_g \subseteq D_f$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-3}} = \sqrt{\frac{(x-3)(x-1)}{x-3}}$$
$$= \sqrt{x-1} = f(x)$$

إذاً التابع g مقصور f على المجال $[1,3[\cup]3,+\infty[$

خواص التابع اللوغاريتمي:

الخاصة	القانون	شرط التطبيق
لوغاريتم جداء	أياً يكن $a>0$ و $b>0$ يكن: $\ln(a.b) = \ln(a)+\ln(b)$ لولو جداء يساوي لولو زائد لولو وتطبق بشكل عكسي وفق: $\ln(a)+\ln(b) = \ln(a.b)$ لولو زائد لولو يساوي لولو جداء	أن تكون أمثال اللوغاريتمات هي الواحد حصراً
لوغاريتم قسمة	أياً يكن $a>0$ و $b>0$ يكن: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a)-\ln(b)$ لولو قسمة يساوي لولو ناقص لولو وتطبق بشكل عكسي وفق: $\ln(a)-\ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ لولو ناقص لولو يساوي لولو قسمة	أن تكون أمثال اللوغاريتم هي: 1 أو -1 حيث: الأمثال $1 \leftarrow$ بسط الأمثال $-1 \leftarrow$ مقام
لم لوغاريتمات	أياً يكن $a>0$ و $b>0$ و $c>0$ و $d>0$ يكن: $\ln(a)+\ln(b)+\ln(c)+\ln(d) = \ln(a.b.c.d)$ $\ln(a)-\ln(b)+\ln(c)-\ln(d) = \ln\left(\frac{a.c}{b.d}\right)$	أن تكون أمثال اللوغاريتم هي: 1 أو -1 حيث: الأمثال $1 \leftarrow$ بسط الأمثال $-1 \leftarrow$ مقام

لوغاريتم قوة	أياً يكن $a>0$ و $n\in\mathbb{N}^*$ يكن: $\ln(a)^n = n\ln(a)$ وتطبق بشكل عكسي وفق: $n\ln(a) = \ln(a)^n$ حطني على راسك وشكلني	الأسر للمضمون فقط
لوغاريتم الجذر التربيعي	أياً يكن $a>0$ يكن: $\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(a)$ وتطبق بشكل عكسي وفق: $\frac{1}{2}\ln(a) = \ln(a)^{\frac{1}{2}} = \ln(\sqrt{a})$	الأسر للمضمون فقط
قيم مباشرة	$\ln(1)=0$; $\ln(e)=1$ $\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-1$; $\ln(\sqrt{e})=\frac{1}{2}$	
قيم تقريبية	$\ln(2)\cong 0.7$; $\ln(3)\cong 1.1$; $\ln(5)\cong 1.6$ $e\cong 2.7$; $e^2\cong 7.3$; $\sqrt{e}\cong 1.6$ $\frac{1}{e}=0.4$; $\frac{1}{\sqrt{e}}=0.6$; $\frac{1}{e^2}=0.1$	تحفظ ولا تكتب.
الكفر والإلحاد	$\ln(a+b)$ $\ln(a-b)$ $(\ln(a))^n$ لا يوجد قانون	إذا بتكون طبقت خواص من عندك بتكون كفرت يا صديقي

أنماط التمارين:

نص السؤال	الاختزال (التبسيط)	إثبات صحة علاقة	المقارنة
	بسط (اختزل) المقادير	أثبت صحة العلاقة (المساواة)	قارن بين المقدارين
فكرة الحل	تمهيد: اللوغاريتم المختزل هو لوغاريتم مضمونه هو عدد أولي حيث: العدد الأولي: هو كل عدد يقبل القسمة على نفسه وعلى الواحد فقط معاً مثلاً: 2,35,7,11, .. خطوات الحل: نطبق ما يلزم من عمليات وحسابات وصولاً لـ لوغاريتم مختزل	لدينا أسلوبان: ① الأسلوب الأول: ننطلق من الطرفين وصولاً إلى نفس النتيجة ② الأسلوب الثاني: ننطلق من طرف وصولاً إلى الطرف الثاني	نطبق ما يلزم من خواص وحسابات نميز وفقاً للقاعدة: $\ln(a)=\ln(b)\leftrightarrow a=b$ $\ln(a)>\ln(b)\leftrightarrow a>b$ $\ln(a)\geq\ln(b)\leftrightarrow a\geq b$ $\ln(a)<\ln(b)\leftrightarrow a<b$ $\ln(a)\leq\ln(b)\leftrightarrow a\leq b$

التمرين الأول:

فيما يأتي بسط كلاً من الأعداد الآتية:

1. $a=\ln(2)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$
$=\ln(2)+\ln(1)-\ln(2)=0+0=0$
2. $b=\ln\left(\frac{1}{25}\right)$
$=\ln(1)-\ln(25)=0-\ln(5)^2=-2\ln 5$
3. $c=\ln(15)+\ln(\sqrt[3]{27})-\ln\left(\frac{1}{125}\right)$
$=\ln((3)(5))+\frac{1}{3}\ln(27)-(\ln(1)-\ln(125))$
$=\ln(3)+\ln(5)+\frac{1}{3}\ln(3)^3-\ln 1+\ln(125)$
$=\ln(3)+\ln(5)+\ln(3)+\ln(5)^3$
$=2\ln(3)+\ln(5)+3\ln(5)$
$=2\ln(3)+4\ln(5)$

التمرين الثاني:

أثبت صحة كُلاً من العلاقات الآتية:

1. $\frac{1}{2}\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\ln(\sqrt{x}+1)$

لدينا:

$\underbrace{\frac{1}{2}\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{l_1}=\underbrace{\ln(\sqrt{x}+1)}_{l_2}$

$l_1=\frac{1}{2}\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$=\ln x^{\frac{1}{2}}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=\ln\sqrt{x}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$

$=\ln\left((\sqrt{x})\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\right)=\ln(1+\sqrt{x})=l_2$

2. $\ln(3+\sqrt{8})+\ln(3-\sqrt{8})=0$

لدينا:

$\underbrace{\ln(3+\sqrt{8})+\ln(3-\sqrt{8})}_{l_1}=\underbrace{0}_{l_2}$

$l_1=\ln(3+\sqrt{8})+\ln(3-\sqrt{8})$

$=\ln\left((3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})\right)$

$=\ln(9+3\sqrt{8}-3\sqrt{8}-8)$

$=\ln(1)=0=l_2$

التمرين الثالث:

في كل مما يأتي قارن بين العددين x و y.

1. $x=\ln(7)\ ,\ y=\ln(2)+\ln(5)$

لدينا:

$y=\ln 2+\ln 5=\ln((2)(5))=\ln(10)$

ولدينا:

$10>7\rightarrow\ln(10)>\ln(7)\rightarrow y>x$

2. $x=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^4\ ,\ y=\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^4$

لدينا:

$x=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^4=4\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$=4(\ln(e^{-1}))=-4$

$y=\left(\ln\frac{1}{e}\right)^4=(-1)^4=1$

ولدينا:

$1>-4\rightarrow y>x$

خواص التابع الأسي:

	الخاصة	شرط التطبيق
أولاً	$e^a.e^b=e^{a+b}$; $(e^a)^b=e^{a.b}$ $\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$; $\frac{1}{e^a}=e^{-a}$	
ثانياً	$e^{\ln(a)}=a$ $e^{n\ln(a)}=e^{\ln(a)^n}=a^n$ $e^{\ln(a)+\ln(b)}$ $=$ إما $\left(e^{\ln(a)}.e^{\ln(b)}\right)=a.b$ أو $\left(e^{\ln(a.b)}\right)=a.b$ $e^{\ln(a)-\ln(b)}$ $=$ إما $\left(\frac{e^{\ln(a)}}{e^{\ln(b)}}\right)=\frac{a}{b}$ أو $\left(e^{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\right)=\frac{a}{b}$	عدد اللوغاريتمات في الأسر هو واحد أمثال اللوغاريتم هي الواحد حصراً
قيم مباشرة	$e^0=1\ ,\ e^1=e$	

مكثفة شيفرة الـ 600

قيم تقريبية				
	$\ln(2) \cong 0.7$	$\ln(3) \cong 1.1$	$\ln(5) \cong 1.6$	$e \cong 2.7$
	$e^2 \cong 7.3$	$\sqrt{e} \cong 1.6$	$\frac{1}{e} \cong 0.4$	$\frac{1}{e^2} \cong 0.1$

تحفظ ولا تكتب

أنماط التمارين:

النمط	الاختزال	إثبات صحة علاقة
نص السؤال	(بسط-اختزل) المقادير الآتية	أثبت صحة العلاقة(المساواة)
فكرة الحل	نطبق ما يلزم من خواص وعمليات وصولاً لأبسط شكل ممكن	لدينا أسلوبان: الأسلوب الأول: ننطلق من طرف وصولاً إلى الطرف الثاني الأسلوب الثاني: ننطلق من الطرفين وصولاً إلى نفس النتيجة

التمرين الأول:

فيما يأتي بسط كلاً من الأعداد الآتية:

1. $a = e^{-\ln\frac{3}{2}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$

$= e^{\ln\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

2. $b = \frac{e^{4x}}{e(e^x)^2}$

$= \frac{e^{4x}}{e(e^{2x})} = \frac{e^{2x}}{e} = e^{2x-1}$

3. $c = \ln e^{-3} + e^{\ln 5}$

$= -3\ln e + 5 = -3 + 5 = 2$

4. $d = \ln(\sqrt[3]{e^7})$

$= \ln\left(e^{\frac{7}{3}}\right) = \frac{7}{3}\ln e = \frac{7}{3}$

التمرين الثاني:

أثبت صحة العلاقة الآتية:

1. $(e^x + e^{-x})^2 = \frac{e^{4x}+2e^x+1}{e^{2x}}$

لدينا:

$$\underbrace{(e^x + e^{-x})^2}_{l_1} = \underbrace{\frac{e^{4x} + 2e^x + 1}{e^{2x}}}_{l_2}$$

$l_1 = (e^x + e^{-x})^2$

$= e^{2x} + 2(e^x)(e^{-x}) + e^{-2x}$

$= e^{2x} + 2 + e^{-2x}$

$= e^{-2x}(e^{4x} + 2e^{2x} + 1)$

$= \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^{2x}} = l_2 \rightarrow$ محققة

2. $\ln(2e^{-3x} + 1) - \ln(e^{3x} + 2) = -3x$

لدينا:

$$\underbrace{\ln(2e^{-3x} + 1) - \ln(e^{3x} + 2)}_{l_1} = \underbrace{-3x}_{l_2}$$

$l_1 = \ln(2e^{-3x} + 1) - \ln(e^{3x} + 2)$

$= \ln\left(\frac{2e^{-3x} + 1}{e^{3x} + 2}\right) = \ln\left(e^{-3x}\left(\frac{2 + e^{3x}}{e^{3x} + 2}\right)\right)$

$= \ln(e^{-3x}) + \ln\left(\frac{e^{3x} + 2}{e^{3x} + 2}\right)$

$= -3x\ln e + \ln(1) = -3x = l_2$

محققة..

التمرين الثالث:

احسب جداء العددين:

$y = 5^{\frac{1}{\ln 5}}$, $x = 3^{\frac{-1}{\ln 3}}$

لدينا:

$x = 3^{\frac{-1}{\ln 3}} = e^{\ln(3)\left(\frac{-1}{\ln 3}\right)}$

$= e^{\frac{-1}{\ln 3}(\ln 3)} = e^{-1}$

$y = 5^{\frac{1}{\ln 5}} = e^{\ln 5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)}$

$= e^{(\ln 5)\left(\frac{1}{\ln 5}\right)} = e$

ولدينا:

$x.y = (e^{-1})(e) = 1$

المعادلات والمتراجحات اللوغاريتمية:

النمط	المعادلة	المتراجحة
الأول	من الشكل: لوغاريتمات $=$ لوغاريتمات ١. نحدد شرط الحل E . ٢. نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: $\ln a = \ln b$ ٣. تكافئ: $a = b$ ٤. نحل هذه المعادلة فنحصل على قيم لـ x ٥. نحدد مقبول أو مرفوض	من الشكل: لوغاريتمات إشارة تراجح لوغاريتمات ١. نحدد شرط الحل E . ٢. نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: $\ln b$ تراجح إشارة $\ln a$ ٣. تكافئ: b تراجح إشارة a ٤. نحل هذه المتراجحة فنحصل على المجال E' ٥. تكون: $S = E \cap E'$
الثاني	من الشكل: أعداد $=$ لوغاريتمات ١. نحدد شرط الحل E . ٢. نعزل اللوغاريتمات وصولاً إلى الشكل: $\ln a = b$ ٣. نأخذ e للطرفين فنحصل على معادلة. ٤. نحل هذه المعادلة وحلول المعادلة هي قيم x . ٥. نحدد مقبول أو مرفوض.	من الشكل: أعداد تراجح إشارة لوغاريتمات ١. نحدد شرط الحل E . ٢. نعزل اللوغاريتمات وصولاً إلى الشكل: b تراجح إشارة $\ln a$ ٣. نأخذ e للطرفين فنحصل على متراجحة. ٤. نحل هذه المتراجحة وحلول المتراجحة هي مجال E' . ٥. تكون: $S = E \cap E'$
الثالث	هي معادلة تحوي $(\ln x)^2$ أو $(\ln x)^3$ ١. نحدد شرط الحل E . ٢. نضع وسيط: $t = \ln x$ ٣. نعوض في المعادلة فنحصل على معادلة بالمجهول t ٤. نحل هذه المعادلة بدلالة t ٥. نوجد قيم x ٦. نحدد مقبول أو مرفوض.	هي متراجحة تحوي $(\ln x)^2$ أو $(\ln x)^3$ ١. نحدد شرط الحل E . ٢. نحول إلى معادلة ٣. نحل هذه المعادلة ٤. ننظم جدول الإشارة وفق: ٥. نحدد S
الرابع	جملة معادلتين تحوي لوغاريتمات. نحدد شرط الحل E ونميز: الحالة الأولى: حذف بالجمع أو حذف بالتعويض (فوراً). الحالة الثانية: إصلاحات وخواص (كي نتمكن من استخدام الحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض). نحدد مقبول أو مرفوض.	

x	0
المعادلة	||
المتراجحة	||

التمرين الأول: حل المعادلات الآتية:

1. $\ln(x^2-6)=\ln(5x)$

$\ln(5x)$ معرف بشرط:

$5x>0\to x>0$

$E_1=]0,+\infty[$

$\ln(x^2-6)$ معرف بشرط:

$x^2-6>0$

$x^2-6=0$

$x^2=6$

إما $x=\sqrt{6}$ او $x=-\sqrt{6}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
x^2-6	$+$	0	$-$	0	$+$		
>0	م	|	غ.م	|	م		

$E_2=]-\infty,-\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6},+\infty[$

$\to E=E_1\cap E_2=]\sqrt{6},+\infty[$

$\ln(x^2-6)=\ln(5x)$

تكافئ:

$x^2-6=5x$

$x^2-5x-6=0$

$(x-6)(x+1)=0$

مقبول إما $x=6$

مرفوض أو $x=-1$

2. $\ln|1-x|=\ln 3$

$\ln|1-x|$ معرف بشرط:

$1-x=0\to x=1$

$E=\mathbb{R}\backslash\{1\}$

$\ln|1-x|=\ln(3)$

تكافئ:

$|1-x|=3$

مقبول إما $1-x=3\to x=-2$

مقبول أو $1-x=-3\to x=4$

3. $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$

$\ln 2x$ معرف بشرط:

$2x>0\to x>0$

$E_1=]0,+\infty[$

$\ln(x+4)$ معرف بشرط:

$x+4>0\to x>-4$

$E_2=]-4,+\infty[$

$\ln x$ معرف بشرط:

$x>0$

$E_3=]0+\infty[$

$\to E=E_1\cap E_2\cap E_3=]0,+\infty[$

$2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$

$\ln(x^2)=\ln\big((x+4)(2x)\big)$

تكافئ:

$x^2=(x+4)(2x)$

$x^2=2x^2+8x$

$0=x(x+8)$

مرفوض إما $x=0$

مرفوض أو $x=-8$

4. $\ln\left(\sqrt{2x-3}\right)=\ln(6-x)-\ln\left(\sqrt{x}\right)$

$\ln\left(\sqrt{2x-3}\right)$ معرف بشرط:

$\sqrt{2x-3}>0$

$2x-3>0\to x>\frac{3}{2}\to E_1=]\frac{3}{2},+\infty[$

$\ln(6-x)$ معرف بشرط:

$6-x>0\to x<6\to E_2=]-\infty,6[$

$\ln\left(\sqrt{x}\right)$ معرف بشرط:

$\sqrt{x}>0\to x>0\to E_3=]0,+\infty[$

$E=E_1\cap E_2\cap E_3=]\frac{3}{2},6[$

$\ln\left(\sqrt{2x-3}\right)=\ln(6-x)-\ln\sqrt{x}$

نضرب الطرفين بالعدد (2).

$2\ln\sqrt{2x-3}=2\ln(6-x)-2\ln\sqrt{x}$

$\ln(2x-6)=\ln(6-x)^2-\ln x$

$\ln(2x-6)=\ln\left(\frac{(6-x)^2}{x}\right)$

تكافئ:

$2x-6=\frac{(6-x)^2}{x}$

$2x^2-3x=36-12x+x^2$

$x^2+9x-36=0$

$(x+12)(x-3)=0$

مرفوض إما $x=-12$

مقبول أو $x=3$

5. $\ln|x+1|+\ln(2-x)=2\ln 2$

$\ln|x+1|$ معرف بشرط:

$x+1=0\to x=-1$

$E_1=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$\ln(2-x)$ معرف بشرط:

$2-x>0\to x<2$

$E_2=]-\infty,2[$

$E=E_1\cap E_2=]-\infty,-1[\cup]-1,2[$

$\ln|x+1|+\ln(2-x)=2\ln 2$

$\ln\big(|x+1|(2-x)\big)=\ln 4$

تكافئ:

$|x+1|(2-x)=4$

إما $(x+1)(2-x)=4$

$x^2-x+2=0$

$a=1\,,b=-1\,,c=2$

$\Delta=b^2-4ac$

$=(-1)^2-4(1)(2)=-7<0$

مستحيلة الحل.

أو $(x+1)(2-x)=-4$

$x^2-x-6=0$

$a=1\,,b=-1\,,c=-6$

$\Delta=(-1)^2-4(1)(-6)=25>0$

للمعادلة حلان:

$x_1=\frac{1-5}{2}=-2\to$ مقبول

$x_2=\frac{1+5}{2}=3\to$ مرفوض

6. $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-1$

$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ معرف بشرط:

$\frac{x+1}{x-1}>0$

نعدم بسط: $x=-1$

نعدم مقام: $x=1$

ننظم جدول الإشارة:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
الكسر	$+$	0	$-$	||	$+$
>0	م	|	غ.م	|	م

$E=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-1$

$\frac{x+1}{x-1}=e^{-1}\to\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{e}$

$e(x+1)=x-1$

$xe+e-x=-1$

$x(e-1)=-e-1$

$x=\frac{-e-1}{e-1}$

7. $(\ln x)^2+1=2\ln x$

$\ln x$ معرف بشرط:

$x>0\to E=]0,+\infty[$

$(\ln x)^2+1=2\ln x$

$(\ln x)^2-2\ln x+1=0$

بفرض: $t=\ln x$

$t^2-2t+1=0$

$(t-1)^2=0$

$\to t=1$

$\ln x=1\to x=e$

التمرين الثاني: حل جملة المعادلتين في $\mathbb{R}^2$:

1. $\begin{cases}2\ln x+\ln y=7\\3\ln x-5\ln y=4\end{cases}$

$\ln x$ معرف على: $]0,+\infty[$

$\ln y$ معرف على: $]0,+\infty[$

ولدينا:

$\begin{cases}2\ln x+\ln y=7\ldots(1)\\3\ln x-\ln y=4\ldots(2)\end{cases}$

نضرب المعادلة (1) بالعدد (5).

$10\ln x+5\ln y=35\ldots(1)'$

$3\ln x-5\ln y=4\ldots(2)$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد:

$13\ln x=39$

$\ln x=3\to x=e^3$

نعوض في (2) نجد:

$3\ln e^3-5\ln y=4$

$9-5\ln y=4\to 5\ln y=5$

$\ln y=1\to y=e$

$(x,y)=(e^3,e)$

2. $\begin{cases}\ln(x)\ln(y)=-12\\\ln(x.y)=1\end{cases}$

$\ln x$ معرف على: $]0,+\infty[$

$\ln y$ معرف على: $]0,+\infty[$

ولدينا:

$\ln(x)\ln(y)=-12\ldots(1)$

$\ln(x)+\ln(y)=1\ldots(2)$

من (2) نجد:

$\ln x=1-\ln y\ldots(*)$

نعوض في (1):

$(1-\ln y)(\ln y)=-12$

$-(\ln y)^2+\ln y=-12$

$(\ln y)^2-\ln y-12=0$

بفرض: $t=\ln y$

$t^2-t-12=0$

$(t-4)(t+3)=0$

إما $t=4\to\ln y=4\to y=e^4$

نعوض في $(*)$:

$\ln x=1-4=-3\to x=e^{-3}$

أو $t=-3\to\ln y=-3\to y=e^{-3}$

نعوض في $(*)$:

$\ln x=1-(-3)=4\to x=e^4$

$(x,y)\in\{(e^4,e^{-3}),(e^{-3},e^4)\}$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا كثير الحدود:

$P(x)=x^3-3x^2-16$

الطلب الأول:

احسب $P(4)$ ثم ادرس إشارة $P(x)$.

$P(4)=(4)^3-3(4)^2-16$

$=64-48-16=0$

دراسة إشارة $P(x)$:

$P(x)=0\to x^3-3x^2-16=0$

نحلل الطرف x^3-3x^2-16 باستخدام القسمة الاقليدية حيث نقسمه على $x-4$ نجد أنّ:

$P(x)=(x-4)(x^2+x+4)$

$P(x)=0$

$(x-4)(x^2+x+4)=0$

إما $x-4=0\Rightarrow x=4$

او $x^2+x+4=0$

$a=1\,,b=1\,,c=4$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(4)=-15<0$

مستحيلة الحل

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
x^2+x+4	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

مكثفة شيفرة الـ 600

التمرين الثاني: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة الآتية:

$$\ln(4x^2-16)-2\ln(x)-\ln(7-x)\geq 0$$

نوجد شرط الحل E:

لدينا $\ln(4x^2-16)$ معرف بشرط:

$$4x^2-16>0$$
$$4x^2-16=0$$
$$4x^2=16\to x^2=4$$

إما $x=-2$ أو $x=2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4x^2-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	
>0		م	|	غ.م	|	م	

$$E_1=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$$

لدينا $\ln(x)$ معرف بشرط:

$$x>0\to E_2=]0,+\infty[$$

لدينا $\ln(7-x)$ معرف بشرط:

$$7-x>0\to x<7\to E_3=]-\infty,7[$$

تكون E:

$$E=E_1\cap E_2\cap E_3=]2,7[$$

لدينا:

$$\ln(4x^2-16)-2\ln(x)-\ln(7-x)\geq 0$$
$$\ln(4x^2-16)\geq 2\ln(x)+\ln(7-x)$$
$$\ln(4x^2-16)\geq \ln(x)^2+\ln(7-x)$$
$$\ln(4x^2-16)\geq \ln(x^2(7-x))$$
$$\ln(4x^2-16)\geq \ln(7x^2-x^3)$$

نأخذ e للطرفين

$$4x^2-16\geq 7x^2-x^3$$
$$x^3+4x^2-7x^2-16\geq 0$$
$$x^3-3x^2-16\geq 0$$

من الطلب السابق نجد:

$$(x-4)(x^2+x+4)\geq 0$$
$$(x-4)(x^2+x+4)=0$$

بالاستفادة من الطلب السابق نجد أن 4

ننظم جدول الإشارة:

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$+$
≥ 0	غ.م	|	م

$$E'=[4,+\infty[$$

تكون S:

$$S=E\cap E'=[4,7[$$

التمرين الرابع: حل المتراجحات الآتية:

1. $\ln(x^2+3x)<\ln(-6-4x)$

$\ln(x^2+3x)$ معرف بشرط:

$$x^2+3x>0$$
$$x^2+3x=0$$
$$x(x+3)=0$$

إما $x=0$

أو $x=-3$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
x^2+3x		$+$	0	$-$	0	$+$	
>0		م	|	غ.م	|	م	

$$E_1=]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$$

$\ln(-6-4x)$ معرف بشرط:

$$-6-4x>0\to 4x<-6\to x<-\frac{3}{2}$$

$$E_2=]-\infty,-\frac{3}{2}[$$

$$E=E_1\cap E_2=]-\infty,-3[$$
$$\ln(x^2+3x)<\ln(-6-4x)$$
$$x^2+3x<-6-4x$$
$$x^2+7x+6<0$$
$$x^2+7x+6=0$$
$$(x+1)(x+6)=0$$

إما $x=-1$

أو $x=-6$

x	$-\infty$		-6		-1		$+\infty$
x^2+3x		$+$	0	$-$	0	$+$	
<0		غ.م	|	م	|	غ.م	

$$E'=]-6,-1[$$
$$S=E'\cap E=]-6,-3[$$

2. $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\geq \ln(1-x)$

$\ln(1-x)$ معرف بشرط:

$$1-x>0\to x<1\to E_1=]-\infty,1[$$

$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ معرف بشرط:

$$1+\frac{1}{x}>0\to\frac{x+1}{x}>0$$

نعدم بسط: $x=-1$

نعدم مقام: $x=0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$		
الكسر	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$		
>0		م	|	غ.م	|	م	

$$E_2=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$$
$$E=E_1\cap E_2=]-\infty,-1[\cap]0,1[$$
$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\geq \ln(1-x)$$
$$\frac{x+1}{x}\geq 1-x$$
$$\frac{x+1}{x}-1+x\geq 0$$
$$\frac{x^2+1}{x}\geq 0$$

نعدم بسط: $x^2\neq -1$ مستحيلة الحل:

نعدم مقام: $x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2+1	$+$	$+$	$+$
x	$-$	0	$+$
الكسر	$-$	$\|\|$	$+$
≥ 0	غ.م	|	م

$$E'=]0,+\infty[$$
$$S=E\cap E'=]0,1[$$

3. $2\ln x<\ln[(1+\sqrt{3})x-\sqrt{3}]$

$\ln x$ معرف بشرط:

$$x>0\to E_1=]0,+\infty[$$

$\ln[(1+\sqrt{3})x-\sqrt{3}]$ معرف بشرط:

$$(1+\sqrt{3})x-\sqrt{3}>0$$
$$(1+\sqrt{3})x>\sqrt{3}\to x>\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$
$$E_2=]\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}},+\infty[$$
$$E=E_1\cap E_2=]\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}},+\infty[$$
$$2\ln x<\ln[(1+\sqrt{3})x-\sqrt{3}]$$
$$\ln x^2<\ln[(1+\sqrt{3})x-\sqrt{3}]$$
$$x^2<(1+\sqrt{3})x-\sqrt{3}$$
$$x^2-(1+\sqrt{3})+\sqrt{3}<0$$
$$x^2-(1+\sqrt{3})+\sqrt{3}=0$$
$$(x-1)(x-\sqrt{3})=0$$

إما $x=1$ ، أو $x=\sqrt{3}$

x	$-\infty$		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x^2-(1+\sqrt{3})+\sqrt{3}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
<0		غ.م	|	م	|	غ.م	

$$E'=]1,\sqrt{3}[$$
$$S=E\cap E'=]1,\sqrt{3}[$$

4. $\ln(2x+3)<5$

$\ln(2x+3)$ معرف بشرط:

$$2x+3>0\to x>-\frac{3}{2}\to E=]-\frac{3}{2},+\infty[$$
$$\ln(2x+3)<5$$
$$2x+3<e^5\to x<\frac{e^5-3}{2}$$
$$E'=]-\infty,\frac{e^5-3}{2}[$$
$$S=E\cap E'=]-\frac{3}{2},\frac{e^5-3}{2}[$$

5. $\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)<0$

شرط الحل:

$$\frac{x+2}{x-1}>0$$

نعدم بسط: $x=-2$, نعدم مقام: $x=1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$		
الكسر	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$		
>0		م	|	غ.م	|	م	

$$E=]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$$
$$\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)<0$$
$$\frac{x+2}{x-1}<1$$
$$\frac{x+2}{x-1}-1<0$$
$$\frac{3}{x-1}<0$$

نعم بسط: $3\neq 0$, نعدم مقام: $x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
3	$+$	$+$	$+$		
$x-1$	$-$	0	$+$		
الكسر	$-$	$\|\|$	$+$		
<0		م	|	غ.م	

$$E'=]-\infty,1[$$
$$S=E\cap E'=]-\infty,-2[$$

6. $x\ln x-\ln x\geq 0$

شرط الحل: $E=]0,+\infty[$

$$x\ln x-\ln x\geq 0$$
$$x\ln x-\ln x=0$$
$$\ln(x)\,(x-1)=0$$

إما $x=1$

أو $\ln x=0\to x=1$

x	0		1		$+\infty$
$x\ln x-\ln x$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
≥ 0	$\|\|$	م	|	م	

$$E'=]0,+\infty[$$
$$S=E\cap E'=]0,+\infty[$$

7. $(\ln x)^2+6<5\ln x$

شرط الحل: $E=]0,+\infty[$

$$(\ln x)^2+6<5\ln x$$
$$(\ln x)^2-5\ln x+6<0$$
$$(\ln x)^2-5\ln x+6=0$$

بفرض: $t=\ln x$

$$t^2-5t+6=0$$
$$(t-3)(t-2)=0$$

إما $t=2\to \ln x=2\to x=e^2$

أو $t=3\to \ln x=3\to x=e^3$

x	0		e^2		e^3		$+\infty$
المعادلة	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
<0	$\|\|$	غ.م	|	م	|	غ.م	

$$E'=]e^2,e^3[$$
$$S=E\cap E'=]e^2,e^3[$$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا كثير الحدود وفق:

$$P(x)=2x^3+5x^2+x-2$$

١. تحقق أن $P(-1)=0$

٢. استنتج أن $P(x)$ يكتب بالصيغة

$$P(x)=(x+1)Q(x)$$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية

٣. حل المتراجحة $P(x)\leq 0$

استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة:

$$2\ln(x)+\ln(2x+5)\leq(2-x)$$

الحل:

الطلب الأول:

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$$
$$P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + (-1) - 2$$
$$= -2 + 5 - 1 - 2$$
$$= -5 + 5 = 0$$

الطلب الثاني:

نلاحظ أن $x = -1$ تعدم المقدار نقسم المقدار على $x + 1$ باستخدام القسمة الإقليدية فنجد أنّ:

$$P(x) = (x + 1)(2x^2 + 3x - 2)$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$Q(x) = 2x^2 + 3x - 2$$

الطلب الثالث:

$$P(x) \leq 0$$
$$(x + 1)(2x^2 + 3x - 2) \leq 0$$
$$(x + 1)(2x^2 + 3x - 2) = 0$$

إما $x = -1$

أو $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$$a = 2 \ , \ b = 3 \ , \ c = -2$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$$
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 5}{2(2)} = -\frac{8}{4} = -2$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{2(2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
القوس الأول		$-$		$-$		0	$+$	$+$
القوس الثاني		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
الجداء		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$\leq$		م		غ.م		م		غ.م

$$E =]-\infty, -2] \cup \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

حل المتراجحة:

$$2\ln(x) + \ln(2x + 5) \leq \ln(2 - x)$$

معرف بشرط $\ln(2 - x)$

$$2 - x > 0 \rightarrow x < 2$$
$$E_1 =]-\infty, 2[$$

معرف بشرط $\ln(x)$

$$x > 0$$
$$E_2 =]0, +\infty[$$

معرف بشرط: $\ln(2x + 5)$

$$2x + 5 > 0 \rightarrow x > -\frac{5}{2} \rightarrow E_3 =]-\frac{5}{2}, +\infty[$$

إذاً شرط الحل:

$$E =]0, 2[$$
$$2\ln x + \ln(2x + 5) \leq \ln(2 - x)$$
$$\ln x^2 + \ln(2x + 5) \leq \ln(2 - x)$$
$$\ln\left(x^2(2x + 5)\right) \leq \ln(2 - x)$$

تكافئ:

$$2x^3 + 5x^2 \leq 2 - x$$
$$2x^3 + 5x^2 + x - 2 \leq 0$$
$$2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$$

بالاستفادة من الطلب السابق:

لدينا:

$$x_1 = -1 \ , \ x_2 = -2 \ , \ x_3 = \frac{1}{2}$$
$$E' =]-\infty, -2] \cup \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

إذاً تكون حلول المتراجحة:

$$S = E \cap E' = \left]0, \frac{1}{2}\right]$$

ملاحظة هامة:

إذا كان لدينا معادلة من الدرجة الثانية من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ وتحوي وسيط m نميز:

نص السؤال	كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة جذران مختلفان	كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة جذر وحيد	كيف نختار العدد الحقيقي m لتكون المعادلة مستحيلة الحل
فكرة الحل	يكون للمعادلة جذران إذا تحقق: $\Delta > 0$	يكون للمعادلة جذر وحيد إذا تحقق: $\Delta = 0$	تكون المعادلة مستحيلة الحل إذا تحقق: $\Delta < 0$

التمرين السادس:

عين قيمة m التي تجعل المعادلة $x^2 - 4x + 9\ln(m + 2) = 0$ حل وحيد؟

الحل:

$$a = 1 \ , \ b = -4 \ , \ c = 9\ln(m + 2)$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-4)^2 - 4(1)(9\ln(m + 2))$$
$$= 16 - 36\ln(m + 2)$$

يكون للمعادلة حل وحيد إذا تحقق:

$$\Delta = 0 \rightarrow 16 - 36\ln(m + 2) = 0$$

شرط الحل:

معرف بشرط: $\ln(m + 2)$

$$m + 2 > 0 \rightarrow m > -2$$
$$m \in]-2 + \infty[$$

لدينا:

$$16 - 36\ln(m + 2) = 0$$
$$36\ln(m + 2) = 16$$
$$\ln(m + 2) = \frac{16}{36}$$
$$\ln(m + 2) = \frac{4}{9}$$

تكافئ:

$$m + 2 = e^{\frac{4}{9}}$$

مقبول $m = e^{\frac{4}{9}} - 2 \rightarrow$

التمرين السابع:

كيف تختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2 - 2x + \ln(m + 1) = 0$ جذران مختلفان؟

$$a = 1 \ , \ b = -2 \ , \ c = \ln(m + 1)$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-2)^2 - 4(1)(\ln(m + 1))$$
$$= 4 - 4\ln(m + 1)$$

يكون للمعادلة حلان إذا تحقق:

$$\Delta > 0 \rightarrow 4 - 4\ln(m + 1) > 0$$

المتراجحة لوغارتمية من النمط الثاني:

شرط الحل:

معرف بشرط: $\ln(m + 1)$

$$m + 1 > 0 \rightarrow m > -1$$
$$E =]-1, +\infty[$$

لدينا:

$$4 - 4\ln(m + 1) > 0$$
$$-4\ln(m + 1) > -4$$
$$\ln(m + 1) < 1$$
$$m + 1 < e \rightarrow m < e - 1$$
$$E' =]-\infty, e - 1[$$

إذاً تكون حلول المتراجحة:

$$S = E \cap E' =]-1, e - 1[$$

أيّ: $m \in]-1, e - 1[$ أي: $-1 < m < e - 1$

التمرين الثامن:

نفترض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b يحققان:

$$\ln\left(\frac{a + b}{3}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2}$$

احسب $\frac{a}{b}$

الحل: شرط الحل: $a > 0$ و $b > 0$

لدينا:

$$\ln\left(\frac{a + b}{3}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2}$$
$$\ln\left(\frac{a + b}{3}\right) = \frac{\ln(a.b)}{2}$$
$$\ln\left(\frac{a + b}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln(a.b)$$
$$\ln\left(\frac{a + b}{3}\right) = \ln\sqrt{a.b}$$
$$\frac{a + b}{3} = \sqrt{a.b} \rightarrow \frac{(a + b)^2}{9} = a.b$$
$$a^2 + 2a.b + b^2 = 9a.b$$
$$a^2 - 7a.b + b^2 = 0$$

نفترض $k = \frac{a}{b}$

$$(kb)^2 - 7kb.b + b^2 = 0$$
$$k^2b^2 - 7kb^2 + b^2 = 0$$
$$b^2(k^2 - 7k + 1) = 0$$

إما $b^2 = 0 \rightarrow b = 0$

أو $k^2 - 7k + 1 = 0$

$$a = 1 \ , b = -7 \ , \ c = 1$$
$$\Delta = 45 - 4 = 45 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 3\sqrt{5}$$
$$k = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$$
$$k = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$$

ومنه:

$$\frac{a}{b} \in \left\{\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}, \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right\}$$

التمرين التاسع:

في كل حالة آتية ارسم في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ مجموعة النقاط $M(x, y)$ المحققة للشرط المشار إليه:

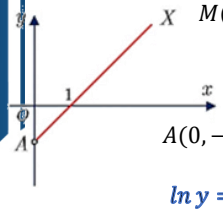
$\ln x = \ln(y + 1)$

العلاقة السابقة معرفة بشرط:

$$y > -1 \ , \ x > 0$$

لدينا:

$$\ln x = \ln(y + 1)$$
$$x = y + 1$$
$$y = x - 1$$



ومنه: مجموعة النقاط $M(x, y)$ المحققة للشرط هي نصف المستقيم $[AX)$ المحمول على الخط البياني للتابع $x \rightarrow x - 1$ دون طرفه $A(0, -1)$

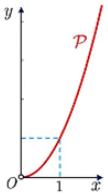
$\ln y = 2\ln x$

العلاقة السابقة معرفة بشرط:

$$y > 0 \ , \ x > 0$$

لدينا:

$$\ln y = 2\ln x$$
$$\ln y = \ln x^2$$
$$y = x^2$$



ومنه: مجموعة النقاط $M(x, y)$ المحققة للشرط هي نصف التقاطع المكافئ (P) المرسوم في الربع الأول ماعدا ذروته $O(0,0)$

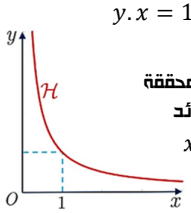
$\ln y + \ln x = 0$

العلاقة السابقة معرفة بشرط:

$$y > 0 \ , x > 0$$

لدينا:

$$\ln y + \ln x = 0$$
$$\ln(x.y) = 0$$
$$y.x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{x}$$



ومنه:

مجموعة النقاط $M(x, y)$ المحققة للشرط هي فرع التقاطع الرائد (H) الذي معادلته $x.y = 1$ والمرسوم في الربع الأول.

مكثفة شيفرة الـ 600

النمط	المعادلة	المتراجحة
الأول	من الشكل: إيّات $=$ إيّات نحدد شرط الحل عند اللزوم نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: $e^a = e^b$ تكافئ: $a = b$ نحل هذه المعادلة فنحصل على قيم لـ x نحدد مقبول أو مرفوض	من الشكل: إيّات إشارة تراجح إيّات نحدد شرط الحل عند اللزوم نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: e^b تراجح إشارة e^a تكافئ: b تراجح إشارة a نحل هذه المتراجحة ويكون حلها مجال S
الثاني	من الشكل: أعداد $=$ إيّات نحدد شرط الحل عند اللزوم نعزل الـ e وصولاً إلى الشكل: $e^a = b$ نميز: إذا كان: (صفر) أو (سالب) تكون المعادلة مستحيلة الحل. إذا كان: (مقدار موجب) $e^a =$ نأخذ لوغاريتم للطرفين فنحصل على معادلة , نحل هذه المعادلة ونحدد مقبول أو مرفوض.	من الشكل: أعداد إشارة تراجح إيّات نحدد شرط الحل عند اللزوم. نعزل الـ e وصولاً إلى الشكل: b تراجح إشارة e^a نميز: إذا كان: (صفر) أو (سالب) إشارة تراجح e^a فإنه: محققة: $S = \mathbb{R}$ غير محققة: $S = \phi$ إذا كان: (مقدار موجب) إشارة تراجح e^a نأخذ لوغاريتم للطرفين فنحصل على متراجحة , نحل هذه المتراجحة ويكون حلها هو مجال S .
الثالث	هي معادلة تحوي: ❊ e^x و e^{2x} معاً $\rightarrow t = e^x$ ❊ e^x و e^{3x} معاً $\rightarrow t = e^x$ ❊ e^{2x} و e^{4x} معاً $\rightarrow t = e^{2x}$ ❊ e^{-x} و e^{-2x} معاً $\rightarrow t = e^{-x}$ ❊ e^{-x} و e^{-3x} معاً $\rightarrow t = e^{-x}$ ❊ e^{-2x} و e^{-4x} معاً $\rightarrow t = e^{-2x}$ نفرض وسيط t نعوض في المعادلة فنحصل على معادلة بالمجهول t نحل هذه المعادلة. نوجد قيم x	هي متراجحة تحوي الأشكال نفسها. ننقل كل شيء إلى الطرف الأيسر نحول إلى معادلة. نحل هذه المعادلة. ننظم جدول الإشارة وفق: x | | المعادلة | | المتراجحة | | نحدد S أيّ المتراجحة هي معادلة ثم جدول ثم إشارة. نصيحة: عند وضع الإشارات في جدول الإشارة نميز: للمعادلة حلّان: كما في الدرجة الثانية. غير ذلك: أسلوب التجريب.
الرابع	جملة معادلتين تحوي إيّات. ❊ نحدد شرط الحل عند اللزوم. ❊ نصلح باستخدام إصلاحات وخواص مناسبة للحصول على معادلتين بمجهولين , نحلها إما بالحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض.	

التمرين الأول: حل المعادلات الآتية:

1. $e^{x-1} = e^{2x}$
$x - 1 = 2x \rightarrow x = -1$

2. $e^{x^2} = (e^{-x})^3 e$
$e^{x^2} = e^{-3x} e \rightarrow e^{x^2} = e^{1-3x}$
$x^2 = -3x + 1 \rightarrow x^2 + 3x - 1 = 0$
$a = 1 , b = 3 , c = -1$
$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 4 = 13 > 0$
$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$
$x_2 = \frac{-b + \sqrt{13}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$

3. $e^{\frac{1}{x}} = e^{x+1}$
$\frac{1}{x} = x + 1$
$1 = x^2 + x \rightarrow x^2 + x - 1 = 0$
$a = 1 , b = 1 , c = -1$
$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-1) = 5 > 0$
$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$
$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

4. $e^{2x-1} = 1$
$2x - 1 = ln\, 1 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

5. $e^{-x^2} = 2$
$-x^2 = ln\, 2 \rightarrow x^2 = -ln\, 2 \rightarrow$ مستحيلة الحل

6. $e^{x^2+1} = 2$
$x^2 + 1 = ln\, 2 \rightarrow x^2 = ln\, 2 - 1 < 0$
مستحيلة الحل..

7. $3e^{2x-1} + 1 = 3$
$3e^{2x-1} = 2 \rightarrow e^{2x-1} = \frac{2}{3}$
$2x - 1 = ln\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow 2x = ln\frac{2}{3} + 1$
$x = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2} + \frac{1}{2}$

8. $e^{2x} + 1 = 2e^x$
$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$
بفرض $t = e^x$
$t^2 - 2t + 1 = 0$
$(t - 1)^2 = 0$
$t = 1 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0$

9. $e^{2x} = e^x + 6$
$e^{2x} - e^x - 6 = 0$
بفرض $t = e^x$
$t^2 - t - 6 = 0$
$(t - 3)(t + 2) = 0$
إما $t = 3 \rightarrow e^x = 3 \rightarrow x = ln\, 3$
أو $t = -2 \rightarrow e^x = -2 \rightarrow$ مستحيلة الحل

10. $e^{2x} + e^{1-2x} = e + 1$
$e^{2x} + e\, e^{-2x} - e - 1 = 0$
نضرب بـ e^{2x} ومنه:
$e^{4x} + e^{2x}(-e - 1) + e = 0$
بفرض $t = e^{2x}$
$t^2 + t(-e - 1) + e = 0$
$(t - 1)(t - e) = 0$
إما $t = 1 \rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$
أو $t = e \rightarrow e^{2x} = e \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

11. $e^x + 4e^{-x} = 5$
$e^x + 4e^{-x} - 5 = 0$
نضرب بـ e^x
$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$
بفرض $t = e^x$
$t^2 - 5t + 4 = 0$
$(t - 4)(t - 1) = 0$
إما $t = 4 \rightarrow e^x = 4 \rightarrow x = ln\, 4$
أو $t = 1 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0$

12. $\frac{e^x}{1-2e^x} = 5$
$e^x = 5(1 - 2e^x)$
$e^x = 5 - 10e^x$
$11e^x = 5$
$e^x = \frac{5}{11} \rightarrow x = ln\frac{5}{11}$

13. $e^{2|x|} + e^{|x|} = 2$
$e^{2|x|} + e^{|x|} - 2 = 0$
$t = e^{|x|}$
$t^2 + t - 2 = 0$
$a = 1 , b = 1 , c = -2$
$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$
$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{4}{2} = -2 \rightarrow e^{|x|} = -2$
مستحيلة الحل..
$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow e^{|x|} = 1$
$|x| = 0 \rightarrow x = 0$

مختبر شرح أكثر من 600 فيديو

5. $e^{x^2}\,e^{-3} < (e^x)^2$

$e^{x^2-3} < e^{2x}$

$x^2-3 < 2$

$x^2-2x-3 < 0$

$x^2-2x-3 = 0$

$a=1, b=-2, c=-3$

$\Delta = b^2-4ac = 4+12 = 16 > 0$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6}{2} = 3$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
المقدار	+	0	−	0	+
<0	غ.م	|	م	|	غ.م

$\rightarrow E =]-1,3[$

6. $-e^x - 3 < 0$

$e^x > -3$

$\rightarrow E = \mathbb{R}$

7. $e^{3-x} \le 2$

$3-x \le \ln 2$

$x \ge 3-\ln 2$

$\rightarrow E = [3-\ln 2, +\infty[$

8. $e^{2x^2-1} \le 3$

$2x^2-1 \le \ln 3$

$2x^2-\ln 3+1 \le 0$

$2x^2-\ln 3+1 = 0$

$2x^2 = \ln 3 - 1$

$x^2 = \frac{\ln 3}{2} - \frac{1}{2}$

إما $x_1 = \sqrt{\frac{(\ln 3-1)}{2}}$ أو $x_2 = -\sqrt{\frac{\ln 3-1}{2}}$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
المقدار	+	0	−	0	+
≤ 0	غ.م	|	م	|	غ.م

$E = \left[-\sqrt{\frac{\ln 3-1}{2}}, \sqrt{\frac{\ln 3-1}{2}}\right]$

9. $e^{2x} + 5e^x > 6$

$e^{2x} + 5e^x - 6 > 0$

$e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$

بفرض $t = e^{2x}$

$t^2 + 5t - 6 = 0$

$(t-1)(t+6) = 0$

إما $t = 1 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0$

أو $t = -6 \rightarrow e^x = -6 \rightarrow$ مستحيلة الحل

x	$-\infty$	0	$+\infty$
المقدار	−	0	+
>0	غ.م	|	م

$E = \mathbb{R}_+^*$

10. $e^{2x} + e^x < 6$

$e^{2x} + e^x - 6 < 0$

$e^{2x} + e^x - 6 = 0$

بفرض $t = e^x$

$t^2 + t - 6 = 0$

$(t-2)(t+3) = 0$

إما $t = 2 \rightarrow e^x = 2 \rightarrow x = \ln 2$

أو $t = -3 \rightarrow e^x = -3 \rightarrow$ مستحيلة الحل

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
المقدار	−	0	+
<0	م	|	غ.م

$\rightarrow E =]-\infty, \ln 2[$

$a=2$, $b=-1$, $c=-1$

$\Delta = b^2-4(a)(c) = 1+8 = 9 > 0$

إذا المعادلة حللان حيث:

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{4} = 1$

ومنه حلول المعادلة $P(x)=0$ هي: $S = \left\{-\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$

الطلب الثالث:

استنتج الحلول في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 = 0$

الحل: مما سبق نجد أنّ حلول المعادلة هي:

إما $e^x = -\frac{1}{2} \rightarrow$ مستحيلة الحل

أو $e^x = 1 \rightarrow x = 0$

أو $e^x = 2 \rightarrow x = \ln(2)$

التمرين الرابع: حل المتراجحات الآتية:

1. $e^{2x+1} < e^{4-x^2}$

$2x+1 < 4-x^2$

$x^2+2x-3 < 0$

$x^2+2x-3 = 0$

$(x-1)(x+3) = 0$

إما $x = 1$

أو $x = -3$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
المقدار	+	0	−	0	+
<0	غ.م	|	م	|	غ.م

$\rightarrow E =]-3,1[$

2. $e^{x^2}\,e^{2x} \ge e^{5x}\,e^4$

$e^{x^2+2x} \ge e^{5x+4}$

$x^2+2x \ge 5x+4$

$x^2-3x-4 \ge 0$

$x^2-3x-4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

إما $x = 4$

أو $x = -1$

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
المقدار	+	0	−	0	+
≥ 0	م	|	غ.م	|	م

$\rightarrow E =]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$

3. $e^{x^2-1} \le e^{4-x}$

$x^2-1 \le 4-x$

$x^2+x-5 \le 0$

$x^2+x-5 = 0$

$a=1, b=1, c=-5$

$\Delta = b^2-4ac = 1+20 = 21 > 0$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
المقدار	+	0	−	0	+
≤ 0	غ.م	|	م	|	غ.م

$\rightarrow E = \left[\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right]$

4. $e^{x-1} - e^{3-2x} \ge 0$

$e^{x-1} \ge e^{3-2x}$

$x-1 \ge 3-2x$

$3x \ge 4 \rightarrow x \ge \frac{4}{3}$

$\rightarrow E = [\frac{4}{3}, +\infty[$

14. $\frac{1}{e^x} = \frac{1}{2e^{-x}+1}$

$e^x = 2e^{-x} + 1$

$e^x - 2e^{-x} - 1 = 0$

$e^{2x} - e^x - 2 = 0$

$t = e^x$ بفرض

$t^2 - t - 2 = 0$

$a=1, b=-1, c=-2$

$\Delta = b^2-4ac = 1+8 = 9 > 0$

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2}{2} = -1 \rightarrow e^x = -1$

مستحيلة الحل..

$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow e^x = 2 \rightarrow x = \ln 2$

التمرين الثاني: حل جملة المعادلتين في $\mathbb{R}^2$.

$\begin{cases} e^{x+y} = 3 \dots (1) \\ e^x - 3e^y = 8 \dots (2) \end{cases}$

$e^{x+y} = 3 \dots (1)$

$e^x - 3e^y = 8 \dots (2)$

من (1) نجد:

$e^{x+y} = 3$

$x+y = \ln 3 \rightarrow x = \ln 3 - y \dots (*)$

نعوض في (2):

$e^{\ln 3-y} - 3e^y = 8$

$\frac{3}{e^y} - 3e^y = 8$

$\frac{3-3e^{2y}}{e^y} = 8$

$3-3e^{2y} = 8\,e^y$

$3e^{2y} + 8e^y - 3 = 0$

$t = e^y$ بفرض

$3t^2 + 8 - 3 = 0$

$a=3, b=8, c=-3$

$\Delta = b^2-4ac = 64+36 = 100 > 0$

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{18}{6} = -3 \rightarrow e^y = -3$

مستحيلة الحل.

$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow e^y = \frac{1}{3}$

$y = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3$

نعوض في (*):

$x = \ln 3 - (-\ln 3) = 2\ln 3$

التمرين الثالث:

نعتبر كثير الحدود $P(x)$ للمتغير الحقيقي x

حيث: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

الطلب الأول:

احسب $P(2)$ ثم تحقق أنّ:

$P(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$ حيث a و b و c أعداد حقيقيّة يطلب تعيينها.

الحل:

حساب $P(2)$:

$P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2$

$= 2(8) - 5(4) + 4 = 16 - 20 + 4 = 0$

تعيين a و b و c :

نلاحظ أنّ $x = 2$ تعدم $P(x)$ لذلك نقسم $P(x)$ على $x-2$ ومن القسم الإقليدية نجد:

$P(x) = (x-2)(2x^2-x-1)$

بالمطابقة نجد أنّ: $a = 2$ و $b = -1$ و $c = -1$

الطلب الثاني:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $P(x) = 0$

$P(x) = 0$

$(x-2)(2x^2-x-1) = 0$

إما $x = 2$

او $2x^2 - x - 1 = 0$

مكثفة شيفرة الـ 600

بفرض: $t = 2^{-x}$ نعوض:

$2t^2 + \sqrt{2}t - 2 = 0$

$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2}\right) = 0$

$\sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = 0$

$a = \sqrt{2}\ , b = 1\ , c = -\sqrt{2}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$

$t_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-3}{2(\sqrt{2})} = \dfrac{-4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

$t_1 = -\sqrt{2} \to 2^{-x} = -\sqrt{2} \to$ مستحيلة الحل

$t_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$t_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \to 2^{-x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$2^{-x} = (\sqrt{2})^{-1} \to 2^{-x} = 2^{-\frac{1}{2}}$

$-x = -\dfrac{1}{2} \to x = \dfrac{1}{2}$

نعوض قيمة x في $(*)$

$y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \to y = 0$

التمرين الثالث: حل المتراجحات الآتية:

1. $3^x > 4$

نأخذ لوغاريتم للطرفين:

$ln\, 3^x > ln\, 4$

$x.ln\, 3 > ln\, 4 \to x > \dfrac{ln\, 4}{ln\, 3}$

$S = \left]\dfrac{ln\, 4}{ln\, 3}, +\infty\right[$

2. $5^{-x} < 5^{2x}$

نأخذ لوغاريتم للطرفين:

$ln\, 5^{-x} < ln\, 5^{2x}$

$-x.ln\, 5 < 2x.ln\, 5$

$-x.ln\, 5 - 2x.ln\, 5 < 0$

$-3x.ln\, 5 < 0 \to x > 0$

$S =]0, +\infty[$

3. $\dfrac{2^x}{2^x+1} < \dfrac{1}{3}$

$2^x.3 < 2^x + 1$

$3.2^x - 2^x < 1$

$2.2^x < 1$

$2^{x+1} < 1$

نأخذ لوغاريتم للطرفين:

$ln\, 2^{x+1} < ln\, 1$

$(x+1)\, ln\, 2 < 0$

$x.ln\, 2 + ln\, 2 < 0$

$x.ln\, 2 < -ln\, 2$

$x < -\dfrac{ln\, 2}{ln\, 2} \to x < -1$

$S =]-\infty, -1[$

التمرين الرابع:

جد مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق كلاً من المتراجحات الآتية:

1. $2^n \leq 100$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln 2^n \leq \ln 100$$

$$n \ln 2 \leq \ln\big((4)(25)\big)$$

$$n \leq \frac{\ln 4 + \ln 25}{\ln 2}$$

$$n \leq \frac{2\ln 2 + 2\ln 5}{\ln 2}$$

تكافئ:

$$n \leq 6$$

إذاً مجموعة قيم n التي تحقق المتراجحة هي:

$$E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

معادلات ومتراجحات التابع الأسي بالأساس a :

الشكل	فكرة الحل
$a^x = b^x$	نأخذ لوغاريتم الطرفين
$a^x =$ عدد	نميز: العدد سالب أو صفر: مستحيلة الحل. العدد موجب: نأخذ لوغاريتم الطرفين
وجود a^x و a^{2x} معاً	فرضية t أي: $t = a^x$

التمرين الأول: حل المعادلات الآتية:

1. $7^{x-1} = 3^x$

نأخذ لوغاريتم للطرفين:

$ln\, 7^{x-1} = ln\, 3^x$

$(x-1)\, ln\, 7 = x.ln\, 3$

$x.ln\, 7 - ln\, 7 = x.ln\, 3$

$x.ln\, 7 - x.ln\, 3 = ln\, 7$

$x(ln\, 7 - ln\, 3) = ln\, 7 \to x = \dfrac{ln\, 7}{ln\, 7 - ln\, 3}$

2. $3^{x+1} + 2(3)^{-x} = 7$

نضرب بـ: 3^x

$3^{2x}(3) + 2 - 7(3^x) = 0$

$3.3^{2x} - 7.3^x + 2 = 0$

بفرض $t = 3^x$

$3t^2 - 7t + 2 = 0$

$a = 3\ , b = -7\ , c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 24 = 25 > 0$

$t_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \to 3^x = \dfrac{1}{3}$

$x\, ln\, 3 = ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \to x = -1$

$t_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{12}{6} = 2 \to 3^x = 2$

$x\, ln\, 3 = ln\, 2 \to x = \dfrac{ln\, 2}{ln\, 3}$

3. $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$

$(2^2)^x + 2.2^x - 3 \leq 0$

$2^{2x} + 2.2^x - 3 \leq 0$

$2^{2x} + 2.2^x - 3 = 0$

بفرض $t = 2^x$

$t^2 + 2t - 3 = 0$

$(t-1)(t+3) = 0$

إما $t = 1 \to 2^x = 1 \to x\, ln\, 2 = 0 \to x = 0$

أو $t = -2 \to 2^x = -2 \to$ مستحيلة الحل

x	$-\infty$	$\mathbf{0}$	$+\infty$
المقدار	$-$	0	$+$
≤ 0	م	|	غ.م

$\to S =]-\infty, 0]$

التمرين الثاني:

جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} 2^x \times 2^y = \sqrt{2} \\ 2^{\frac{1}{2}-x} + 2^{2y} = 2 \end{cases}$$

الحل:

$2^x \times 2^y = \sqrt{2} \ldots (1)$

$2^{\frac{1}{2}-x} + 2^{2y} = 2 \ldots (2)$

من (1) نجد:

$2^x \times 2^y = \sqrt{2} \to 2^{x+y} = 2^{\frac{1}{2}}$

$x + y = \dfrac{1}{2} \to y = \dfrac{1}{2} - x \ldots (*)$

نعوض $(*)$ في (2) :

$2^{\frac{1}{2}-x} + 2^{2\left(\frac{1}{2}-x\right)} = 2$

$2^{\frac{1}{2}-x} + 2^{(1-2x)} = 2$

$2^{\frac{1}{2}}.2^{-x} + 2.2^{-x} = 2$

$2\,.2^{-x} + \sqrt{2}\,2^{-x} - 2 = 0$

11. $(e^x - 2)(e^x + 1) \geq 0$

$(e^x - 2)(e^x + 1) = 0$

بفرض $t = e^x$

$(t-2)(t+1) = 0$

إما $t = 2 \to e^x = 2 \to x = ln\, 2$

أو $t = -1 \to e^x = -1 \to$ مستحيلة الحل

x	$-\infty$	$\mathbf{ln\, 2}$	$+\infty$
المقدار	$-$	0	$+$
≥ 0	غ.م	|	م

$\to E = [ln\, 2, +\infty[$

12. $\dfrac{e^x-1}{2-e^x} > 0$

نعدم البسط:

$e^x - 1 = 0$

$e^x = 1 \to x = 0$

نعدم المقام:

$2 - e^x = 0$

$e^x = 2 \to x = ln\, 2$

x	$-\infty$	$\mathbf{0}$		$\mathbf{ln\, 2}$	$+\infty$
البسط	$-$	0	$+$	$+$	$+$
المقام	$+$	$+$	$+$	0	$-$
الكسر	$-$	0	$+$	||	$-$
> 0	غ.م	|	م	|	غ.م

$\to E =]0, ln\, 2[$

13. $e^x + 4e^{-x} \leq 5$

نضرب بـ: e^x

$e^{2x} + 4 \leq 5e^x$

$e^{2x} - 5e^x + 4 \leq 0$

$e^2 - 5e^x + 4 = 0$

بفرض $t = e^x$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t^2 - 4)(t - 1) = 0$

إما $t = 4 \to e^x = 4 \to x = ln\, 4$

أو $t = 1 \to e^x = 1 \to x = 0$

x	$-\infty$	$\mathbf{0}$		$\mathbf{ln\, 4}$	$+\infty$
المقدار	$+$	0	$-$	0	$+$
≤ 0	غ.م	|	م	|	غ.م

$\to E = [0, ln\, 4]$

14. $\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x} \leq \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{e^{2x} - 1}{2e^x} - \dfrac{3}{4} \leq 0$

$\dfrac{2e^{2x} - 3e^x - 2}{4e^x} \leq 0$

نعدم البسط:

$2e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$

بفرض $t = e^x$

$2t^2 - 3t - 2 = 0$

$a = 2\ , b = -3\ , c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 > 0$

$t_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2} \to e^x = -\dfrac{1}{2}$

مستحيلة الحل..

$t_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+5}{4} = 2$

$\to e^x = 2 \to x = ln\, 2$

نعدم المقام:

$4e^x = 0 \to e^x = 0$

مستحيلة الحل..

x	$-\infty$	$\mathbf{ln\, 2}$	$+\infty$
البسط	$-$	0	$+$
المقام	$+$		$+$
الكسر	$-$	0	$+$
≤ 0	م	|	غ.م

$\to E =]-\infty, ln\, 2]$

600 أوراق شـــرح مفصل وشرح

12. $f(x)=\ln\left|\frac{2-x}{x+1}\right|$

التابع f بشرط:

نعدم مضمون القيمة المطلقة:

$$\frac{2-x}{x+1}=0$$
$$2-x=0\rightarrow x=2$$

نعدم المقام:

$$x+1=0\rightarrow x=-1$$
$$\rightarrow D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$$

13. $f(x)=\frac{1+\ln|x|}{x}$

التابع f معرف بشرط:

نعدم مضمون القيمة المطلقة: $x=0$

نعدم المقام: $x=0$

$$\rightarrow D_f=\mathbb{R}^*$$

14. $f(x)=e^x-x$

$$D_f=\mathbb{R}$$

15. $f(x)=\sqrt{x}\,e^{x-1}$

$$D_f=[0,+\infty[$$

16. $f(x)=2x+e^{2\ln x-1}$

$$D_f=]0,+\infty[$$

17. $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

نعدم المقام:

$$e^x+1=0\rightarrow e^x\neq -1\rightarrow$$ مستحيلة الحل

$$\rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

18. $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$

نعدم المقام:

$$e^x-1=0\rightarrow e^x=1\rightarrow x=0$$
$$\rightarrow D_f=\mathbb{R}^*$$

19. $f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-2x}{e^x+1}$

$e^{\sqrt{x}}$ معرف على: $[0,+\infty[$

نعدم المقام:

$$e^x+1=0\rightarrow e^x\neq -1\rightarrow$$ مستحيلة الحل

$$\rightarrow D_f=[0,+\infty[$$

20. $f(x)=\frac{5e^x-1}{\ln x-1}$

$\ln x$ معرف على: $]0,+\infty[$

نعدم المقام:

$$\ln x-1=0\rightarrow \ln x=1\rightarrow x=e$$
$$\rightarrow D_f=]0,+\infty[\backslash\{e\}=]0,e[\cup]e,+\infty[$$

أحياناً تكون الخطوة الأولى هي الأصعب، ولكنها البداية لتحقيق شيء عظيم

6. $f(x)=\frac{1+3x}{\sqrt{1-x}-1}$

$\sqrt{1-x}$ معرف بشرط:

$$1-x\geq 0\rightarrow x\leq 1$$
$$D_1=]-\infty,1]$$

نعدم المقام:

$$\sqrt{1-x}-1=0$$
$$\sqrt{1-x}=1$$

نربع الطرفين:

$$1-x=1\rightarrow x=0$$
$$\rightarrow D_f=D_1\backslash\{0\}$$
$$\rightarrow D_f=]-\infty,0[\cup]0,1]$$

7. $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+5}}$

$\sqrt{1-x}$ معرف بشرط:

$$1-x\geq 0\rightarrow x\leq 1\rightarrow D_1=]-\infty,1]$$

$\sqrt{x+5}$ معرف بشرط:

$$x+5\geq 0\rightarrow x\geq -5\rightarrow D_2=[-5,+\infty[$$

نعدم المقام:

$$\sqrt{x+5}=0$$

نربع الطرفين:

$$x+5=0\rightarrow x=-5$$
$$D_f=D_1\cap D_2\backslash\{-5\}$$
$$\rightarrow D_f=]-5,1]$$

8. $f(x)=\ln(3x^2+1)$

التابع f معرف بشرط:

$$3x^2+1>0$$
$$3x^2+1=0$$
$$x^2=-\frac{1}{3}\rightarrow$$ مستحيلة الحل

$$\rightarrow D_f\in\mathbb{R}$$

9. $f(x)=\ln(x^2-3x)$

التابع f معرف بشرط:

$$x^2-3x>0$$
$$x^2-3x=0$$
$$x(x-3)=0$$

إما $x=0$

أو $x=3$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
المقدار	$+$	0	$-$	0	$+$
>0	م	|	غ.م	|	م

$$\rightarrow D_f=]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$$

10. $f(x)=\ln(\sqrt{x+1})$

التابع f معرف بشرط:

$$\sqrt{x+1}>0$$
$$x+1>0\rightarrow x>-1$$
$$\rightarrow D_f=]-1,+\infty[$$

11. $f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

التابع f معرف بشرط:

$$1+\frac{2}{x}>0$$
$$\frac{x+2}{x}>0$$

نعدم بسط: $x+2=0\rightarrow x=-2$

نعدم مقام: $x=0$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
الكسر	$+$	0	$-$	||	$+$
>0	م	|	غ.م	||	م

$$\rightarrow D_f=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$$

2. $\left(\frac{2}{3}\right)^n<10^{-3}$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right)^n<\ln(10^{-3})$$
$$n\ln\frac{2}{3}<-3\ln 10$$
$$n>-\frac{3\ln 10}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$
$$n>\frac{-3\ln 2-3\ln 5}{\ln 2-\ln 3}$$

تكافئ:

$$n\geq 18$$

فالأعداد الطبيعية التي تحقق المتراجحة هي التي تحقق $n\geq 18$

مجموعات التعريف:

تمرين: أوجد مجموعة التعريف للتابع f:

1. $f(x)=2x^2-3x$

$$D_f=\mathbb{R}$$

2. $f(x)=\frac{x+3}{1-x}$

نعدم المقام:

$$1-x=0\rightarrow x=1$$
$$D_f=\mathbb{R}\backslash\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

3. $f(x)=\frac{x+1}{x^2-9}$

نعدم مقام:

$$x^2-9=0\rightarrow x^2=9$$

إما $x=-3$ ، أو $x=3$

$$D_f=]-\infty,-3[\cup]-3,3[\cup]3,+\infty[$$

4. $f(x)=\sqrt{x^2+9}$

معرف بشرط:

$$x^2+9\geq 0$$
$$x^2+9=0$$
$$x^2=-9\rightarrow$$ مستحيلة الحل

نظم جدول:

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2+9		$+$	
≥ 0		م	

$$\rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

5. $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}$

معرف بشرط:

$$\frac{3-x}{x+1}\geq 0$$

نعدم البسط: $3-x=0\rightarrow x=3$

نعدم المقام: $x+1=0\rightarrow x=-1$

نظم جدول:

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
الكسر	$-$	||	$+$	0	$-$
≥ 0	غ م	|	م	|	غ م

$$D_f=]-1,3]$$

مكثفة شيفرة الـ 600

مقدمة في النهايات:

	الرمز	القراءة
رموز وقراءات	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$	نهاية التابع f عندما x تسعى إلى a تساوي b .
	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$	نهاية التابع f عندما x تسعى إلى a من اليسار تساوي b .
	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$	نهاية التابع f عندما x تسعى إلى a من اليمين تساوي b .

	الجمع	الضرب	القسمة			الجذور	القوى
		وهو جداء الإشارات:	المجموعة الأولى	المجموعة الثانية	المجموعة الثالثة		
العمليات على الرمز ∞	$+\infty + 5 = +\infty$ $+\infty - 5 = +\infty$ $-\infty - 5 = -\infty$ $-\infty + 5 = -\infty$ $+\infty + \infty = +\infty$ $-\infty - \infty = -\infty$ $+\infty - \infty$ $-\infty + \infty$ حالة عدم تعيين	$(+\infty)(+5) = +\infty$ $(+\infty)(-5) = -\infty$ $(-\infty)(+5) = -\infty$ $(-\infty)(-5) = +\infty$ $(+\infty)(+\infty) = +\infty$ $(+\infty)(-\infty) = -\infty$ $(-\infty)(+\infty) = -\infty$ $(-\infty)(-\infty) = +\infty$ $(0)(\infty)$ $(\infty)(0)$ حالة عدم تعيين	الإشارات غير مهمة: $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = \text{صفر}$ $\frac{\text{عدد}}{\text{لا نهاية}} = \text{صفر}$ $\frac{\text{صفر}}{\text{لا نهاية}} = \text{صفر}$	الإشارات مهمة جداً: $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \text{لا نهاية}$ $\frac{\text{لا نهاية}}{\text{عدد}} = \text{لا نهاية}$ $\frac{\text{لا نهاية}}{\text{صفر}} = \text{لا نهاية}$	$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ $\frac{\text{لا نهاية}}{\text{لا نهاية}}$ حالة عدم تعيين	$\sqrt{+\infty} = +\infty$ $\sqrt{-\infty} =$ كفر	إذا كان n عدد طبيعي موجب تماماً فإن: $(+\infty)^n = +\infty$ $(-\infty)^n =$ $-\infty$ $+\infty$ n فردي n زوجي

ملاحظات

١. يتم إيجاد النهايات عند أطراف مجموعة التعريف المفتوحة

٢. الأصل في إيجاد النهايات هو التعويض إلا في حال وجود مبرهنة فإننا نطبق مباشرةً أي:

- يوجد مبرهنة ← تعويض مباشر
- لا يوجد مبرهنة ← تعويض حيث التعويض "هو استبدال x بالمسعى"

٣. عند وجود مبرهنة فإننا نفكر:

- "نوع التابع – المسعى – كيفية التطبيق"

٤. تحذف كلمة lim عند التعويض أي عند اختفاء x

٥. عند ظهور حالة عدم تعيين يجب إزالتها

٦. عند ظهور الصفر في المقام يلزم تحديد إشارته ومن أجل ذلك نأخذ قيمة اختيارية من المجال الموافق ونعوضها في المقام فقط.

٧. يكون للتابع f نهاية عند a عندما: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

٨. يكون للتابع f نهاية حقيقية عند a عندما: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ حيث l عدد حقيقي.

قواعد إيجاد النهايات:

التابع الصحيح	عند الـ ∞ يوجد مبرهنة وتطبق وفق: نأخذ الحد المسيطر مع الأمثال , حيث الحد المسيطر هو الحد الذي يملك أكبر قوّة. نعوض بدلاً من كل x بـ ∞	
التابع الكسري	عند الـ ∞ :	عند a :
	يوجد مبرهنة وتطبق وفق: * نأخذ الحد المسيطر من البسط * نأخذ الحد المسيطر من المقام * نختزل * نعوض بدلاً من كل x بـ ∞	لا يوجد مبرهنة إنما نستخدم التعويض حيث نستبدل بدلاً من كل x بـ a مع الانتباه إلى أننا نوجد: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
التابع الجذري	لا يوجد مبرهنة إنما نستخدم التعويض.	

تمرين:

أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه:

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x$

$D_f =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$

2. $f(x) = 7 - x^2 + 4x$

$D_f =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2) = -\infty$

3. $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$

$D_f =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

4. $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$

$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

5. $f(x) = \frac{x^2+2x-4}{2x}$

$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\frac{4}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\frac{4}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

6. $f(x) = \frac{2x-1}{(x-2)^2}$

$D_f =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

7. $f(x) = \sqrt{x-1}\,; a = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

8. $f(x) = \sqrt{5-2x}\,; a = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

القليل من التقدم كلّ يوم يؤدي
إلى نتائج كبيرة في النهاية..

الحالة	ما الطريقة المستخدمة؟	متى تستخدم؟	كيف تستخدم؟
$\frac{0}{0}$	التحليل	إذا كان البسط أو المقام قابل للتحليل	* نحلل البسط إن أمكن * نحلل المقام إن أمكن * نختزل (أهم من حياتي) * نعوض
	المرافقة	إذا كان البسط أو المقام غير قابل للتحليل ويحوي جذر	* نضرب كلاً من البسط والمقام بمرافق المقدار الذي يحوي جذر * نستفيد من المطابقة: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ * نختزل * نعوض ملاحظة:
$\frac{\infty}{\infty}$	العامل المناسب	دوماً	① مرحلة إظهار x^2 عاملاً مناسباً من حدود ما تحت الجذر التربيعي: * نخرج x^2 عاملاً مشتركاً من تحت الجذر التربيعي * نستفيد من الخاصة: $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ * نستفيد من الخاصة $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$ * نتخلص من القيمة المطلقة وفق: $\lvert x\rvert=\begin{cases}+x\,;x>0\\-x\,;x<0\end{cases}$ ② مرحلة إخراج العامل المناسب ③ مرحلة الاختزال ④ مرحلة التعويض
$\infty-\infty$	المرافقة	$\left(\begin{matrix}\text{الحد المجهول}\\ \text{خارج الجذر}\end{matrix}\right)^2$ = أحد الحدود الموجودة داخل الجذر	* نضرب كلاً من البسط والمقام بمرافق المقدار الذي يحوي جذر * نستفيد من المطابقة: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ * نختزل * نعوض
	العامل المناسب	$\left(\begin{matrix}\text{الحد المجهول}\\ \text{خارج الجذر}\end{matrix}\right)^2$ ≠ أحد الحدود الموجودة داخل الجذر	① مرحلة إظهار x^2 عاملاً مناسباً من حدود ما تحت الجذر التربيعي: * نخرج x^2 عاملاً مشتركاً من تحت الجذر التربيعي * نستفيد من الخاصة: $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ * نستفيد من الخاصة $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$ * نتخلص من القيمة المطلقة وفق: $\lvert x\rvert=\begin{cases}+x\,;x>0\\-x\,;x<0\end{cases}$ ② مرحلة إخراج العامل المناسب ③ مرحلة الاختزال مرحلة التعويض
$0(\infty)$	لا يوجد طريقة ثابتة إنما نستخدم مهارات.		
ملاحظة	بعد تطبيق طريقة المرافقة والوصول لـ x في البسط و x في المقام فإننا نكمل بطريقة العامل المناسب.		

المقدار	المرافق
$\sqrt{x+1}+3$	$\sqrt{x+1}-3$
$3-\sqrt{x+1}$	$3+\sqrt{x+1}$
$-\sqrt{x+1}-3$	$-\sqrt{x+1}+3$
$\sqrt{x+1}-3+2x$	$\sqrt{x+1}+3-2x$
$\sqrt{x+1}$	$\sqrt{x+1}$

تمرين: أوجد نهاية التابع f عند a

9. $f(x)=\frac{3x^2-3}{x-1}\,;a=1$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{3x^2-3}{x-1}=\frac{3(x^2-1)}{x-1}$$
$$=\frac{3(x-1)(x+1)}{x-1}=3(x+1)$$
$$\lim_{x\to1} f(x)=3(2)=6$$

10. $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\,;a=1$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$
$$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{1}{2}$$

11. $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4x+3}\,;a=1$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-4x+3}$$
$$=\frac{x-1}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{x-3}$$
$$\lim_{x\to1} f(x)=-\frac{1}{2}$$

مكثفة شيفرة الـ 600

12. $f(x)=\frac{3x^2-3}{x^2-2x-3}\ ;a=-1$

$\lim_{x\to-1} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{3x^2-3}{x^2-2x-3}=\frac{3(x^2-1)}{(x-3)(x+1)}$$
$$=\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)}=\frac{3(x-1)}{x-3}$$
$$\lim_{x\to-1} f(x)=-\frac{6}{-4}=\frac{3}{2}$$

13. $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}\ ;a=2$

$\lim_{x\to2} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$$
$$=\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}$$
$$=\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{x-1-1}$$

14. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-3}{16-2x}\ ;a=8$

$\lim_{x\to8} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-3}{16-2x}$$
$$=\frac{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)}{(16-2x)(\sqrt{x+1}+3)}$$
$$=\frac{x-8}{-2(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}$$
$$=\frac{1}{-2(\sqrt{x+1}+3)}$$
$$\lim_{x\to8} f(x)=-\frac{1}{12}$$

15. $f(x)=\frac{2-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{2x+5}}\ ;a=2$

$\lim_{x\to2} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{2-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{2x+5}}$$
$$=\frac{(2-\sqrt{x+2})(2+\sqrt{x+2})(3+\sqrt{2x+5})}{(3-\sqrt{2x+5})(3+\sqrt{2x+5})(2+\sqrt{x+2})}$$
$$=\frac{(4-x-2)(3+\sqrt{2x+5})}{(9-2x-5)(2+\sqrt{x+2})}$$
$$=\frac{(2-x)(3+\sqrt{2x+5})}{(4-2x)(2+\sqrt{x+2})}$$
$$=\frac{(2-x)(3+\sqrt{2x+5})}{2(2-x)\left(2+\sqrt{(x+2)}\right)}$$
$$=\frac{3+\sqrt{2x+5}}{2(2+\sqrt{x+2})}$$
$$\lim_{x\to2} f(x)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

16. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x}\ ;a=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{2x}=\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{2x}$$
$$=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{2x}=-\frac{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{2x}=-\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$$

17. $f(x)=\sqrt{9x^2-4}-3x\ ;a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\infty-\infty$

$$f(x)=\sqrt{9x^2-4}-3x$$
$$=\frac{(\sqrt{9x^2-4}-3x)(\sqrt{9x^2-4}+3x)}{\sqrt{9x^2-4}+3x}$$
$$=\frac{9x^2-4-9x^2}{\sqrt{9x^2-4}+3x}=-\frac{4}{\sqrt{9x^2-4}+3x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{4}{+\infty}=0$$

18. $f(x)=x-\sqrt{x}\ ;a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\infty-\infty$

$$f(x)=x-\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(+\infty-1)=+\infty$$

19. $f(x)=\sqrt{9x^2+2x-1}-2x+1$
$a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\infty-\infty$

$$f(x)=\sqrt{9x^2+2x-1}-2x+1$$
$$=\sqrt{x^2\left(9+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-2x+1$$
$$=|x|\sqrt{9+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-2x+1$$
$$=x\left(\sqrt{9+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-2+\frac{1}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(3-2)=+\infty$$

أن تكون معنا ..

يعني أن تكون طالباً مُريداً، عظيم الغايات، مُستثمراً الأوقات، مُتعلّماً من السّكنات والحركات، ساعياً في الدّرب ما بقيت ..

فطريق الـ 600 لا راحة فيه ولا وقوف

600 الـ طريق في شـــريكتك

وجود مبرهنة

تنفيذ فوري حيث أنّ المبرهنات:

المبرهنة الأولى:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

تعميم:

$$\lim_{\text{مقدار}\to 0}\frac{\sin(\text{مقدار})}{\text{مقدار}}=1$$

المبرهنة الثانية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

تعميم:

$$\lim_{\text{مقدار}\to 0}\frac{\text{مقدار}}{\sin(\text{مقدار})}=1$$

عدم وجود مبرهنة

نستخدم التعويض ونميز:

الحصول على ناتج

التمرين انتهى

الحصول على حالة عدم تعيين

عند ظهور حالة عدم تعيين يجب إزالتها ومن أجل ذلك فإننا:

- نصلح البسط أو المقام ليشبه مضمون الـ $\sin$
- نميز حالتين:

✋ الحالة الأولى:

المبرهنة بشكلها العادي فإننا نطبق مباشرة.

✌ الحالة الثانية:

المبرهنة بشكل التعميم فإننا نستخدم تغيير المتحول.

والإصلاحات المستخدمة:

النشر – التحليل – توحيد المقامات – تفريق الكسور – شطّب قطّب – التباعد اللاجتماعي – الخواص "الدساتير المثلثية" ونميز:

المجموعة الأولى:

- $\sin^2(\text{زاوية})+\cos^2(\text{زاوية})=1$
- $1-\cos^2(\text{زاوية})=\sin^2(\text{زاوية})$
- $\sin(\text{زاوية})=2\sin\left(\frac{\text{نصف}}{\text{الزاوية}}\right)\cos\left(\frac{\text{نصف}}{\text{الزاوية}}\right)$
- $1-\cos(\text{زاوية})=2\sin^2\left(\frac{\text{نصف}}{\text{الزاوية}}\right)$
- $1+\cos(\text{زاوية})=2\cos^2\left(\frac{\text{نصف}}{\text{الزاوية}}\right)$
- $\tan(\text{زاوية})=\frac{\sin(\text{زاوية})}{\cos(\text{زاوية})}$
- $\cot(\text{زاوية})=\frac{\cos(\text{زاوية})}{\sin(\text{زاوية})}$

المجموعة الثانية:

- $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$
- $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$
- $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$
- $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$

مهارة:

لإيجاد نهاية مثلثية تحوي نسبة مثلثية وجذر فإننا نميز:

الجذر معهُ عدد فإننا نستخدم طريقة المرافق.

غير ذلك فإننا نستخدم إصلاحات أو عامل مشترك.

انتبه: يمنع الاقتراب من مضمون الـ $\sin$ إلا في حال وجود مبرهنة.

الحصول على $\sin\infty$ أو $\cos\infty$

نحتاج إلى مرحلتين:

مرحلة حصر التابع:

ننطلق من إحدى العلاقات:

$$-1\le\sin(\text{زاوية})\le 1$$
$$-1\le\cos(\text{زاوية})\le 1$$
$$0\le\cos^2(\text{زاوية})\le 1$$
$$0\le\sin^2(\text{زاوية})\le 1$$

ثم نبدأ رحلة تأليف التابع.

المرحلة الثانية:

وتتم باستخدام مبرهنات الإحاطة والمقارنة.

المبرهنة الأولى:

$$h(x)\le f(x)\le g(x)$$
$$\lim_{x\to}h(x)=\lim_{x\to}g(x)=l$$
$$\to\lim_{x\to}f(x)=l$$

المبرهنة الثانية:

$$|f(x)-l|\le g(x)$$
$$\lim_{x\to}g(x)=0$$
$$\to\lim_{x\to}f(x)=l$$

انتبه:

$$(1):\ |f(x)|\le g(x)$$
$$\lim_{x\to}g(x)=0$$
$$\to\lim_{x\to}f(x)=0$$

$$(2):\ |nf(x)-l|\le g(x)$$
$$\lim_{x\to}g(x)=0$$
$$\to\lim_{x\to}f(x)=\frac{l}{n}$$

المبرهنة الثالثة: مبرهنة المقارنة:

$$(1):f(x)\le g(x)$$
$$\lim_{x\to}g(x)=-\infty$$
$$\to\lim_{x\to}f(x)=-\infty$$

$$(2):f(x)\ge g(x)$$
$$\lim_{x\to}g(x)=+\infty$$
$$\to\lim_{x\to}f(x)=+\infty$$

الملاحظة الأولى:

دائماً نبدأ بمرحلة حصر التابع ونميز ثلاث حالات:

① الحالة الأولى: إذا كانت نهاية الأطراف هي عدد فإننا نكمل بالإحاطة الأولى

② الحالة الثانية: إذا كانت نهاية الأطراف هي $+\infty$ فإننا نحذف الطرف الكبير ونكمل بمبرهنة المقارنة

③ الحالة الثالثة: إذا كانت نهاية الأطراف هي $-\infty$ فإننا نحذف الطرف الصغير ونكمل بمبرهنة المقارنة

الملاحظة الثانية:

عند رحلة تأليف التابع وعند الضرب "القسمة" طرفي المتراجحة بمقدار ما يجب تحديد إشارة هذا المقدار ونميز:

✋ الحالة الأولى: إشارة المقدار يمكن تحديدها فإننا نتابع كما سبق.

✌ الحالة الثانية: إشارة المقدار لا يمكن تحديدها فإننا نناقش حالتين ثم نتابع كما سبق.

مكثفة شيفرة الـ 600

تمرين: أوجد نهاية التابع f عند a:

20. $f(x)=\frac{x^2-x}{\sin x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x^2-x}{\sin x}=\frac{x(x-1)}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}.(x-1)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=(1)(-1)=-1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

21. $f(x)=\sin x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ ;a=0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $0(\infty)$

$$f(x)=\sin x.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sin x.\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}$$

$$=\sin x.\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}=\sin x.\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$$

بما أنّ $x\to 0^+$ فإنّ: $|x|=x$

$$=\sin x.\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{\sin x}{x}.\sqrt{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=(1)(1)=1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

22. $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x^2+x}}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x^2+x}}=\frac{\sin x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}$$

$$=\frac{\sin x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{\sin x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

بما أنّ $x\to 0^+$ فإنّ: $|x|=x$

$$=\frac{\sin x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=(1)(0)=0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

23. $f(x)=\frac{\sin 2x}{3x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{3x}$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{\sin 2x}{x}=\frac{2}{3}.\frac{\sin 2x}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{2}{3}(1)=\frac{2}{3}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{2x}=1$$

24. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x\sin 3x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x\sin 3x}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{(x\sin 3x)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-(2)^2}{(x\sin 3x)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$

$$=\frac{x^2+4-4}{(x\sin 3x)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$

$$=\frac{x^2}{(x\sin 3x)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$

$$=\frac{x}{\sin 3x}.\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

$$=\frac{3x}{\sin 3x}.\frac{1}{3\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=(1)\left(\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{12}$$

علماً أنّ: $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=1$

25. $f(x)=\frac{\sin \pi x}{\sin 2x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\sin(2x)}$$

$$=\pi.\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.\frac{1}{2}.\frac{2x}{\sin(2x)}$$

$$=\frac{\pi}{2}.\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.\frac{2x}{\sin(2x)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{\pi}{2}(1)(1)=\frac{\pi}{2}$$

26. $f(x)=\frac{x^2-5x-6}{\sin(6-x)}\ ,a=6$

$$\lim_{x\to 6} f(x)$$

عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{(x-6)(x+1)}{\sin(6-x)}$$

$$=\frac{(-1)(6-x)(x+1)}{\sin(6-x)}=\frac{(6-x)(-x-1)}{\sin(6-x)}$$

بفرض:

$$t=6-x\ \ x=-t+6$$

لما كان: $x\to 6$ فإنّ: $t\to 0$

$$f(x)=\frac{(t)(-(-t+6)-1)}{\sin(t)}$$

$$=\frac{(t)(t-7)}{\sin(t)}=\frac{t}{\sin(t)}.(t-7)$$

$$\lim_{x\to 6} f(x)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin(t)}.(t-7)\right)=-7$$

علماً أنّ: $\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin(t)}\right)=1$

27. $f(x)=\frac{\sin(2x-5)}{5x-2x^2}\ ,a=\frac{5}{2}$

$$\lim_{x\to \frac{5}{2}} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin(2x-5)}{5x-2x^2}$$

$$=\frac{\sin(2x-5)}{x(5-2x)}=\frac{\sin(2x-5)}{-x(2x-5)}$$

$$=\frac{1}{-x}.\frac{\sin(2x-5)}{2x-5}$$

بفرض:

$$t=2x-5$$

$$x=\frac{t+5}{2}$$

لمّا كان: $x\to \frac{5}{2}$ فإنّ: $t\to 0$

$$f(x)=\frac{-1}{\frac{t+5}{2}}.\frac{\sin t}{t}=\frac{-2}{t+5}.\frac{\sin t}{t}$$

$$\lim_{x\to \frac{5}{2}} f(x)=\left(\frac{-2}{t+5}.\frac{\sin t}{t}\right)=-\frac{2}{5}$$

علماً أنّ: $\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)=1$

28. $f(x)=\frac{\cos^2 x-\cos x}{x^2}\ ,a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\cos^2 x-\cos x}{x^2}$$

$$=\frac{-\cos x(1-\cos x)}{x^2}$$

$$=\frac{-\cos\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2}$$

$$=-2\cos x.\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)$$

$$=-2\cos x\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{2x}{2}}\right).\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{2x}{2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right).\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{1}{2}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=1$$

29. $f(x)=\frac{3\cos^2\sqrt{x}-3}{x}\ ,a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{3\cos^2\sqrt{x}-3}{x}$$

$$=\frac{-3\left(1-\cos^2\sqrt{x}\right)}{x}$$

نعلم أن

$$\cos^2(\text{زاوية})+\sin^2(\text{زاوية})=1$$

$$\sin^2(\text{زاوية})=1-\cos^2(\text{زاوية})$$

$$=\frac{-3\sin^2\sqrt{x}}{x}$$

نعلم أنّ: $x=\sqrt{x}\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}\right)^2$

$$=\frac{-3\sin^2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=-3\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-3$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=1$$

30. $f(x)=\frac{2\sin x+5}{\sqrt{x+1}}\ ,a=+\infty$

مرحلة الحصر:

نعلم أنّ: $-1\le\sin x\le 1$

نضرب بـ (2): $-2\le 2\sin x\le 2$

نضيف (5): $3\le 5+2\sin x\le 7$

نقسم على: $\sqrt{x+1}>0$

$$\frac{3}{\sqrt{x+1}}\le\frac{5+2\sin x}{\sqrt{x+1}}\le\frac{7}{\sqrt{x+1}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{x+1}}\le f(x)\le\frac{7}{\sqrt{x+1}}$$

مرحلة إيجاد النهاية:

بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{x+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{\sqrt{x+1}}\right)=0$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

31. $f(x)=\frac{\cos x-5}{1-x}$, $a=-\infty$

مرحلة الحصر:

نعلم أنّ: $-1\le\cos x\le 1$

نضيف (-5): $-6\le\cos x-5\le -4$

بما أنّ: $x\to-\infty$ فإنّ: $1-x>0$

نقسم على $1-x>0$:

$$\frac{-6}{1-x}\le\frac{\cos x-5}{1-x}\le\frac{-4}{1-x}$$

$$\frac{-6}{1-x}\le f(x)\le\frac{-4}{1-x}$$

مرحلة إيجاد النهاية:

بما أنّ:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-6}{1-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-4}{1-x}\right)=0$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

32. $f(x)=\frac{x-1}{3+2\sin x}$, $a=-\infty$

مرحلة الحصر:

نعلم أنّ: $-1\le\sin x\le 1$

نضرب بـ (2): $-2\le 2\sin x\le 2$

نضيف (3): $1\le 3+2\sin x\le 5$

نقلب:

$$1\ge\frac{1}{3+2\sin x}\ge\frac{1}{5}$$

بما أنّ: $x\to-\infty$ فإنّ: $x-1<0$

نضرب بـ $x-1<0$:

$$x-1\le\frac{x-1}{3+2\sin x}\le\frac{x-1}{5}$$

$$x-1\le f(x)\le\frac{x-1}{5}$$

$$f(x)\le\frac{x-1}{5}$$

مرحلة إيجاد النهاية:

بما أنّ:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{5}\right)=-\infty$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة المقارنة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

33. $f(x)=\frac{x^2}{2+\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$, $a=0$

مرحلة الحصر:

نعلم أنّ: $-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$

نضيف (2): $1\le 2+\cos\frac{1}{x}\le 3$

نقلب: $1\ge\frac{1}{2+\cos\frac{1}{x}}\ge\frac{1}{3}$

نضرب بـ $x^2>0$:

$$x^2\ge\frac{x^2}{2+\cos\frac{1}{x}}\ge\frac{x^2}{3}$$

مرحلة إيجاد النهاية:

بما أنّ:

$$\lim_{x\to0}(x^2)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{3}\right)=0$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to0}f(x)=0$$

34. $f(x)=(x+1)\sin^2\left(\frac{1}{x+1}\right)$, $a=-1$

مرحلة الحصر:

نعلم أنّ: $0\le\sin^2\left(\frac{1}{x+1}\right)\le 1$

عندما: $x\to-1^+$

نضرب بـ $x+1>0$:

$$0\le(x+1)\sin^2\left(\frac{1}{x+1}\right)\le(x+1)$$

مرحلة إيجاد النهاية عند -1 من اليمين:

بما أنّ:

$$\lim_{x\to-1^+}(x+1)=0$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=0$$

عندما: $x\to-1^-$

نضرب بـ $x+1<0$:

$$0\ge(x+1)\sin^2\left(\frac{1}{x+1}\right)\ge(x+1)$$

مرحلة إيجاد النهاية عند -1 من اليسار:

بما أنّ:

$$\lim_{x\to-1^-}(x+1)=0$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to-1}f(x)=0$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=0$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to-1}f(x)=0$$

35. $f(x)=\frac{3\sin 3x-5x}{x-4}$, $a=-\infty$

مرحلة الحصر:

نعلم أنّ: $-1\le\sin 3x\le 1$

نضرب بـ (3): $-3\le 3\sin 3x\le 3$

نضيف $(-5x)$:

$$-5x-3\le -5x+3\sin 3x\le 3-5x$$

بما أنّ: $x\to-\infty$ فإنّ: $x-4<0$

نقسم على $x-4<0$:

$$\frac{-5x-3}{x-4}\ge\frac{-5x+3\sin 3x}{x-4}\ge\frac{3-5x}{x-4}$$

$$\frac{-5x-3}{x-4}\ge f(x)\ge\frac{3-5x}{x-4}$$

مرحلة إيجاد النهاية:

بما أنّ:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-5x-3}{x-4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3-5x}{x-4}\right)=-5$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-5$$

أحياناً تكون الخطوة الأولى هي الأصعب، ولكنها البداية لتحقيق شيء عظيم

تابع الجزء الصحيح:

عند a :	عند الـ ∞ :
نستخدم التعويض	نطبق مرحلتين: المرحلة الأولى: مرحلة الحصر: حيث ننطلق من العلاقة: $x-1<E(x)\le x$ ثم نبدأ رحلة تأليف التابع. المرحلة الثانية: مرحلة إيجاد النهاية: وتتم باستخدام مبرهنات الإحاطة والمقارنة.

تمرين: أوجد نهاية التابع f عند a

36. $f(x)=\frac{xE(x)}{1-x^2}$; $a=+\infty$

$$x-1<E(x)\le x$$

نضرب بـ x بشرط: $x>0$ وفق:

$$x^2-x<xE(x)\le x^2$$

نقسم على $1-x^2<0$ وفق:

$$\frac{x^2-x}{1-x^2}>\frac{xE(x)}{1-x^2}\ge\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\frac{x^2-x}{1-x^2}>f(x)\ge\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x}{1-x^2}\right)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)=-1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$$

37. $\frac{\sin x}{x}\le f(x)\le\frac{E(x)}{x^2+1}$; $a=+\infty$

باعتبار:

$$g(x)=\frac{\sin x}{x}$$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)\to$ إحاطة

$$-1\le\sin x\le 1$$

نقسم على x بشرط $x>0$:

$$-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{x}\le g(x)\le\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

باعتبار:

$$h(x)=\frac{E(x)}{x^2+1}$$

$\lim_{x\to+\infty}h(x)\to$ إحاطة

$$x-1<E(x)\le x$$

$$\frac{x-1}{x^2+1}<\frac{E(x)}{x^2+1}\le\frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{x-1}{x^2+1}<h(x)\le\frac{x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

38. $|f(x)+2|\le\frac{E(x)}{x^2-1}$; $a=+\infty$

$$g(x)=\frac{E(x)}{x^2-1}$$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)\to$ إحاطة

$$x-1<E(x)\le x$$

نقسم على $x^2-1>0$

$$\frac{x-1}{x^2-1}<\frac{E(x)}{x^2-1}\le\frac{x}{x^2-1}$$

$$\frac{x-1}{x^2+1}<g(x)\le\frac{x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الثانية نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-2$$

مكثفة شيفرة الـ 600

التابع اللوغاريتمي:

للتعامل مع النهايات اللوغاريتمية فإننا نميز:

وجود مبرهنة

تنفيذ فوري حيث أنّ المبرهنات:

المبرهنة	تعميمها
$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$	$\lim_{\text{شغلة}\to+\infty}\frac{\ln(\text{شغلة})}{\text{شغلة}}=0$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$	$\lim_{\text{شغلة}\to+\infty}\frac{\text{شغلة}}{\ln(\text{شغلة})}=+\infty$
$\lim_{x\to0} x.\ln(x)=0$	$\lim_{\text{شغلة}\to0}\text{شغلة}\ln(\text{شغلة})=0$
$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\lim_{\text{شغلة}\to0}\frac{\ln(1+\text{شغلة})}{\text{شغلة}}=1$
$\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1$	$\lim_{\text{شغلة}\to0}\frac{\text{شغلة}}{\ln(1+\text{شغلة})}=1$
$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$	$\lim_{\text{شغلة}\to1}\frac{\ln(\text{شغلة})}{\text{شغلة}-1}=1$
$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln(x)}=1$	$\lim_{\text{شغلة}\to1}\frac{\text{شغلة}-1}{\ln(\text{شغلة})}=1$

عدم وجود مبرهنة

الحصول على ناتج: التمرين انتهى

الحصول على حالة عدم تعيين: عند ظهور حالة عدم تعيين يجب إزالتها ومن أجل ذلك فإننا نصلح التابع باستخدام إصلاحات مناسبة حيث الإصلاحات:

النشر – التحليل – توحيد المقامات

– تفريق الكسور – شطّب قطّب

– التباعد الاجتماعي – خواص لوغاريتمية مناسبة.

* نميز حالتين:

✌ الحالة الأولى:

المبرهنة بشكلها العادي فإننا نطبق مباشرة.

✌ الحالة الثانية:

المبرهنة بشكل التعميم فإننا نستخدم تغيير المتحول.

ملاحظات:

قيم تكتب تجاوزا:

$\ln(0)=-\infty$	$\ln(1)=0$	$\ln(e)=1$	$\ln(+\infty)=+\infty$	$\ln(-\infty)=$ كُفر

أحياناً يكون التابع f عبارة عن تابع لوغاريتمي مضمونة تابع آخر $g(x)$ فإننا لإيجاد نهاية التابع f :

1 . نوجد نهاية التابع الآخر $g(x)$ 2 . نعوض ناتج النهاية بدلاً من المضمون

تمرين: أوجد نهاية التابع f عند a :

39. $f(x)=\frac{x}{\ln x}\ ;a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

علماً أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=0$

40. $f(x)=x-x\ln x\ ;a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\infty-\infty$

$f(x)=x-x\ln x=x(1-\ln x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(-\infty)=-\infty$

41. $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x\ ;a=0^+$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty-(-\infty)=+\infty$

42. $f(x)=\frac{1+x\ln x}{x}\ ;a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

عدم تعيين من الشكل: $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x)=\frac{1+x\ln x}{x}=\frac{1}{x}+\frac{x\ln x}{x}=\frac{1}{x}+\ln x$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0+\infty=+\infty$

43. $f(x)=\frac{x\ln x}{x-1}\ ;a=1$

$\lim_{x\to1} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$f(x)=\frac{x\ln x}{x-1}=x\ \frac{\ln x}{x-1}$

$\lim_{x\to1} f(x)=1(1)=1$

علماً أن: $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

44. $f(x)=\frac{\ln x}{x^3}\ ;a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x)=\frac{\ln x}{x^3}=\frac{\ln x}{x}\frac{1}{x^2}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=(0)(0)=0$

علماً أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

45. $f(x)=2\sqrt{x}.\ln x\ ;a=0$

$\lim_{x\to0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $(0)(\infty)$

$f(x)=2\sqrt{x}.\ln x$

$=2\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)^2=4\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)$

$\lim_{x\to0} f(x)=4(0)=0$

علماً أن: $\lim_{x\to0}\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)=0$

46. $f(x)=x+1+x(\ln x)^3\ ;a=0$

$\lim_{x\to0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $(0)(\infty)$

$f(x)=x+1+x(\ln x)^3$

$=x+1+\left(\sqrt[3]{x}\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\right)^3$

$=x+1+\left(3\sqrt[3]{x}\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)\right)^3$

$\lim_{x\to0} f(x)=0+1+0=1$

علماً أن:

$\lim_{x\to0}(\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x})=0$

47. $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x\ ;a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\infty-\infty$

$f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$

$=x+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty+\ln 1=+\infty$

48. $f(x)=\frac{\ln(x+5x)}{\sin 2x}\ ;a=0$

$\lim_{x\to0} f(x)$

حالة عدم تعيين من لشكل: $\frac{0}{0}$

$f(x)=\frac{\ln(1+5x)}{\sin 2x}=\frac{\ln(1+5x)}{x}\frac{x}{\sin 2x}$

$=\frac{5}{2}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\frac{2x}{\sin 2x}$

$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{5}{2}(1)(1)=\frac{5}{2}$

علماً أن:

$\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}=1$

49. $f(x)=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\ ;a=0$

$\lim_{x\to0} f(x)=-\frac{\infty}{0^+}=-\infty$

50. $f(x)=\frac{4}{x^2}-1+2\ln x\ ;a=0$

$\lim_{x\to0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\infty-\infty$

$f(x)=\frac{4}{x^2}-1+2\ln x$

$=\frac{4-x^2+2x^2\ln x}{x^2}$

$=\frac{4-x^2+2x(x\ln x)}{x^2}$

$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{4-0+0}{0}=\frac{4}{0^+}=+\infty$

علماً أن:

$\lim_{x\to0} x\ln x=0$

51. $f(x)=\frac{x+\ln x}{x-\ln x}\;;a=0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{x+\ln x}{x-\ln x}$$

$$=\frac{\ln x\left(\frac{x}{\ln x}+1\right)}{\ln x\left(\frac{x}{\ln x}-1\right)}=\frac{\frac{x}{\ln x}+1}{\frac{x}{\ln x}-1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

52. $f(x)=x.ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\;;a=0\;,+\infty$

إيجاد النهاية عند $a=0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x)=x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=x.\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$=x(\ln(x+1)-\ln(x))$$

$$=x.\ln(x+1)-x.\ln(x)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0-0=0$$

علماً أنّ: $\lim_{x\to 0} x.\ln(x)=0$

إيجاد النهاية عند الـ $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x)=x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

بفرض:

$$1+t=1+\frac{1}{x}$$

$$t=\frac{1}{x}\quad,\quad x=\frac{1}{t}$$

نعوض في التابع f .

$$f(x)=\frac{1}{t}.\ln(1+t)=\frac{\ln(1+t)}{t}$$

لما كان: $x\to+\infty$ فإنّ $t\to 0$ ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to 0}\left[\frac{\ln(1+t)}{t}\right]=1$$

التابع الأسي

للتعامل مع النهايات الأسية ا نميز:

وجود مبرهنة		عدم وجود مبرهنة	
تنفيذ فوري حيث أنّ المبرهنات:		نستخدم التعويض ونميز	
المبرهنة	تعميمها	الحصول على ناتج	الحصول على حالة عدم تعيين
$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$	$\lim_{\text{شغلة}\to+\infty}\frac{e^{\text{شغلة}}}{\text{شغلة}}=+\infty$ $\lim_{\text{شغلة}\to+\infty}\frac{e^{\text{شغلة}}}{(\text{شغلة})^n}=+\infty$ $\lim_{\text{شغلة}\to+\infty}\frac{\text{شغلة}}{e^{\text{شغلة}}}=0$ $\lim_{\text{شغلة}\to+\infty}\frac{(\text{شغلة})^n}{e^{\text{شغلة}}}=0$	التمرين انتهى	عند ظهور حالة عدم تعيين يجب إزالتها ومن أجل ذلك فإننا نصلح التابع باستخدام إصلاحات مناسبة حيث الإصلاحات: النشر – التحليل – توحيد المقامات – تفريق الكسور – شطّب قطّب – التباعد الاجتماعي – خواص أسيّة مناسبة. * نميز حالتين: ✌ الحالة الأولى: المبرهنة بشكلها العادي فإننا نطبق مباشرة. ✌ الحالة الثانية: المبرهنة بشكل التعميم فإننا نستخدم تغيير المتحول.
$\lim_{x\to-\infty} x.e^x=0$ $\lim_{x\to-\infty} x^n.e^x=0$	$\lim_{\text{شغلة}\to-\infty}\text{شغلة}.e^{\text{شغلة}}=0$ $\lim_{\text{شغلة}\to-\infty}(\text{شغلة})^n.e^{\text{شغلة}}=0$		
$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$	$\lim_{\text{شغلة}\to 0}\frac{e^{\text{شغلة}}-1}{\text{شغلة}}=1$ $\lim_{\text{شغلة}\to 0}\frac{\text{شغلة}}{e^{\text{شغلة}}-1}=1$		

ملاحظات:

قيم تكتب تجاوزا:

$e^{-\infty}=0$	$e^0=1$	$e^1=e$	$e^{+\infty}=+\infty$

أحياناً يكون التابع f عبارة عن تابع أسي أسهُ تابع آخر $g(x)$ فإننا لإيجاد نهاية التابع f :

1 . نوجد نهاية التابع الآخر $g(x)$ 2 . نعوض ناتج النهاية بدلاً من الأس.

تمرين: أوجد نهاية التابع f عند a

53. $f(x)=x-e^x;a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $\infty-\infty$.

$$f(x)=x-e^x=e^x\left(\frac{x}{e^x}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(0-1)=-\infty$$

علماً أن: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)=0$

54. $f(x)=e^x-x^2\;;a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $\infty-\infty$.

$$f(x)=e^x-x^2=e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(1-0)=+\infty$$

علماً أن: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\right)=0$

55. $f(x)=2xe^{-x}\;;a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $(\infty)(0)$.

$$f(x)=2xe^{-x}=\frac{2x}{e^x}=2\frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2(0)=0$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)=0$$

56. $f(x)=(3-x)e^x\;;a=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $(\infty)(0)$.

$$f(x)=(3-x)e^x=3e^x-xe^x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0-0=0$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to-\infty}(xe^x)=0$$

57. $f(x)=(x^2+2x-3)e^x;a=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $(\infty)(0)$.

$$f(x)=(x^2+2x-3)e^x$$

$$=x^2e^x+2xe^x-3e^x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0+0-0=0$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x=\lim_{(x\to-\infty)} xe^x=0$$

58. $f(x)=e^{2x}+e^x-2\;a;=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0+0-2=-2$$

59. $f(x)=x+1+xe^x\;;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

مكثفة شيفرة الـ 600

74. $f(x)=x+\frac{x+1}{e^x}\ ;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=x+\frac{x+1}{e^x}=x+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

علماً أن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

75. $f(x)=2x+ln(1-e^{-x}+e^{-2x})\ ;a=-\infty$

$$=\ln(e^{2x})+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$$
$$=\ln(e^{2x}(1-e^{-x}+e^{-2x}))$$
$$=\ln(e^{2x}-e^{x}+1)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ln 1=0$$

76. $f(x)=-x+ln(e^x+1)\ ;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\infty-\infty$

$$f(x)=-x+\ln(e^x+1)$$
$$=\ln e^{-x}+\ln(e^x+1)$$
$$=\ln\left(e^{-x}(e^x+1)\right)$$
$$=\ln(1+e^{-x})$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln 1=0$$

77. $f(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{x.\cos x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{x.\cos x}$$
$$=\frac{e^x(e^x-1)}{x.\cos x}=\frac{e^x}{\cos x}.\frac{e^x-1}{x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=1(1)=1$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

78. $f(x)=\frac{1-cos\,2x}{xe^x-x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{xe^x-x}$$
$$=\frac{2\sin^2 x}{x(e^x-1)}=\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{x}.\frac{}{e^x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=(1)(1)(1)(2)=2$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=1$$

79. $f(x)=\frac{x\cos e^x}{x^2+1}\ ;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\to\cos(+\infty)\to$$ احاطة

نعلم أن: $-1\le\cos e^x\le 1$

$$-x\le x\cos e^x\le x$$
$$-\frac{x}{x^2+1}\le x\cos e^x\le\frac{x}{x^2+1}$$
$$-\frac{x}{x^2+1}\le f(x)\le\frac{x}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$$

استناداً إلى مبرهنة الاحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

68. $f(x)=\frac{2e^x+1}{1-e^x}\ ;a=0^+$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

69. $f(x)=\frac{2e^x-3}{e^x+1}\ ;a=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{3}{1}=-3$$

70. $f(x)=\frac{e^x+1}{2x}\ ;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{e^x+1}{2x}$$
$$=\frac{e^x}{2x}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}.\frac{e^x}{x}+\frac{1}{2x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty+0=+\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$$

71. $f(x)=\frac{e^x-1}{3x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{e^x-1}{3x}=\left(\frac{e^x-1}{x}\right).\frac{1}{3}$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=1\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$$

72. $f(x)=\frac{2e^x-3}{e^x+1}\ ;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{2e^x-3}{e^x+1}$$
$$=\frac{e^x\left(2-\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{2-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{2-0}{1+0}=2$$

73. $f(x)=\frac{e^{3x}-e^x}{sin\,x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{e^{3x}-e^x}{\sin x}$$
$$=\frac{e^x(e^{2x}-1)}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}\frac{(e^{2x}-1)}{2x}2e^x$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=1(1)(1)(2)=2$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$$

60. $f(x)=2e^x-x+1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\infty-\infty$.

$$f(x)=2e^x-x+1$$
$$=e^x\left(2-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)(2-0+0)=+\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)=0$$

61. $f(x)=2e^{-x}-x-2\ ;a=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty+\infty=+\infty$$

62. $f(x)=(x^2-x+1)e^x\ ;a-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $(\infty)(0)$.

$$f(x)=(x^2-x+1)e^x$$
$$=x^2e^x-xe^x+e^x$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0+0+0=0$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2e^x)=\lim_{x\to-\infty}(xe^x)=0$$

63. $f(x)=x+1+4e^{-x}\ ;a=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $\infty-\infty$.

$$f(x)=x+1+4e^{-x}$$
$$=e^{-x}(xe^x+e^x+4)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty(0+0+4)=+\infty$$

64. $f(x)=xe^{-x}+x-2\ ;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $(\infty)(0)$.

$$f(x)=xe^{-x}+x-2$$
$$=\frac{x}{e^x}+x-2$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0+\infty-2=+\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)=0$$

65. $f(x)=xe^x-1\ ;a=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0-1=-1$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to-\infty}(xe^x)=0$$

66. $f(x)=2x-1+e^{-x}\ ;a=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $-\infty+\infty$.

$$f(x)=2x-1+e^{-x}$$
$$=e^{-x}(2xe^x-e^x+1)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty(0-0+1)=+\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to-\infty}(xe^x)=0$$

67. $f(x)=e^{-x}(3+ln\,x)\ ;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $(0)(\infty)$

$$f(x)=e^{-x}(3+\ln x)$$
$$=3e^{-x}+e^{-x}\ln x$$
$$=\frac{3}{e^x}+\frac{\ln x}{e^x}=\frac{3}{e^x}+\frac{\ln x}{x}.\frac{x}{e^x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0+(0)(0)=0$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)=0$$

80. $f(x)=\frac{e^{2x}-3e^x+2}{1-\cos 2x}\ ;a=0^+$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)$

حالة هدم تعين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{e^{2x}-3e^x+2}{1-\cos 2x}=\frac{(e^x-1)(e^x-2)}{2\sin^2 x}$$
$$=\frac{e^x-1}{x}.\frac{x}{\sin x}.\frac{x}{\sin x}.\frac{e^x-2}{2x}$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=(1)(1)(1)\left(-\frac{1}{0^+}\right)=-\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$$

81. $|3f(x)+4|\le \frac{x(e^{7x}-1)}{\ln(x+1)}\ ;a=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{7x}-1)}{\ln(x+1)}$

حالة عدم تعين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$\frac{x(e^{7x}-1)}{\ln(x+1)}=\frac{x}{\ln(x+1)}(e^{7x}-1)$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\ln(x+1)}(e^{7x}-1)\right)=(1)(1)0=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الثانية يكون:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{4}{3}$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{7x}=1$$

82. $u_n=\frac{e^{2n}}{(1+n)^2}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n$

حالة عدم تعين من الشكل: $\frac{\infty}{\infty}$

$$u_n=\frac{e^{2n}}{(1+n)^2}=\frac{e^{2n}}{n^2+2n+1}$$
$$=\frac{e^{2n}}{n^2\left(\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{e^{2n}}{n^2}\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n=1\left(\frac{1}{1+0+0}\right)=0$$

علماً أن:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}}{n^2}=1$$

النهايات المميزة

بعد التعويض تصدم من ظهور 1^∞ طول بالك وخود نفس, القصة بسيطة صديقي هلق أبو مريم بحلها..
المهم هي اسمها (نهاية مميزة) ونحنا هون لنتعلم كيف ممكن نزيلها بس ركز بالخطوات الجاية:

١. نفرض متحول جديد وفق: (ما داخل الأقواس $=1+t$)
٢. نعزل t أيّ نكتب t بدلالة x ثم نعزل x أيّ نكتب x بدلالة t
٣. نوجد المسعى الجديد وذلك بتعويض المسعى القديم في علاقة t
٤. نعوض في التابع f أي نكتب التابع f بدلالة t
٥. باستخدام إصلاحات مناسبة نظهر $\frac{1}{t}$ في الأسر وعند ظهور $\frac{1}{t}$ في الأسر نستخدم الخاصة: $a^x=e^{\ln(a^x)}$
٦. نصلح ثم نوجد النهاية

تمرين: أوجد نهاية التابع f عند a

83. $f(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\ ;a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

نهاية مميزة $(1)^\infty$

$$f(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$

نفرض $1+t=\frac{x}{x+1}$

$$1+t=1-\frac{1}{x+1}\to t=-\frac{1}{x+1}$$
$$x+1=-\frac{1}{t}\to x=\frac{-t-1}{t}$$

لما كان $x\to+\infty$ فإنّ $t\to 0$

$$f(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$
$$=(1+t)^{\frac{-t-1}{t}}=e^{\ln(1+t)^{\frac{-t-1}{t}}}$$
$$=e^{\left(\frac{-t-1}{t}\right)\ln(1+t)}=e^{\frac{(-t-1)\ln(1+t)}{t}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to 0}\left(e^{(-t-1)\frac{(\ln(1+t))}{t}}\right)=e^{-1}$$

علماً أن:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

84. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}\ ;a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

نهاية مميزة $(1)^\infty$

$$f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}$$

نفرض $1+t=\frac{x+1}{x-1}$

$$1+t=1+\frac{2}{x-1}\to t=\frac{2}{(x-1)}$$
$$x-1=\frac{2}{t}\to x=\frac{t+2}{t}$$

لما كان $x\to+\infty$ فإنّ $t\to 0$

$$f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}$$
$$=(1+t)^{\frac{t+2}{t}+1}=e^{\ln(1+t)^{\frac{2t+2}{t}}}$$
$$=e^{\frac{(2t+2)\ln(t+1)}{t}}=e^{(2t+2)\frac{\ln(t+1)}{t}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to 0}\left(e^{(2t+2)\frac{\ln(t+1)}{t}}\right)=e^2$$

علماً أن:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$$

85. $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n$

نهاية مميزة $(1)^{+\infty}$

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$$

نفرض $1+t=1+\frac{1}{n}$

$$t=\frac{1}{n}\to n=\frac{1}{t}$$

لما كان $n\to+\infty$ فإنّ $n\to 0$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=(1+t)^{\frac{2}{t}}$$
$$=e^{\ln(1+t)^{\frac{2}{t}}}=e^{\frac{2}{t}\ln(1+t)}=e^{2\frac{\ln(1+t)}{t}}$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{t\to 0}\left(e^{2\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)=e^2$$

علماً أن:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

التابع الأسي بالأساس a نستفيد من الخاصة: $a^x=e^{\ln(a)^x}$ ثم نتابع كما ورد معنا في التابع الأسي.

تمرين: أوجد نهاية التابع f عند a

86. $f(x)=x.2^x\ ;a=-\infty$

$$f(x)=xe^{\ln 2^x}=xe^{x\ln 2}$$
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $(0)(-\infty)$

$$f(x)=xe^{x\ln 2}$$
$$=x\ln 2\,e^{x\ln 2}\frac{1}{\ln 2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=(0)\frac{1}{\ln 2}=0$$

علماً أن: $\lim_{x\to-\infty} x\ln 2\,e^{x\ln 2}=0$

87. $f(x)=(1-x)2^x\ ;a=-\infty$

$$=(1-x)e^{\ln 2^x}=(1-x)e^{x\ln 2}$$
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $(\infty)(0)$

$$f(x)=(1-x)e^{x\ln 2}$$
$$=e^{x\ln 2}-xe^{x\ln 2}$$
$$=e^{x\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}x\ln 2\,e^{x\ln 2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0-\frac{1}{\ln 2}(0)=0$$

علماً أن: $\lim_{x\to-\infty} x\ln 2\,e^{x\ln 2}=0$

88. $f(x)=4^x-2^{x+2}\ ;a=+\infty$

$$=e^{x\ln 4}-4e^{x\ln 2}$$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $\infty-\infty$

$$f(x)=e^{x\ln 4}-4e^{x\ln 2}$$
$$=e^{2x\ln 2}-4e^{x\ln 2}$$
$$=e^{x\ln 2}(e^{x\ln 2}-4)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(+\infty)=+\infty$$

مكثفة شيفرة الـ 600

تمرين: أوجد نهاية التابع f عند a

89. $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-|x|$

$a=-\infty\,,+\infty$

إيجاد النهاية عند $a=-\infty$:

نعلم أنّ: $x\to-\infty$ فإنّ $|x|=-x$ ومنه:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}+x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty-\infty)$

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}+x$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}$$

$$=\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}$$

$$=\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}$$

$$=\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}$$

$$=\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right)}$$

$$=\frac{2+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2}{-2}=-1$$

إيجاد النهاية عند $a=+\infty$:

نعلم أنّ: $x\to+\infty$ فإنّ $|x|=x$ ومنه:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty-\infty)$

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-x$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}$$

$$=\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}$$

$$=\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}$$

$$=\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+x}$$

$$=\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2}{2}=1$$

التابع المركب:

النمط الأول	النمط الثاني
إيجاد $\lim_{x\to a} f(g(x))$ فإننا نميز حالتان: الحالة الأولى: قاعدة ربط التابع $f(g(x))$ معلومة فإننا نوجد النهاية فوراً كما تعلمنا سابقاً حسب نوع التابع. الحالة الثانية: قاعدة ربط التابع $f(g(x))$ غير معلومة فإننا نوجد النهاية وفق: $\lim_{x\to a} g(x)=b$ و $\lim_{x\to b} f(x)=c$ فإنّ: $\lim_{x\to a} f(g(x))=c$	يكون المطلوب إيجاد نهاية التابع f حيث f معطى بأحد الأشكال: لوغاريتم مضمونه تابع آخر $g(x)$ أو مثلثي مضمونه تابع آخر $g(x)$ أو جذري مضمونه تابع آخر $g(x)$ أو قوة أساسها تابع آخر $g(x)$ أو أسي أسه تابع آخر $g(x)$ فإننا لإيجاد نهاية التابع f نوجد نهاية التابع الآخر $g(x)$ ثم نعوض ناتج النهاية في التابع f

التمرين الأول:

أوجد نهاية التابع f عند a :

90. $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{4x+1}}\;;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

91. $f(x)=ln(x^2-5x)\;;a=5$

$$\lim_{x\to5} f(x)=\ln 0=-\infty$$

92. $f(x)=ln\left(\frac{x-1}{x+5}\right)\;;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln 1=0$$

93. $f(x)=exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\;;a=+\infty$

$$f(x)=e^{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=e^{-1}$$

94. $f(x)=cos\left(\frac{1-e^{-x}}{e^x}\right)\;;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\cos(0)=1$$

95. $f(x)=ln(x+e^{-x})\;;a=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعين من الشكل: $\infty-\infty$

$$f(x)=\ln(x+e^{-x})=\ln\left(e^{-x}(xe^x+1)\right)$$

$$=\ln e^{-x}+\ln(xe^x+1)=-x+\ln(xe^x+1)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty+\ln 1=+\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to-\infty}(xe^x)=0$$

96. $f(x)=ln(e^{-x}+1)\;;a=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

97. $f(x)=e^{x-\sin x};a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)\to\sin+\infty\to$ احاطة

نعلم أنّ:

$$-1\le\sin x\le 1$$

$$1\ge-\sin x\ge-1$$

$$x+1\ge x-\sin x\ge x-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sin x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=e^{+\infty}=+\infty$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $]2,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{3-5x}{2-x}$$

احسب نهاية التابع f عند أطراف مجالات مجموعة التعريف.

$$\lim_{x\to2} f(x)=\frac{-7}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$$

استنتج نهاية $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$$

$$\lim_{x\to5} f(x)=\frac{-22}{-3}=\frac{22}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\frac{22}{3}$$

أعد حساب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x .

$$f(f(x))=f\left(\frac{3-5x}{2-x}\right)$$

$$=\frac{3-5\left(\frac{3-5x}{2-x}\right)}{2-\left(\frac{3-5x}{2-x}\right)}=\frac{3+\frac{-15+25x}{2-x}}{2+\frac{-3+5x}{2-x}}$$

$$=\frac{\frac{6-3x-15+25x}{2-x}}{\frac{4-2x-3+5x}{2-x}}=\frac{22x-9}{3x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\frac{22}{3}$$

يا نُخبة

بحب ذكرك إنو من اعتمد على الله

لا ملّ ولا قلّ ولا ضلّ ولا ذلّ

لذلك.. شد حيلك

مخطط النهاية باستخدام التعريف

تعيين A

- نوجد مركز المجال ونصف قطر المجال:

$$C=\frac{a+b}{2}\ ,\ r=\frac{b-a}{2}$$

- نضع العلاقة: $|f(x)-C|<r$
- نعوض ونعزل

انتبه: التخلص من القيمة المطلقة يكون بالاعتماد على دراسة الإشارة

تعيين مجال

- نتطلق من العلاقة المعطاة
- إذا كان التابع f معطى بدللة

x واحدة	x كذا
نعزل x فوراً	التابع قابل للإصلاح.	التابع غير قابل للإصلاح.
	نصلح ثم نعزل x	حل المتراجحة

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $]e^{-1},+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{2+\ln(x)}{1+\ln(x)}$ جد $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ثم أعط عدداً حقيقياً A يحقق الشرط إذا كانت $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]0.9,1.1[$.

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$f(x)=\frac{2+\ln(x)}{1+\ln(x)}$$

$$=\frac{\ln(x)\left(\frac{2}{\ln(x)}+1\right)}{\ln(x)\left(\frac{1}{\ln(x)}+1\right)}=\frac{\frac{2}{\ln(x)}+1}{\frac{1}{\ln(x)}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

إيجاد قيمة A :

نوجد مركز المجال ونصف قطر المجال وفق:

$$C=\frac{a+b}{2}=\frac{0.9+1.1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$r=\frac{b-a}{2}=\frac{1.1-0.9}{2}=\frac{0.2}{2}=\frac{1}{10}$$

بما أنّ التابع $f(x)$ من المجال $]0.9,1.1[$ فإنه يتحقق:

$$|f(x)-c|<r$$

$$\left|\frac{2+\ln(x)}{1+\ln(x)}-1\right|<\frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{2+\ln(x)-1-\ln(x)}{1+\ln(x)}\right|<\frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{1}{1+\ln(x)}\right|<\frac{1}{10}\to\frac{|1|}{|1+\ln(x)|}<\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{1+\ln(x)}<\frac{1}{10}\to 1+\ln(x)>10$$

$$\ln(x)>9\to x>e^9$$

ومنه: $A=e^9$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{2e^x+3}{e^x-1}$ احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ثم عين عدداً حقيقياً A يحقق الشرط إذا كان $x>A$ فإنّ $f(x)$ في المجال $]1.95,2.05[$.

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$f(x)=\frac{2e^x+3}{e^x-1}$$

$$=\frac{e^x\left(2+\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{2+\frac{3}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$$

إيجاد قيمة A :

نوجد مركز المجال ونصف قطر المجال وفق:

$$C=\frac{a+b}{2}=\frac{1.95+2.05}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$r=\frac{b-a}{2}=\frac{2.05-1.95}{2}=\frac{0.1}{2}=\frac{1}{20}$$

بما أنّ التابع $f(x)$ من المجال $]0.9,1.1[$ فإنه يتحقق:

$$|f(x)-c|<r$$

$$\left|\frac{2e^x+3}{e^x-1}-2\right|<\frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{2e^x+3-2e^x+2}{e^x-1}\right|<\frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{5}{e^x-1}\right|<\frac{1}{20}\to\frac{|5|}{|e^x-1|}<\frac{1}{20}$$

$$\frac{5}{e^x-1}<\frac{1}{20}\to\frac{e^x-1}{5}>20$$

$$e^x-1>100\to e^x>101$$

$$x>\ln(101)$$

ومنه $A=\ln(101)$

التمرين الثالث:

نعلم أنّ العدد 3 هو نهاية التابع $f(x)=\sqrt{4x+1}$ عند الـ 2 , عيّن مجالاً I مركزه 2 يحقق الشرط إذا كان x من المجال I كان $f(x)$ من المجال $J=]2.99,3.01[$

الحل:

بما أنّ التابع $f(x)$ من المجال $]2.99,3.01[$ فإنّ:

$$2.99<f(x)<3.01$$

$$2.99<\sqrt{4x+1}<3.01$$

$$(2.99)^2<4x+1<(3.01)^2$$

$$(2.99)^2-1<4x<(3.01)^2-1$$

$$\frac{(2.99)^2-1}{4}<x<\frac{(3.01)^2-1}{4}$$

إذاً:

$$I=\left]\frac{(2.99)^2-1}{4},\frac{(3.01)^2-1}{4}\right[$$

التمرين الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

١. احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty}f(f(x))$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

إيجاد $\lim_{x\to+\infty}f(f(x))$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1\ ,\ \lim_{x\to1}f(x)=0$$

$$\to\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=0$$

٢. أوجد مجالاً I يحقق الشرط إذا انتمى x إلى المجال I انتمى $f(x)$ إلى المجال $]2.8,3.2[$

بما أنّ التابع $f(x)$ من المجال $]2.8,3.2[$ فإنّ:

$$2.8<f(x)<3.2$$

$$2.8<\frac{x-1}{x+1}<3.2$$

سنعود بعد دقيقة..

كتابة التابع $f(x)$ بدللة x واحدة وفق:

بالقسمة الإقليدية نجد أنّ:

$$f(x)=1-\frac{2}{x+1}$$

عُدنا..

$$2.8<1-\frac{2}{x+1}<3.2$$

$$1.8<-\frac{2}{x+1}<2.2$$

$$-1.8>\frac{2}{x+1}>-2.2$$

$$-\frac{1}{1.8}<x+1<-\frac{1}{2.2}$$

$$-\frac{1}{1.8}-1<x<-\frac{1}{2.2}-1$$

$$\frac{-1-1.8}{1.8}<x<\frac{-1-2.2}{2.2}$$

$$\frac{-2.8}{1.8}<x<\frac{-3.2}{2.2}$$

إذاً:

$$I=\left]\frac{-2.8}{1.8},\frac{-3.2}{2.2}\right[$$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{3x-1}{(x-2)^2}$$

احسب نهاية التابع f عند الـ 2 ثم عين عدداً α يحقق الشرط إذا كان x عنصراً من المجال $]2-\alpha,2+\alpha[$ مختلفاً عن 2 كان $f(x)>10^3$

الحل:

إيجاد نهاية التابع f عند الـ 2 .

$$\lim_{x\to2}f(x)=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

تعيين α :

لدينا من العلاقة:

$$f(x)>10^3$$

$$\frac{3x-1}{(x-2)^2}>10^3$$

$$3x-1>10^3(x-2)^2$$

$$10^3(x-2)^2-3x+1<0$$

بفرض $x=t+2$ فتكون $t=x-2$ ومنه:

$$10^3.t^2-3(t+2)+1<0$$

$$10^3.t^2-3t-6+1<0$$

$$10^3.t^2-3t-5<0$$

$$10^3.t^2-3t-5=0$$

$$a=10^3\ ,\ b=-3\ ,\ c=-5$$

$$\Delta=b^2-4(a)(c)$$

$$=9-4(10)^3(-5)$$

$$=9+20000=20009>0$$

للمعادلة حلان حيث: $\sqrt{\Delta}\approx 141$ ومنه:

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-141}{2\times10^3}=-0.07$$

$$t_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+141}{2\times10^3}=0.07$$

t	$-\infty$		-0.07		0.07	$+\infty$
المقدار		$+$	0	$-$	0	$+$
<0		غ.م	|	م	|	غ.م

$$t\in]-0.07,0.07[$$

$$-0.07<t<0.07$$

$$-0.07<x-2<0.07$$

$$2-0.07<x<2+0.07$$

$$x\in]2-0.07,2+0.07[$$

ومنه: $\alpha=0.07$

$$\to x\in]1.93,2.07[$$

بِقَدرِ الكَدِّ تُكتسَبُ المَعالِي .. 😊🏅💙

مكثفة شيفرة الـ 600

تعريف	نقول عن التابع f أنه محدود إذا كان يحقق: $m \le f(x) \le M$ حيث M و m أعداد حقيقية.
نص السؤال	أثبت أنّ التابع f محدود - أثبت محدودية التابع f - حيث التابع f يحوي " $\cos$ أو $\sin$ "
فكرة الحل	مرحلة الإصلاح: "عند اللزوم" وتعني باستخدام إصلاحات مناسبة (قسمة إقليدية-إتمام إلى مربع كامل" أيّ نكتب التابع f بدلالة $\sin$ أو $\cos$ واحدة. مرحلة الحصر: وهي ذاتها مرحلة تأليف التابع.

تمرين: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \sin^2 x + 6\sin x + 7$$

١. أثبت أنّ التابع f يكتب بالشكل:

$$f(x) = (\sin x + 3)^2 - 2$$

٢. أثبت محدودية التابع f

٣. استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2+1}\right)$

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أنّ: $f(x) = (\sin x + 3)^2 - 2$

لدينا:

$$\underbrace{f(x)}_{l_1} = \underbrace{(\sin x + 3)^2 - 2}_{l_2}$$

الطريقة الأولى:

للانتقال من l_1 إلى l_2 نستخدم الاتمام إلى مربع كامل وفق:

$$\begin{aligned} l_1 &= f(x) \\ &= \sin^2 x + 6\sin x + 7 \\ &= \underbrace{\sin^2 x + 6\sin x + 9}_{(\sin x+3)^2} - 9 + 7 \\ &= (\sin x + 3)^2 - 2 = l_2 \end{aligned}$$

الطريقة الثانية:

للانتقال من l_1 إلى l_2 نستخدم النشر وفق:

$$\begin{aligned} l_2 &= (\sin x + 3)^2 - 2 \\ &= \sin^2 x + 6\sin x + 9 - 2 \\ &= \sin^2 x + 6\sin x + 7 = f(x) = l_1 \end{aligned}$$

الطلب الثاني:

إثبات محدودية f:

لدينا:

$$f(x) = (\sin x + 3)^2 - 2$$

نعلم أنّ:

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نضيف (3):

$$2 \le \sin x + 3 \le 4$$

نربع:

$$4 \le (\sin x + 3)^2 \le 16$$

نضيف (-2):

$$2 \le (\sin x + 3)^2 - 2 \le 14$$

إذاً:

$$2 \le f(x) \le 14$$

ومنه:

$f(x) \in [2,14]$ ، **أي أن f محدود**

الطلب الثالث:

استنتاج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2+1}\right)$

مرحلة الحصر:

لدينا من الطلب السابق:

$$2 \le f(x) \le 14$$

نقسم على $x^2 + 1 > 0$ **:**

$$\frac{2}{x^2+1} \le \frac{f(x)}{x^2+1} \le \frac{14}{x^2+1}$$

مرحلة إيجاد النهاية:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{14}{x^2+1}\right) = 0$$

ومنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2+1} = 0$$

سلوك تابع:

هو معلومتين يجب استنتاجها:

* **نهاية التابع**
* **المستقيمات المحددة للخط البياني للتابع**

تمرين:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f(x) = 5x + \cos x$$

ادرس سلوك التابع f في جوار $+\infty$ ثم أحسب قيمة تقديرية للمقدار $f(1000)$ مبيناً الخطأ في الحساب

الحل:

$$f(x) = 5x + \cos x$$

ادرس سلوك التابع f في جوار $+\infty$

إيجاد نهاية f في جوار $+\infty$

نعلم أن:

$$-1 \le \cos x \le 1$$

نضيف $(5x)$:

$$\begin{aligned} 5x - 1 \le 5x + \cos x &\le 1 + 5x \\ 5x - 1 \le f(x) &\le 1 + 5x \\ 5x - 1 \le f(x) & \end{aligned}$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}(5x - 1) = +\infty$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة المقارنة تكون:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

المستقيمات المحددة للخط البياني f :

إن الخط البياني f محدد بالمستقيمين اللذين معادلتهما

$$y_1 = 5x + 1 \ , \ y_2 = 5x - 1$$

حساب قيمة تقديرية للمقدار $f(1000)$ مبيناً الخطأ في الحساب

ولدينا:

$$\begin{aligned} 5x - 1 \le f(x) &\le 1 + 5x \\ 5(1000) - 1 \le f(1000) &\le 1 + 5(1000) \\ 4999 \le f(1000) &\le 5001 \end{aligned}$$

أي أنّ: $5x$ هي مقدار القيمة التقريبية لـ $f(x)$ بخطأ واحد زيادة أو نقصان.

600 أوراق في شهر واحد

تعريف: هو مستقيم يقترب منهُ الخط البياني في جوار التقارب دون أن يلامسهُ

تنبيه: الخط البياني لا يقطع مقاربهُ في جوار التقارب بينما في غير جوار التقارب "يصطفلوا"

أنواع المقاربات

المقارب الأفقي: هو مستقيم يوازي محور الفواصل معادلتهُ من الشكل: $(y = \text{عدد})$

المقارب الشاقولي: هو مستقيم يوازي محور التراتيب معادلتهُ من الشكل: $(x = \text{عدد})$

نص السؤال:
- صيغة أولى: أوجد النهايات واكتب معادلة كل مقارب وجدته
- صيغة ثانية: أوجد النهايات واشرح التأويل الهندسي للنتائج
- صيغة ثالثة: أوجد النهايات وفسر النتيجة هندسياً

فكرة الحل:
نوجد النهايات
نميز حالتين:
إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ فإنّ المستقيم الذي معادلته $y = b$ مقارب أفقي للخط البياني C_f في جوار ∞
إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ فإنّ المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب شاقولي للخط البياني C_f
من (اليمين-اليسار) نحو $(oy^{+}\text{-}\ oy^{-})$

المقارب المائل: هو مستقيم مائل معادلتهُ من الشكل $y = ax + b$

النمط	نص السؤال	فكرة الحل
الأول	هل يوجد مقارب مائل في جوار ∞؟	نتحقق من وجود مقارب أفقي للخط البياني في جوار ∞ ونميز: ① وجود مقارب أفقي في جوار ∞ فإنه لا يوجد مقارب مائل في جوار ∞ ② عدم وجود مقارب أفقي في جوار ∞ إمكانية وجود مقارب مائل في جوار ∞
الثاني	أثبت أن المستقيم Δ (معادلته معطاة) مقارب مائل لـ C_f في جوار ∞	نشكل الفرق $h(x) = f(x) - y_\Delta$ نوجد $\lim_{x\to\infty} h(x)$ ونميز: ① إذا كانت $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$ يكون المستقيم Δ مقارب لـ C ② إذا كانت $\lim_{x\to\infty} h(x) \neq 0$ يكون المستقيم Δ ليس مقارب لـ C ملاحظة مهمة: في هذا النمط عند عدم تحديد جوار الدراسة فإننا نحدد جوار الدراسة بالاعتماد على مجموعة التعريف ونميز: * $D_f =]a, +\infty[$ جوار الدراسة هو $+\infty$ * $D_f =]-\infty, a[$ جوار الدراسة هو $-\infty$ * $D_f =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$ جوار الدراسة هو الـ $+\infty$ والـ $-\infty$ مع الانتباه إلى أنه في حال وجود مقارب أفقي لا نناقش وجود مقارب مائل.
الثالث	ادرس الوضع النسبي بين المستقيم Δ (معادلتهُ معطاة – مقارب مائل – مقارب أفقي – محاور – مستقيم عشوائي) والخط البياني	نشكل الفرق $h(x) = f(x) - y_\Delta$ نعد الفرق أي نحل المعادلة $h(x) = 0$ ننظم جدول الوضع النسبي: ① حقل x نضع فيه: * مجموعة تعريف التابع * قيم x التي تعدم $h(x)$ ② حقل الفرق $h(x)$ نضع فيه: * الإشارات حيث الطريقة الأفضل لتحديدها هي استخدام أسلوب القيم التجريبية وتعويضها في الفرق $h(x)$ * العدد صفر تحت القيم التي تعدم الفرق $h(x)$ ③ حقل الوضع النسبي ونضع فيه: * خطوط فصل * C فوق Δ (تحت إشارة $+$) * C تحت Δ (تحت إشارة $-$)
الرابع	استنتاج معادلة المقارب المائل	الحالة الأولى: إذا كان لدينا: $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$ يكون المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = ax + b$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار ∞ الحالة الثانية: شكل التابع: $f(x) = ax + b + g(x)$ نوجد $\lim_{x\to\infty} g(x)$ نميز حالتين: إذا كان $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ تكون معادلة المقارب المائل Δ هي $\Delta: y = ax + b$ إذا كان $\lim_{x\to\infty} g(x) \neq 0$ لا يوجد مقارب مائل الحالة الثالثة: شكل التابع: تابع كسري درجة بسطه أكبر من درجة مقامه بواحد نطبق القسمة الإقليدية ونستفيد من القاعدة: $\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$ كي يتحول شكل التابع إلى الحالة الثانية $f(x) = ax + b + g(x)$ ثم نتابع كما في الحالة الثانية الحالة الرابعة: شكل التابع: $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ حيث: $a > 0$ نكتب المقدار $(ax^2 + bx + c)$ بالصيغة القانونية (الإتمام إلى مربع كامل) نخمن معادلة المقارب المائل. الحالة الخامسة: وهي الحالة العامة وتستخدم عند تدريج الطلبات ١. نشكل $\frac{f(x)}{x}$ ثم نوجد a حيث: $a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; a \in \mathbb{R}^*$ ٢. نشكل $f(x) - ax$ ثم نوجد b حيث: $b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax]; a \in \mathbb{R}$ ٣. تكون معادلة المقارب المائل للخط C_f في جوار ∞ هي: $y = ax + b$

x	
$h(x)$	
الوضع النسبي	

مكثفة شيفرة الـ 600

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4}$$

١. جد نهاية f عند أطراف مجالات تعريفه ثم استنتج معادلة كل مقارب شاقولي لـ C

٢. بفرض Δ المستقيم المعين بالعلاقة $y=x$ ، أثبت أن Δ مقارب مائل لـ C وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ.

٣. g يحقق: $g(x)\geq f(x)$ أياً كان $x>4$ ، ما نهاية g عند $+\infty$.

الحل:

الطلب الأول:

$$D_f=\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$$
$$=]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=\frac{-16}{0^+}=-\infty$$

$x=-2$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^-.

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\frac{-16}{0^-}=+\infty$$

$x=-2$ مقارب شاقولي من اليمين نحو oy^+.

$$\lim_{x\to2}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4}$$
$$=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)}$$
$$\lim_{x\to2}f(x)=\frac{12}{4}=3$$

الطلب الثاني:

نشكل الفرق:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=\frac{x^3-8}{x^2-4}-x$$
$$=\frac{x^3-8-x^3+4x}{x^2-4}=\frac{4x-8}{x^2-4}$$
$$=\frac{4(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{4}{x+2}$$

نوجد نهاية $h(x)$ في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$

ومنه المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

نوجد نهاية $h(x)$ في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=0$$

ومنه المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل في جوار $-\infty$.

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x)=\frac{4}{x+2}$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$
$$\frac{4}{x+2}=0$$
$$4\neq0$$

مستحيلة الحل

نظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	Δ تحت C	$\|\|$	C فوق Δ	$\|\|$	Δ فوق C

الطلب الثالث:

بما أن $g(x)\geq f(x)$ فإنّ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

حسب مبرهنة المقارنة يكون $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,0[$ وفق:

$$f(x)=x+x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)-2$$

١. احسب $\lim_{x\to0}f(x)$

٢. أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلتهُ $\Delta: y=x-1$ مقارب لخط C .

الحل:

الطلب الأول:

$\lim_{x\to0}f(x)\to$ إحاطة

نعلم أنّ:

$$-1\leq\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq1$$

نضرب بـ $x<0$:

$$-x\geq x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\geq x$$

نضيف $(x-2)$:

$$-2\geq x+\sin\left(\frac{1}{x}\right)-2\geq2x-2$$
$$2x-2\leq f(x)\leq-2$$
$$\lim_{x\to0}(2x-2)=-2$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أنّ:

$$\lim_{x\to0}f(x)=-2$$

الطلب الثاني:

نشكل الفرق:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=x+x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)-2-(x-1)$$
$$=x+x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)-2-x+1$$
$$=x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)-1$$

نوجد نهاية الفرق:

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$h(x)=x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)-1$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}-1$$

بفرض: $t=\frac{1}{x}$ فتكون: $x=\frac{1}{t}$

لما كان $x\to-\infty$ فإنّ $t\to0$

$$h(x)=\frac{\sin t}{t}-1$$
$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)=0$$

علماً أنّ: $\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)=1$

ومنهُ المستقيم $\Delta: y=x-1$ مقارب مائل لـ C في جوار الـ $-\infty$.

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2}{x}$$

الطلب الأول:

احسب نهاية التابع f عند الصفر.

$$\lim_{x\to0}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2}{x}$$
$$=-\frac{2x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{2(\cos\sqrt{x}-1)}{x}$$
$$=-2x+1-\frac{2(1-\cos\sqrt{x})}{x}$$
$$=-2x+1-\frac{2\left(2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{x}$$
$$=-2x+1-\frac{2\left(2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{(\sqrt{x})^2}$$
$$=-2x+1-4\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{x}}\right)^2$$
$$=-2x+1-4\left(\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$
$$=-2x+1-4.\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$
$$=-2x+1-\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=1-(1)^2=0$$

الطلب الثاني:

أثبت أنّ المستقيم $\Delta: y=-2x+1$ مقارب مائل لخط C_f في جوار الـ $+\infty$.

الحل:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=\frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2}{x}-(-2x+1)$$
$$=\frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2}{x}+2x-1$$
$$=\frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2+2x^2-x}{x}$$
$$=\frac{2\cos\sqrt{x}-2}{x}$$

$\lim_{x\to+\infty}h(x)\to$ إحاطة

$$-1\leq\cos\sqrt{x}\leq1$$
$$-2\leq2.\cos\sqrt{x}\leq2$$
$$-4\leq2\cos\sqrt{x}-2\leq0$$

نقسم على x بشرط $x>0$

$$-\frac{4}{x}\leq\frac{2\cos\sqrt{x}-2}{x}\leq0$$
$$-\frac{4}{x}\leq h(x)\leq0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$

ومنهُ المستقيم الذي معادلته $y=-2x+1$ مقارب مائل لـ C_f في جوار الـ $+\infty$

التمرين الرابع:

أثبت أنّ المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب لخط البياني في جوار الـ $+\infty$ للتابع:

$$f(x)=x-x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

الحل:

نشكل الفرق:

$$h(x)=f(x)-y$$
$$=x-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-(x-1)$$
$$=-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+1$$
$$=1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

نوجد نهاية الفرق:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين $(\infty)(0)$

$$h(x) = 1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

نحتاج تغير متحول:

بفرض: $t = \frac{1}{x}$ فتكون: $x = \frac{1}{t}$

لمّا كان: $x \to +\infty$ فإنّ: $t \to 0$

$$= 1 - \frac{1}{t}\ln(1+t)$$

$$= 1 - \frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{t\to 0}\left(1 - \frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$

$$= 1 - 1 = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right) = 1$$

إذا المستقيم الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط البياني في جوار $+\infty$.

التمرين الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $]4,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = 5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

١. احسب نهاية f عند الـ $+\infty$

٢. احسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 5 + 2x)$

٣. استنتج معادلة المقارب المائل Δ في جوار $+\infty$.

٤. ادرس الوضع النسبي بين c و Δ .

الحل:

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

الطلب الثاني:

نشكل: $f(x) - 5 + 2x$ وفق:

$$f(x) - 5 + 2x$$

$$= 5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) - 5 + 2x$$

$$= 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

نوجد النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 5 + 2x) = 3\ln(1) = 0$$

الطلب الثالث:

نجد مما سبق أن $y = 5 - 2x$ مقارب مائل للخط البياني في جوار $+\infty$

الطلب الرابع:

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta = 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) = 0 \to \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) = 0$$

$$\frac{x+1}{x-4} = 1 \to x + 1 = x - 4$$

$$1 \neq -4 \to$$ مستحيلة الحل

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	-4	$+\infty$
$h(x)$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	$\|\|$	c فوق Δ

التمرين السادس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

١. أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي.

٢. احسب $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (x+4))$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

الحل:

الطلب الأول: نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y$$

$$= x + \frac{4}{e^x+1} - x = \frac{4}{e^x+1}$$

نوجد نهاية الفرق:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

ومنه $y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

نشكل الفرق:

$$h(x) = \frac{4}{e^x+1}$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$\frac{4}{e^x+1} = 0 \to 4 \neq 0$$

مستحيلة الحل إذاً $h(x)$ لا ينعدم

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	$+$	
الوضع النسبي	c فوق المقارب	

الطلب الثاني:

نشكل $f(x) - (x+4)$:

$$f(x) - (x+4)$$

$$= x + \frac{4}{e^x+1} - x - 4 = \frac{4}{e^x+1} - 4$$

نوجد النهاية:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (x+4)) = \frac{4}{1} - 4 = 0$$

ومنه $y = x + 4$ مقارب مائل للخط البياني في جوار $-\infty$

التمرين السابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$$f(x) = x + 1 + \frac{\sin x}{x}$$

استنتج معادلة المقارب المائل للخط البياني في جوار الـ $+\infty$

بفرض:

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}$$

نعلم أن:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى يكون:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

إذاً: المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = x + 1$ مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$.

التمرين الثامن:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

١. استنتج أن لـ C_f مقارب مائل للخط البياني في جوار $+\infty$.

٢. ادرس الوضع النسبي بين الخط البياني والمقارب المائل.

الحل:

الطلب الأول:

باستخدام القسمة الاقليدية نجد:

$$f(x) = x + 3 + \frac{4}{x-1}$$

بفرض:

$$g(x) = \frac{4}{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = x + 3$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

الطلب الثاني:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta = \frac{4}{x-1}$$

نعدم الفرق: $h(x) = 0$

$$\frac{4}{x-1} = 0 \to 4 \neq 0$$

مستحيلة الحل ومنه الفرق لا ينعدم.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	$\|\|$	Δ فوق C

التمرين التاسع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3 - \cos x}{x}$$

والمطلوب:

١. أثبت أن للخط C مقارب مائل Δ في جوار الـ $+\infty$.

٢. ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب Δ على المجال $]0,+\infty[$.

الحل:

الطلب الأول:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta = \frac{x^2 + 3 - \cos x}{x} - x$$

$$= \frac{x^2 + 3 - \cos x - x^2}{x}$$

$$= \frac{3 - \cos x}{x}$$

نعلم أنّ:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$1 \geq -\cos x \geq -1$$

$$4 \geq 3 - \cos x \geq 2$$

$$\frac{4}{x} > \frac{3 - \cos x}{x} \geq \frac{2}{x}$$

$$\frac{2}{x} \leq f(x) - y_\Delta \leq \frac{4}{x}$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}\right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى يكون:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار الـ $+\infty$.

الطلب الثاني:

$$h(x) = 0$$

$$\frac{3 - \cos x}{x} = 0 \to 3 - \cos x = 0$$

$$\cos x \neq 3$$

مستحيلة الحل ومنه الفرق لا ينعدم.

x	0	$+\infty$
$h(x)$	$+$	
الوضع النسبي	Δ فوق C	

اليوم هو فرصتك لتبني الغد الذي تريده ..

مكثفة شيفرة الـ 600

التمرين العاشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$$

١. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

٢. اكتب ثلاثي الحدود x^2-x-2 بالصيغة القانونية (الإتمام إلى مربع كامل)

٣. استنتج وجود مقارب مائل Δ في جوار الـ $-\infty$ واكتب معادلتهُ وادرس وضع الخط C بالنسبة إليه.

الحل:

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

الطلب الثاني:

$$x^2-x-2$$
$$=x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{5}$$

الطلب الثالث:

استنتاج معادلة المقارب المائل:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}$$

نخمّن أنّ معادلة المقارب المائل في جوار الـ $-\infty$ هي:

$$\Delta: y=-x+\frac{1}{2}$$

التحقق من ذلك:

نشكل الفرق:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=\sqrt{x^2-x-2}-\left(-x+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x^2-x-2}-\left(-x+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2-x-2}+\left(-x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2-x-2}+\left(-x+\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\frac{x^2-x-2-\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2-x-2}+\left(-x+\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\frac{x^2-x-2-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2-x-2}-x+\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{-\frac{9}{4}}{\sqrt{x^2-x-2}-x+\frac{1}{2}}$$
$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$$

ومنهُ المستقيم Δ مقارب مائل لـ C في جوار الـ $-\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$h(x)=\frac{-9}{4\sqrt{x^2-x-2}-4x+2}$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0-9\neq 0\to$$ مستحيلة الحل

نظم جدول الوضع النسبي وفق:

x	$-\infty$ -1	2 $+\infty$
$h(x)$	$-$	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	C فوق Δ

التمرين الحادي عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\ln(3+e^x)$$

١. أوجد a حيث $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

٢. أوجد b حيث: $b=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax$

٣. استنتج معادلة المقارب المائل للخط البياني في جوار $+\infty$

الحل:

الطلب الأول:

نشكل $\frac{f(x)}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln(3+e^x)}{x}$$

نوجد النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

لدينا:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln(3+e^x)}{x}$$
$$=\frac{\ln\left(e^x(3e^{-x}+1)\right)}{x}=\frac{\ln e^x+\ln(3e^{-x}+1)}{x}$$
$$=\frac{x+\ln(3e^{-x}+1)}{x}=1+\frac{\ln(3e^{-x}+1)}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=1+0=1\to a=1$$

الطلب الثاني:

نشكل $f(x)-ax$:

نوجد النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)-x=\ln(3+e^x)-x$$
$$=x\left(\frac{\ln(3+e^x)}{x}-1\right)$$

من الطلب السابق نجد:

$$=x\left(1+\frac{\ln(3e^{-x}+1)}{x}-1\right)$$
$$=x\left(\frac{\ln(3e^{-x}+1)}{x}\right)=\ln(3e^{-x}+1)$$
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=0\to b=0$$

الطلب الثالث:

مما سبق نجد:

$$y=ax+b\to y=x$$

وهي معادلة المقارب المائل للخط البياني في جوار $+\infty$

التمرين الثاني عشر:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$$

أولاً:

١. أوجد نهاية f في جوار $-\infty$.

٢. أثبت أنّ المستقيم d_1 الذي معادلتهُ $y=3x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

٣. ادرس الوضع النسبي لـ C مع d_1.

الحل:

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

الطلب الثاني:

نشكل الفرق:

$$h(x)=f(x)-y_{d_1}$$
$$=2x-\sqrt{x^2+1}-3x=-\sqrt{x^2+1}-x$$

نوجد نهاية الفرق:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-y_{d_1}\right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty-\infty)$

$$f(x)-y_{d_1}=-\sqrt{x^2+1}-x$$
$$=\frac{\left(-\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(-\sqrt{x^2+1}+x\right)}{-\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\frac{x^2+1-x^2}{-\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{-\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$$

إذاً المستقيم d_1 الذي معادلتهُ $y=3x$ مقارب مائل لـ C في جوار الـ $-\infty$.

الطلب الثالث:

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x)=f(x)-y_{d_1}=-\sqrt{x^2+1}-x$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$
$$-\sqrt{x^2+1}-x=0\to\sqrt{x^2+1}=-x$$

نربع بشرط $-x>0$ ومنهُ $x<0$:

$x^2+1=x^2\to 1\neq 0\to$ مستحيلة الحل

نظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$ $+\infty$
$h(x)$	$-$
الوضع النسبي	C تحت d_1

ثانياً:

١. أوجد نهاية f في جوار الـ $+\infty$.

٢. أثبت وجود عددين حقيقيين a و b يحققان

$$a=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)\text{ و }b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$$

٣. استنتج معادلة d_2 المقارب المائل لـ C في جوار الـ $+\infty$

٤. ادرس وضع C بالنسبة لـ d_2.

الحل:

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty-\infty)$

$$f(x)=2x-\sqrt{x^2+1}=2x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$
$$=2x-\sqrt{x^2}.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=2x-|x|.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

بما أنّ $|x|=x$ فإنّ $x\to+\infty$

$$=2x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

الطلب الثاني:

إيجاد a:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x}$$

ومنهُ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

حالة عدم التعيين من الشكل $(\infty-\infty)$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{2x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

بما أنّ $|x|=x$ فإنّ $x\to+\infty$

$$=\frac{2x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\frac{x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}$$
$$=2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=1\to a=1$$

إيجاد b:

$$f(x)-ax$$
$$=2x-\sqrt{x^2+1}-x=x-\sqrt{x^2+1}$$

ومنهُ:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty-\infty)$.

$$f(x)-ax$$
$$=\frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{x^2-x^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=0\to b=0$$

الطالب الثالث:

استنتاج معادلة المقارب المائل:

$$d_2: y = ax + b \to d_2: y = x$$

الطالب الرابع:

الوضع النسبي لـ C مع d_2 .

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_{d_2}$$
$$= 2x - \sqrt{x^2+1} - x = x - \sqrt{x^2+1}$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$
$$x - \sqrt{x^2+1} = 0 \to \sqrt{x^2+1} = x$$

نربع بشرط $x > 0$:

$$x^2 + 1 = x^2$$

مستحيلة الحل $\to 1 \neq 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	$-$	
الوضع النسبي	C تحت d_2	

الاستمرار

عند نقطة — على المجال

نهاية وصورة — قواعد وخواص

التمرين الأول:

ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x - \ln(x)} & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

أثبت أن التابع f مستمر عند الصفر.

$$f(0) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{\infty} = 0$$

نلاحظ أنّ: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

ومنه التابع f مستمر عند الصفر.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x \ \ln(1+4x)}{\sqrt{x^2+1}-1} & ; \ x \neq 0 \\ 8 & ; \ x = 0 \end{cases}$$

هل التابع f مستمر عند الصفر؟

الحل:

حتى يكون التابع f مستمر عند الصفر يجب تحقق:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(x) \ldots (*)$$

نوجد النهاية:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\frac{\sin x \ \ln(1+4x)}{\sqrt{x^2+1}-1}$$
$$f(x) = \frac{(\sin x \ln(1+4x))\ (\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}$$
$$= \frac{(\sin x \ln(1+4x))\ (\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2+1-1}$$
$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\ln(1+4x)}{x} \cdot (\sqrt{x^2+1}+1)$$
$$= \frac{\sin x}{x} \cdot 4\frac{\ln(1+4x)}{4x} \cdot (\sqrt{x^2+1}+1)$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = (1)(4)(1)(2) = 8$$

علماً أن: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+4x)}{4x}\right) = 1$$

نوجد الصورة: $f(0) = 8$

نعوض في $(*)$: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$8 = 8 \to$ محققة

ومنه التابع f مستمر عند الصفر

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x-1} & ; x < 1 \\ -\dfrac{1}{4} & ; x = 1 \\ 2x - \dfrac{9}{4} & ; x > 1 \end{cases}$$

هل التابع f مستمر عند الـ 1 ؟

الحل:

نوجد النهاية من اليسار:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{5-x}-2}{x-1}$$
$$= \frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{5-x}+2)}{(x-1)(\sqrt{5-x}+2)}$$
$$= \frac{(1-x)}{(x-1)(\sqrt{5-x}+2)} = \frac{-1}{\sqrt{5-x}+2}$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{-1}{4}$$

نوجد النهاية من اليمين:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2(1) - \frac{9}{4} = 2 - \frac{9}{4} = \frac{-1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \to \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{-1}{4}$$
$$f(1) = \frac{-1}{4}$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

إذاً التابع f مستمر عند الـ 1

التمرين الرابع:

ليكن لدينا التابع f المستمر على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} & ; x \neq 0 \\ \sqrt{2}\, m & ; x = 0 \end{cases}$$

عين قيمة m ليكون التابع f مستمر عند الصفر.

إيجاد النهاية:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعين من الشكل: $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin 3x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$= \frac{\sin 3x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x+2-2}$$
$$= \frac{\sin 3x}{3x}\ 3(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1(6\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

إيجاد الصورة:

$$f(0) = \sqrt{2}m$$

تعيين m:

بما أن التابع f مستمر عند الصفر فإنه يتحقق:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$
$$\to 6\sqrt{2} = \sqrt{2}\, m$$
$$\to m = 6$$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(3x+1)}{1-\cos 4x} & ; \ x \neq 0 \\ A & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

احسب قيمة A إذا علمت أن f مستمراً عند 0

الحل:

بما أن التابع f مستمر عند الصفر فإنه يتحقق:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \ldots (*)$$

نوجد الصورة: $f(0) = A$

نوجد نهاية:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x\ln(3x+1)}{1-\cos 4x}$$

نعلم أن:

$$1 - \cos(4x) = 2\sin^2(2x)$$
$$= \frac{x\ln(3x+1)}{2\sin^2(2x)}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sin(2x)}\cdot\frac{x}{\sin(2x)}\cdot\frac{\ln(3x+1)}{x}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{\ln(3x+1)}{3x}$$
$$= \frac{3}{8}\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{\ln(3x+1)}{3x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{8}(1)(1)(1) = \frac{3}{8}$$

علماً أن: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin(2x)}\right) = 1$ و $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(3x+1)}{3x}\right) = 1$

نعوض في $(*)$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$
$$\frac{3}{8} = A \to A = \frac{3}{8}$$

التمرين السادس:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 2 + e^{-x}}{1-\cos(2x)} & ; x \neq 0 \\ m+2 \ ; & x = 0 \end{cases}$$

عين قيمة m بحيث يكون f مستمر على $\mathbb{R}$:

الحل:

حتى يكون التابع f مستمر على $\mathbb{R}$ يجب أن يتحقق

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

$$f(x) = \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{1-\cos(2x)}$$
$$= \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{2\sin^2 x} = \frac{e^x - 2 + \frac{1}{e^x}}{2\sin^2 x}$$
$$= \frac{\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^x}}{2\sin^2 x} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^x 2\sin^2 x}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2 e^x}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2 e^x}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(e^x - 1)^2}{x^2 e^x}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2e^x}\cdot\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}(1)^2 \cdot (1)^2 = \frac{1}{2}$$

إيجاد الصورة:

$$f(0) = m + 2$$

نعوض في $(*)$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$
$$\frac{1}{2} = m + 2 \to m = -\frac{3}{2}$$

مكثفة شيفرة الـ 600

التمرين السابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=2x+1-E(x)$$

اكتب التابع $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2[$

هل التابع f مستمر عند الواحد؟

ارسم التابع f على $[0,2[$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2+1}\right)$

الحل:

الطلب الأول:

$$E(x)=\begin{cases}0\;;x\in[0,1[\\1\;;\in[1,2[\\2\;;\;x=2\end{cases}$$

ومنه:

$$f(x)=\begin{cases}2x+1\;;\;x\in[0,1[\\2x\;;\;x\in[1,2[\\3\;;\;\;x=2\end{cases}$$

الطلب الثاني:

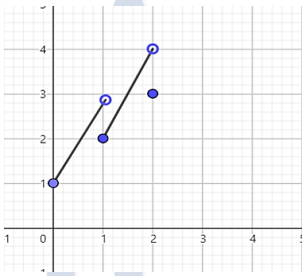
$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(2x+1)=3$$
$$f(1)=2(1)=2$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$$

ومنه التابع f غير مستمر عند الواحد.

الطلب الثالث:



الطلب الرابع:

مرحلة الحصر:

نعلم أنّ:

$$x-1<E(x)\leq x$$
$$1-x>-E(x)\geq-x$$
$$2+x>2x+1-E(x)\geq1+x$$
$$2+x>f(x)\geq1+x$$
$$\frac{2+x}{x^2+1}>\frac{f(x)}{x^2+1}\geq\frac{1+x}{x^2+1}$$

مرحلة إيجاد النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{x^2+1}\right)=0$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2+1}\right)=0$$

التمرين الثامن:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$f(x)=\frac{(1-x)E(x)}{x}$ والمطلوب:

١. اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ "لا تحوي $E(x)$" على المجال $\left[\frac{1}{2},2\right]$

٢. هل f مستمر عند $x=1$ ؟ علل إجابتك.

٣. هل f مستمر على المجال $\left[\frac{1}{2},2\right]$ ؟ علل إجابتك.

٤. ادرس نهاية التابع f عند الـ $+\infty$

الحل:

$$f(x)=\frac{(1-x)E(x)}{x}$$

الطلب الأول:

$$E(x)=\begin{cases}0\;;x\in[\frac{1}{2},1[\\1\;;x\in[1,2[\\2\;;x=2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0\;;x\in[\frac{1}{2},1[\\\frac{1-x}{x}\;;x\in[1.2[\\-1\;;x=2\end{cases}$$

الطلب الثاني:

حتى يكون التابع f مستمر عند $x=1$ يجب تحقق:

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$$

سنعود بعد قليل..

$$\lim_{x\to1}f(x)=0$$
$$f(1)=0$$

عدنا.. بما أنّ:

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$$

ومنه التابع f مستمر عند الـ $x=1$.

الطلب الثالث:

$x\mapsto0$ مستمر على $\mathbb{R}^*$ فهو مستمر على $[\frac{1}{2},1[$.

$x\mapsto\frac{1-x}{x}$ مستمر على $\mathbb{R}^*$ فهو مستمر على $[1,2[$

دراسة الاستمرار عند الـ (2) :

حتى يكون التابع f مستمر عند الـ (2) يجب تحقق:

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$ حيث:

$$\lim_{x\to2}f(x)=-\frac{1}{2}$$
$$f(2)=-1$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$$

التابع f غير مستمر عند الـ (2) ومنه التابع f غير مستمر على المجال $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

الطلب الرابع:

إيجاد نهاية التابع f عند الـ $+\infty$:

نعلم أنّ:

$$x-1<E(x)\leq x$$

نضرب بـ $1-x$ بشرط $x<1$

$$(x-1)(1-x)>(1-x)E(x)$$
$$\geq x(1-x)$$

نقسم على x بشرط $x>0$:

$$\frac{(x-1)(1-x)}{x}>\frac{(1-x)E(x)}{x}$$
$$\geq\frac{x(1-x)}{x}$$
$$\frac{-x^2+2x-1}{x}>f(x)\geq1-x$$
$$\frac{-x^2+2x-1}{x}>f(x)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+2x-1}{x}\right)=-\infty$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة نجد أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

التمرين التاسع:

نعتبر التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=(x+1)\sin x$$

أثبت أنّ التابع f مستمر على $\mathbb{R}$.

التابع $x\mapsto x+1$ مستمر على $\mathbb{R}$

التابع $x\mapsto\sin x$ مستمر على $\mathbb{R}$

مما سبق نستنتج أنّ التابع f مستمر على $\mathbb{R}$ لأنه جداء تابعان مستمران على $\mathbb{R}$

التمرين العاشر:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right)\;;x\neq0\\0\qquad\;;x=0\end{cases}$$

الطلب الأول: احسب نهاية التابع f عند الصفر

إحاطة $\lim\limits_{x\to0}f(x)\to$

$$-1\leq\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq1$$

نضرب بـ x^2 وفق:

$$-x^2\leq x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq x^2$$
$$-x^2\leq f(x)\leq x^2$$
$$\lim_{x\to0}(-x^2)=\lim_{x\to0}(x^2)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أنّ:

$$\lim_{x\to0}f(x)=0$$

الطلب الثاني: هل التابع f مستمر عند الصفر؟

$$\lim_{x\to0}f(x)=0$$
$$f(0)=0$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

ومنه التابع f مستمر عند الصفر.

الطلب الثالث:

هل التابع f مستمر على $\mathbb{R}$, علل إجابتك.

أولاً:

لدينا $x\mapsto\frac{1}{x}$ مستمر على $\mathbb{R}^*$

ولدينا $x\mapsto\cos x$ مستمر على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على $\mathbb{R}^*$

وبالتالي التابع $x\mapsto\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ مستمر على $\mathbb{R}^*$ لأنه:

عبارة عن تركيب تابعان مستمران على $\mathbb{R}^*$

ثانياً:

لدينا التابع $x\mapsto x^2$ مستمر على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على $\mathbb{R}^*$

وبالتالي التابع f مستمر على $\mathbb{R}^*$ لأنه عبارة عن جداء تابعين مستمرين على $\mathbb{R}^*$.

وحتى يكون التابع f مستمر على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون التابع مستمر عند الصفر: ومن الطلب الثاني لدينا التابع f مستمر عند الصفر ومنه التابع f مستمر على $\mathbb{R}$.

نحن نحاول..
نتسابق في الهمم، ونتحدى في الأفكار، ونتقن في الإنجاز،
ونحسن في العمل ✌️💙
نخبة..!! 🏅

الرمز	المشتق الأول للتابع f رمزه $f'(x)$ والمشتق الثاني للتابع f رمزه $f''(x)$ والمشتق من المرتبة n رمزه $f^{(n)}(x)$

قواعد الاشتقاق

التابع	القاعدة	تمرين: أوجد التابع المشتق للتابع f
ثابت "لا يحوي متحول x " $f(x)=\alpha$	مشتق التابع الذي لا يحوي متحول هو الصفر $f'(x)=0$	1. $f(x)=\pi \to f'(x)=0$ 2. $f(x)=\frac{\ln(2)}{e} \to f'(x)=0$
تابع من الدرجة الأولى "تابع تآلفي" $f(x)=\alpha x$	مشتق التابع التآلفي هو أمثال x $f'(x)=\alpha$	3. $f(x)=-x \to f'(x)=-1$ 4. $f(x)=-\frac{2x}{3} \to f'(x)=-\frac{2}{3}$
مجموع توابع $f(x)=g(x)+h(x)$	مشتق مجموع توابع هو مجموع المشتقات $f'(x)=g'(x)+h'(x)$	5. $f(x)=3x-7 \to f'(x)=3$ 6. $f(x)=\ln(2)-\frac{7x}{e} \to f'(x)=-\frac{7}{e}$ 7. $f(x)=\frac{5+3x}{2}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}x \to f'(x)=\frac{3}{2}$
تابع مرفوع إلى قوة "الحالة العامة" $f(x)=\big(g(x)\big)^n$	مشتق تابع مرفوع إلى قوة: "تزلني , نقصني , اشتق المضمون" بشرط الـ $n \neq 1$ $f'(x)=n.\big(g(x)\big)^{n-1}.g'(x)$	8. $f(x)=(5x-3)^7$ $f'(x)=7(5x-3)^6(5)=35(5x-3)^6$ 9. $f(x)=(3-4x)^{-4}+3x-2$ $f'(x)=-4(3-4x)^{-5}(-4)+3$ $=16(3-4x)^{-5}+3$
تابع مرفوع إلى قوة "الحالة الخاصة" $f(x)=x^n$	$f'(x)=n.x^{n-1}$	10. $f(x)=x^2 \to f'(x)=2x$ 11. $f(x)=x^{-\frac{5}{2}} \to f'(x)=-\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$
تابع الجذر التربيعي $f(x)=\sqrt{g(x)}$	مشتق الجذر التربيعي: مشتق المضمون على ضعفي الجذر نفسه $f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	12. $f(x)=\sqrt{x} \to f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 13. $f(x)=\sqrt{x^3-x^2+1}$ $f'(x)=\frac{3x^2-2x}{2\sqrt{x^3-x^2+1}}$ 14. $f(x)=x-\sqrt{(x^2-7)^3}$ $f'(x)=1-\frac{3(x^2-7)^2(2x)}{2\sqrt{(x^2-7)^3}}=1-\frac{6x(x^2-7)^2}{\sqrt{(x^2-7)^3}}$
الجذر من المرتبة n $f(x)=\sqrt[n]{\big(g(x)\big)^m}$	لا توجد قاعدة تنص على اشتقاق التابع f إنما لاشتقاقه نتبع الخطوات الآتية: 1.نحول الجذر إلى قوة وفق: $f(x)=\big(g(x)\big)^{\frac{m}{n}}$ 2.نشتق كما ورد معنا في الحالة العامة لقاعدة اشتقاق تابع مرفوع إلى قوة ويتم ذلك وفق: $f'(x)=\frac{m}{n}\big(g(x)\big)^{\frac{m}{n}-1}\big(g(x)\big)'$	15. $f(x)=\sqrt[4]{x^7}=x^{\frac{7}{4}}$ $f'(x)=\frac{7}{4}.x^{\frac{3}{4}}=\frac{7}{4}.\sqrt[4]{x^3}$ 16. $f(x)=\sqrt[7]{(1-x)^2}=(1-x)^{\frac{2}{7}}$ $f'(x)=\frac{2}{7}.(1-x)^{-\frac{5}{7}}(-1)$ $=-\frac{2}{7}.\sqrt[7]{(1-x)^{-5}}$ 17. $f(x)=\sqrt[3]{7-x^5}=(7-x^5)^{\frac{1}{3}}$ $f'(x)=\frac{1}{3}(7-x^5)^{-\frac{2}{3}}(-5x^4)$ $=-\frac{5}{3}x^4.\sqrt[3]{(7-x^5)^{-2}}=-\frac{5}{3}x^4.\sqrt[3]{(7-x^5)^{-2}}$
جداء تابعين $f(x)=g(x).h(x)$	مشتق جداء تابعين: مشتق الأول بالثاني زائد مشتق الثاني بالأول $f'(x)=g'(x).h(x)+h'(x).g(x)$	18. $f(x)=x.\sqrt{x}$ $f'(x)=(1)\big(\sqrt{x}\big)+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x)$ $=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ 19. $f(x)=(x-1).\sqrt{x^2-3}$ $f'(x)=1\big(\sqrt{x^2-3}\big)+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}(x-1)$ $=\sqrt{x^2-3}+\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2x^2-x-3}{\sqrt{x^2-3}}$
جداء عدد حقيقي بتابع $f(x)=\alpha.g(x)$	مشتق جداء عدد حقيقي بتابع هو: جداء العدد الحقيقي بمشتق التابع $f'(x)=\alpha.g'(x)$	20. $f(x)=3\sqrt{x} \to f'(x)=3.\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2\sqrt{x}}$ 21. $f(x)=-5\sqrt{-x^3+3x^2+2}+7x$ $f'(x)=-5.\left[\frac{-3x^2+6x}{2\sqrt{-x^3+3x^2+2}}\right]+7=$ $\frac{15x^2-30x}{2\sqrt{-x^3+3x^2+2}}+7$

مكثفة شيفرة الـ 600

قسمة تابعين "كسر" $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$	مشتق قسمة تابعين هو: مشتق البسط بالمقام ناقص مشتق المقام بالبسط على مربع المقام. $f'(x)=\frac{g'(x).h(x)-h'(x).g(x)}{(h(x))^2}$	22. $f(x)=\frac{1}{x}$ $f'(x)=\frac{(0)(x)-(1)(1)}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$ 23. $f(x)=\frac{x-3}{5-x}$ $f'(x)=\frac{1(5-x)-(-1)(x-3)}{(5-x)^2}=\frac{2}{(5-x)^2}$ 24. $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{7-x^2}$ $f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(7-x^2)-(-2x)(\sqrt{x-1})}{(7-x^2)^2}$ $=\frac{\frac{7-x^2}{2\sqrt{x-1}}+\frac{4x(x-1)}{2\sqrt{x-1}}}{(7-x^2)^2}=\frac{3x^2-4x+7}{2\sqrt{x-1}(7-x^2)^2}$
التابع اللوغاريتمي $f(x)=\ln(g(x))$	مشتق التابع اللوغاريتمي هو مشتق المضمون على المضمون نفسه. $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$	25. $f(x)=\ln(x)\rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ 26. $f(x)=\ln(\sqrt{x-1})$ $f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2x-2}$
التابع الأسي $f(x)=e^{g(x)}$	مشتق التابع الأسي هو مشتق أسه بنفسه. $f'(x)=g'(x).e^{g(x)}$	27. $f(x)=e^x\rightarrow f'(x)=e^x$ 28. $f(x)=e^{x^2}\rightarrow f'(x)=2x.e^{x^2}$ 29. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}$
التابع الأسي بالأساس a	* نستفيد من الخاصة: $a^x=e^{\ln(a)^x}=e^{x.\ln(a)}$ * نتابع كم ورد معنا في التابع الأسي.	30. $f(x)=2^x=e^{\ln(2)^x}=e^{x.\ln(2)}$ $f'(x)=\ln(2).e^{x\ln(2)}=\ln(2).2^x$ 31. $f(x)=x^x=e^{\ln(x)^x}=e^{x.\ln(x)}$ $f'(x)=(x.\ln(x)).e^{x.\ln(x)}=(\ln(x)+1).x^x$
تابع يحوي قيمة مطلقة	* نتخلص من القيمة المطلقة * نتابع كما ورد سابقاً	

التابع المثلثي

قواعد		تعميم	
التابع	المشتق	التابع	المشتق
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$f(x)=\sin(g(x))$	$f'(x)=g'(x).\cos(g(x))$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$f(x)=\cos(g(x))$	$f'(x)=-g'(x).\sin(g(x))$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=1+\tan^2 x$ أو $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$f(x)=\tan(g(x))$	$f'(x)=g'(x)(1+\tan^2(g(x)))$ أو $f'(x)=\frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$
$f(x)=\cot x$	$f'(x)=-1-\cot^2 x$ أو $f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$f(x)=\cot(g(x))$	$f'(x)=g'(x)(-1-\cot^2(g(x)))$ أو $f'(x)=\frac{-g'(x)}{\sin^2(g(x))}$

تعميم: مشتق أي تابع مثلثي هو مشتق الزاوية بمشتق الدالة

تمرين: أوجد التابع المشتق للتابع f :

32. $f(x)=\cos x^2\rightarrow f'(x)=-2x.\sin x^2$
33. $f(x)=\sin\sqrt{x}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\cos\sqrt{x}=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
34. $f(x)=7.\tan(x^2-3x^3)$
$f'(x)=7.(2x-9x^2).(1+\tan^2(x^2-3x^3))$
35. $f(x)=\sqrt{\sin 3x-\frac{1}{x}}\rightarrow f'(x)=\frac{3.\cos 3x+\frac{1}{x^2}}{2.\sqrt{\sin 3x-\frac{1}{x}}}$
36. $f(x)=x.\sin x$
$f'(x)=(1)(\sin x)+(\cos x)(x)=\sin x+x.\cos x$
37. $f(x)=\frac{\tan x}{\cos x}$
$f'(x)=\frac{(\frac{1}{\cos^2 x})(\cos x)-(-\sin x)(\frac{\sin x}{\cos x})}{cos^2 x}$
$f'(x)=\frac{\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin^2 x}{\cos x}}{\cos^2 x}=\frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$

إيجاد المجموعة التي ينجز عليها المشتق:

التمرين الأول:

فيما يأتي احسب التابع المشتق للتابع f مبيناً المجموعة التي تحسب المشتق عليها:

1. $f(x)=\frac{x^2+3x-1}{4}$
التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$
$f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{x}$

1. $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$
التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$
$f'(x)=\frac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2}$

2. $f(x)=x^4-2x\sqrt{x}$
التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$
$f'(x)=4x^3-3\sqrt{x}$

3. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$
التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$
$f'(x)=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

4. $f(x)=x\cos x$
التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$
$f'(x)=\cos x-x.\sin x$

5. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$
التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$
$f'(x)=\frac{x.\cos x-\sin x}{x^2}$

6. $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$
نعدم المقام:
$\cos x=0$
$x=\frac{\pi}{2}+\pi k\ ;k\in\mathbb{Z}$
التابع f اشتقاقي على
$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+\pi k\ ;k\in\mathbb{Z}\}$
$f'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$

7. $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-1}$

نعدم المقام:

$$\sin x-1=0$$
$$\sin x=1$$
$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\ ;k\in\mathbb{Z}$$

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\ ;k\in\mathbb{Z}\}$$

$$f'(x)=\frac{-\sin^2 x+\sin x-\cos^2 x}{(\sin x-1)^2}$$

8. $f(x)=\frac{1+\sin x}{2+\cos x}$

نعدم المقام:

$$2+\cos x=0$$
$$\cos x=-2$$

مستحيلة الحل.

إذاً التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2\cos x+\cos^2 x+\sin x+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}$$

$$f(x)=\ln(x)-1$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$ ومشتقته:

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$f(x)=e^{x^2+2x-1}$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقته:

$$f'(x)=(2x+2).e^{x^2+2x-1}$$

استنتاج مشتق:

نص السؤال	استنتج مشتق التابع $h(x)$
فكرة الحل	* نكتب التابع $h(x)$ بدلالة $f(x)$ * نستنتج المشتق حسب قواعد الاشتقاق * وتذكر: إذا كان لدينا تابع $h(x)$ من الشكل: $h(x)=f(g(x))$ فإنّ مشتقه هو: $h'(x)=g'(x).f'(g(x))$

التمرين الأول:

نتأمل التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$

١. احسب التابع المشتق للتابع f.

٢. استنتج مشتق كلاً من التوابع الآتية:

١) $g:x\mapsto\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

٢) $h:x\mapsto\frac{x^4+1}{x^2-1}$

٣) $l:x\mapsto\frac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$

٤) $k:x\mapsto\frac{e^{2x}+1}{e^x-1}$

٥) $m:x\mapsto\frac{\ln^2 x+1}{\ln x-1}$

٦) $n:x\mapsto\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$

٧) $p:x\mapsto\ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$

٨) $r:x\mapsto e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

الحل:

الطلب الأول:

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)'(x-1)-(x-1)'(x^2+1)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2x(x-1)-(1)(x^2+1)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

الطلب الثاني:

١) $g(x)=f(\sqrt{x})$

$$g'(x)=(\sqrt{x})'f'(\sqrt{x})$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{x-2\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)^2}\right)=\frac{x-2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)^2}$$

٢) $h(x)=f(x^2)$

$$h'(x)=(x^2)'f'(x^2)$$
$$=2x\left(\frac{(x^2)^2-2x^2-1}{(x^2-1)^2}\right)$$
$$=2x\left(\frac{x^4-2x^2-1}{(x^2-1)^2}\right)$$

٣) $l(x)=f(\sin x)$

$$l'(x)=(\sin x)'\,f'(\sin x)$$
$$=\cos x\left(\frac{(\sin x)^2-2\sin x-1}{(\sin x-1)^2}\right)$$

٤) $k(x)=f(e^x)$

$$k'(x)=(e^x)'f'(e^x)$$
$$=e^x\left(\frac{e^{2x}-2e^x-1}{(e^x-1)^2}\right)$$

٥) $m(x)=f(\ln x)$

$$m'(x)=(\ln x)'f'(\ln x)$$
$$=\frac{1}{x}\left(\frac{(\ln x)^2-2\ln x-1}{(\ln x-1)^2}\right)$$

٦) $n(x)=\sqrt{f(x)}$

$$n'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$
$$=\frac{\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}}=\frac{x^2-2x-1}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}}$$

٧) $p(x)=\ln(f(x))$

$$p'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$=\frac{\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}}{\frac{x^2+1}{x-1}}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.\frac{x-1}{x^2+1}$$
$$=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}$$

٨) $r(x)=e^{f(x)}$

$$r'(x)=f'(x)\ e^{f(x)}$$
$$=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\ e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$$

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$$

أثبت أنّ $f(x)=\frac{x}{2}(1+x^4)f'(x)$

ثم استنتج $g'(x)$ حيثُ $g:\to f(\sin x)$.

الحل:

لدينا:

$$\underbrace{f(x)}_{l_1}=\underbrace{\frac{x}{2}(x^4+1)f'(x)}_{l_2}$$

لدينا:

$$l_2=\frac{x}{2}(x^4+1)f'(x)$$

نوجد المشتق:

$$f'(x)=\frac{2x\left(\sqrt{x^4+1}\right)-x^2\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1}$$
$$=\frac{\frac{2x(x^4+1)-2x^5}{\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1}=\frac{2x^5+2x-2x^5}{(x^4+1)\sqrt{x^4+1}}$$
$$f'(x)=\frac{2x}{(x^4+1)\sqrt{x^4+1}}$$

نضرب الطرفين بـ: $\frac{x}{2}(x^4+1)$

$$\frac{x}{2}(x^4+1)f'(x)=\frac{x}{2}(x^4+1)\frac{2x}{(x^4+1)\sqrt{x^4+1}}$$

$$\to l_2=\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}=f(x)=l_1$$

محققة..

استنتاج مشتق التابع g :

$$g'(x)=f'(\sin x)(\sin x)'$$
$$=\frac{2\sin x}{\sqrt{\sin^4 x+1}(\sin^4 x+1)}(\cos x)$$
$$=\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{\sin^4 x+1}(\sin^4 x+1)}$$

من النعيم ..

أن يرزقك الله طلاباً نخبة نُجباء، تراهم نجوماً يستدل بهم الحائر، بُنياناً واحداً يشدّ بعضه، تحاول وإيّاهم، تثبّتْ معهم، وتغرس بقلوبهم ألف فكرة، يرتحلون معك، جسداً واحداً، يستقون ماء الشغف من أجل تحقيق الهدف، يرسمون من كل كلمةٍ خريطة، ومن كلّ مهمةٍ ثغر .. 😍✌️💙

يميل الواحد فيجد من يأخذه ولا يتركه، مهما تراكمت عليه المهام جاء، ومهما أبعدته الحياة اقترب!

وما إن حَنّ يوماً لنا، يلقانا ننتظره، ونشتاقه .. وإن غاب ضممناه بالسّجود حتى يطمئن .. نفتقِد المُبتعد، ونتفَقّد القريب، والكل لنا حبيب!

يا نخبة .. 🥹💙

لا تنسَوا ساعةً، أنّنا اجتمعنا لله، وأن كلّ محاولاتنا العظيمة، لله!

وأنّ كل شخصٍ تعرّفنا عليه هنا هو جزء منّا لا ينفصل، يأخذ شيئاً من تفاصيلنا وقلبنا والكثير من حبنا 💙

وإن باعدت بيننا المسافات تجمعنا السَّجدات، لا تتركوا يداً وقلباً، شدّوا الوثاق اليوم وغداً، هناك هدف، هناك شغف، هناك 600

💙💙💙💙💙

مكثفة شيفرة الـ 600

المشتقات من مراتب عليا:

تمهيد:

- المشتق الأول للتابع f رمزه $f'(x)$
- المشتق الثاني للتابع f رمزه $f''(x)$
- المشتق من المرتبة n للتابع f رمزه $f^n(x)$
- قاعدة:

$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'$$

انتبه: كل حرف مختلف عن x هو ثابت مشتقه هو الصفر.

التمرين الأول:

في كل حالة من الحالات الآتية احسب المشتقات من المراتب 1 و 2 و 3 للتابع f المعرف بالعلاقة المشار إليها وحدد في كل حالة المجموعة التي تحسب عليها المشتق:

1. $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+x-1$

$$f'(x)=3x^2-x+1$$
$$f''(x)=6x-1$$
$$f'''(x)=6$$

2. $f(x)=x\sqrt{x}$

$$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$
$$f''(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$
$$f'''(x)=\frac{-6}{16x\sqrt{x}}$$

3. $f(x)=\frac{1}{x-1}$

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$$
$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$
$$f'''(x)=\frac{-6}{(x-1)^4}$$

4. $f(x)=\cos 2x+\sin 2x$

$$f'(x)=-2\sin 2x+2\cos 2x$$
$$f''(x)=-4\cos 2x-4\sin 2x$$
$$f'''(x)=8\sin 2x-8\cos 2x$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$$

تحقق أن $\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=f(x)$ أياً يكن x من $\mathbb{R}$

استنتج أنه أياً يكن x من $\mathbb{R}$ كان:

$$(1+x^2)\cdot f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$$

الحل:

$$\underbrace{\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)}_{l_1}=\underbrace{f(x)}_{l_2}$$
$$l_1=\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)$$
$$=\sqrt{1+x^2}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$\sqrt{1+x^2}+x=f(x)=l_2$$

من الطلب السابق نعلم أن:

$$\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=f(x)$$

نشتق الطرفين

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)'\cdot f'(x)+f''(x)\cdot\sqrt{1+x^2}=f'(x)$$
$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x)+f''(x)\cdot\sqrt{1+x^2}=f'(x)$$

نقل إلى الطرف الأيسر:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x)+f''(x)\cdot\sqrt{1+x^2}-f'(x)=0$$

نرتب:

$$f''(x)\cdot\sqrt{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x)-f'(x)=0$$

نضرب ب $\sqrt{1+x^2}$:

$$f''(x)\cdot(1+x^2)+x\cdot f'(x)-\underbrace{f'(x)\cdot\sqrt{1+x^2}}_{=f(x)}=0$$
$$(1+x^2)\cdot f''(x)+x\cdot f'(x)-f(x)=0$$

وهو المطلوب.

أنماط التمارين:

النمط الأول: إثبات صحة علاقة.

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ وفق: $f(x)=-\frac{1}{x}$

الطلب الأول: احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

$$f'(x)=-\left(\frac{-1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}$$
$$f''(x)=-\left(\frac{-2x}{x^4}\right)=\frac{-2}{x^3}$$

الطلب الثاني:

أثبت مستخدماً البرهان بالتدريج أنه مهما تكن $n\geq 1$ يعطى المشتق من المرتبة n بالصيغة: $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}$ وذلك في حالة $x\neq 0$

الحل:

لتكن الخاصة:

$$E(n):\underbrace{f^{(n)}(x)}_{l_1}=\underbrace{(-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$l_1=f^{(1)}(x)=f'(x)=\frac{1}{x^2}$$
$$l_2=(-1)^2\cdot\frac{1!}{x^2}=\frac{1}{x^2}$$

$l_1=l_2$ محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}\dots(*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1}=\underbrace{(-1)^{n+2}\cdot\frac{(n+1)!}{x^{n+2}}}_{l_2}$$

الإثبات:

$$l_1=f^{(n+1)}(x)\cdot\left(\underbrace{f^{(n)}}_{(*)\text{من}}\right)'=\left((-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}\right)'$$
$$=\underbrace{((-1)^{n+1})'\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}}_{=0}+\left(\frac{n!}{x^{n+1}}\right)'\cdot(-1)^{n+1}$$
$$=\frac{-(n+1)x^n\cdot(1)\,n!}{(x^{n+1})^2}\cdot(-1)^{n+1}$$
$$=\frac{(-1)(n+1)x^n\cdot\,n!}{(x^{n+1})^2}\cdot(-1)^{n+1}=(-1)(-1)^{n+1}\frac{(n+1)\,n!}{x^{2n+2}\cdot x^n}$$
$$=(-1)^{n+2}\frac{(n+1)\,!}{x^{2n+2}\cdot x^{-n}}=(-1)^{n+2}\frac{(n+1)\,!}{x^{n+2}}=l_2$$

ملاحظة:

إذا كان المطلوب إثبات صحة علاقة تحوي $f^{(n)}(x)$ فإننا نستخدم الإثبات بالتدريج نمط المساواة مع الانتباه إلى أن القيمة الإبتدائية تكون $n=1$ وذلك في حال عدم وجود شرط البدء

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x\cos x$

احسب عند كل x من $\mathbb{R}$ المشتقات: $f'(x)$ و $f''(x)$ ثم أثبت مستخدماً البرهان بالتريج أنه مهما تكن $n\geq 1$ فلدينا:

$$f^{(n)}(x)=x\cos\left[x+\frac{n\pi}{2}\right]+n\cos\left[x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right]$$

أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

الحل:

$$f'(x)=\cos x-x\sin x$$
$$f''(x)=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x$$
$$f'''(x)=-2\cos x-\cos x+x\sin x=-3\cos x+x\sin x$$

لتكن الخاصة:

$$E(n):\underbrace{f^{(n)}}_{l_1}=\underbrace{x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\cos(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2})}_{l_2}$$

نثبت صحة $E(1)$:

$$l_1 = f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos x - x.\sin x$$
$$l_2 = x.\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos x = -x.\sin x + \cos x$$
$$= \cos x - x.\sin x$$
$l_1 = l_2$ محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$$f^{(n)} = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right) \dots (*)$$

أثبت صحة العلاقة $E(n+1)$: أي يجب إثبات أن:

$$\underbrace{f^{(n+1)}}_{l_1} = \underbrace{x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos(x+\frac{n\pi}{2})}_{l_2}$$

الإثبات

$$l_1 = f^{(n+1)} = \left(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{(*)\text{من}}\right)'$$
$$= \left(x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos(x+(n-1)\frac{\pi}{2})\right)'$$
$$= x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - x\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - n\sin(x+(n-1)\frac{\pi}{2})$$
$$= x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + n\cos(x+(n-1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$$
$$= x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right) + n\cos(x+\frac{n\pi}{2})$$
$$= x\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right) + (n+1)n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) = l_2$$

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln(x)$$

أثبت بالتدريج

$$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

الحل:

لتكن الخاصة:

$$E(n): \underbrace{f^n(n)}_{l_1} = \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$l_1 = f^1(x) = f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$l_2 = \frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x^1} = \frac{1}{x}$$
$l_1 = l_2$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1} = \underbrace{\frac{(-1)^n(n)!}{x^{n+1}}}_{l_2}$$

$$l_1 = f^{(n+1)}(x) = \left(f^n(x)\right)' = \left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right)'$$
$$= \frac{0 - n(x^{n-1})(1)(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{2n}} = \frac{-n(n-1)!\,(-1)^{n-1}(x^{n-1})}{x^{2n}}$$
$$= \frac{-n!\,(-1)^n(-1)^{-1}x^n x^{-1}}{x^n\,x^n} = \frac{n!\,(-1)^n}{x^n.x} = \frac{(-1)^n\,n!}{x^{n+1}} = l_2$$

ومنه العلاقة محققة.

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = (x-1)e^x$

أثبت أنّ: $f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$

الحل:

لتكن الخاصة:

$$E(n): \underbrace{f^{(n)}(x)}_{l_1} = \underbrace{(x+n-1)e^x}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$l_1 = f^{(1)}(x) = f'(x) = xe^x$$
$$l_2 = (x+1-1)e^x = xe^x$$
$l_1 = l_2 \to$ محققة

نفرض صحة $E(n)$

$$f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أن:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1} = \underbrace{(x+n)e^x}_{l_2}$$

$$l_1 = f^{(n+1)}(x) = \left(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{(*)\text{من}}\right)'$$
$$= \left((x+n-1)e^x\right)' = e^x + (x+n-1)e^x$$
$$= e^x(1+x+n-1) = e^x(x+n) = l_2$$
$l_1 = l_2 \to$ محققة

النمط الثاني: استنتاج علاقة ثم إثباتها:

تمرين:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

الطلب الأول:

أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$
على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$

الحل:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{ax+a+bx-b}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$$

بالمقارنة مع: $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

نجد:

$$a+b = 2 \dots (1)$$
$$a-b = 0 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$2a = 2 \to a = 1$$

نعوض في (2) وفق:

$$1-b = 0 \to b = 1$$
$$\to f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

الطلب الثاني:

باستفادة مما سبق أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n \geq 1$ و x ومن $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$$
$$f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4} + \frac{-6}{(x+1)^4}$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n!)}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n!)}{(x+1)^{n+1}}$$

يجب إثباتها:

لتكن الخاصة $E(n)$

$$E(n): f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n!)}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n!)}{(x+1)^{n+1}}$$

نثبت صحة $E(1)$

$$l_1 = f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$
$$l_2 = \frac{(-1)'\times 1}{(x-1)^2} + \frac{(-1)'\times 1}{(x+1)^2}$$
$l_1 = l_2$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n!)}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n!)}{(x+1)^{n+1}} \dots (*)$$

نثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1} = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}}_{l_2}$$

$$l_1 = f^{(n+1)}(x) = \left(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{(*)\text{من}}\right)'$$
$$= \frac{-(n+1)(x-1)^n(1)(-1)^n n!}{((x-1)^{n+1})^2} + \frac{-(n+1)(x-1)^n(1)(-1)^n n!}{((x+1)^{n+1})^2}$$
$$= \frac{(n+1)n!\,(-)(-1)^n}{(x-1)^{2n+2}\cdot(x-1)^{-n}} + \frac{(n+1)n!\,(-)(-1)^n}{(x+1)^{2n+2}\cdot(x-1)^{-n}}$$
$$= \frac{(n+1)!\,(-1)^{n+1}}{(x-1)^{n+2}} + \frac{(n+1)!\,(-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+2}} = l_2$$

مكثفة شيفرة الـ 600

الأستاذ خالد بحبكم ,
المنضد دوبو ياحة
يحب حالو

يا نُخبة..
طَمأنَ اللّهُ روحك، وردَّ إليك قلبك، وباعَدَ بينك والقلق، وجمع عليكَ نفسَكَ، وجَعَلَك أثراً لا يُمحى، وثبَّت خُطاكَ وأحَبَّك

0940 91 67 53 Elite Math خـالد عامـر

المماس:

تعريف	هو مستقيم يشترك مع الخط البياني بنقطة واحدة هي نقطة التماس
الشكل العام	$y = m(x - x_A) + y_A$ أو $y = f'(x)(x - a) + f(a)$
كتابة معادلة المماس	لكتابة معادلة المماس نحتاج: * نقطة التماس: $A(x_A, y_A)$ حيث y_A نحصل عليها من خلال التصوير في التابع f * ميل المماس: m حيث الميل نحصل عليه من التصوير في التابع $f'(x)$ * فتكون المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$
تمرين: اكتب معادلة المماس T المار من $A(5,-3)$ والذي ميله $m = 1$	تحديد النقطة: "معلومة" $A(5,-3)$ تحديد الميل: "معلوم" $m = 1$ كتابة المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A \to y = 1(x - 5) - 3 \to y = x - 8$

أنماط التمارين:

النمط الأول	كتابة معادلة المماس		
الحالة	نص السؤال	فكرة الحل	تمرين
الأولى	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f للتابع f (مُعطى) في النقطة $A(x_A, y_A)$	* تحديد النقطة: $A(x_A, y_A)$ مُعطاة. * تحديد الميل: نشتق التابع ويكون الميل $m = f'(x_A)$ * كتابة المعادلة $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{4}{1+e^x}$ اكتب معادلة المماس T لـ C_f في النقطة $A(0,2)$ تحديد النقطة: $A(0,2)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2}$ $m = f'(0) = -1$ المعادلة: $T: y = -1(x - 0) + 2 \to y = -x + 2$
الثانية	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي فاصلتها x_A	* تحديد النقطة: فاصلة نقطة التماس x_A ترتيب نقطة التماس $y = f(x_A)$ * تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ * كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق: $f(x) = 2 + \ln x$ اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها $x_A = 1$ تحديد النقطة A: $x_A = 1 \ , \ y_A = f(1) = 2 \to A(1,2)$ تحديد الميل: نشتق التابع f وفق: $f'(x) = \frac{1}{x}$ $m = f'(1) = 1$ المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A \to y = 1(x - 1) + 2$
الثالثة	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي ترتيبها y_A	* نحل المعادلة $f(x) = y_A$ وحل المعادلة هو فاصلة نقطة التماس. تحديد النقطة: فاصلة نقطة التماس: (x_A حلول المعادلة $f(x) = y_A$) ترتيب نقطة التماس: $y_A = f(x_A)$ * تحديد الميل: * نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ * كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$ ملاحظة: عدد حلول المعادلة هو عدد المماسات	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sqrt{x^2 + 8}$ اكتب معادلة المماس لـ C_f في النقطة التي ترتيبها $y_A = 3$ النقطة: لتحديد فاصلة النقطة x_A نحل المعادلة: $f(x) = y_A$ $f(x) = 3 \to \sqrt{x^2 + 8} = 3$ $x^2 + 8 = 9 \to x^2 = 1$ إما $x = 1$ تحديد الميل: نشتق التابع f وفق: $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$ $m = f'(1) = \frac{1}{3}$ كتابة المعادلة: $T_1: y = m(x - x_A) + y_A \to y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ أو $x = -1$ $m = f'(1) = -\frac{1}{3}$ كتابة المعادلة: $T_2: y = m(x - x_B) + y_B \to y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
الرابعة	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.	بما أن نقطة التماس هي نقطة تقاطع الخط البياني مع محور التراتيب فإنّ $x_A = 0$ * تحديد نقطة التماس: فاصلة نقطة التماس: $x_A = 0$ ترتيب نقطة التماس: $y_A = f(x_A)$ * تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ * كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x + 1 + \frac{4}{e^x + 1}$ اكتب معادلة المماس T لـ C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب. تحديد النقطة: $x_A = 0 \ , \ y_A = f(0) = 3 \to A(0,3)$ تحديد الميل نشتق التابع f وفق: $f'(x) = 1 + \frac{-4e^x}{(e^x+1)^2}$ $m = f'(0) = 0$ كتابة المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A \to y = 3$
الخامسة	① اكتب معادلة المماس T لـ C_f في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل. ② اكتب معادلة المماس T لـ C_f في النقطة التي فاصلتها تعدم $f(x)$.	* تحديد نقطة التماس: تحديد الفاصلة: (x_A حل المعادلة $f(x) = 0$) * تحديد الترتيب: $y_A = f(x_A)$ * تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ * كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$ تنويه هام: عدد حلول المعادلة هو عدد المماسات.	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ اكتب معادلة المماس T لـ C_f في النقطة التي فاصلتها تعدم $f(x)$ لتحديد فاصلة نقطة التماس نحل المعادلة $f(x) = 0$ وفق: $\frac{2x}{x-1} = 0 \to 2x = 0 \to x = 0$ $x_A = 0 \ , \ y_A = f(0) = 0 \to A(0,0)$ تحديد الميل نشتق التابع f وفق: $f'(x) = \frac{2x-2-2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$ $m = f'(0) = -2$ كتابة المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A \to y = -2x$

التنظير سهل، الحَرَكة أصعب، دَوام الحَرَكة أشَدّ صُعوبةً، والثَّبات لُبّ المسألة، ولكلّ مقامٍ أهله.. 💙🤝

600 أداة شرح مجانية

السادسة	اكتب معادلة المماس لـ C_f في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$	* تحديد نقطة التماس: تحديد الفاصلة: حل المعادلة $x_A = (f''(x) = 0)$ تحديد التراتيب: $y_A = f(x_A)$ * تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ * كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x}$ اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة A منه ينعدم فيها المشتق الثاني. لتحديد فاصلة نقطة التماس نحل المعادلة $f''(x) = 0$ سنعود بعد دقيقة: $f'(x) = \frac{-\ln(x)}{x^2}$ ، $f''(x) = \frac{-1+2\ln(x)}{x^3}$ عدنا: نحل المعادلة $f''(x) = 0$ وفق: $f''(x) = 0 \to -1 + 2\ln(x) = 0 \to \ln(x) = \frac{1}{2}$ $x_A = \sqrt{e}$ ، $y_A = f(\sqrt{e}) = \frac{3}{2\sqrt{e}} \to A\left(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}}\right)$ تحديد الميل: $m = f'(\sqrt{e}) = -\frac{1}{2e}$ كتابة المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A \to y = -\frac{1}{2e}x + \frac{2}{\sqrt{e}}$
السابعة	اكتب معادلة المماس T لـ C_f علماً أنّ ميله m	* تحديد نقطة التماس: تحديد الفاصلة: حل المعادلة $x_A = (f'(x) = m)$ تحديد التراتيب: $y_A = f(x_A)$ * تحديد الميل m : معطى. * كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = 2^{x^2-2x}$ اكتب معادلة المماس d مماس الخط C في النقطة التي فاصلتها تعدم $f'(x)$ $f(x) = e^{\ln 2^{(x^2-2x)}} = e^{(x^2-2x)\ln 2}$ نوجد المشتق: $f'(x) = ((2x-2)\ln(2)).e^{(x^2-2x).\ln(2)}$ $f'(x) = 0 \to ((2x-2)\ln 2)e^{(x^2-2x)\ln 2} = 0$ إما $(2x-2)\ln 2 = 0 \to 2x - 2 = 0$ $x_A = 1$ ، $y_A = f(1) = \frac{1}{2} \to A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ تحديد الميل: $m = 0$ كتابة المعادلة: $d: y = m(x - x_A) + y_A \to y = \frac{1}{2}$ أو $e^{(x^2-2x)\ln 2} = 0 \to$ مستحيلة الحل
الثامنة	اكتب معادلة المماس لـ C_f المار من $A(x_A, y_A)$	نفرض أنّ نقطة التماس هي $M(a, f(a))$ نوجد $f'(x)$ فتكون: $m = f'(a)$ نكتب معادلة المماس وفق: $T: y = m(x - x_M) + y_M$ بما أنّ المماس مار من A فهذا يعني أنّ إحداثيات النقطة A تحقق معادلة المماس ونعوض هذه الإحداثيات بمعادلة المماس فنحصل على قيمة a ثم نعوض قيم a في معادلة T فنحصل على المماسات المطلوبة.	f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق: $f(x) = \ln x$ اكتب معادلة المماس للخط C المار بالمبدأ. تحديد النقطة: بفرض أنّ الفاصلة $x_A = a$ ومنه الترتيب: $y_A = f(a) = \ln a$ ومنه النقطة: $A(a, \ln a)$ تحديد الميل: نشتق التابع f وفق: $f'(x) = \frac{1}{x}$ $m = f'(a) = \frac{1}{a}$ كتابة المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A \to y = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a \dots (*)$ بما أنّ T مماس مار من المبدأ فإنّ النقطة $(0,0)$ تحقق معادلة المماس أيّ: $0 = \frac{1}{a}(0) - 1 + \ln a \to \ln a = 1 \to a = e$ نعوض في علاقة $(*)$ وفق: $T: y = \frac{1}{e}x - 1 + 1 \to y = \frac{1}{e}x$

حالات خاصة لمعادلة المماس:

نص السؤال	فكرة الحل
اكتب معادلة المماس T الذي يوازي المستقيم d (ميله معلوم أو يُحسب)	يكون: $m_T = m_d$ ولكتابة المعادلة نتابع كما سبق.
اكتب معادلة المماس T الذي يعامد المستقيم d (ميله معلوم أو يُحسب)	يكون: $m_T.m_d = -1$ ولكتابة المعادلة نتابع كما سبق.
اكتب معادلة المماس T المار بالنقطتين A و B	يكون: $m_T = \frac{\text{فرق الترتيبات}}{\text{فرق الإكسات}}$ ولكتابة المعادلة نتابع كما سبق.
اكتب معادلة المماس T المرسوم في شكل	نحدد نقطتين من الشكل تنتميان إلى المماس يكون: $m_T = \frac{\text{فرق الترتيبات}}{\text{فرق الإكسات}}$ ولكتابة المعادلة نتابع كما سبق.
اكتب معادلة المماس الأفقي	يكون: $m_T = 0$ ومعادلة المماس هي: $y = y_A$
اكتب معادلة المماس الشاقولي	يكون: m_T غير معرّف. ومعادلة المماس هي: $x = x_A$
اكتب معادلة المماس في القيمة الحدية الصغرى أو الكبرى.	يكون: $m_T = 0$ ومعادلة المماس هي: $y = y_A$

النمط الثاني	اختبار وجود مماس	
نص السؤال	هل يقبل الخط البياني مماساً ميله m "حيث الميل إما معلوم أو يُحسب"	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sqrt{4x^2+1} - 2x$ هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = 9$ الحل: نحل المعادلة: $f'(x) = 0$ $f'(x) = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}} - 2 = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}} - 2$ $f'(x) = 0$ $\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}} - 2 = 0 \to \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}} = 2 \to 2x = \sqrt{4x^2+1}$ نربع بشرط $x > 0$ $4x^2 = 4x^2 + 1 \to 1 \neq 0$ مستحيلة الحل.. الخط البياني لا يقبل مماساً موازياً لمستقيم الذي معادلته $y = 9$
فكرة الحل	* نحل المعادلة $f'(x) = m$ * نميز الحالات: ① الحالة الأولى: إذا كانت المعادلة مستحيلة الحل فهذا يعني ان الخط البياني لا يقبل مماسا ميله m ② الحالة الثانية: إذا كان للمعادلة حل وحيد فهذا يعني أنّ: الخط البياني يقبل مماسا ميله m هذا الحل هو فاصلة نقطة التماس "ولكتابة معادلة هذا المماس نتابع كما سبق" ③ الحالة الثالثة: إذا كان للمعادلة حلّان فهذا يعني أنّ: الخط البياني يقبل مماسان ميل كل منهما هو m وحلول المعادلة هي فواصل نقاط التماس "ولكتابة معادلة كل مماس تتابع كما سبق" ④ الحالة الرابعة: وهكذا ... انتبه: عدد الحلول هو عدد المماسات	

مكثفة شيفرة الـ 600

النمط الثالث	المماس المشترك
نص السؤال	أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها x_0
فكرة الحل	1) نثبت أنّ $f(x_0)=g(x_0)$ 2) نثبت أنّ $f'(x_0)=g'(x_0)$

التمرين الأول:

في معلم متجانس C_f و C_g هما الخطّان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$$

$$g(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

أ. أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها تساوي 1, يُطلب إيجاد معادلته.

الحل:

الشرط الأول: يجب تحقق: $f(1)=g(1)$

$$f(1)=(1)e^0=1$$

$$g(1)=\frac{1}{1}=1$$

ومنه:

$$f(1)=g(1)=1$$

الشرط الثاني: يجب تحقق $f'(1)=g'(1)$

سنعود بعد دقيقة:

$$f'(x)=(3-2x)e^{-x+1}$$

$$f'(1)=(1)(e^0)=1$$

$$g'(x)=\frac{-2x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2}$$

$$g'(1)=\frac{1}{1}=1$$

ومنه:

$$f'(1)=g'(1)=1$$

ومنه C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة $(1,1)$ وميله $m=1$ ومعادلته:

$$T: y=1(x-1)+1\rightarrow y=x$$

التمرين الثاني:

C_f و C_g خطين بيانيين للتابعين f و g المعرفين على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{1}{2}x^3$ و $g(x)=x^2-\frac{1}{2}x$

أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

الحل:

لتحديد فاصلة المماس المشترك نحل المعادلة:

$$f(x)=g(x)$$

$$\frac{1}{2}x^3=x^2-\frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{1}{2}x=0$$

$$x\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)=0$$

إما $x=0$

أو $\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}=0$

$$x^2-2x+1=0$$

$$(x-1)^2=0$$

$$x=1$$

اختبارا المماس المشترك عند $x=0$:

الشرط الأول: يجب تحقق $f(0)=g(0)$

$$f(0)=0\ ,\ g(0)=0$$

$$\rightarrow f(0)=g(0)=0$$

الشرط الثاني: يجب تحقق $f'(0)=g'(0)$

سنعود بعد دقيقة:

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2\rightarrow f'(0)=0$$

$$g'(x)=2x-\frac{1}{2}\rightarrow g'(0)=-\frac{1}{2}$$

عدنا:

نلاحظ أنّ: $f'(0)\neq g'(0)$

ومنه C_f و C_g لا يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x=0$.

اختبارا المماس المشترك عند $x=1$:

الشرط الأول: يجب تحقق $f(1)=g(1)$

$$f(1)=\frac{1}{2}\ ,\ g(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow f(1)=g(1)=\frac{1}{2}$$

الشرط الثاني: يجب تحقق $f'(1)=g'(1)$

سنعود بعد دقيقة:

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2\rightarrow f'(1)=\frac{3}{2}$$

$$g'(x)=2x-\frac{1}{2}\rightarrow g'(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

عدنا:

نلاحظ أنّ: $f'(0)=g'(0)=\frac{3}{2}$

ومنه C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ وميله $m=\frac{3}{2}$ ومعادلته:

$$T: y=\frac{3}{2}(x-1)+\frac{1}{2}\rightarrow y=\frac{3}{2}x-1$$

وَيُدهشك اللّه بما تمنّيتهُ ..
بعد أن حسِبتهُ مُستحيلاً

التقريب التآلفي المحلي:

الاستخدام	
نص السؤال	يُستخدم التقريب التآلفي المحلي في حساب صورة عدد عشري وفق القانون: $f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$

نص السؤال	فكرة الحل	تمرين
* احسب قيمة تقريبية لـ $f(a+h)$ * باستخدام التقريب التآلفي أوجد قيمة لـ $x=a+h$ * استنتج القيمة التقريبية للتابع f عند $x=a+h$	* لدينا $x=a+h$ عدد عشري: - نحدد a حيث a عدد صحيح مناسب. - نحدد h حيث h عدد عشري صغير جداً ويتم ذلك وفق: $h=x-a$ * نشتق التابع f * نوجد كلاً من $f'(a)$ و $f(a)$ * نطبق القانون: $f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$	**التمرين الأول:** ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-2,2[$ وفق: $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$ جد قيمة تقريبية للتابع f عند النقطة $x=0.1$ $x=0.1\rightarrow a=0\ ,\ h=0.1$ $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h$ سنعود بعد دقيقة: $f'(a)=?$ و $f(a)=f(0)=0$ و $h=0.1=\frac{1}{10}$ $f'(x)=\frac{\left(\frac{x+2}{2-x}\right)'}{\frac{x+2}{2-x}}=\frac{4}{-x^2+4}\rightarrow f'(0)=1$ عدنا.. $f(0.1)\cong f(0)+f'(0).h\cong 0+(1)(0.1)\cong 0.1$ **التمرين الثاني:** ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=(x-1)e^x$ جد قيمة تقريبية لـ $f(0.1)$ $x=0.1\rightarrow a=0\ ,\ h=0.1$ $f(a+h)\cong f(a)+h.f'(a)$ سنعود بعد دقيقة: $f'(a)=?$ و $f(a)=f(0)=-1$ و $h=0.1=\frac{1}{10}$ $f'(x)=e^x+(x-1)e^x=x.e^x\rightarrow f'(0)=0$ عدنا: $f(0.1)\cong f(0)+h.f'(0)\cong -1+0(0.1)\cong -1$

$h=x-a$	a	$x=a+h$
0.1	4	**4.1**
0.3	0	**0.3**
0.3	15	**15.3**
−0.3	16	**15.7**
−0.1	4	**3.9**
0.3	−6	**−5.7**
0.1	1	**1.1**

600 أداة في شريط واحد
ELITE MATH

أنماط التمارين:

النمط الأول	قابلية الاشتقاق عند a		
الحالة	الأولى	الثانية	الثالثة
نص السؤال	* هل التابع f اشتقاقي عند a ؟وفسر النتيجة هندسياً. * ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a وفسر النتيجة هندسياً.	ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a من اليمين وفسر النتيجة هندسياً.	ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a من اليسار وفسر النتيجة هندسياً.
فكرة الحل	نشكل التابع المساعد g "تابع تعريف العدد المشتق" وفق: $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ حيث مجموعة تعريفه تعطى: $D_g=D_f\backslash\{a\}$ نوجد $\lim_{x\to a} g(x)$ ونميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كانت: $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ فإنّ: التابع f غير اشتقاقي عند a التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل مماساً شاقولياً معادلته $x=a$ الحالة الثانية: إذا كانت: $\lim_{x\to a} g(x)=l$ حيث l عدد حقيقي فإنّ: التابع f اشتقاقي عند a وقيمة مشتقه $f'(a)=l$ التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل مماساً ميله $m=l$ في النقطة $(a,f(a))$ نكتب معادلة المماس وفق: $y=m(x-a)+f(a)$	نشكل التابع المساعد g وفق: $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نوجد $\lim_{x\to a^+} g(x)$ ونميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كانت: $\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty$ فإن: التابع f غير اشتقاقي عند a من اليمين التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل نصف مماس شاقولي من اليمين معادلته $x=a$ الحالة الثانية: إذا كانت: $\lim_{x\to a^+} g(x)=l$ حيث l عدد حقيقي فإنّ: التابع f اشتقاقي عند a من اليمين وقيمة مشتقه $f'(a^+)=l$ التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل نصف مماس من اليمين ميله $m=l$ في النقطة $(a,f(a))$ نكتب معادلة نصف المماس وفق: $y=m(x-a)+f(a)$	نشكل التابع المساعد g وفق: $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نوجد $\lim_{x\to a^-} g(x)$ ونميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كانت: $\lim_{x\to a^-} g(x)=\infty$ فإن: التابع f غير اشتقاقي عند a من اليسار التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل نصف مماس شاقولي من اليسار معادلته $x=a$ الحالة الثانية: إذا كانت: $\lim_{x\to a^-} g(x)=l$ حيث l عدد حقيقي فإنّ: التابع f اشتقاقي عند a من اليسار وقيمة مشتقه $f'(a^-)=l$ التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل نصف مماس من اليسار ميله $m=l$ في النقطة $(a,f(a))$ نكتب معادلة نصف المماس وفق: $y=m(x-a)+f(a)$

ثانوي:

أحياناً يكون نص السؤال ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a وكان التابع f يحوي قيمة مطلقة فإننا:

نتخلص منها ونناقش حالتين من اليمين ومن اليسار أو بالاعتماد على مجموعة تعريف التابع g فإننا ندرس نهايته عند a من اليمين ومن اليسار

فكرة الحل:

* نشكل التابع المساعد g وفق: $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
* نوجد $\lim_{x\to a^+} g(x)$ و $\lim_{x\to a^-} g(x)$
* ونميز:

$\lim_{x\to a^-} g(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=$ ☐		$\lim_{x\to a^-} g(x)\neq\lim_{x\to a^+} g(x)$ يكون التابع f غير اشتقاقي عند a	
		$\lim_{x\to a^-} g(x)=$ ☐	$\lim_{x\to a^+} g(x)=$ ☐
☐ $=\infty$	☐ $=l$	☐ $=\infty$	☐ $=\infty$
التابع f غيراشتقاقي عند a والخط البياني يقبل مماس شاقولي معادلته $x=a$	التابع f اشتقاقي عند a والخط البياني يقبل مماس ميله $m=l$ في النقطة $(a,f(a))$	التابع f غير اشتقاقي عند a من اليسار والخط البياني يقبل نصف مماس شاقولي من اليسار معادلته $x=a$	التابع f غير اشتقاقي عند a من اليمين والخط البياني يقبل نصف مماس شاقولي من اليمين معادلته $x=a$
		☐ $=l$	☐ $=l$
		التابع f اشتقاقي عند a من اليسار والخط البياني يقبل نصف مماس من السيار ميله $m=l$ في النقطة $(a,f(a))$	التابع f اشتقاقي عند a من اليمين والخط البياني يقبل نصف مماس من اليمين ميله $m=l$ في النقطة $(a,f(a))$

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$f(x)=e^{x+\ln x}\quad,\quad f(0)=0$

ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

ليكن لدينا التابع المساعد $g(x)$ المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{e^{x+\ln x}}{x}$

$\lim_{x\to 0} g(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

$g(x)=\frac{e^{x+\ln x}}{x}=\frac{e^x.e^{\ln x}}{x}=\frac{e^x.x}{x}=e^x$

$\lim_{x\to 0} g(x)=1$

التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط البياني يقبل مماس ميله $m=1$ في النقطة $A(0,0)$

$T: y=m(x-x_A)+y_A \to y=x$

التمرين الثاني:

ليكن f التابع المعرف على المجال $]1,+\infty[$ المعطى بالعلاقة:

$f(x)=\sqrt{\ln(x)}\ (x-1)$

١. أثبت أن التابع f اشتقاقي عند $x=1$

٢. احسب $f'(x)$ على $]1,+\infty[$

٣. استنتج مشتق التابع g المعرف على المجال $]1,+\infty[$ وفق: $g(x)=\sqrt{\ln(\sqrt{x})}\ (\sqrt{x}-1)$

الحل:

الطلب الأول:

نشكل التابع المساعد $g(x)$ المعرف على $]1,+\infty[$ وفق:

$g(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{\ln(x)}\ (x-1)}{x-1}=\sqrt{\ln(x)}$

$\lim_{x\to 1} g(x)=0$

إذاً f اشتقاقي عند الواحد.

الطلب الثاني:

حساب $f'(x)$:

$f'(x)=\left(\sqrt{\ln x}\right)'(x-1)+(x-1)'\left(\sqrt{\ln x}\right)$

$=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}(x-1)+\left(\sqrt{\ln x}\right)$

$=\frac{x-1+2x.\ln x}{2x\sqrt{\ln x}}$

مكثفة شيفرة الـ 600

الطلب الثالث:

$$g(x)=f(\sqrt{x})$$
$$g'(x)=(\sqrt{x})'f'(\sqrt{x})$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}\sqrt{\ln(\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}\right)$$
$$g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}\sqrt{\ln(\sqrt{x})}}{2x}$$

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x}{|x|+1}$$

ادرس قابلية الاشتقاق للتابع f عند الصفر من اليمين.

ادرس قابلية الاشتقاق للتابع f عند الصفر من اليسار.

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر؟ علل ذلك..

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ ;D_g=\mathbb{R}\backslash\{0\}$$
$$g(x)=\frac{\frac{2x}{|x|+1}-0}{x}=\frac{2}{|x|+1}$$

الحالة (1): دراسة قابلية الاشتقاق من الصفر يمين أيّ:

$$x>0\rightarrow g(x)=\frac{2}{x+1}$$
$$\lim_{x\to0^+}g(x)=2$$

الحالة (2): دراسة قابلية الاشتقاق من اليسار أيّ:

$$x<0\rightarrow g(x)=\frac{2}{1-x}$$
$$\lim_{x\to0^-}g(x)=2$$

وبما أنّ:

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^-}g(x)$$

إذاً:

$$\lim_{x\to0}g(x)=2$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط البياني يقبل مماساً ميله $m=2$ في النقطة A:

$$x_A=0\ ,\ y_A=0$$
$$T:y=m(x-x_A)+y_A\rightarrow y=2x$$

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,2]$ وفق:

$$f(x)=x.\sqrt{6x-3x^2}$$

١. جد $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ ثم بين طبيعة المماس في المبدأ.

٢. ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الـ 2 وما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

٣. احسب $f'(x)$ ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $f(1.01)$

الحل:

الطلب الأول:

إيجاد $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ لدينا:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x\sqrt{6x-3x^2}}{x}=\sqrt{6x-3x^2}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$

طبيعية المماس في المبدأ لدينا:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط البياني C_f يقبل مماساً في المبدأ $(0,0)$ ميله $m=0$ ومعادلته $y=0$

الطلب الثاني:

قابلية اشتقاق التابع f عند الـ 2 :

ليكن لدينا التابع g المعرف على $[0,2[$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x\sqrt{6x-3x^2}}{x-2}$$

ومنه $\lim_{x\to2}g(x)$ حالة عدم تعين من الشكل $\frac{0}{0}$.

$$g(x)=\frac{x\sqrt{6x-3x^2}}{x-2}=\frac{x\sqrt{3x(2-x)}}{-(2-x)}$$
$$=\frac{-x\sqrt{3x}\sqrt{2-x}}{2-x}=\frac{-x\sqrt{3x}}{\sqrt{2-x}}$$
$$\lim_{x\to2}g(x)=\frac{-2\sqrt{6}}{0^+}=-\infty$$

إذاً: التابع f غير اشتقاقي عند الـ 2

التأويل الهندسي لهذه النتيجة:

الخط البياني C_f يقبل مماساً شاقولياً معادلته $x=2$.

الطلب الثالث:

حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=(x)'\left(\sqrt{6x-3x^2}\right)+(\sqrt{6x-3x^2})'(x)$$
$$=(1)\left(\sqrt{6x-3x^2}\right)+\left(\frac{6-6x}{2\sqrt{6x-3x^2}}\right)(x)$$
$$=\sqrt{6x-3x^2}+\frac{3x-3x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}$$

بعد توحيد المقامات نجد:

$$f'(x)=\frac{6x-3x^2+3x-3x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}=\frac{-6x^2+9x}{\sqrt{6x-3x^2}}$$

القيمة التقريبية لـ $f(1.01)$:

لدينا:

$$a+h=1.01$$

حيث: $a=1$ و $h=0.01=\frac{1}{100}$

ولدينا:

$$f(a)=f(1)=\sqrt{3}$$
$$f'(x)=\frac{-6x^2+9x}{\sqrt{6x-3x^2}}$$
$$f'(a)=f'(1)=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

ومنه:

$$f(a+h)\cong f(a)+f'(a)h$$
$$f(1.01)\cong\sqrt{3}+(\sqrt{3})(0.01)$$
$$f(1.01)\cong(1.01)(\sqrt{3})$$
$$f(1.01)\cong1.7$$

النمط الثاني: استنتاج نهاية:

نص السؤال:

أوجد: $f(a)$ و $f'(x)$ و $f'(a)$ ثم استنتج

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

فكرة الحل:

نوجد كلاً من $f(a)$ و $f'(x)$ و $f'(a)$

قانون يدلنا على إيجاد النهاية:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=f'(a)$$

التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرف بالعلاقة: $f(x)=\sqrt{x^2+x+2}$

أوجد كلاً من: $f(1)$ و $f'(x)$ و $f'(1)$

ثم استنتج: $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$

الحل:

$$f(1)=2$$
$$f'(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\rightarrow f'(1)=\frac{3}{2}$$

استنتاج النهاية:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(1)=\frac{3}{2}$$

التمرين الثاني:

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\cos2x$

احسب $f'(x)$ و $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ و $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

ثم استنتج: $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos2x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$

الحل:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$
$$f'(x)=-2\sin2x\rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$$

استنتاج النهاية:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos2x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$$

التمرين الثالث:

ليكن g التابع المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق العلاقة:

$$g(x)=\ln(\sqrt{x+1})$$

احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$

ثم واستنتج: $\lim_{x\to1}\frac{\ln(\sqrt{x+1})-\ln(\sqrt{2})}{x-1}$

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف وفق:

$$g(x)=\ln(\sqrt{x+1})$$
$$g(1)=\ln\sqrt{2}$$
$$g'(x)=\frac{1}{2x+2}\rightarrow g'(1)=\frac{1}{4}$$

استنتاج النهاية:

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(\sqrt{x+1})-\ln(\sqrt{2})}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{4}$$

التمرين الرابع:

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=e^{\sin x}$

احسب $f(0)$ و $f'(x)$ و $f'(0)$

ثم واستنتج: $\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$

الحل:

$$f(0)=e^0=1$$
$$f'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$$
$$f'(0)=(1)e^0=1$$
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=f'(0)=1$$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا التابع: $f(x)=3^{x^2-2x}$

احسب $f(0)$ و $f'(x)$ و $f'(0)$

ثم استنتج: $\lim_{x\to0}\frac{3^{x-2x}-1}{x}$

الحل:

$$f(x)=e^{\ln(3)^{x^2-2x}}=e^{(x^2-2x)\ln3}$$
$$f(0)=1$$
$$f'(x)=\left((x^2-2x)\ln3\right)'e^{(x^2-2x)\ln3}$$
$$=\left((2x-2)\ln3\right)e^{(x^2-2x)\ln3}$$
$$f'(0)=-2\ln3$$
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{3^{x^2-2x}-1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$$
$$=f'(0)=-2\ln3$$

النمط الثالث: إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$:

نص السؤال: أوجد نهاية التابع f عند a بحيث يكون المقام هو $(x-\text{المسعى})$.

فكرة الحل:

نفرض البسط على أنه $g(x)$.

نوجد $g(a)$ و $g'(x)$ و $g'(a)$.

نطبق القانون:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]=g'(a)$$

تمرين:

في كل من الحالات الآتية احسب في حال وجودها نهاية التابع f عند a المشار اليها:

1. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\ ;a=1$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $\frac{0}{0}$

نشكل التابع g المعرف وفق:

$$g(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}$$

ولدينا:

$$g(1)=0$$
$$g'(x)=-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\to g'(1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. $f(x)=\frac{\cos^2 x-1}{x-\pi}\ ;a=\pi$

$\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $\frac{0}{0}$

نشكل التابع g المعرف وفق:

$$g(x)=\cos^2 x-1$$

ولدينا:

$$g(\pi)=0$$
$$g'(x)=2\cos x\sin x\to g'(\pi)=0$$

ومنه:

$$\lim_{x\to\pi} f(x)=\lim_{x\to\pi}\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}=g'(\pi)=0$$

3. $f(x)=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{1-x}\ ;a=1$

$$f(x)=-\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{x-1}$$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $\frac{0}{0}$

نشكل التابع g المعرف وفق:

$$g(x)=-\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$

ولدينا:

$$g(1)=0$$
$$g'(x)=\frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)\to g'(1)=-\frac{3\pi}{2}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=-\frac{3\pi}{2}$$

4. $f(x)=\frac{e^{\sin x}-1}{x}\ ;a=0$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $\frac{0}{0}$

نشكل التابع g المعرف وفق:

$$g(x)=e^{\sin x}-1$$

ولدينا:

$$g(0)=0$$
$$g'(x)=\cos x\,e^{\sin x}\to g'(0)=1$$

ومنه:

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=1$$

5. $f(x)=\frac{\ln(1+\sin x)}{x}\ ;a=0$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)$

حالة عدم تعين من الشكل: $\frac{0}{0}$

نشكل التابع g المعرف وفق:

$$g(x)=\ln(1+\sin x)$$

ولدينا:

$$g(0)=0$$
$$g'(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}\to g'(0)=1$$

ومنه:

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=1$$

قابلية الاشتقاق على مجال:

نستخدم قواعد وخواص

تمرين:

في كل من الحالات الآتية تحقق هل f اشتقاقي على المجال I

1. $f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x-1}\ ;\ I=]1,+\infty[$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ فهو اشتقاقي على $I=]1,+\infty[$

2. $f(x)=x^2.\cos x\ ;\ I=\mathbb{R}$

$x\mapsto x^2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$x\mapsto \cos x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

ومنه التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه عبارة عن جداء تابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$

3. $f(x)=\tan(x)-x\ ;\ I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$x\mapsto \tan x$ اشتقاقي على:

$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ فهو اشتقاقي على المجال $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$x\mapsto x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ومنه التابع f اشتقاقي على I

4. $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}\ ;\ I=\mathbb{R}$

$x\mapsto x^2+2x+3$ موجب واشتقاقي على $\mathbb{R}$

5. $f(x)=x^2\sqrt{x}\ ;\ I=[0,+\infty[$

المرحلة الأولى:

دراسة قابلية الاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$:

$x\mapsto x^2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $]0,+\infty[$

x موجب واشتقاقي على $]0,+\infty[$

إذاً التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ لأنه جداء تابعان اشتقاقيان على $]0,+\infty[$

المرحلة الثانية:

دراسة قابلية الاشتقاق عند الصفر:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\frac{x^2.\sqrt{x}}{x}=x\sqrt{x}$$
$$\lim_{x\to0} g(x)=0$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر.

مما سبق نستنتج أنّ التابع f اشتقاقي على المجال $I=[0,+\infty[$

6. $f(x)=\sqrt{x-1}\ ;\ I=[1,+\infty[$

المرحلة الأولى:

دراسة قابلية الاشتقاق على المجال $]1,+\infty[$:

$x\mapsto x-1$ موجب واشتقاقي على $]1,+\infty[$, إذاً f اشتقاقي على $]1,+\infty[$

المرحلة الثانية:

دراسة قابلية الاشتقاق عند الواحد:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$\lim_{x\to1} g(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

إذاً التابع f غير اشتقاقي عند الواحد ومما سبق نجد أنّ f غير اشتقاقي على المجال $[1,+\infty[$

7. $f(x)=\ln(\ln(\ln x))\ ;I=]e,+\infty[$

التابع: $x\mapsto \ln x$ اشتقاقي وموجب تماماً على I ومنهُ نستنتج أنّ: $x\mapsto \ln(\ln x)$ اشتقاقي على I وهو أيضاً موجب تماماً على I لأنه في حالة $x>e$ يكون $\ln x>1$ وبالتالي $\ln(\ln x)>0$ إذن f اشتقاقي على I

8. $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{\ln x}\right)$

التابع: $x\mapsto \frac{x+1}{\ln x}$ اشتقاقي وموجب تماماً على I ومنهُ نستنتج أنّ f اشتقاقي على I

اطراد تابع:

مبرهنة	ليكن f تابعاً اشتقاقياً على مجال I , تابعه المشتق f' ١. إذا كان f' موجباً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متزايداً تماماً على I ٢. إذا كان f' سالباً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متناقصاً تماماً على I ٣. إذا كان f' معدوماً على I كان f ثابتاً على I
الخلاصة	نقصد بدراسة اطراد تابع هو تعرّف المجالات التي يكون f متزايد تماماً أو متناقص تماماً عليها أو ثابتة عليها ويمكن أن تُجزئ هذه الدراسة بالاستفادة من المقدمة السابقة عن طريق دراسة إشارة المشتق الأول وتنظيم جدول بهذه الدراسة (يُسمى جدول اطراد تابع) ويتم تنظيمه وفق:

مجموعة تعريف التابع f + القيم التي تعدم $f'(x)$	x
إشارات + أصفار	$f'(x)$
صور + أسهم	$f(x)$

مكثفة شيفرة الـ 600

التمرين الأول:

ادرس اطراد f على المجال I.

1. $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x\ ;I=\mathbb{R}_+^*$

لدينا التابع f اشتقاقي على I ومنه:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$$
$$=\frac{x-1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0\rightarrow\frac{x-1}{x^2}=0$$
$$x-1=0\rightarrow x=1\in I\rightarrow f(1)=1$$

نظم جدول الاطراد:

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	1	$\nearrow$

2. $f(x)=2e^x-x-2\ ;I=\mathbb{R}$

لدينا التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومنه:

$$f'(x)=2e^x-1$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0$$
$$2e^x-1=0\rightarrow 2e^x=1$$
$$e^x=\frac{1}{2}\rightarrow x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2\in I$$
$$\rightarrow f(-\ln(2))=-1+\ln 2$$

نظم جدول الاطراد:

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$

دراسة تغيرات تابع:

نص السؤال	ادرس تغيرات التابع f
فكرة الحل	١. نحدد مجموعة التعريف ونكتبها على هيئة مجالات ٢. نوجد النهايات عند أطراف مجالات مجموعة التعريف المفتوحة ونوجد الصورة عند الأطراف المغلقة ٣. نوجد $f'(x)$ ٤. نعدم $f'(x)$ أي نحل المعادلة $f'(x)=0$ ٥. ننظم جدول التغيرات وفق: حيث: ○ حقل x نضع فيه: مجموعة تعريف التابع وقيم x التي تعدم $f'(x)$ "انتبه القيم توضع بالترتيب" ○ حقل $f'(x)$ نضع فيه: نضع العدد صفر تحت قيم x التي تعدم $f'(x)$ والإشارات والرمز (||) قصيرة عندما يكون التابع f غير اشتقاقي انتبه الرمز (||) قصيرة فقط في حقل $f'(x)$ ○ حقل $f(x)$ نضع فيه: النهايات والصور والأسهم والرمز (||) طويلة عندما يكون التابع f غير معرف انتبه الرمز (||) طويلة تأتي في حقل $f'(x)$ و $f(x)$ معاً ملاحظة: " نضع الشلومنة الطويلة عندما يكون المجال مفتوح عند عدد حقيقي فقط " انتبه: قيمة x التي تعدم $f'(x)$ نميز: * إذا كانت تنتمي الى مجموعة تعريف التابع (نصورها في التابع f) * أما إذا كانت لا تنتمي الى مجموعة تعريف التابع (لا نصورها ولا نضعها في جدول)

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

تمرين:

ادرس تغيرات f على I في كل من الحالات الآتية:

1. $f(x)=x^3-3x+1$

$$I=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومنه:

$$f'(x)=3x^2-3$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3\rightarrow x^2=1$$
$$\text{إما } x=1\in D_f\rightarrow f(1)=-1$$
$$\text{أو } x=-1\in D_f\rightarrow f(-1)=3$$

نظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$

$$I=\mathbb{R}\setminus\{3\}=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$$
$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\frac{4}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

التابع f اشتقاقي على I ومنه:

$$f'(x)=\frac{(x+1)'(x-3)-(x-3)'(x+1)}{(x-3)^2}$$
$$=\frac{x-3-x-1}{(x-3)^2}=\frac{-4}{(x-3)^2}$$

نعدم المشتق: $f'(x)=0$

$$\frac{-4}{(x-3)^2}=0\rightarrow -4\neq 0\rightarrow \text{مستحيلة الحل}$$

نظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1

3. $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$

$$I=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$$
$$=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})}{(x-\sqrt{1+x^2})}$$
$$=\frac{x^2-1-x^2}{x-\sqrt{1+x^2}}=\frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومنه:

$$f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$
$$=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0\rightarrow\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}=0$$
$$\sqrt{1+x^2}+x=0\rightarrow\sqrt{1+x^2}=-x$$
$$x<0 \text{ نربع بشرط}$$
$$1+x^2=x^2\rightarrow 1\neq 0\rightarrow \text{مستحيلة الحل}$$

نظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. $f(x)=x-ln(x)$

$$I=\mathbb{R}_+^*=]0,+\infty[$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=x-\ln(x)\ =x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(1-0)$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على I ومنه:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0\rightarrow\frac{x-1}{x}=0\rightarrow x-1=0$$
$$x=1\in D_f\rightarrow f(1)=1$$

نظم جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5. $f(x) = e^x - x$

$I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = e^x - x = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 1) = +\infty$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومنه:

$f'(x) = e^x - 1$

نعدم المشتق: $f'(x) = 0$

$e^x - 1 = 0 \to e^x = 1$

$x = 0 \in D_f \to f(0) = 1$

نظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$\mathbf{0}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

6. $f(x) = x\,2^{-x}$

$I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$f(x) = x\,2^{-x} = x\,e^{\ln(2)^{-x}} = x\,e^{-x\ln 2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x) = x\,e^{-x\ln 2} = \frac{x}{e^{x\ln 2}} = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{(\ln 2)x}{e^{x\ln 2}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\ln 2}(0) = 0$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومنه:

$f'(x) = (x)'\left(e^{-x\ln 2}\right) + \left(e^{-x\ln 2}\right)'(x)$

$= \left(e^{-x\ln 2}\right) - \ln 2\,.\,e^{-x\ln 2}.x$

$= e^{-x\ln 2}(1 - x\ln 2)$

نعدم المشتق:

$f'(x) = 0 \to e^{-x\ln 2}(1 - x\ln 2) = 0$

مستحيلة الحل $\to e^{-x\ln 2} = 0$ إما

أو $1 - x\ln 2 = 0 \to x\ln 2 = 1 \to x = \frac{1}{\ln 2}$

$\in D_f$

$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\cdot e^{\frac{-1}{\ln 2}\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\cdot e^{-1} = \frac{1}{e.\ln 2}$

نظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\ln 2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e.\ln 2}$	$\searrow$	$\mathbf{0}$

قراءة جدول التغيرات:

الفكرة	الخطوات
إيجاد مجموعة التعريف	تحدد من حقل x وتكتب وفق: $D_f = \underbrace{\text{اخر قيمة في نهاية الجدول , أول قيمة في بداية الجدول}}_{\text{مجال}} \setminus \begin{Bmatrix}\text{قيم } x \text{ التي تقابل}\\ \text{الرمز طويلة شلمونة}\end{Bmatrix}$
إيجاد النهايات والصور	ننظر نظرة مزدوجة إلى حقلي x و $f(x)$ معاً ونحدد وفق: $\lim\limits_{x\to(\text{القيمة الموجودة في حقل } x)} f(x) = \big(\text{القيمة المقابلة لها في حقل } f(x)\big)$ $f\big(\text{القيمة الموجودة في حقل } x\big) = \big(\text{القيمة المقابلة لها في حقل } f(x)\big)$
المقاربات	ننظر نظرة مزدوجة على حقلي x و $f(x)$ المقاربات الأفقية والشاقوليّة: المستقيم الذي معادلتهُ $x = a$ مقارب شاقولي من (اليمين – اليسار) نحو (oy^+, oy^-) المستقيم الذي معادلتهُ $y = b$ مقارب أفقي في جوار الـ ∞ المقارب المائل: هل يوجد مقارب مائل في جوار ∞ ؟ علل إجابتك؟ نتحقق من وجود مقارب أفقي في جوار الـ ∞ ونميز الحالتين. (1) وجود مقارب أفقي فهذا يعني استحالة وجود مقارب مائل (2) عدم وجود مقارب أفقي فهذا يعني إمكانية وجود مقارب مائل.
المماسات	كتابة معادلة المماس: لكتابة معادلة المماس فإننا نحتاج: (1) نقطة التماس $A(x_A, y_A)$ (2) ميل المماس m (3) المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A$ تحدد من جدول التغيرات وفق:
القيم الحدية	القيم الحدية الكبرى: القيم الحدية الصغرى:

x	فاصلة النقطة A
$f'(x)$	ميل المماس
$f(x)$	ترتيب النقطة A

نميز الحالات الآتية:

x	x_A	x_A	x_A	x_A	x_A
$f'(x)$	0	$\|\|$	عدد	$m_2 \;\|\|\; m_1$	$\|\|$
$f(x)$	y_A	y_A	y_A	عدد	$\|\|$
المعنى	مماس أفقي معادلتهُ $y = y_A$	مماس شاقولي معادلتهُ $x = x_A$	مماس: النقطة: $A(x_A, y_A)$ الميل: عدد $m = m$ المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A$	نصف مماس من اليمين: النقطة: $A(x_A, y_A)$ الميل: m_1 المعادلة: $T: y = m_1(x - x_A) + y_A$ نصف مماس من اليسار: النقطة: $A(x_A, y_A)$ الميل: m_2 المعادلة: $T: y = m_2(x - x_A) + y_A$	استحالة وجود مماس

القيم الحدية الكبرى:

x	a	
$f'(x)$	$+$	0 $-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$ $\searrow$

$f(a) =$ ____ قيمة حدية كبرى محلياً

x	a	
$f'(x)$	$+$	$\|\|$ $-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$ $\searrow$

$f(a) =$ ____ قيمة حدية كبرى محلياً

x	a	
$f'(x)$	$+$	$\|\|$ $+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$ $\nearrow$

$f(a) =$ ____ قيمة حدية كبرى محلياً

x	a	
$f'(x)$	$-$	$\|\|$ $-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$ $\searrow$

$f(a) =$ ____ قيمة حدية كبرى محلياً

القيم الحدية الصغرى:

x	a	
$f'(x)$	$-$	0 $+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$ $\nearrow$

$f(a) =$ ____ قيمة حدية صغرى محلياً

x	a	
$f'(x)$	$-$	$\|\|$ $+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$ $\nearrow$

$f(a) =$ ____ قيمة حدية صغرى محلياً

x	a	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$

$f(a) =$ ____ قيمة حدية صغرى محلياً

x	a	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$

$f(a) =$ ____ قيمة حدية صغرى محلياً

x	a	∞
$f'(x)$		
$f(x)$	∞	$\boldsymbol{b}$

صورة مجال	الرمز: $f(I)$ حيث: I هو مجال يؤخذ من حقل x و $f(I)$ هي صورة المجال I وتؤخذ من حقل $f(x)$ لإيجاد صورة مجال نميز ثلاث حالات: ① الحالة الأولى: التابع f متزايد على المجال I فإننا نصور الأطراف نحافظ على الترتيب. ② الحالة الثانية: التابع f متناقص على المجال I فإننا نصور الأطراف ونعكس الترتيب. ③ الحالة الثالثة: إذا كان التابع f متزايد ومتناقص معاً على المجال I فإننا نجزئ المجال I إلى مجالات التزايد والتناقص دون حذف أو تكرار وذلك بإغلاق المجال مرة وفتحه مرة أخرى.
المستقر الفعلي	الرمز: $f(D_f)$ حيث: تعيين D_f من حقل x كما تعلمنا سابقاً وتعيين الصورة $f(D_f)$ من حقل $f(x)$ أيضاً كما تعلمنا سابقاً يعني المستقر الفعلي هو تحصيل حاصل.
حلول المعادلة	النمط الأول: نص السؤال: أثبت (يعني تحتاج كتابة) أو تحقق أنّ للمعادلة $f(x)=m$ عدداً (معلوم) من الحلول على المجال I . فكرة الحل: (1) بالاعتماد على الجدول نجزئ المجال I إلى مجالات التزايد والتناقص كلاً على حدا دون حذف أو تكرار (2) نحدد صور المجالات السابقة. (3) نتحقق من انتماء m إلى الصور السابقة (4) عدد الانتماءات هو عدد الحلول النمط الثاني: نص السؤال: ما عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ ؟ فكرة الحل: ننظر إلى حقل $f(x)$ عدد انتماءات m للحقل هو عدد الحلول لكن انتبه دون حذف أو تكرار. ملاحظة: عند وجود عدد في بداية الجدول ضمن حقل $f(x)$ أو نهايته يقابلها ∞ في حقل x يكون هذا العدد لا ينتمي إلى الحلول. النمط الثالث: نص السؤال: أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً على المجال $I=]a,b[$ فكرة الحل: نثبت أنّ $f(a)\times f(b)<0$. النمط الرابع: نص السؤال: أحياناً يكون المطلوب أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ عدداً من الحلول ثم احصر كلاً منها في مجال لا يزيد طوله على $(\dots)$ فكرة الحل: (1) القسم الأول من السؤال (إثبات أنّ للمعادلة $f(x)=0$ عدداً من الحلول) تم سابقاً (2) القسم الثاني من السؤال (الحصر): خطوات الحصر: نبدأ بتقسيم المجال وفقاً للطول المطلوب ثم نصور الأطراف ونميز: * جداء الصور سالب فإننا: نتوقف ويكون المجال المطلوب. * جداء الصور ليس سالب فإننا ننتقل إلى مجال جديد يليه وفقاً للطول المطلوب ثم نصور الأطراف ونتابع كما سبق.
حلول متراجحة	النمط الأول: حلول المتراجحة من النمط: $(0$ إشارة تراجح$f'(x))$ ننظر إلى إشارات $f'(x)$ ونحدد كلمة محققة أو غير محققة فتكون حلول المتراجحة هي المجالات من حقل x التي تقابل كلمة محققة. انتبه: عند وجود الرمز شلمونة فحصراً المجالات تكون مفتوحة مهما كانت المتراجحة النمط الثاني: حلول المتراجحة من النمط: $(b$ إشارة تراجح$f(x))$ ننظر إلى قيم $f(x)$ ونحدد متى تكون محققة أو غير محققة فتكون مجموعة حلول المتراجحة هي المجالات من حقل x التي تقابل كلمة محققة.
إيجاد $\lim\limits_{x\to a} f(f(x))$	بالاعتماد على جدول التغيرات نوجد كلاً من: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \quad , \quad \lim\limits_{x\to b} f(x)=c \quad , \quad \lim\limits_{x\to a} f(f(x))=c$
إيجاد مجموعة تعريف تابع	أولاً: أوجد مجموعة تعريف التابع: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ أيّ يقصد حل المتراجحة: $f(x)\geq 0$ ثانياً: أوجد مجموعة تعريف التابع: $g(x)=\ln(f(x))$ أيّ يقصد حل المتراجحة: $f(x)>0$ ثالثاً: أوجد مجموعة تعريف التابع: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ تكون مجموعة تعريف التابع g هي: $D_g=D_f\backslash\{$القيم التي تعدم$f(x)\}$
المقارنة بين صورة عددين من جدول التغيرات	إذا كان التابع f متزايد فإن صورة العدد الأكبر هي الأكبر. إذا كان التابع f متناقص فإنّ صورة العدد الأصغر هي الأكبر.

التمرين الأول:

نتأمل جدول تغيرات التابع f خطه البياني C وفق:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

١. جد D_f .

$$D_f=\mathbb{R}\backslash\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

٢. جد كلاً من:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$$

٣. اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C :

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C من اليسار نحو $-\infty$ ومن اليمين نحو $+\infty$

$y=2$ مقارب أفقي للخط C في جوار الـ $+\infty$

٤. هل يوجد مقارب مائل للخط C في جوار الـ $+\infty$ ؟

لا بسبب وجود مقارب أفقي.

التمرين الثاني:

نجد فيما يأتي جدولاً بتغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق:

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	3	$-$	$\|\|$	$+$	-1	$\|\|$	2	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	2	$\searrow$	-11	$\nearrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

اكتب معادلة كل مماس وجدته:

مماس أفقي معادلته: $y=-11$

مماس شاقولي معادلته: $x=-1$

مماس حيث:

$A(1,5)$ نقطة منه وميله $m=3$ ومعادلته:

$$T: y=m(x-x_A)+y_A \rightarrow y=3x+2$$

نصفي مماسين:

نصف مماس من اليسار حيث:

$B(3,1)$ نقطة منه وميله $m=-1$ ومعادلته:

$$T: y=m(x-x_B)+y_B \rightarrow y=-x+4$$

نصف مماس من اليمين حيث:

$B(3,1)$ نقطة منه وميله $m=2$ ومعادلته:

$$T: y=m(x-x_B)+y_B \rightarrow y=2x-5$$

600 أوراق شغل مع الحل

التمرين الثالث:

ليكن لدينا جدول تغيرات التابع f المعرف على $]-\infty,3]$ والمطلوب:

x	$-\infty$		0		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

اكتب القيم الحدية للتابع f مبيناً نوع كل منها.

$f(0)=0$ قيمة حدية صغرى محلياً.

$f(1)=2$ قيمة حدية كبرى محلياً.

$f(3)=-1$ قيمة حدية صغرى محلياً.

التمرين الرابع:

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وخطه البياني C والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|\ -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

جد كلاً من:

* $f(]0,1[)=\left]-\infty,\frac{1}{e}\right[$
* $f([1,+\infty[)=\left]0,\frac{1}{e}\right]$
* $f(]0,+\infty[)=f(]0,1[)\cup f([1,+\infty[)$
$=\left]-\infty,\frac{1}{e}\right[\cup\left]0,\frac{1}{e}\right]=\left]-\infty,\frac{1}{e}\right]$
* $f(D_f)=f(]0,+\infty[)=\left]-\infty,\frac{1}{e}\right[$

التمرين الخامس:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وخطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

١. ما عدد حلول المعادلة

* $f(x)=-3$ ؟ ليس لها حل.
* $f(x)=1$ ؟ حلّين.
* $f(x)=3$ ؟ حلّين.
* $f(x)=-2$ ؟ حل وحيد.
* $f(x)=4$ ؟ حلّين.

٢. أثبت أنّ المعادلة $f(x)=-3$ مستحيلة الحل.

* لدينا التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]-\infty.-1[$ ولدينا:
$f(]-\infty,-1[)=]-2,+\infty[\rightarrow -3\notin]-2,+\infty[$
* لدينا التابع f مستمر ومتزايد على المجال $[-1,2]$ ولدينا:
$f([-1,2])=[-2,4]\rightarrow -3\notin[-2,4]$
* لدينا التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]2,+\infty[$ ولدينا:
$f(]2,+\infty[)=]3,4[\rightarrow -3\notin]3,4[$

ومنه المعادلة $f(x)=-3$ مستحيلة الحل.

٣. أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=3$ حلين.

* لدينا التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]-\infty.-1[$ ولدينا:
$f(]-\infty,-1[)=]-2,+\infty[\rightarrow 3\in]-2,+\infty[$
* لدينا التابع f مستمر ومتزايد على المجال $[-1,2]$ ولدينا:
$f([-1,2])=[-2,4]\rightarrow 3\in[-2,4]$
* لدينا التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]2,+\infty[$ ولدينا:
$f(]2,+\infty[)=]3,4[\rightarrow 3\notin]3,4[$

ومنه للمعادلة $f(x)=3$ حلّين.

التمرين السادس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق: $f(x)=2\sqrt{x+1}-x$

١. ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الـ -1 وفسر النتيجة هندسياً.

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\frac{2\sqrt{x+1}-x-1}{x+1}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\lim_{x\to-1}g(x)\rightarrow\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{2\sqrt{x+1}-(x+1)}{x+1}=\frac{2\sqrt{x+1}}{x+1}-\frac{(x+1)}{x+1}=\frac{2}{\sqrt{x+1}}-1$$

$$\lim_{x\to-1}g(x)=\frac{2}{0^+}-1=+\infty$$

ومنه التابع f غير اشتقاقي عند الـ -1

التفسير الهندسي: الخط البياني يقبل مماساً شاقولياً معادلته $x=-1$

٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الحدية محلياً ثم استنتج أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha\in]4,5[$ ثم أثبت أنّ وأوجد هذا الحل جبرياً.

لدينا التابع f معرف ومستمر على $]-1,+\infty[$ ومنه:

$$f(-1)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\rightarrow(\infty-\infty\ \text{حالة عدم تعيين من الشكل})$$

$$f(x)=2\sqrt{x+1}-x=2|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x$$

بما أنّ $x\rightarrow+\infty$ فإنّ $|x|=x$ ومنه:

$$f(x)=2x.\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x=x\left(2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(-1)=-\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]-1,+\infty[$ وفق:

$$f'(x)=2.\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-1=\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1=\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0\rightarrow 1-\sqrt{x+1}=0\rightarrow\sqrt{x+1}=1$$

نربع:

$$x+1=1\rightarrow x=0\in D_f\rightarrow f(0)=2$$

ننظم جدول التغيرات وفق:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

القيمة الحدية: $f(0)=2$ قيمة حدية كبرى محلياً.

إثبات أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد.

* لدينا التابع f مستمر ومتزايد على المجال $]-1.0[$ ولدينا:
$f(]-1,0[)=]1,2[\rightarrow 0\notin]1,2[$
* لدينا التابع f مستمر ومتناقص على المجال $[0,+\infty[$ ولدينا:
$f([0,+\infty[)=]-\infty,2]\rightarrow 0\in]-\infty,2]$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α .

إثبات أنّ $\alpha\in]4,5[$:

لدينا التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]4,5[$ ومنه:

$$f(4)=2\sqrt{5}-4=0.4>0$$

$$f(5)=2\sqrt{6}-5=-0.1<0$$

$$\rightarrow f(4).f(5)<0$$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α يحقق: $\alpha\in]4,5[$.

إيجاد الحل جبرياً:

$$f(x)=0\rightarrow 2\sqrt{x+1}-x=0\rightarrow\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}x$$

نربع بشرط $x>0$ ومنه:

$$x+1=\frac{1}{4}x^2\rightarrow 4x+4=x^2\rightarrow x^2-4x-4=0$$

$$a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=-4$$

$$\Delta=16-4(1)(-4)=16+16=32>0$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-4\sqrt{2}}{2}=-2-2\sqrt{2}\rightarrow(x>0\ \text{مرفوض لأن})$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+4\sqrt{2}}{2}=-2+2\sqrt{2}\rightarrow\text{مقبول}$$

مكثفة شيفرة الـ 600

٣. هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم $y=-2x$ ؟

نحل المعادلة:

$$f'(x)=-2\rightarrow\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}=-2$$

$$\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}+2=0\rightarrow\frac{1-\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}=0$$

$$\frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}=0\rightarrow 1+\sqrt{x+1}=0$$

$$\sqrt{x+1}=-1\rightarrow$$ مستحيلة الحل

ومنه الخط البياني C لا يقبل مماساً موازياً للمستقيم $y=-2x$.

التمرين السابع: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2-5x-6}{x^2+3}$$

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم حدد القيم الحدية للتابع f.

لدينا التابع f معرف ومستمر على $]-\infty,+\infty[$ ومنه:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\quad,\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه:

$$f'(x)=\frac{x^4+14x^2-15}{(x^2+3)^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0\rightarrow\frac{x^4+14x^2-15}{(x^2+3)^2}=0$$

$$x^4+14x^2-15=0\rightarrow(x^2+15)(x^2-1)=0$$

مستحيلة الحل $x^2+15=0\rightarrow x^2=-15\rightarrow$ إما

أو $x^2-1=0\rightarrow x^2=1$

إما $x=1\in D_f\rightarrow f(1)=-3$

أو $x=-1\in D_f\rightarrow f(-1)=-1$

ونظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

القيم الحدية للتابع f:

$f(-1)=-1$ قيمة حدية كبرى محلياً.

$f(1)=-3$ قيمة حدية صغرى محلياً.

٢. أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد ثم احصر هذا الحل بمجال طوله الواحد.

إثبات أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد:

* لدينا التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty,-1]$ ولدينا:

$$f(\,]-\infty,-1]\,)=]-\infty,-1]\rightarrow 0\notin]-\infty,-1]$$

* لدينا التابع f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-1,1[$ ولدينا:

$$f(\,]-1,1[\,)=]-3,-1[\rightarrow 0\in]-3,-1[$$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد.

حصر الحل بمجال طوله واحد:

بما أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $[1,+\infty[$ فإن:

x	$f(x)$
1	-3
2	$-\frac{16}{7}$
3	-1
4	$\frac{2}{19}$

وبما أن:

$$f(3)=-1<0\quad,\quad f(4)=\frac{2}{19}>0$$

$$f(3).f(4)<0$$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد محصور في المجال $]3,4[$

التمرين الثامن:

ليكن f تابعاً معرفاً واشتقاقياً على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ خطه البياني C_f جدول تغيراته.

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

١. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه ثم استنتج معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي للخط البياني C_f وهل يوجد للخط C_f مستقيم مقارب مائل في جوار الـ $-\infty$ ؟ علل إجابتك.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=e\quad,\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty\quad,\quad\lim_{x\to1^+}f(x)=-\infty$$

$y=e$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^- ومن اليمين نحو oy^+

لا يوجد مقارب مائل في جوار الـ $-\infty$ بسبب وجود مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

٢. استنتج حلول كلاً من المتراجحات الآتية: $f(x)<0$ و $f(x)\geq 0$ و $f'(x)\leq 0$

$$f(x)<0\rightarrow]1,3[\cup]3,+\infty[$$

$$f(x)\geq 0\rightarrow]-\infty,1[\cup\{3\}$$

$$f'(x)\leq 0\rightarrow]-\infty,0]\cup[3,+\infty[$$

٣. جد كلاً من النهايات الآتية: $\lim_{x\to3}\frac{1}{f(x)}$ و $\lim_{x\to0}f(f(x))$ و $\lim_{x\to-\infty}\ln(f(x))$

* $\lim_{x\to3}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$
* $\lim_{x\to0}f(f(x))=?$

$$\lim_{x\to0}f(x)=1\quad,\quad\lim_{x\to1}f(x)=-\infty\quad,\quad\lim_{x\to0}f(f(x))=-\infty$$

* $\lim_{x\to-\infty}\ln(f(x))=\ln(e)=1$

٤. قارن بين $f(2023)$ و $f(2024)$.

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $[3,+\infty[$ ومنه:

$$2023<2024\rightarrow f(2023)>f(2024)$$

يا نُخبة..
طَمأنَ اللّٰهُ روحك، ورَدَّ إليك قلبك، وباعَدَ بينك والقلق، وجمع عليكَ نفسَك، وجَعَلَك أثراً لا يُمحى، وثبَّت خُطاكَ، وأحَبَّك ❤

نص السؤال	فكرة الحل
حل معادلة	١. تابع ثم دراسة تغيرات. ٢. اسأل نفسك: هل ينعدم $g(x)$ ؟ ① نعم: يكون للمعادلة حل وحيد ونحدد هذا الحل بالتجريب. ② لا: المعادلة مستحيلة الحل.
إثبات صحة متراجحة	١. تابع ثم دراسة اطراد ٢. اسأل نفسك: ما هي إشارة التابع؟

التمرين الأول: حل المعادلات الأتية:

$$\ln x = 2\sqrt{x} - 2$$

$$\ln x - 2\sqrt{x} + 2 = 0$$

هذه معادلة مختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية:

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2$$

التابع g معرف ومستمر على $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

حالة عدم تعين من الشكل: $(\infty - \infty)$

$$g(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2$$

$$= \sqrt{x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 2\right) = \sqrt{x}\left(\frac{\ln(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 2\right)$$

$$= \sqrt{x}\left(2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 2\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

التابع g اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

نعدم $g'(x)$: أيّ: $g'(x) = 0$

$$\frac{1-\sqrt{x}}{x} = 0 \to 1 - \sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x} = 1 \to x = 1 \to g(1) = 0$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\|\|$	$-\infty\ \nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ أن $0 \in g(x)$

ومنه للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد هو $x = 1$

$$(x-1)e^x + 1 = 0$$

هذه معادلة مختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية:

ليكن لدينا التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x) = (x-1)e^x + 1$$

التابع g معرف ومستمر على $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)$$

حالة عدم تعين من الشكل: $(\infty)(0)$

$$g(x) = (x-1)e^x + 1 = xe^x - e^x + 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 - 0 + 1 = 1$$

علماً أن: $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

التابع g اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

نعدم المشتق: أيّ: $g'(x) = 0 \to xe^x = 0$

إما $x = 0 \to g(0) = 0$

مستحيلة الحل او $e^x = 0 \to$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

انظر للغيب بقلبٍ يؤمنُ أنّ ربَّ الخيرِ لن يأتيَ إلا بالخير .. ❤

التمرين الثاني: أثبت صحة المتراجحات الاتية:

$$e^x \geq 1 + x\ ;x \in \mathbb{R}$$

$$e^x - x - 1 \geq 0$$

ليكن لدينا التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x) = e^x - x - 1$$

التابع g اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = e^x - 1$$

نعدم المشتق:

$$g'(x) = 0 \to e^x - 1 = 0 \to e^x = 1$$

$$\to x = 0 \to g(0) = 0$$

نظم جدول اطراد التابع g:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

نلاحظ أن: $g(x) \geq 0$

محققة $e^x - x - 1 \geq 0 \to e^x \geq x + 1 \to$

$$\ln(x+1) < \sqrt{x+1}\ ;x > -1$$

$$\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$$

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln(x+1) - \sqrt{(x+1)}$$

التابع g اشتقاقي على $]-1,+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{(x+1)}} = \frac{2-\sqrt{x+1}}{2(x+1)}$$

نعدم المشتق:

$$g'(x) = 0 \to \frac{2-\sqrt{x+1}}{2(x+1)} = 0$$

$$2 - \sqrt{x+1} = 0 \to 2 = \sqrt{x+1}$$

$$x + 1 = 4$$

$$x = 3 \to g(3) = \ln 4 - 2 = 2\ln 2 - 2$$

نظم جدول الاطراد:

x	-1		3	$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	$2\ln 2 - 2$	$\searrow$

نلاحظ أن:

$$g(x) < 0 \to \ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$$

$$\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$$

محققة..

التمرين الثالث:

أثبت أنه: $\ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2$ أياً كان $x > 0$

وباختيار $x = e^2$ و $x = \frac{1}{e}$ احصر e.

الحل:

$$\ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2$$

$$\ln(x) - 2\sqrt{x} + 2 \leq 0$$

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x} + 2$$

التابع g اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

نعدم $g'(x)$:

$$g'(x) = 0 \to \frac{1-\sqrt{x}}{x} = 0$$

$$1 - \sqrt{x} = 0 \to \sqrt{x} = 1$$

$$x = 1 \to g(1) = 0$$

نظم جدول الاطراد:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

نلاحظ أن:

$$g(x) \leq 0$$

$$\ln x - 2\sqrt{x} + 2 \leq 0$$

$$\ln x \leq 2\sqrt{x} - 2 \to$$ محققة

الحصر:

من جهة أولى: باختيار $x = e^2$

$$\ln e^2 \leq 2\sqrt{e^2} - 2$$

$$2\ln e \leq 2e - 2$$

$$2 \leq 2e - 2$$

$$-2e \leq -4 \to e \geq 2$$

من جهة ثانية: باختيار $x = \frac{1}{e}$

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) \leq 2\sqrt{\frac{1}{e}} - 2$$

$$-\ln(e) \leq \frac{2}{\sqrt{e}} - 2$$

$$-1 \leq \frac{2}{\sqrt{e}} - 2 \to 1 \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$$

نضرب بـ $\sqrt{e}$:

$$\sqrt{e} \leq 2$$

نربع:

$$e \leq 4$$

مما سبق نجد أنّ:

$$2 \leq e \leq 4$$

التمرين الرابع: (متراجحة هويغنز)

نهدف إلى إثبات صحة المتراجحة: $2\sin x + \tan x \geq 3x$

أياً يكن x من المجال $I = [0,\frac{\pi}{2}[$.

الحل:

نفرض التابع: $f(x) = 2.\sin x + \tan x - 3x$

المعرف على المجال $[0,\frac{\pi}{2}[$ ولنثبت أنّ $f(x) \geq 0$.

لدينا:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 2.\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3$$

$$= \frac{2\cos^3 x + 1 - 3\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1 = 0$$

$$(\cos x - 1)(2\cos^2 x - \cos x - 1) = 0$$

إما $\cos x = 1 \to x = 2\pi k\ ;k \in \mathbb{Z}$

$$k = 0 \to x = 0 \to f(0) = 0$$

$$k = 1 \to x = 2\pi \notin [0,\frac{\pi}{2}[$$

أو $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$$(\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$$

مقبول إما $\cos x = 1 \to$

مرفوض أو $\cos x = -\frac{1}{2} \to$

مكثفة شيفرة الـ 600

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$

نلاحظ من الجدول أنّ: $f(x) \geq 0$ ومنه:

$$2.\ \sin x + \tan x - 3x \geq 0$$

$$2.\ \sin x + \tan x \geq 3x$$

التمرين الخامس:

ادرس تغيرات كلاً من التوابع الأتية على I :

$$f(x) = xe^{-x} + x - 2\ ;I = \mathbb{R}$$

التابع f معرف ومستمر على $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعين من الشكل: $(0)(+\infty)$

$$f(x) = xe^{-x} + x - 2 = \frac{x}{e^x} + x - 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

علماً أن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 1$$

سنعود بعد دقيقة..

نفرض التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f'(x) = g(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

حالة عدم تعين من الشكل: $(\infty)(0)$:

$$g(x) = e^{-x} - \frac{x}{e^x} + 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 - 0 + 1 = 1$$

علماً أن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$$g'(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

نعدم المشتق:

$$g'(x) = 0 \to e^{-x}(x-2) = 0$$

إما $x - 2 = 0 \to x = 2 \to g(2) = \frac{e^2-1}{e^2}$

أو مستحيلة الحل $\to e^{-x} = 0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{e^2-1}{e^2}$	$\nearrow$	1

نلاحظ أن (حقل) $g(x) \notin 0$ ومنه $g(x)$ لا ينعدم

ومنه $f'(x) = 0$ مستحيلة الحل

عندنا..

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(x) = e^x + \ln x\ ;I = \mathbb{R}_+^*$$

التابع f معرف ومستمر على $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} = \frac{xe^x+1}{x}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0 \to \frac{xe^x+1}{x} = 0 \to xe^x + 1 = 0$$

سنعود بعد دقيقة..

نفرض تابعاً g معرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = xe^x + 1$$

$$\lim_{x\to0} g(x) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = xe^x + x = e^x(x+1)$$

نعدم المشتق:

$$g'(x) = 0 \to e^x(x+1) = 0$$

مستحيلة الحل $\to e^x = 0$ إما

أو $x = -1 \notin I$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ 1	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أن $g(x) > 0$.

عندنا..

لدينا:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

عندما: $x \in]0,+\infty[$

فإنّ $g(x) > 0$ و $x > 0$ ومنه: $f'(x) > 0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

التمرين السادس:

في كل من الحالات الأتية ادرس الوضع النسبي بين C_f و Δ على المجال I :

$$f(x) = \ln\left(-1+\frac{2}{x}\right),\Delta: y = 2-2x, I =]0,2[$$

دراسة الوضع النسبي بين C_f و Δ :

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta = \ln\left(-1+\frac{2}{x}\right) + 2x - 2$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$\ln\left(-1+\frac{2}{x}\right) + 2x - 2 = 0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية.

سنعود بعد دقيقة..

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0,2[$:

$$g(x) = \ln\left(1-\frac{2}{x}\right) + 2x - 2$$

$$\lim_{x\to0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to2} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = \frac{-2}{-x^2+2x} + 2 = \frac{-2x^2+4x-2}{-x^2+2x}$$

نعدم المشتق:

$$g'(x) = 0 \to \frac{-2x^2+4x-2}{-x^2+2x} = 0$$

$$-2x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \to (x-1)^2 = 0$$

$$x = 1 \in D_g \to g(1) = 0$$

x	0		1		2
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$-$	$\|\|$
$g(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$

نلاحظ أنه يوجد للمعادلة حل هو $x = 1$

إذاً $h(x)$ ينعدم عند $x = 1$

عندنا..

x	0		1		2
$h(x)$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	Δ تحت C		$\|$		Δ تحت C

$$f(x) = \frac{2}{e^x+1},\Delta: y = 1-\frac{1}{2}x, I = \mathbb{R}$$

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= \frac{2}{e^x+1} - (1-\frac{1}{2}x) = \frac{2}{e^x+1} - 1 + \frac{1}{2}x$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية

سنعود بعد دقيقة..

ليكن لدينا التابع g المعرف $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x) = \frac{2}{e^x+1} + \frac{1}{2}x - 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

التابع g اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$g'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-4e^x + e^{2x} + 2e^x + 1}{2(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x+1)^2}$$

نعدم المشتق:

$$g'(x) = 0 \to \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x+1)^2} = 0$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

بفرض $t = e^x$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0 \to t = 1 \to e^x = 1$$

$$x = 0 \to \in D_g \to g(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أنه يوجد للمعادلة حل $x = 0$

إذاً $h(x)$ ينعدم عند $x = 0$

عندنا..

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	Δ تحت C		$\|$		C فوق Δ

حتى لا يصيبك الإحباط..

عَوِّد نفسك ألّا تقف بالمنتصف، ألّا تترك كتاباً بدأت به، ولا مشروعاً انضممت إليه، ولا فكرة خطّطت لها، ولا عادةً تمارسها، ولا سلوكاً يضبط سيرك، إلّا لظرفٍ يمنعك، انتبه من كثرة التَنَقّل، ومرافقة المَلَل! لا تمُدَّن عينيك وتنسى نفسك..

إيّاك والبَحث عن الكمال في كل شيء

لا تكن أشتاتاً يَصعُبُ جَمعُك!!

ELITE MATH

رسم الخطوط البيانية:

قسم التحضير	قسم الرسم

قسم التحضير:

١. نرسم المقاربات دوماً والمماسات(عندما يطلب ذلك) وفق:
- أفقي: يوازي محور الفواصل
- شاقولي: يوازي محور التراتيب
- مائل: يحتاج نقطتين

٢. نحدد النقاط المساعدة:
- القيم الحدية
- نقطة التقاطع مع محور التراتيب:

- $0 \in D_f$ يوجد تقاطع مع محور التراتيب وفق: $(0, f(0))$
- $0 \notin D_f$ لا يوجد تقاطع مع محور التراتيب.

- نقطة التقاطع مع محور الفواصل:

- حقل $(f(x))$ $0 \notin$ لا يوجد تقاطع مع محور الفواصل.
- حقل $(f(x))$ $0 \in$ يوجد تقاطع مع محور الفواصل ونحل المعادلة $f(x) = 0$

تنويه:

في حال كانت المعادلة صعبة فبلاها كثرة الغلبة يعني لا تحلي $f(x) = 0$

قسم الرسم:

نرسم الخط البياني مع مراعاة موقع الخط البياني:

x	عدد	عدد	∞	∞
$f(x)$	عدد	∞	عدد	∞
موقع الخط	نقطة	المقارب الشاقولي	المقارب الأفقي	تحديد ربع

ملاحظات:
- أثناء الرسم نراعي حركة المقارب وحركة المماس والصفات التناظرية والتزايد والتناقص والنقاط المساعدة.
- الخط البياني لا يقطع مقاربه في جوار التقارب بينما في غير جوار التقارب يصطفلو
- عند وجود طلب أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]a, b[$ قبل طلب الرسم فإنّ الخط البياني يقطع محور الفواصل بين a و b .

تمرين:

ادرس تغيرات كل من التوابع الآتية على I وارسم خطه البياني:

$$f(x) = ln(1 + x^2)\ ;\ I = \mathbb{R}$$

التابع f معرف ومستمر على I

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0 \to \frac{2x}{1 + x^2} = 0 \to 2x = 0$$
$$x = 0 \in I \to f(0) = 0$$

x	$-\infty$		$\mathbf{0}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

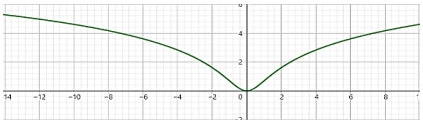
التحضير للرسم:
- المقاربات: لا يوجد
- قيم حدية: $f(0) = 0$ حدية صغرى محلياً
- التقاطع مع المحاور:

مع التراتيب $(0,0)$

مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \to \ln(1 + x^2) = 0$$

$$1 + x^2 = 1 \to x^2 = 0 \to x = 0 \to (0,0)$$



$$f(x) = (x - 1)e^x\ ;\ I = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty)(0)$

$$f(x) = (x - 1)e^x = xe^x - e^x$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

علماً أن: $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0 \to xe^x = 0$$

إما $x = 0 \to f(0) = -1$

مستحيلة الحل $e^x = 0 \to$ أو

x	$-\infty$		$\mathbf{0}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

التحضير للرسم:
- المقاربات:

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$f(0) = -1$ قيمة حدية صغرى
- التقاطع مع المحاور:

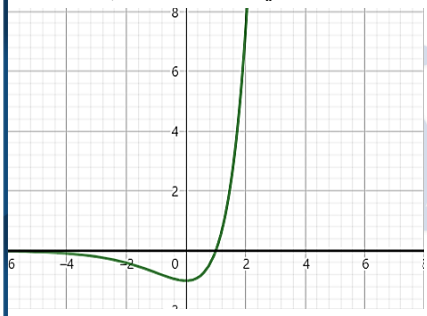
مع محور التراتيب $(0, -1)$

مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \to (x - 1)e^x = 0$$

إما $x - 1 = 0 \to x = 1 \to (1,0)$

مستحيلة الحل $e^x = 0$ أو



على قدرِ الغرس يكون الحصاد .. 💙

مكثفة شيفرة الـ 600

استنتاج رسم خط بياني:

نص السؤال	يكون لدينا التابع f الذي خطه البياني C_f والمطلوب: استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g حيث: $g(x) = \square$	
فكرة الحل	نكتب التابع $g(x)$ بدلالة التابع $f(x)$ ونميز الحالات:	
الحالات التي تأتي كما هي	**الحالة**	**التعليل**
	$g(x) = f(x + \alpha)$	C_g ينتج عن C_f انسحابه على محور الفواصل نحو اليسار بمقدار α
	$g(x) = f(x - \alpha)$	C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور الفواصل نحو اليمين بمقدار α
	$g(x) = \lvert f(x) \rvert$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على النقاط ذات التراتيب الموجبة وبأخذ النظائر ذات التراتيب السالبة إلى محور الفواصل
	$g(x) = f\lvert x \rvert$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على النقاط ذات الفواصل الموجبة، وبأخذ النظائر ذات الفواصل السالبة بالنسبة إلى محور التراتيب
	$g(x) = \alpha f(x)$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على فواصل النقاط وبضرب تراتيب النقاط بالعدد α
	$g(x) = f(\alpha . x)$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على تراتيب النقاط وبضرب فواصل النقاط بالعدد α
	g التقابل العكسي للتابع f	C_g نظير C_f بالنسبة للمستقيم $y = x$ (منصف الربعين الأول والثالث)
	للتابع $f(x)$ و $g(x)$ نفس قاعدة الربط و $D_g \subseteq D_f$	g مقصور التابع f .
غير ذلك	نشكل الفرق: $g(x) - f(x) = \square$ ونميز حالتين:	
	الناتج عدد α :	غير ذلك: الأمر متروك للتجريب:
	• $g(x) = f(x) + \alpha$ أيّ: C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأعلى بمقدار α	• $g(x) = f(-x)$ أيّ: C_g نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب
	• $g(x) = f(x) - \alpha$ أيّ: C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأسفل بمقدار α	• $g(x) = -f(x)$ أيّ: C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل • $g(x) = -f(-x)$ أيّ: C_g نظير C_f بالنسبة للمبدأ.

التمرين الأول: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$$f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$$

وليكن C_f خطهُ البياني في معلم متجانس

استنتج رسم الخط البياني لتابع k المعرف وفق:

$$k(x)=x+\frac{e^x}{1-e^x}$$

لدينا:

$$f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$$
$$f(-x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}$$
$$f(-x)=-x-\frac{1}{\frac{1}{e^x}-1}$$
$$f(-x)=-x-\frac{e^x}{1-e^x}$$
$$-f(-x)=x+\frac{e^x}{1-e^x}$$
$$-f(-x)=k(x)$$

C_k نظير C_f بالنسبة للمبدأ

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x)=\frac{4e^x-2}{e^x+1}$ استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع h

المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $h(x)=\frac{6e^x}{e^x+1}$

الحل:

$$h(x)-f(x)=\frac{6e^x}{e^x+1}-\frac{4e^x-2}{e^x+1}$$
$$=\frac{2e^x+2}{e^x+1}=\frac{2(e^x+1)}{e^x+1}=2$$
$$h(x)-f(x)=2$$
$$h(x)=f(x)+2$$

C ينتج عن C_1

بانسحابه على محور التراتيب نحو الأعلى بمقدار 2

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال

$f(x)=\frac{2+\ln(x)}{2\sqrt{x}}$ استنتج رسم C']$0,+\infty$[وفق:

الخط البياني للتابع g المعرف وفق:

$$g(x)=\frac{\ln(\sqrt{x})-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

نشكل الفرق:

$$g(x)-f(x)$$
$$=\frac{\ln(\sqrt{x})-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{(2+\ln x)}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{2\ln(\sqrt{x})-2\sqrt{x}+2-2-\ln x}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{2\ln(x)^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{x}-\ln x}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\ln x-2\sqrt{x}-\ln x}{2\sqrt{x}}=-\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=-1$$
$$g(x)-f(x)=-1$$
$$g(x)=f(x)-1$$

ومنهُ C' ينتج عن C

بانسحابه على محور التراتيب نحو الأسفل بمقدار 1 .

من أراد استطاع .. 💙🏆

الصفات التناظرية الخط البياني:

الفكرة	محور التناظر	التابع الزوجي	مركز التناظر	التابع الفردي	التابع الدوري
الصفة التناظرية	الخط البياني متناظر بالنسبة لمحور شاقولي معادلته $x=a$	الخط البياني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.	الخط البياني للتابع متناظر بالنسبة إلى نقطة $I(a,b)$	الخط البياني للتابع متناظر بالنسبة إلى المبدأ	
نص السؤال	الصيغة الأولى: أثبت أنّ المستقيم الذي معادلته $x=a$ هو محور تناظر الصيغة الثانية: أثبت أنّ الخط البياني متناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $x=a$	* ادرس زوجيّة التابع f * أثبت أن التابع f زوجي * أثبت أنّ لخط C محور تناظر	الصيغة الأولى: أثبت أنّ النقطة $I(a,b)$ هي مركز تناظر لخط البياني الصيغة الثانية: أثبت أنّ الخط البياني متناظر بالنسبة الى النقطة $I(a,b)$	* أثبت أنّ التابع f فردي * أثبت أنّ لخط C مركز تناظر * ادرس فردية التابع	أثبت أنّ التابع f دوري
طريقة الإجابة	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أيا كان $x\in D_f$ فإنّ: $2a-x\in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(2a-x)=f(x)$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أيا كانت $x\in D_f$ فإنّ: $-x\in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(-x)=f(x)$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أيا كان $x\in D_f$ فإنّ: $2a-x\in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(2a-x)+f(x)=2b$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أيا كان $x\in D_f$ فإنّ: $-x\in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(-x)=-f(x)$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أيا كان $x\in D_f$ فإنّ: $x+T\in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(x+T)=f(x)$

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x^2-6x+4$$

أثبت أن الخط البياني متناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $x=3$

الحل:

$$f(x)=x^2-6x+4$$
$$x=3\to a=3\to 2a=6$$

الشرط الأول: أيا كان $x\in D_f$ فإنّ $2a-x\in D_f$

الإثبات:

أيا كان: $x\in\mathbb{R}$ فإنّ: $6-x\in\mathbb{R}$ محقق وضوحاً

الشرط الثاني:

$$f(2a-x)=f(x)$$
$$\underbrace{f(6-x)}_{l_1}=\underbrace{f(x)}_{l_2}$$
$$l_1=f(6-x)$$
$$=(6-x)^2-6(6-x)+4$$
$$=36-12x+x^2-36+6x+4$$
$$=x^2-6x+4=f(x)=l_2\to$$

محققة

ومنه الخط البياني متناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $x=3$

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{5x^2-1}{|x|+1}$$

أثبت أن f زوجي ثم استنتج الصفة التناظرية لخطه البياني

الحل:

إثبات أن التابع زوجي:

الشرط الأول: أيا كان $x\in D_f$ فإنّ $-x\in D_f$

الإثبات:

أيا كان: $x\in\mathbb{R}$ فإنّ: $-x\in\mathbb{R}$ محقق وضوحاً

الشرط الثاني:

$$\underbrace{f(-x)}_{l_1}=\underbrace{f(x)}_{l_2}$$
$$l_1=f(-x)=\frac{5(-x)^2-1}{|-x|+1}$$
$$=\frac{5x^2-1}{|x|+1}=f(x)=l_2\to$$

محققة

ومنه f زوجي

استنتاج الصفة التناظرية:

الخط البياني للتابع f متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$f(x)=\frac{2e^x-3}{e^x-1}$ أثبت أن النقطة $I\left(0,\frac{5}{2}\right)$ مركز تناظر

للخط البياني C_f لدينا:

$$a=0\to 2a-x=-x$$
$$b=\frac{5}{2}\to 2b=5$$

الشرط الأول:

أيا كان $x\in D_f$ فإنّ $2a-x\in D_f$

الإثبات:

$$x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$
$$-x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(2a-x)+f(x)=2b$$
$$\underbrace{f(-x)+f(x)}_{l_1}=\underbrace{5}_{l_2}$$
$$l_1=f(-x)+f(x)$$
$$=\frac{2e^{-x}-3}{e^{-x}-1}+\frac{2e^x-3}{e^x-1}=\frac{2\frac{1}{e^x}-3}{\frac{1}{e^x}-1}+\frac{2e^x-3}{e^x-1}$$
$$=\frac{2-3e^x}{\frac{e^x}{1-e^x}}+\frac{2e^x-3}{e^x-1}=\frac{2-3e^x}{1-e^x}+\frac{2e^x-3}{e^x-1}$$
$$=\frac{3e^x-2}{e^x-1}+\frac{2e^x-3}{e^x-1}=\frac{3e^x-2+2e^x-3}{e^x-1}$$
$$=\frac{5e^x-5}{e^x-1}=\frac{5(e^x-1)}{e^x-1}=5=2b=l_2$$

ومنهُ النقطة I مركز تناظر للخط البياني C

مشّ مهم تسبق غيرك ..
الأهم إنك تمشي طريقك .. مشّ طريقهم 💙🤲

التمرين الرابع:

C_f هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ أثبت أنّ f فردي ثم

استنتج الصفة التناظرية لخطه البياني

الحل:

إثبات أن التابع f فردي:

الشرط الأول:

أياً كان $x \in \mathbb{R}$ فإنّ $-x \in \mathbb{R}$

الشرط الأول محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$\underbrace{f(-x)}_{l_1} = \underbrace{-f(x)}_{l_2}$$

$$l_1 = f(-x)$$

$$= \ln\left(-x + \sqrt{(-x^2)+1}\right)$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - (x)^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$= \ln(1) - \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

$$= -\ln\left(x - \sqrt{x^2+1}\right) = -f(x) = l_1$$

بما أنّ $l_1 = l_2$ فإن الشرط الثاني محقق ومنه التابع f فردي.

التمرين الخامس:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق العلاقة:

$$f(x) = \frac{5^x}{5^{2x}-1}$$

أثبت أنّ لخطه البياني C_f مركز تناظر.

الحل:

$$f(x) = \frac{5^x}{5^{2x}-1}$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإنّ $-x \in D_f$

الإثبات:

$$x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$-x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$-x \in D_f$$

الشرط الأول محقق

الشرط الثاني:

$$\underbrace{f(-x)}_{l_1} = \underbrace{-f(x)}_{l_2}$$

$$l_1 = f(-x) = \frac{5^{-x}}{5^{-2x}-1} = \frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^{2x}}-1}$$

$$= \frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1-5^{2x}}{5^{2x}}} = \frac{1}{5^x}\cdot\frac{5^{2x}}{1-5^{2x}} = \frac{5^x}{1-5^{2x}}$$

$$= \frac{5^x}{-(5^{2x}-1)} = -\frac{5^x}{(5^{2x}-1)} = -f(x) = l_2$$

ومنه للخط البياني C_f مركز تناظر أيّ أنّ التابع f فردي.

التمرين السادس:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos x$

أثبت أنّ f دوري ودوره 2π

الحل:

$$f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos x$$

$$T = 2\pi$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإن $x + T \in D_f$

الإثبات:

أياً كان: $x \in \mathbb{R}$ فإنّ: $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ محقق وضوحاً

الشرط الثاني:

$$f(x+T) = f(x)$$

$$\underbrace{f(x+2\pi)}_{l_1} = \underbrace{f(x)}_{l_2}$$

$$l_1 = f(x+2\pi)$$

$$l_1 = 4\sin^3(x+2\pi) + 3\cos(x+2\pi)$$

$$= 4\sin^3(x) + 3\cos(x) = f(x) = l_2$$

محققة ومنه التابع f دوري ودوره 2π.

فما نحن إلّا أيام، وما أعمارنا إلّا الأثر .. 😕💙

قراءة الخطوط البيانية:

الفكرة	الخطوات
تعيين - إيجاد $f(a)$	(1) نرسم المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = a$ (2) نحدد نقطة تقاطع الخط البياني والمستقيم السابق (3) يكون $f(a)$ هو ترتيب نقطة التقاطع
إيجاد النهايات	اسأل نفسك الخط البياني وينو؟ (1) الخط البياني عند مقارب أفقي معادلته $y = b$ تكون: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ (2) الخط البياني عند نقطة مفرغة (a,b) تكون: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ (3) الخط البياني أعلى تكون: $\lim_{x\to} f(x) = +\infty$ (4) الخط البياني أسفل تكون: $\lim_{x\to} f(x) = -\infty$
إيجاد $\lim_{x\to a} f(f(x))$	$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad , \quad \lim_{x\to b} f(x) = c$ $\to \lim_{x\to a} f(f(x)) = c$
صورة مجال	تمهيد: المجال هو قيم x بينما صورة المجال هي قيم لـ $f(x)$ ولإيجاد صورة مجال: نميز ثلاث حالات: ① الحالة الأولى: إذا كان التابع f متزايد تماماً على المجال I فإننا نصور المجال I أي نصور الأطراف ونحافظ على الترتيب ② الحالة الثانية: إذا كان التابع f متناقص تماماً على المجال I فإننا نصور الأطراف ولكن نعكس الترتيب ③ الحالة الثالثة: إذا كان التابع f متزايد ومتناقص على المجال I فإننا نجزئ المجال I إلى مجالات التزايد والتناقص دون حذف أو تكرار ثم نصور الأجزاء السابقة فتكون صورة المجال هي اجتماع صور الأجزاء السابقة انتبه: (1) دائماً القيمة وصورتها نفس نوع المجال (2) طلب إيجاد صورة مجال هو ذاته طلب إيجاد النهايات والصور
المستقر الفعلي	هو صورة مجموعة التعريف نضع مجموعة التعريف ونوجد صورة مجموعة التعريف تنويه: (1) عملية الاجتماع: هي العناصر المشتركة والغير المشتركة (2) في حالة الخط البياني فرع واحد يكون المستقر الفعلي وفق: $\underbrace{\text{ـــ أكبر قيمة لـ } f(x) \ , \ \text{أصغر قيمة لـ } f(x) \text{ ـــ}}_{\text{مجال}}$
إيجاد ميل مستقيم مرسوم في شكل	نص السؤال: أوجد ميل المستقيم Δ فكرة الحل: (1) إذا كان المستقيم أفقي فالميل $m = 0$ (2) إذا كان المستقيم شاقولي فالميل غير معرف (3) إذا كان المستقيم مائل بالاعتماد على الشكل نحدد نقطتين تنتميان إلى المستقيم ونوجد ميل المستقيم وفق: $m = \frac{\text{فرق الأيات}}{\text{فرق الإكسات}}$
كتابة معادلة مستقيم مرسوم في شكل	لكتابة معادلة مستقيم فإننا: (1) نحدد ميل المستقيم m (2) نحدد نقطة A حيث A تنتمي إلى المستقيم بالاعتماد على الشكل (3) نكتب معادلة المستقيم وفق: $y = m(x - x_A) + y_A$
إيجاد $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$	الخطوات: (1) نحدد المقارب المائل للخط البياني في جوار ∞ (2) نوجد ميل المقارب المائل (3) يكون: (ميل المقارب المائل m) $= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$
إيجاد $f'(a)$	الخطوات: (1) نحدد المماس المار من النقطة التي فاصلتها a (2) نوجد ميل هذا المماس (3) يكون $f'(a) = m$ انتبه: عند القيمة الحدية في الغالب يكون المماس الأفقي
إيجاد $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	(1) نوجد $f'(a)$ (2) تكون $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

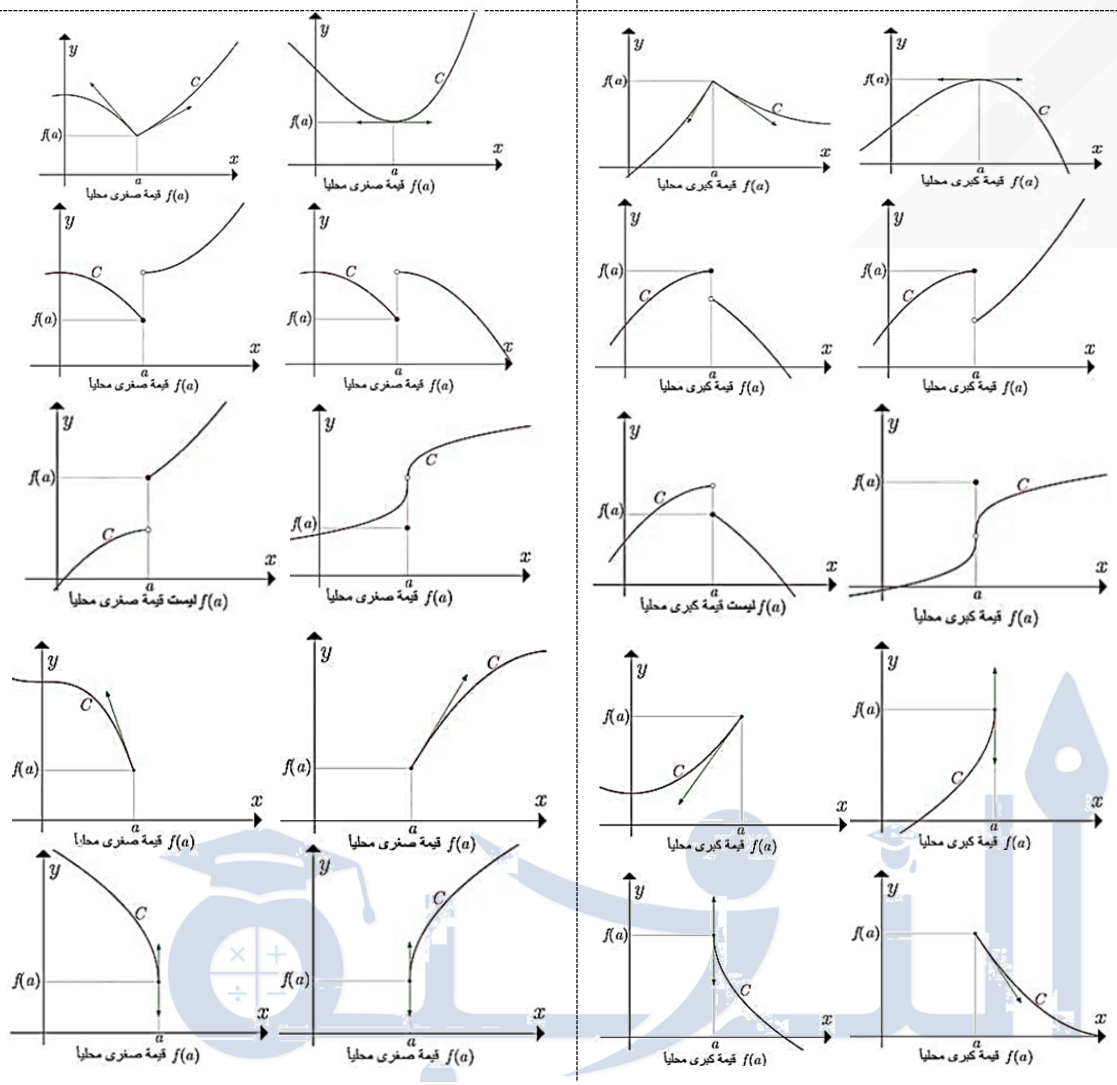
حلول معادلة $f(x)=b$	النمط الأول: ما عدد حلول المعادلة $f(x)=b$ فكرة الحل: (1)نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته $y=b$ عدد تقاطعات المستقيم السابق مع الخط البياني هو عدد الحلول النمط الثاني: حل المعادلة $f(x)=b$ فكرة الحل: (1)نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته $y=b$ (2)نحدد نقاط تقاطع المستقيم مع الخط البياني (3)تكون حلول المعادلة هي فواصل نقاط التقاطع السابقة انتبه: حل المعادلة هو قيم x حصرا ويكون "إما حل صريح أو ينتمي إلى مجال" النمط الثالث: ناقش بيانياً حلول المعادلة $f(x)=m$ فكرة الحل: (1)نضع المسطرة أسفل المعلم بالتوازي مع محور الفواصل xx' "يعني من y' وبشكل أفقي نمشي" (2)نحرك المسطرة نحو الأعلى ونبحث عن عدد نقاط تقاطع المسطرة مع C_f في كل مرة. (3)كلما تغيرت عدد نقاط التقاطع نتوقف لنناقش (4)وهكذا تتم المناقشة. ملاحظة: قد تكون المعادلة غير معزول فيها الوسيط (الوسيط بطرف والتابع f بطرف آخر) لهيك أول الشي نعزل الوسيط ونكمل بالمناقشة. تنويه: في حال ما عرفت تعزل الوسيط m فاستخدم أسلوب اجدبها واكتب المعادلة فوراً $f(x)=m$ ثم ابدأ بالمناقشة.
حلول متراجحة	النمط الأول: حلول متراجحة من النمط: $(f'(x)$ إشارة تراجح $0)$ تمهيد: حلول المتراجحة هي قيم x نص السؤال: حل المتراجحة $f'(x)>0$ أو $f'(x)\geq 0$ الخطوات: (1)ننظر إلى الخط البياني وتحديداً عند تزايد التابع f (الخط البياني طالع) (2)تكون حلول المتراجحة هي قيم x التي يكون عندها f متزايد (مع مراعاة المجالات) نص السؤال: حل المتراجحة $f'(x)<0$ أو $f'(x)\leq 0$ الخطوات: (1)ننظر إلى الخط البياني وتحديداً عند تناقص التابع f (الخط البياني نازل) (2)تكون حلول المتراجحة هي قيم x التي يكون عندها f متناقص (مع مراعاة المجالات) النمط الثاني: حلول متراجحة من النمط: $(f(x)$ إشارة تراجح $b)$ نص السؤال: حل المتراجحة $f(x)>b$ أو $f(x)\geq b$ الخطوات: (1)نرسم المستقيم الذي معادلته $y=b$ (2)حلول المتراجحة هي قيم x التي تجعل الخط البياني فوق المستقيم (مع مراعاة المجالات) نص السؤال: حل المتراجحة $f(x)<b$ أو $f(x)\leq b$ الخطوات: (1)نرسم المستقيم الذي معادلته $y=b$ (2)حلول المتراجحة هي قيم x التي تجعل الخط البياني تحت المستقيم (مع مراعاة المجالات)
إيجاد مجموعة التعريف	* أوجد مجموعة تعريف التابع: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ أي يقصد حل المتراجحة $f(x)\geq 0$ * أوجد مجموعة تعريف التابع: $g(x)=\ln(f(x))$ أي يقصد حل المتراجحة $f(x)>0$ * أوجد مجموعة تعريف التابع: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ تكون مجموعة تعريف التابع g هي: $D_g=D_f\backslash\{f(x)$ القيم التي تعدم$\}$
التابع الزوجي والفردي	ننظر إلى الخط البياني ونميز حالتين: ① الحالة الأولى: إذا كان الخط البياني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب يكون التابع زوجي ② الحالة الثانية: إذا كان الخط البياني متناظر بالنسبة إلى المبدأ يكون التابع فردي
قابلية الاشتقاق	ننظر إلى الخط البياني ونميز: * التابع f غير مستمر عند a (أي يوجد انقطاع) فيكون التابع f غير اشتقاقي عند a لأنه غير مستمر عند a * وجود مماس شاقولي عند a فيكون التابع f غير اشتقاقي * وجود نصفي مماسين للخط البياني عند a من اليسار ومن اليمين فيكون التابع f غير اشتقاقي

نحتاج إلى المُكابَدة..

يريد الواحد منّا أن يصل دون سَير، وأن ينجز دون حركة، وأن يبلغ المراد بلا إرادة! وتلك أحلام الفارغين، ما إن سكنت قلبك حتى قتلته! وأدخلت عليك حسرة الفوات، تكثر الأمنيات وتقِلّ الحركات، فكيف نريد النتائج!؟

نحتاج إلى مكابدة الهوى، حتى تستقيم نفوسنا، وأن نُكابد المَلَل والعِلَل والمَيل، ونجاهد الفراغ ليمتلئ، مَن تَرَبّى على النعومة لا يَطلُبَنّ مَعاليَ الأمور، ومَن اشتدّ امتدّ أثره، وزادَت همّته، وأدرك أن «أثقال الحياة لا يُطيقها المهازيل» 💙

القيم الحدية	القيم الحدية الكبرى	القيم الحدية الصغرى



النمط الثاني: إثبات وجود قيمة حدية:

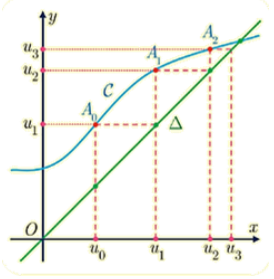
نص السؤال: أثبت أن $f(a)$ قيمة حدية كبرى للتابع f

فكرة الحل: (1)نأخذ المجال I بحيث $a \in I$ (2)نوجد $D_1 = D_f \cap I$ (3)نكتب أياً كان $x \in D_1$ فإنه يتحقق: $f(a) \geq f(x)$

نص السؤال: أثبت أن $f(a)$ قيمة حدية صغرى للتابع f

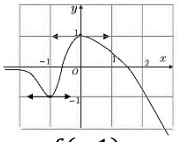
فكرة الحل: (1)نأخذ المجال I بحيث $a \in I$ (2)نوجد $D_1 = D_f \cap I$ (3)نكتب أياً كان $x \in D_1$ فإنه يتحقق: $f(a) \leq f(x)$

اطراد متتالية صريح	يكون المعطى هو خط بياني والمطلوب تحديد جهة اطراد المتتالية u_n المعرفة بالشكل الصريح فكرة الحل: (1)بالاعتماد على الخط البياني نحدد جهة اطراد التابع $f(x)$ (2)تكون جهة اطراد المتتالية توافق جهة اطراد التابع f
التمثيل الهندسي لمتتالية معطاة بشكل تدريجي	يكون المعطى هو خط بياني والمطلوب أعد رسم الخط البياني على دفترك ثم مثل الحدود الاولى للمتتالية u_n المعرفة بالشكل التدريجي ثم خمن جهة تغييرها ونهايتها المحتملة. فكرة الحل: ① نرسم الخط البياني C_f للتابع f (الموافقة) ② نرسم المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = x$ (المنصف للربعين الأول والثالث) ③ نحدد u_0 (مُعطاة) على محور الفواصل ④ نرسم المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = u_0$ ونحدد A نقطة تقاطعه مع الخط البياني ⑤ نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته $(y = A$ ترتيب$)$ ونحدد B نقطة تقاطعه مع المنصف Δ ⑥ فاصلة B هي u_1 نكرر ما سبق



التمرين الأول:

نتأمل جانباً C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:



جد كلاً من:

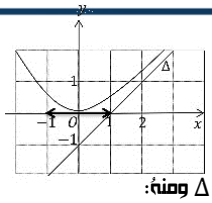
- $f(-1) = -1$ ، $f(0) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f\big(f(x)\big)$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f\big(f(x)\big) = 1$
- $f(]-\infty, -1[) =]-1,0[$
- $f([-1,0]) = [-1,1]$
- $f(]0, +\infty[) =]-\infty, 1[$
- $f(D_f) = f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[)$

  $= f(]-\infty, 1[) \cup f([-1,0]) \cup f(]0, +\infty[)$

  $=]-1,0[\cup [-1,1] \cup]-\infty, 1[=]-\infty, 1]$

التمرين الثاني:



نتأمل الشكل المرسوم جانباً وليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمستقيم Δ مقارب مائل لـ C والمطلوب:

١. جد ميل المستقيم Δ .

لدينا $A(1,0)$ و $B(0,-1)$ نقطتان تنتميان إلى المستقيم Δ ومنهُ:

$$m_\Delta = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0+1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

٢. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m_\Delta = 1$$

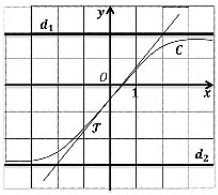
٣. جد $f'(0)$.

$$f'(0) = 0$$

٤. جد $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$$

التمرين الثالث:



إذا كان الخط البياني للتابع f والمستقيمين d_1 و d_2 مقاربين للخط C والمستقيم T مماس للخط C والمطلوب:

١. اكتب معادلة كل من المقاربين d_1 و d_2 .

$$d_1: y = 2 \quad , \quad d_2: y = -3$$

٢. إذا علمت أنّ المستقيم المائل المرسوم في الشكل يمس المنحني في النقطة $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ احسب $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ واكتب معادلتهُ:

لدينا $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ و $(2,2)$ نقطتين من المستقيم ومنهُ يكون ميلهُ:

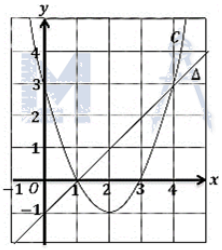
$$m = \frac{-\frac{1}{2}-2}{0-2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-2} = \frac{5}{4} \to f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

كتابة المعادلة: النقطة $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ وميلهُ $m = \frac{5}{4}$ ومعادلتهُ:

$$y = \frac{5}{4}(x-0) - \frac{1}{2} = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع:

تأمل الشكل المرسوم جانباً وليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:



١. ما عدد حلول المعادلة:

* $f(x) = -2$ ؟ مستحيلة الحل.
* $f(x) = -1$ ؟ حل وحيد
* $f(x) = 0$ ؟ حلين
* $f(x) = 1$ ؟ حلين
* $f(x) = y_\Delta$ ؟ حلين

٢. ما هي حلول المعادلة:

* $f(x) = -2$ مستحيلة الحل
* $f(x) = -1 \to x = 2$
* $f(x) = 0 \to x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 3$
* $f(x) = 1 \to x_1 \in 0,1[\quad , \quad x_2 \in]3,4[$
* $f(x) = y_\Delta \to x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 4$

٣. ناقش بيانياً حلول المعادلة $f(x) = m$.

* عندما $m \in]-\infty, 1[$ فإن المعادلة $f(x) = m$ مستحيلة الحل.
* عندما $m = -1$ فإنّ للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.
* عندما $m \in]-1, +\infty[$ فإنّ للمعادلة $f(x) = m$ حلين.

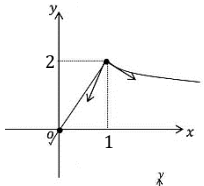
٤. جد حلول المتراجحات الآتية:

* $f'(x) > 0 \to S =]2, +\infty[$
* $f'(x) \geq 0 \to S = [2, +\infty[$
* $f'(x) < 0 \to S =]-\infty, 2[$
* $f(x) > 0 \to S =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$
* $f(x) \geq 0 \to S =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$
* $f(x) < 0 \to S =]1,3[$
* $f(x) \leq 0 \to S = [1,3]$
* $f(x) > 3 \to S =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty]$
* $f(x) \geq 3 \to S =]-\infty, 0] \cup [4, +\infty]$
* $f(x) < 3 \to S =]0,4[$
* $f(x) \leq 3 \to S = [0,4]$

٥. هل التابع f زوجي؟

لا , لأنّ الخط البياني ليس متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

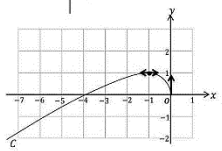
التمرين الخامس:



C هو الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً.

هل التابع f اشتقاقي عند الـ 1 ؟ لا غير اشتقاقي.

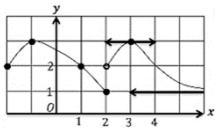
التمرين السادس:



C هو الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً.

هل التابع f اشتقاقي عند الـ 0 ؟ لا غير اشتقاقي.

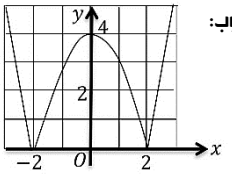
التمرين السابع:



C هو الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً.

هل التابع f اشتقاقي عند الـ 2 ؟ لا غير اشتقاقي.

التمرين الثامن:



نجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

١. عيّن ما للتابع من قيم حدية.

$f(-2) = 0$ قيمة حدية صغرى محلياً.

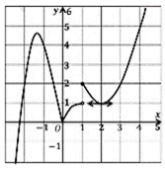
$f(0) = 4$ قيمة حدية كبرى محلياً.

$f(2) = 0$ قيمة حدية صغرى محلياً.

٢. أثبت أنّ $f(0) = 4$ قيمة حدية كبرى محلياً.

ليكن لدينا $I =]-1,1[$ ولتكن $D_1 = D_f \cap I$ وأياً كان $x \in D_1$ فإنّ $f(0) \geq f(x)$

التمرين التاسع:



نجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

١. هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع f ؟ علل ذلك.

$f(1)$ قيمة حدية كبرى محلياً لأنهُ:

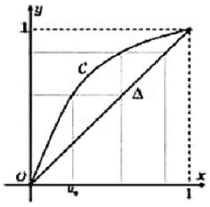
ليكن لدينا $I =]0,2[$ ولتكن $D_1 = D_f \cap I$

وأياً كان $x \in D_1$ فإنّ $f(0) \leq f(x)$

٢. ما عدد القيم الحدية للتابع f ؟

أربعة قيم حدية.

التمرين العاشر:



في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ والمستقيم $\Delta: y = x$ ولتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $u_{n+1} = f(u_n)$ و $0 < u_0 < 1$

١. اكتب حلول المعادلة $f(x) = x$.

$$f(x) = x \to x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 1$$

٢. ماذا يمثل العدد $\int_0^1 (f(x) - x)\,dx$ ؟

يمثل مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C والمستقيم $\Delta: y = x$ والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$

٣. ما جهة اطراد التابع f ؟

f متزايد تماماً على المجال $[0,1]$

٤. ما جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ وما نهايتها المحتملة؟

u_n متزايدة تماماً ونهايتها المحتملة 1

تحديد الثوابت:

النمط	الأول	الثاني
المعطى	يكون المعطى هو علاقتين متكافئتين إحداهما تحوي ثوابت والمطلوب إيجاد هذه الثوابت	يكون المعطى هو تابع f علاقة واحدة تحوي ثوابت مع بعض المعطيات يساوي عدد الثوابت والمطلوب إيجاد الثوابت
فكرة الحل	* نحول إحدى العلاقتين إلى شكل العلاقة الثانية وفق استخدام (القسمة الإقليدية النشر- توحيد المقامات) * نقارن بين العلاقتين ونحدد الثوابت	* ترجمة المعطيات. * التعويض في الترجمة للحصول على معادلات. * حل المعادلات للحصول على ثوابت

المعطيات وترجمتها:

النمط	المعطى	ترجمته
الأول	الخط البياني يمر من النقطة $A(x_A, y_A)$	$f(x_A) = y_A$
	الخط البياني يقبل مماس ميله m (حيث الميل إما معلوم أو يُحسب) في النقطة التي فاصلتها x_A	$f'(x_A) = m$
	الخط البياني يقبل مماس ميله m في النقطة $A(x_A, y_A)$	$f(x_A) = y_A \ , \ f'(x_A) = m$
	للتابع قيمة حدية عند: x_A	$f'(x_A) = 0$
	للتابع قيمة حدية في النقطة $A(x_A , y_A)$ أو للتابع قيمة حدية قيمتها y_A يبلغها عند x_A أو التابع قيمة حدية عند x_A هي y_A	$f(x_A) = y_A$ $f'(x_A) = 0$
الثاني	المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب شاقولي للخط C	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$
	المستقيم الذي معادلته $y = b$ مقارب أفقي للخط C	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$
	المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب مائل في جوار ∞	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - y_\Delta = 0$

التمرين الأول:

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$$

عين a و b و c التي تحقق:

$$f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

الحل: باستخدام طريقة النشر:

لدينا:

$$f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$
$$= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$$
$$= ax^3 + bx^2 - 2ax^2 + cx - 2bx - 2c$$
$$= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$$

بالمقارنة مع: $f(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$ نجد:

$$a = 4 \dots (1)$$
$$b - 2a = -8 \dots (2)$$
$$c - 2b = -1 \dots (3)$$
$$-2c = 2 \dots (4)$$

من (1) نجد: $a = 4$

من (4) نجد: $c = -1$

نعوض في (2):

$$b - 2(4) = -8$$
$$b - 8 = -8 \to b = 0$$

تحقق في (3):

$$-1 - 2(0) = -1 \to -1 = -1 \to$$ محققة

ومنه: $a = 4 \ , \ b = 0 \ , \ c = -1$

إذاً:

$$f(x) = (x-2)(4x^2 - 1)$$

التمرين الثاني:

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + 5}{e^x + 2}$$

عين a و b و c التي تحقق:

$$f(x) = ae^x + b + \frac{c}{e^x + 2}$$

الحل: باستخدام القسمة الإقليدية:

لدينا:

$$f(x) = e^x - 5 + \frac{15}{e^x + 2}$$

بالمقارنة نجد: $a = 1$ و $b = -5$ و $c = 15$

إذاً:

$$f(x) = e^x - 5 + \frac{15}{e^x + 2}$$

التمرين الثالث:

f هو التابع المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 1}$$

عين a و b التي تحقق:

$$f(x) = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{2x+1}$$

الحل:

لدينا:

$$f(x) = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{2x+1}$$

نوحد المقامات:

$$= \frac{a(2x+1) + b(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}$$
$$= \frac{2ax + a + 2bx - b}{4x^2 - 1}$$
$$= \frac{(2a+2b)x + a - b}{4x^2 - 1}$$

بالمقارنة مع $f(x) = \frac{1}{4x^2-1}$ نجد:

$$2a + 2b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \dots (1)$$
$$a - b = 1 \dots (2)$$

نجمع (1) و (2) نجد:

$$2a = 1 \to a = \frac{1}{2}$$

نعوض في (1):

$$\frac{1}{2} + b = 0 \to b = -\frac{1}{2}$$

ومنه: $a = \frac{1}{2}$ و $b = -\frac{1}{2}$

إذاً:

$$f(x) = \frac{1}{4x-2} - \frac{1}{4x+2}$$

التمرين الرابع:

ليكن a و b عددين حقيقيين و C_f هو الخط البياني للتابع f

المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق: $f(x) = ax + b - \ln x$

عين العددين a و b إذا علمت أنّ للتابع f قيمة حدية

عند $x = 1$

الحل:

بما أن التابع f يمر من النقطة $(1, -2)$ فإنّ:

$$f(1) = -2$$
$$a + b = -2 \dots (1)$$

بما أنّ التابع f قيمة حدية يبلغها عند (1) فإنّ:

$$f'(1) = 0$$

حيث:

$$f'(x) = a - \frac{1}{x}$$

ومنهُ:

$$f'(1) = 0$$
$$a - 1 = 0 \dots (2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$a + b = -2 \dots (1)$$
$$a - 1 = 0 \dots (2)$$

من (2) نجد: $a = 1$

نعوض في (1):

$$1 + b = -2 \to b = -3$$

ومنه: $a = 1$ و $b = -3$

إذاً:

$$f(x) = x - 3 - \ln x$$

التمرين الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = ae^{2x} + be^x$$

عين a و b كي يكون للخط البياني C_f قيمة حدية في

النقطة $A(0, -1)$

الحل:

بما أن التابع f يمر من النقطة $A(0, -1)$ فإن:

$$f(x_A) = y_A$$
$$f(0) = -1$$
$$a + b = -1 \dots (1)$$

بما أن للخط البياني قيمة حدية في النقطة A فإن:

$$f'(x_A) = 0$$
$$f'(0) = 0$$

حيث:

$$f'(x) = 2ax^{2x} + be^x$$

نعوض :

$$f'(0) = 0$$
$$2a + b = 0 \dots (2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$a + b = -1 \dots (1)$$
$$2a + b = 0 \dots (2)$$

نضرب (1) بالعدد (-1) :

$$-a - b = 1 \dots (1)'$$
$$2a + b = 0 \dots (2)$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد:

$$a = 1$$

نعوض في (2):

$$2 + b = 0 \to b = -2$$

ومنه: $a = 1$ و $b = -2$

إذاً:

$$f'(x) = 2x^{2x} - 2e^x$$

التمرين السادس:

ليكن a و b عددين حقيقيين و C_f الخط البياني للتابع f

المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$f(x) = ax \cdot \ln(x) + bx$$

عين العددين a و b بحيث يكون المماس للخط في

النقطة $A(1, -1)$ موازياً محور الفواصل

الحل:

بما أن الخط البياني يمر من النقطة $A(1, -1)$ فإن:

$$f(1) = -1$$
$$b = -1 \dots (1)$$

يكون المماس للخط البياني في النقطة A موازياً لمحور

الفواصل عندما:

$$f'(x_A) = m$$

حيث: المماس الموازي لمحور الفواصل هو مماس أفقي

والمماس الأفقي ميله معدوم $m = 0$

$$f'(1) = 0$$
$$a + b = 0 \dots (2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$b = -1 \dots (1)$$
$$a + b = 0 \dots (2)$$

من (1) نجد:

$$b = -1$$

نعوض في (2):

$$a - 1 = 0 \to a = 1$$

ومنه: $a = 1$ و $b = -1$

إذاً :

$$f(x) = x \ln x - x$$

مكثفة شيفرة الـ 600

التمرين السابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$$

جد الأعداد الحقيقية a و b و c و d علماً أن الخواص الآتية محققة.

- المستقيم الشاقولي الذي معادلته: $x=3$ مقارب للخط C
- المستقيم المائل الذي معادلته $y=2x-5$ مقارب لـ C في جوار الـ $\infty+$ و $\infty-$
- تنتمي النقطة $A(1,2)$ إلى الخط C

الحل:

بما أن $x=3$ مقارب للخط C فإنّ:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\infty$$

حيث:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=3x+b+\frac{c}{3-d}$$

تكون $\lim_{x\to 3} f(x)$ هي ∞ إذا تحقق:

$$3-d=0\Rightarrow d=3$$

بما أنّ: $\Delta: y=2x-5$ مقارب مائل في جوار ∞ فإنّ:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

حيث:

$$\lim_{x\to\infty}\left(ax+b+\frac{c}{x-3}-(2x-5)\right)$$

تكون:

$\lim_{x\to\infty}(f(x)-y_\Delta)$ هي 0 إذا تحقق:

$$ax+b=2x-5$$

وهذا يكافئ أن:

$$a=2$$
$$b=-5$$

بما أنّ النقطة A تنتمي الخط البياني فإنّ:

$$f(1)=2$$
$$2(1)-5+\frac{c}{1-3}=2$$
$$-3+\frac{c}{-2}=2$$
$$\frac{c}{-2}=5$$
$$c=-10$$
$$\Rightarrow f(x)=2x-5-\frac{10}{x-3}$$

المعادلات التفاضلية:

شكل المعادلة	$y'=ay$	$y'=ay+b$
حلولها	$f_k(x)=k.e^{ax}\ ;k\in\mathbb{R}$	$f_k(x)=k.e^{ax}-\frac{b}{a}\ ;k\in\mathbb{R}$

أنماط التمارين:

النمط	نص السؤال	فكرة الحل
الأول	أثبت أن التابع $f(x)$ (معطى) هو حل للمعادلة التفاضلية (معطاة)	نعوض في المعادلة التفاضلية ونستبدل كل y بـ $f(x)$ وكل y' بـ $f'(x)$ ونميز: المعادلة محققة: إذاً $f(x)$ هو الحل المعادلة غير محققة: إذاً $f(x)$ ليس حل للمعادلة
الثاني	عين قيمة المجهول m ليكون التابع $f(x)$ (معطى) هو حل للمعادلة التفاضلية (معطاة)	نعوض في المعادلة التفاضلية بحيث نستبدل كل y بـ $f(x)$ وكل y' بـ $f'(x)$ فنحصل على معادلة بهذا المجهول ونحل هذه المعادلة نحصل على المطلوب
الثالث	حل المعادلة التفاضلية	١. نعزل y' ٢. نحدد قيمة a ٣. نحدد قيمة b عند وجود حل ٤. نطبق التعريف المناسب
الرابع	عين حل المعادلة التفاضلية (معطاة) الذي يحقق الشرط (معطى)	١. نحل المعادلة كما ورد في النمط الثالث ٢. بالاعتماد على الشرط نضع الترجمة المناسبة ٣. نعوض ونصلح وصولاً إلى K قاموس الترجمات:
الخامس	عين تابعاً من الدرجة الثانية يحقق المعادلة التفاضلية (معطاة)	١. نفرض تابعاً من الدرجة الثانية من الشكل: $f(x)=ax^2+bx+c$ ٢. نشتق التابع $f(x)$ ٣. نعوض في المعادلة التفاضلية كلاً من $f(x)$ و $f'(x)$ فنحصل على معادلة بالمجاهيل a و b و c ٤. نطابق بينها وبين المعادلة التفاضلية (المعطاة) ٥. فنحصل على جملة معادلات بالمجاهيل a و b و c نحلها إما بالحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض ٦. نحصل على قيم a و b و c وبتعويضها في: $f(x)=ax^2+bx+c$ نكون قد حصلنا على التابع

الشرط	الترجمة
الخط البياني للحل يمر بالنقطة $A(x_A,y_A)$	$f(x_A)=y_A$
الحل f يحقق $f(a)=b$	$f(a)=b$
ميل المماس في النقطة التي فاصلتها x_A للخط C من الحل يساوي m	$f'(x_A)=m$

التمرين الأول: f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$f(x)=x\ln x$$

أثبت أن f هو حل للمعادلة التفاضلية $y'-\frac{1}{x}y=1$

الحل: لدينا:

$$y=f(x)=x\ln x$$
$$y'=f'(x)=\ln x+1$$
$$\underbrace{y'-\frac{1}{x}y}_{l_1}=\underbrace{1}_{l_2}$$
$$l_1=y'-\frac{1}{x}y=\ln x+1-\frac{1}{x}(x\ln x)$$
$$=\ln x+1-\ln x=1=l_2$$

التمرين الثاني: في معلم متجانس، C_f هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$$

عين β ليكون $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية:

$$y'+2y=(2x-\beta)e^{-x+1}$$

الحل:

إيجاد $f'(x)$:

$$f'(x)=2e^{-x+1}-(2x-1)e^{-x+1}$$
$$\rightarrow f'(x)=(3-2x)e^{-x+1}$$

ولدينا:

$$y'+2y=(2x-\beta)e^{-x+1}$$
$$(3-2x)e^{-x+1}+2(2x-1)e^{-x+1}=(2x-\beta)e^{-x+1}$$
$$(2x+1)e^{-x+1}=(2x-\beta)e^{-x+1}$$

بالمقارنة نجد: $\beta=-1$

التمرين الثالث: حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$2y'=3y$$
$$y'=\frac{3}{2}y\rightarrow a=\frac{3}{2}$$

حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:

$$f_k(x)=ke^{ax}\ ;k\in\mathbb{R}$$
$$f_k(x)=ke^{\frac{3}{2}x}\ ;k\in\mathbb{R}$$

$$y'-5y=0$$
$$y'=5y\rightarrow a=5$$

حلول المعادلة هي توابع من الشكل:

$$f_k(x)=ke^{ax}\ ;k\in\mathbb{R}$$
$$f_k(x)=ke^{5x}\ ;k\in\mathbb{R}$$

$$y' = 2y + 1$$
$$a = 2\,,b = 1$$
حلول المعادلة هي توابع من الشكل:
$$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}\,;k \in \mathbb{R}$$
$$f_k(x) = ke^{2x} - \frac{1}{2}\,;k \in \mathbb{R}$$

$$3y' + y = 2$$
$$y' = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}y$$
$$a = -\frac{1}{3}\,,b = \frac{2}{3}$$
حلول المعادلة هي توابع من الشكل:
$$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}\,;k \in \mathbb{R}$$
$$f_k(x) = ke^{-\frac{1}{3}x} - \left(\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}}\right)\,;k \in \mathbb{R}$$
$$f_k(x) = ke^{-\frac{1}{3}x} + 2\,;k \in \mathbb{R}$$

التمرين الرابع: في كل حالة عين حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى:

١. $y' = 2y$ والحل f يحقق الشرط $f(0) = 1$

٢. $y' + 5y = 0$ والخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(-2,1)$

٣. $y' + 2y = 0$ وميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$

الحل:

الطالب الأول:
$$y' = 2y \to a = 2$$
حلول المعادلة هي توابع من الشكل:
$$f_k(x) = ke^{ax}\,;k \in \mathbb{R}$$
$$f_k(x) = ke^{2x}\,;k \in \mathbb{R}$$
إيجاد قيمة k :
بما أن f يحقق الشرط: $f(0) = 1$ إذاً حل المعادلة:
$$f(x) = e^{2x}$$

الطالب الثاني:
$$y' + 5y = 0$$
$$y' = -5y \to a = -5$$
حلول المعادلة هي توابع من الشكل:
$$f_k(x) = ke^{ax}\,;k \in \mathbb{R}$$
$$f_k(x) = ke^{-5x}\,;k \in \mathbb{R}$$
تعين قيمة k:
الحل يمر بالنقطة $A(-2,1)$:
$$f(-2) = 1 \to ke^{10} = 1$$
$$\to k = \frac{1}{e^{10}} \to k = e^{-10}$$
إذاً حلول المعادلة هو:
$$f(x) = e^{-10}\,e^{-5x} = e^{-5x-10}$$

الطالب الثالث:
$$y' + 2y = 0$$
$$y' = -2y \to a = -2$$
حلول المعادلة هي توابع من الشكل:
$$f_k(x) = ke^{ax}\,;k \in \mathbb{R}$$
$$f_k(x) = ke^{-2x}\,;k \in \mathbb{R}$$
إيجاد قيمة k:
بما أن ميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$ فإن:
$$f'(-2) = \frac{1}{2}$$
لدينا:
$$f'(x) = -2k\,e^{-2x}\,;k \in \mathbb{R}$$
إذاً:
$$-2ke^{4} = \frac{1}{2}$$
$$\to k = \frac{\frac{1}{2}}{-2e^{4}} \to k = \frac{1}{-4}e^{-4}$$
إذاً حل المعادلة هو:
$$f(x) = -\frac{e^{-4x}}{4}\,e^{-2x}$$
$$f(x) = \frac{-1}{4}e^{-2x-4}$$

التمرين الخامس: لتكن (E') المعادلة التفاضلية
$$2y' + 3y = x^2 + 1$$
عين كثير الحدود من الدرجة الثانية f يحقق المعادلة (E')
الحل:
ليكن لدينا التابع: $f(x) = ax^2 + bx + c$
$$f'(x) = 2ax + b$$
وبما أن التابع f يحقق المعادلة فإن:
$$2y' + 3y = x^2 + 1$$
$$2(2x + b) + 3(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1$$
$$4ax + 2b + 3ax^2 + 3bx + 3x = x^2 + 1$$
$$3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c = x^2 + 1$$
بالمقارنة نجد:
$$3a = 1 \dots (1)$$
$$4a + 3b = 0 \dots (2)$$
$$2b + 3c = 1 \dots (3)$$
من (1) نجد: $a = \frac{1}{3}$ نعوض في (2)
$$4\left(\frac{1}{3}\right) + 3b = 0 \to b = -\frac{4}{9}$$
نعوض في (3) :
$$2\left(-\frac{4}{9}\right) + 3c = 1 \to c = \frac{17}{27}$$
إذاً التابع:
$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{17}{27}$$

- مَا رأيكَ أن تُحاول مرّةً أُخرَى اليَوم ؟
لسنا هنا إلَّا لنحاول، وفي إحدى المحاولات حتماً سنَنجح..
لا يزال في الوقت متسعٌ لبعض المحاولات الجديدة ، الفرص مُستمرة ، ما دمنا هُنا الآن لم يوارِنا التراب..
جُهودك في تكرار المحاولة لا تذهب سدى بل تمهّد لَك طريقَ الوصول فلا تجزع ولا تيأس ولا تتوقف عن المسير..

التأطير التابعي (حصر التوابع المثلثية):

تعريف:
إذا كان f و g تابعين اشتقاقيين على المجال $[0,+\infty[$ وكان $f'(x) < g'(x)$
أياً كان $x \in [0,+\infty[$ عندئذ يتحقق: $f(x) - f(0) \le g(x) - g(0)$

الفائدة:
إيجاد النهاية لبعض التوابع المثلثية بالاستعانة بمبرهنة الإحاطة.
إيجاد قيم تقريبية لتوابع مثلثية (حصر الـ sin أو الـ cos) بمجال صغير.

تمارين:

1. أثبت أن: $\sin x \le x$ أيًا كان $x \ge 0$.
لدينا:
$f(x) = \sin x$ تابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$
ومنهُ هو اشتقاقي على $[0,+\infty[$ ومشتقهُ $f'(x) = \cos x$
$g(x) = x$ تابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$
ومنهُ هو اشتقاقي على $[0,+\infty[$ ومشتقهُ $g'(x) = 1$
نعلم أنّ:
$$-1 \le \cos x \le 1$$
إذاً:
$$\cos x \le 1 \to f'(x) \le g'(x)$$
ومنهُ:
$$f(x) - f(0) \le g(x) - g(0)$$
$$\sin x - \sin(0) \le x - 0$$
$$\sin x \le x$$
محققة أياً كان $x \ge 0$

2. أثبت أن $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$ أيًا كان $x \ge 0$.
لدينا:
$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$$
من جهة أولى: $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x$
لدينا:
$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$
فهو اشتقاقي على $[0,+\infty[$ ومشتقهُ: $f'(x) = -x$
$g(x) = \cos x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$
فهو اشتقاقي على $[0,+\infty[$ ومشتقهُ: $g'(x) = -\sin x$
لدينا مما سبق:
$$\sin x \le x \to -\sin x \ge -x \to g'(x) \ge x$$
إذاً:
$$g(x) - g(0) \ge f(x) - f(0)$$
$$\cos x - \cos(0) \ge 1 - \frac{x^2}{2} - 1$$
$$\cos x - 1 \ge -\frac{x^2}{2} \to \cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2}$$
من جهة ثانية: $\cos x \le 1$ محققة لأنّ $-1 \le \cos x \le 1$
إذاً:
$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$ محققة أياً كان $x \ge 0$

مكثفة شيفرة الـ 600

3. أثبت أن $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$ أيًا كان $x \ge 0$.

لدينا:

$$x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$$

من جهة أولى: $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x$

لدينا:

$f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

فهو اشتقاقي على $[0, +\infty[$ ومشتقته $f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$

$g(x) = \sin x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

فهو اشتقاقي على $[0, +\infty[$ ومشتقته $g'(x) = \cos x$

ولدينا مما سبق:

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \to f'(x) \le g'(x)$$

ومنه:

$$f(x) - f(0) \le g(x) - g(0)$$
$$x - \frac{x^3}{6} - 0 \le \sin x - \sin(0)$$
$$x - \frac{x^3}{6} \le \sin x$$

من جهة ثانية: $\sin x \le x$ محققة مسبقاً ومنه:

$x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$ محققة أياً كان $x \ge 0$

4. أثبت أن $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$ أيًا كانت $x \in \mathbb{R}$

5. أثبت أن $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{6}$ أيًا كانت $x \ge 0$

حلّهم أنتَ يا عزيزي الطالب بنفس الأسلوب(اللّه يقويك..)

6. استنتج مما سبق أنّ العدد $1 - \frac{x^2}{2}$ تقريب للعدد $\cos x$ بخطأ لا يتجاوز $\frac{x^4}{24}$

ما الخطأ الذي نرتكبه عندما نكتب $\cos(0.1) = 0.995$ ؟

الحل:

هذا لأنّ $0 \le \cos x - \left[1 - \frac{x^2}{2}\right] \le \frac{x^4}{24}$ ففي حالة $x = 0.1$

يكون لدينا $0 \le \cos(0.1) - 0.995 \le 4.167 \times 10^{-6}$

في حين تعطي الآلة الحاسبة: $\cos(0.1) - 0.995 \cong 4.165 \times 10^{-6}$

7. احسب نهاية $\frac{\cos x - 1}{x^2}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

لدينا:

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$$
$$-\frac{x^2}{2} \le \cos x - 1 \le -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$$
$$-\frac{1}{2} \le \frac{\cos x - 1}{x^2} \le -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}$$

لدينا:

$$\lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}\right) = -\frac{1}{2}$$

ومنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أنّ:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

8. احسب نهاية $\frac{x - \sin x}{x^3}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

لدينا:

$$x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$$
$$-x + \frac{x^3}{6} \ge -\sin x \ge -x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$
$$\frac{x^3}{6} \ge x - \sin x \ge \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$
$$\frac{1}{6} \ge \frac{x - \sin x}{x^3} \ge \frac{1}{6} + \frac{x^2}{120}$$

لدينا:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120}\right) = \frac{1}{6}$$

ومنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أنّ:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x - \sin x}{x^3}\right) = \frac{1}{6}$$

جدّد النيّات، واضبط الحركات، وليكُن زادُك كثيرُ صبرٍ ودعوات، فحصادك نِتاج غرسك، وبقدر صدقك تكون العناية ويَمُدُّك اللّه بالسقاء

القسم الأول: إثبات أنّ التابع F تابع أصلي.

تعريف	نقول عن التابع $F(x)$ أنه تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال I إذا تحقق الشرطين: * F اشتقاقي على المجال I * $F'(x)=f(x)$

النمط	الأول	الثاني
نص السؤال	أثبت أن التابع $F(x)$ هو تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال I	أثبت أن $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان للتابع $f(x)$ على المجال I
فكرة الحل	* نثبت أنّ التابع $F(x)$ اشتقاقي على المجال I * نوجد $F'(x)$ * نثبت أن $F'(x)=f(x)$	✌ الأسلوب الأول: * نثبت أن $F(x)$ اشتقاقي على المجال I . * نثبت أن $G(x)$ اشتقاقي على المجال I . * نشكل الفرق بين التابعين ونميز: ① الحالة الأولى: إذا كان الناتج عدد ثابت فإنّ التابعان $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان للتابع $f(x)$. ② الحالة الثانية: إذا كان الناتج مقدار يحوي x فإنّ التابعان $F(x)$ و $G(x)$ ليسا تابعان أصليان للتابع $f(x)$ ✌ الأسلوب الثاني: * نثبت أن $F(x)$ اشتقاقي على المجال I ونوجد $F'(x)$ * نثبت أن $G(x)$ اشتقاقي على المجال I ونوجد $G'(x)$ * نثبت أن: $G'(x)=F'(x)$ وبالتالي يكون $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان لـ $f(x)$ على المجال I

التمرين الأول:

تحقق أن F تابع أصلي للتابع f على المجال I، حيثُ.

$$F(x)=2\sqrt{e^x}, f(x)=\sqrt{e^x}, I=\mathbb{R}$$

الحل:

F تابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$F'(x)=2\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}=\sqrt{e^x}=f(x)$$

ومنه F تابع أصلي للتابع f على المجال I.

التمرين الثاني:

تحقق أن F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال I

$$F(x)=\sin^2 x$$
$$G(x)=2-\cos^2 x$$
$$I=\mathbb{R}$$

الحل:

F و G تابعان اشتقاقيان على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$F(x)-G(x)=\sin^2 x-2+\cos^2 x$$
$$=\sin^2 x+\cos^2 x-2=-1$$

ومنه F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال I.

القسم الثاني: كيفية إيجاد تابع أصلي:

الخواص	
التابع الأصلي لمجموع توابع	إذا كان لدينا مجموع توابع يمكننا إيجاد التابع الأصلي لكل منهما على حدا
التابع الأصلي لجداء عدد حقيقي بتابع	إذا كان لدينا جداء عدد حقيقي بتابع فإننا نترك العدد بحاله ونوجد التابع الأصلي لهذا التابع
التابع الأصلي لجداء تابعين	لا يوجد قانون فوري
التابع الأصلي لقسمة تابعين	لا يوجد قانون فوري

قواعد إيجاد تابع أصلي:

		الفكرة	التمارين الموافقة
أولاً		إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x)=\alpha$ حيث α هو عدد ثابت حقيقي فإنّ تابعه الأصلي يعطى وفق: $F(x)=\alpha x+c$	من 1 إلى 4
ثانياً	الحالة العامة	إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x)=g'(x)(g(x))^n$ حيث $n\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ فإنّ تابعه الأصلي يعطى وفق: $F(x)=\frac{(g(x))^{n+1}}{n+1}+c$	من 5 إلى 9
	الحالة الخاصة	إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x)=x^n$ فإنّ تابعه الأصلي من الشكل: $F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	من 10 إلى 12
	الملاحظة الأولى	أحياناً نحتاج إلى بعض الإصلاحات (عامل مشترك – تباعد اجتماعي- شطب قطب – استنساخ) من أجل إظهار $g'(x)$	من 13 إلى 15
	الملاحظة الثانية	عند وجود قوة في المقام فإننا نرفعها إلى البسط	من 16 إلى 18
	الملاحظة الثالثة	في حال وجود جذر فإننا نحوّلهُ إلى قوّة ثم نتابع كما سبق , تذكر يا عزيزي الطالب: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	من 19 إلى 21
ثالثاً	الحالة العامة	إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$ فإنّ تابعه الأصلي من الشكل: $F(x)=ln(\lvert g(x)\rvert)+c$ ونتخلص من القيمة المطلقة بالاعتماد على المجال المعطى.	من 22 إلى 24
	ملاحظة	نحتاج إلى بعض الإصلاحات (عامل مشترك – تباعد اجتماعي- شطب قطب – استنساخ) من أجل إظهار $g'(x)$	من 25 إلى 27
رابعاً		إذا كان التابع $f(x)$ عبارة عن تابع كسري بسطه ومقامه كثيري حدود وفشل ثانياً وثالثاً فإننا نميز:	
	الحالة الأولى	إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام فإننا نصلح باستخدام القسمة الإقليدية ثم نكامل كما سبق	من 28 إلى 29
	الحالة الثانية	إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام فإننا نصلح التابع باستخدام تفريق الكسور ثم نكامل كما سبق	من 30 إلى 31
	ملاحظة	أحياناً نحتاج إلى الإصلاح بالقسمة الإقليدية ثم استخدام تفريق الكسور	32
خامساً	الحالة العامة	إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x)=g'(x)e^{g(x)}$ فإنّ تابعهُ الأصلي من الشكل: $F(x)=e^{g(x)}+c$	من 33 إلى 35
	الحالة الخاصة	إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x)=e^{\alpha x}$ فإنّ تابعهُ الأصلي من الشكل: $F(x)=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+c$	من 36 إلى 38
	ملاحظة	أحياناً نحتاج إلى بعض الإصلاحات (عامل مشترك – تباعد اجتماعي- شطب قطب – استنساخ) من أجل إظهار $g'(x)$.	من 39 إلى 40

سادساً

الفكرة

قوانين

$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
$F(x)=\sin x+c$	1. $f(x)=\cos x$	$F(x)=-\cot x+c$	3. $f(x)=1+\cot^2 x$
$F(x)=-\cot x+c$	5. $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=\tan x+c$	4. $f(x)=1+\tan^2 x$
$F(x)=-\cot x+c$		$F(x)=\tan x+c$	6. $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

القاعدة الأساسية

$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
$F(x)=\sin(g(x))+c$	$f(x)=g'(x)\cos(g(x))$	$F(x)=-\cos(g(x))+c$	$f(x)=g'(x)\sin(g(x))$
أيّ في الحالتين نعمل $g'(x)$ ثم نكامل الدالّة			

ملاحظة

أحياناً نحتاج إلى بعض الإصلاحات من أجل إظهار $g'(x)$

تطبيق مباشر

$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
$F(x)=-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$	$f(x)=\sin(\alpha x)$	$F(x)=-\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)$	$f(x)=\cos(\alpha x)$

مهارات

المهارة الأولى

لدينا $\tan x$ أو $\cot x$ فإننا نكتب: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ أو $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ ثم نكمل باستخدام ثالثاً

المهارة الثانية

لدينا $\tan^2 x$ أو $\cot^2 x$ فإننا نضيف ونطرح 1 ثم نكمل مباشر وأولاً.

المهارة الثالثة

لدينا $\sin^2 x$ أو $\cos^2 x$ فإننا نستخدم القوانين "نصر ونصر" وفق:

$$\cos^2(\text{زاوية})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\text{ضعفي الزاوية}) \quad , \quad \sin^2(\text{زاوية})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(\text{ضعفي الزاوية})$$

ثم نكمل مباشر وأولاً.

المهارة الرابعة

لدينا $\sin^4 x$ أو $\cos^4 x$ فإننا نكتب: $\cos^4 x=(\cos^2 x)^2$ أو $\sin^4 x=(\sin^2 x)^2$ ثم نكمل بـ "نصر ونصر"

المهارة الخامسة

لدينا: $\sin^3 x$ أو $\cos^3 x$ فإننا:

- نفرط وفق: $\sin^3 x=\sin x.\sin^2 x$ أو $\cos^3 x=\cos x.\cos^2 x$
- قانون واحد ناقص وفق: $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ أو $\cos^2 x=1-\sin^2 x$
- ننشر ثم نكمل مباشر وثانياً

المهارة السادسة

إذا كان لدينا جداء نسب مثلثية نميز:

الزاوية نفسها	استخدام ثانيا
غير ذلك	نستخدم دساتير التحويل من جداء إلى مجموع وفق:

- $\cos x.\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$
- $\sin x.\sin y=\frac{-1}{2}(\cos(x+y)-\cos(x-y))$
- $\cos x.\sin y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)-\sin(x-y))$
- $\sin x.\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$

تمرين:

في كل من الحالات الآتية أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

أولاً:

1. $f(x)=e\ ,I=\mathbb{R}\Rightarrow F(x)=ex$
2. $f(x)=\sqrt{2}\ ,I=\mathbb{R}\Rightarrow F(x)=\sqrt{2}x$
3. $f(x)=ln\,3\ ,I=\mathbb{R}\Rightarrow F(x)=ln\,3\,x$
4. $f(x)=\pi\ ,I=\mathbb{R}\Rightarrow F(x)=\pi x$

ثانياً:

الحالة العامة:

5. $f(x)=(3x^2)(x^3+7)^{\frac{1}{2}}\ ,I=\mathbb{R}$

$$F(x)=\frac{(x^3+7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{(x^3+7)^3}$$

6. $f(x)=\frac{1}{x}ln\,x\ ,I=\mathbb{R}_+^*$

$$F(x)=\frac{(ln\,x)^2}{2}$$

7. $f(x)=cos\,x\,sin^5 x\ ,I=\mathbb{R}$

$$F(x)=\frac{sin^6 x}{6}$$

8. $f(x)=\frac{-1}{sin^2 x}(cot\,x)^2\ ,I=\mathbb{R}\backslash\{\pi k\}$

$$F(x)=\frac{cot^3 x}{3}$$

9. $f(x)=5e^x(5e^x-3)^7\ ,I=\mathbb{R}$

$$F(x)=\frac{(5e^x-3)^8}{8}$$

الحالة الخاصة:

10. $f(x)=x^9\ ,I=\mathbb{R}\Rightarrow F(x)=\frac{x^{10}}{10}$
11. $f(x)=x^{-3}\ ,I=\mathbb{R}^*$

$$F(x)=\frac{x^{-2}}{-2}=-\frac{1}{2x^2}$$

12. $f(x)=x^{\frac{5}{3}}\ ,I=\mathbb{R}$

$$F(x)=\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}=\frac{5}{8}\sqrt[3]{x}$$

الملاحظة الأولى:

13. $f(x)=(x-2)(x^2-4x+5)^3\ ,I=\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{1}{2}(2x-4)(x^2-4x+5)^3$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2-4x+5)^4}{4}$$

14. $f(x)=(4x+2)(x^2+x)^7\ ,I=\mathbb{R}$

$$f(x)=2(2x+1)(x^2+x)^7$$

$$F(x)=2\frac{(x^2+x)^8}{8}=\frac{1}{4}(x^2+x)^8$$

15. $f(x)=(-1-tan^2 x)\tan x\ ,I=\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\}$

$$f(x)=-(1+tan^2 x)\tan x$$

$$F(x)=\frac{-tan^2 x}{2}$$

الملاحظة الثانية:

16. $f(x)=\frac{-2}{(x+1)^3}\ ,I=]-1,+\infty[$

$$f(x)=-2(x+1)^{-3}$$

$$F(x)=\frac{-2(x+)^{-2}}{-2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

الملاحظة الثالثة:

17. $f(x)=\frac{-e^x-2}{(e^x+2x)^2}\ ,I=\mathbb{R}_+^*$

$$f(x)=-(e^x+2)(e^x+2x)^{-2}$$

$$F(x)=-\frac{(e^x+2x)^{-1}}{-1}=\frac{1}{e^x+2x}$$

18. $f(x)=\frac{5+5tan^2 x}{tan^3 x}\ ,I=\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\}$

$$f(x)=5(1+tan^2 x)(tan\,x)^{-3}$$

$$F(x)=\frac{5\,tan^{-2} x}{-2}=\frac{-5}{2\,tan^2 x}$$

الملاحظة الثالثة:

19. $f(x)=2x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\ ,I=\mathbb{R}$

$$f(x)=2x(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$F(x)=\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x^2+1)^5}$$

20. $f(x)=\frac{1-2x}{\sqrt{x^2-x-6}}\ ,I=]3+\infty[$

$$f(x)=-\frac{(2x-1)}{\sqrt{x^2-x-6}}$$

$$=-(2x-1)(x^2-x-6)^{\frac{-1}{2}}$$

$$F(x)=-\frac{(x^2-x-6)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{x^2-x-6}$$

21. $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x-3}}\ ,I=]3,+\infty[$

$$f(x)=2(x)^{-\frac{1}{2}}-(x-3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x)=\frac{2(x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{(x-3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$=4\sqrt{x}-2\sqrt{(x-3)}$$

ثالثاً:

الحالة العامة:

22. $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-x-6}\ ,I=]3,+\infty[$

$F(x)=ln|x^2-x-6|=ln(x^2-x-6)$

23. $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}\ ,I=]\frac{\pi}{2},\pi[$

$F(x)=ln|\sin x|=ln(\sin x)$

24. $f(x)=\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\ ,I=]0,\frac{\pi}{2}[$

$F(x)=ln|\tan x|=ln(\tan x)$

ملاحظة:

25. $f(x)=\frac{3}{x-2}\ ,I=]-\infty,2[$

$f(x)=3.\frac{1}{x-2}$

$F(x)=3\,ln|x-2|=3\,ln(2-x)$

26. $f(x)=\frac{1}{x\ln 3x}\ ,I=]1+\infty[$

$f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln 3x}=\frac{\frac{3}{3x}}{\ln 3x}$

$F(x)=ln\,|\,ln\,3x\,|=ln(ln\,3x)$

27. $f(x)=\frac{x}{x^2-9}\ ,I=]3,+\infty[$

$f(x)=\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-9}$

$F(x)=\frac{1}{2}ln|x^2-9|=\frac{1}{2}ln(x^2-9)$

رابعاً:

الحالة الأولى:

28. $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}\ ,I=]-1,+\infty[$

نصلح باستخدام القسمة الاقليدية:

$f(x)=2-\frac{3}{x+1}=2-3\frac{1}{x+1}$

$F(x)=2x-3\,ln|x+1|=2x-3\,ln(x+1)$

29. $f(x)=\frac{5x-1}{x+3}\ ,I=]-\infty,-3[$

نصلح باستخدام القسمة الاقليدية:

$f(x)=5-\frac{16}{x+3}=5-16\frac{1}{x+3}$

$F(x)=5x-16\,ln|x+3|$

$=5x-16\,ln(-x-3)$

الحالة الثانية:

30. $f(x)=\frac{x+3}{x^2-1}\ ,I=]1+\infty[$

نصلح باستخدام تفريق الكسور:

$f(x)=\frac{x+3}{x^2-1}=\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{(x+1)A+(x-1)B}{(x-1)(x+1)}$

تكافئ:

$(x+1)A+(x-1)B=x+3$

بفرض: $x=-1$

$-2B=2\Rightarrow B=-1$

بفرض: $x=1$

$2A=4\Rightarrow A=2$

إذاً:

$f(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{-1}{x+1}=2\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

$F(x)=2\,ln|x-1|-ln|x+1|$

$F(x)=2\,ln(x-1)-ln(x+1)$

31. $f(x)=\frac{x}{x^2-x-6}\ ,I=]-2,3[$

بالإصلاح باستخدام تفريق الكسور:

$f(x)=\frac{x}{x^2-x-6}=\frac{x}{(x-3)(x+2)}$

$=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$

تكافئ:

$x=A(x+2)+B(x-3)$

بفرض: $x=-2$

$-2=-5B\Rightarrow B=\frac{2}{5}$

بفرض: $x=3$

$3=5A\Rightarrow A=\frac{3}{5}$

إذاً:

$f(x)=\frac{\frac{3}{5}}{x-3}+\frac{\frac{2}{5}}{x+2}=\frac{3}{5}\frac{1}{x-3}+\frac{2}{5}\frac{1}{x+2}$

$F(x)=\frac{3}{5}ln|x-3|+\frac{2}{5}ln|x+2|$

$=\frac{3}{5}ln(3-x)+\frac{2}{5}ln(x+2)$

ملاحظة:

32. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-x-2}\ ,I=]2,+\infty[$

بالإصلاح باستخدام القسمة الاقليدية:

$f(x)=x+1+\frac{3x+2}{x-x-2}$

يحتاج إصلاح باستخدام تفريق الكسور:

سنعود بعد قليل:

ليكن لدينا:

$g(x)=\frac{3x+2}{x^2-x-2}=\frac{3x+2}{(x-2)(x+1)}$

$=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$

تكافئ:

$3x+2=(x+1)A+(x-2)B$

بفرض: $x=-1$

$-1=-3B\Rightarrow B=\frac{1}{3}$

بفرض: $x=2$

$8=3A\Rightarrow A=\frac{8}{3}$

إذاً:

$g(x)=\frac{\frac{8}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}=\frac{8}{3}\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$

عدنا:

$f(x)=x+1+g(x)$

$f(x)=x+1+\frac{8}{3}\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$

$F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{3}ln|x-2|+\frac{1}{3}ln|x+1|$

$F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{3}ln(x-2)+\frac{1}{3}ln(x+1)$

خامساً:

الحالة العامة:

33. $f(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}},I=\mathbb{R}^*$

$F(x)=e^{\frac{1}{x}}$

34. $f(x)=\cos x\,e^{\sin x}\ ,I=\mathbb{R}$

$F(x)=e^{\sin x}$

35. $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\ ,I=\mathbb{R}_+^*$

$F(x)=e^{\sqrt{x}}$

الحالة الخاصة:

36. $f(x)=e^{2x}\ ,I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

37. $f(x)=e^{\frac{5}{3}x}\ ,I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{3}{5}e^{\frac{5}{3}x}$

38. $f(x)=e^{-5x}\ ,I=\mathbb{R}$

$F(x)=-\frac{1}{5}e^{-5x}$

ملاحظة:

39. $f(x)=(4x-2)e^{x^2-x+2}\ ,I=\mathbb{R}$

$f(x)=2(2x-1)e^{x^2-x+2}$

$F(x)=2e^{x^2-x+2}$

40. $f(x)=\frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\ ,I=\mathbb{R}\backslash\{\pi k\}$

$f(x)=-\left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right)e^{\cot x}$

$F(x)=-e^{\cot x}$

41. $f(x)=3\cos(3x+\pi)\ ,I=\mathbb{R}$

$F(x)=\sin(3x+\pi)$

42. $f(x)=(2x+1)\sin(x^2+x+3)\ ,I=\mathbb{R}$

$F(x)=-\cos(x^2+x+3)$

43. $f(x)=e^x\cos(e^x+1)\ ,I=\mathbb{R}$

$F(x)=\sin(e^x+1)$

44. $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ,I=\mathbb{R}^*$

$f(x)=-\frac{-1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$F(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

45. $f(x)=\cos(3x)\ ,I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{3}\sin(x)$

46. $f(x)=\sin(5x)\ ,I=\mathbb{R}$

$F(x)=-\frac{1}{5}\cos(5x)$

47. $f(x)=\cos(\pi x+)\ ,I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{\sin(\pi x+1)}{\pi}$

48. $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)\ ,I=\mathbb{R}$

$F(x)=-2\cos\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)$

49. $f(x)=\frac{1}{4}\cos(8x)\ ,I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{8}\sin(8x)=\frac{1}{32}\sin(8x)$

50. $f(x)=2+2\tan^2 x\ ,I=\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\}$

$f(x)=2(1+\tan^2 x)$

$F(x)=2\tan x$

51. $f(x)=\frac{3}{\cos^2 x}\ ,I=\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\}$

$F(x)3\tan x$

52. $f(x)=\frac{2}{\sin^2 x}\ ,I=\mathbb{R}\backslash\{\pi k\}$

$F(x)=-2\cot x$

53. $f(x)=5+5\cot^2 x\ ,I=\mathbb{R}\backslash\{\pi k\}$

$f(x)=-5(-1-\cot^2 x)$

$F(x)=-5\cot x$

54. $f(x)=\cot x\ ,I=]0,\frac{\pi}{2}[$

$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

$F(x)=ln|\sin x|=ln(\sin x)$

55. $f(x)=\tan x\ ,I=]0,\frac{\pi}{2}[$

$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{-\sin x}{\cos x}$

$F(x)=-ln\,|\cos x|=-ln(\cos x)$

56. $f(x)=\tan^2 x\ ,I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$f(x)=1+\tan^2 x-1$

$F(x)=\tan x-x$

57. $f(x)=\cot^2 x\ ,I=]0,\pi[$

$f(x)=1+\cot^2 x-1$

$F(x)=-\cot x-x$

58. $f(x)=\cos^2 x\ ,I=\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$

$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$

59. $f(x)=\sin^2 x\ ,I=\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

$F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$

60. $f(x)=\cos^2(3x)\ ,I=\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 6x$

$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x$

61. $f(x)=\sin^2 2x\ ,I=\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x$

$F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x$

62. $f(x)=\cos^4 x\ ,I=\mathbb{R}$

$f(x)=(\cos^2 x)^2$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x$

$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

$F(x)=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$

63. $f(x)=\sin^3 x\ ,I=\mathbb{R}$

$f(x)=\sin x\sin^2 x=\sin x\,(1-\cos^2 x)$

$f(x)=\sin x-\sin x\cos^2 x$

$F(x)=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}$

64. $f(x)=\cos^3 x\ ,I=\mathbb{R}$

$f(x)=\cos x\cos^2 x=\cos x\,(1-\sin^2 x)$

$f(x)=\cos x-\cos x\sin^2 x$

$F(x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}$

65. $f(x)=\cos x\sin^3 x\ ,I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{\sin^4 x}{4}$

66. $f(x)=\cos x\sin x\ ,I=\mathbb{R}$

الطريقة الأولى:

$f(x)=\cos x\sin x$

$F(x)=\frac{\sin^2 x}{2}$

الطريقة الثانية:

$f(x)=\cos x\sin x$

$=\sin x\cos x=-(-\sin x)\cos x$

$F(x)=-\frac{\cos^2 x}{2}$

الطريقة الثالثة:

$f(x)=\cos x\sin x$

$=\frac{1}{2}(\sin 2x-\sin 0)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$F(x)=\frac{1}{4}\cos 2x$

67. $f(x)=\cos 3x\cos x\ ,I=\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{1}{2}[\cos 4x+\cos 2x]$

$=\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x$

$F(x)=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x$

68. $f(x)=\sin 3x\sin x\ ,I=\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{-1}{2}[\cos 4x-\cos 2x]$

$f(x)=\frac{-1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x$

$F(x)=\frac{-1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x$

قانون: $\sin 2x=2\sin x\cos x$

69. $f(x)=\frac{1}{\sin 2x}\ ,I=]0,\frac{\pi}{2}[$

$f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin x\cos x}$

$=\frac{\sin^2 x}{2\sin x\cos x}+\frac{\cos^2 x}{2\sin x\cos x}$

$=\frac{-1}{2}\frac{-\sin x}{\cos x}+\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin x}$

$F(x)=\frac{-1}{2}\ln|\cos x|+\frac{1}{2}\ln|\sin x|$

$=\frac{-1}{2}\ln(\cos x)+\frac{1}{2}\ln(\sin x)$

$=\frac{1}{2}(-\ln(\cos x)+\ln(\sin x))=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$

$=\frac{1}{2}\ln(\tan x)=\ln\sqrt{\tan x}$

70. $f(x)=\cos x\,(\sin^2 x-3\sin x)\ ,I=\mathbb{R}$

$f(x)=\cos x\sin^2 x-3\cos x\sin x$

$F(x)=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{3\sin^2 x}{2}$

$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{3}{2}\sin^2 x$

القسم الثالث: التكامل المحدد

رمزه	$\int_a^b d(x)$
قانونه	$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$
خواصه	$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$; $\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$; $\int_a^b (f+g)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$; وتطبق بشكل عكسي وفق: $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (f+g)dx$; علاقة شال: $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$; شرط التطبيق: أن يكون التابع نفسه وتطبق بشكل عكسي أيضاً $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$
ملاحظة	إن الرمز $\int_a^b d(x)$ يبقى عند الإصلاح ولكنه يختفي عند المكاملة

تمرين:

احسب I في كل من الحالات الآتية:

1. $I=\int_0^1 2\,dx$

$=[2x]_0^1=2$

2. $I=\int_{-1}^2 (x^2-4x+3)\,dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+3x\right]_{-1}^2$

$=\left(\frac{8}{3}-8+6\right)-\left(-\frac{1}{3}-2-3\right)$

$=3+3=6$

3. $I=\int_{-2}^0 \frac{5}{x-1}\,dx$

$I=\int_{-2}^0 5\left(\frac{1}{x-1}\right)dx$

$=[5\ln(1-x)]_{-2}^0=0-5\ln 3=-5\ln 3$

4. $I=\int_{-1}^2 \frac{2x}{x^2-9}\,dx$

$=[\ln(9-x^2)]_{-1}^2=\ln 5-\ln 8=\ln\frac{5}{8}$

5. $I=\int_0^1 \frac{x}{x^2-4}\,dx$

$I=\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2-4}\right)dx$

$=[\ln(4-x^2)]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 4)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}$

6. $I=\int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2}\,dx$

$I=\frac{1}{2}\int_0^1 2x(x^2-4)^{-2}\,dx$

$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2-4}\right]_0^1=\frac{1}{24}$

7. $I=\int_0^1 \frac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2}\,dx$

$I=\int_0^1 (2x+3)(x^2+3x+2)^{-2}\,dx$

$=\left[\frac{(x^2+3x+2)^{-1}}{-1}\right]_0^1=\left[-\frac{1}{x^2+3x+2}\right]_0^1$

$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$$= \int_0^1 (1-x^2)dx + \int_0^1 (x^2-1)dx$$
$$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2$$
$$= \left(-\frac{1}{3}+1\right) - 0 + \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{6}{3} = 2$$

14. $I = \int_{-1}^{2} x|x-1|\,dx$

سنعود بعد قليل: (دراسة إشارة $x-1$)

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

عدنا:

$$I = \int_{-1}^{1} x(1-x)\,dx + \int_1^2 x(x-1)dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (x-x^2)dx + \int_1^2 (x^2-x)dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$
$$I = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

15. $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2-2\cos 2x}\,dx$

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos 2x)}\,dx$$
$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 x}\,dx$$
$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2|\sin x|\,dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -2\sin x\,dx$$
$$= 2[\cos x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 2\left[(\cos 2\pi) - \left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$
$$= 2(1-0) = 2$$

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{2x+1}{(x+2)(x+1)}$$
$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)}$$

تكافئ:

$$2x+1 = A(x+1) + B(x+2)$$

بفرض: $x=-1$

$$1 = B \Rightarrow B = 1$$

بفرض: $x=-2$

$$-3 = -A \Rightarrow A = 3$$

إذاً:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \int_0^1 \left(3\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= [3\ln|x+2| + \ln|x+|]_0^1$$
$$= (3\ln 3 + \ln 2) - (3\ln 2 + \ln 1)$$
$$= 3\ln 3 - 2\ln 2$$

13. $I = \int_0^2 |x^2-1|dx$

ندرس إشارة ما دخل القيمة المطلقة:

$$x^2-1=0$$
$$(x-1)(x+1)=0$$

إما $x=1$

أو $x=-1$

ننظم جدول الاشارة:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

نلاحظ أن على المجال $[0,1]$ يكون $x^2-1 \le 0$

ونلاحظ أن على المجال $[1,2]$ يكون $x^2-1 \ge 0$

إذاً:

$$I = \int_0^2 |x^2-1|\,dx$$

8. $I = \int_1^2 \left(t^2+t-\frac{1}{t}\right)dt$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \ln|t|\right]_1^2$$
$$= \left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-\ln 2\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\ln 1\right)$$
$$= \frac{23}{6} - \ln 2$$

9. $I = \int_0^2 \frac{x^2-5x+1}{x+1}\,dx$

$$I = \int_0^2 \left(x-6+\frac{7}{(x+1)}\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 6x + 7\ln(x+1)\right]_0^2$$
$$= (2-12+7\ln 3) - (0) = 7\ln 3 - 10$$

10. $I = \int_0^1 \frac{2x^3-3x-4}{x-2}\,dx$

$$I = \int_0^1 \left(2x^2+4x+5+\frac{6}{x-2}\right)dx$$
$$= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 6\ln(2-x)\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{2}{3}+2+5+6\ln 1\right) - (0+0-0+6\ln 2)$$
$$= \frac{23}{3} - 6\ln 2$$

11. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$

$$= [\ln(\cos x + \sin x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \ln\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right) - (\ln(\cos x + \sin x))$$
$$= \ln\sqrt{2}$$

12. $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$

الإصلاح باستخدام تفريق الكسور:

التكامل بالتجزئة:

الخطوات	عندما يكون لدينا جداء وفشلت القواعد من أولا إلى سادسا نستخدم التكامل بالتجزئة وفق: * الفرضية المناسبة حيث منصب الـ u يكون لـ: اللوغاريتم – الصحيح – غير ذلك . * نضع القانون: $I = [u.v]_a^b - \int_a^b v.u'dx$
ملاحظة	أحيانا نحتاج إلى المكاملة بالتجزئة مرات متتالية
ملاحظة	يمكن إيجاد التابع الأصلي $F(x)$ بالاستفادة من التكامل المحدد وفق الخطوات التالية: * نستبدل كل x بـ t * نوجد المطلوب باستخدام التكامل بالتجزئة فيكون: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ حيث: a مقدار كيفي من المجال I

التمرين الأول: احسب I في كل من الحالات الآتية:

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$
$$I = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x\,dx$$
$$= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= [-x\cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

2. $I = \int_1^2 (x-2)e^x\,dx$

$$u = x-2 \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$
$$I = [(x-2)e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx$$
$$= [(x-2)e^x]_1^2 - [e^x]_1^2 = [xe^x - 3e^x]_1^2$$
$$= (2e^2 - 3e^2) - (e - 3e) = 2e - e^2$$

3. $I = \int_0^1 (x+2)e^x\,dx$

$$u = x+2 \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$
$$I = [(x+2)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$
$$= [(x+2)e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = [(x+1)e^x]_0^1$$
$$= (2e) - (1) = 2e - 1$$

4. $I = \int_1^e (x-1)\ln x\,dx$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$
$$v' = x-1 \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} - x$$
$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$
$$= \left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e$$
$$= \left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} + x\right]_1^e$$
$$= \left[\left(\frac{e^2}{2}-e\right) - \frac{e^2}{4} + e\right] - \left[0 - \frac{1}{4} + 1\right]$$
$$= \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2-3}{4}$$

5. $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (x^2-1)e^x\,dx$

$$u = x^2-1 \Rightarrow u' = 2x$$
$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$
$$I = [(x^2-1)e^x]_{\ln 2}^{\ln 3} - \underbrace{\int_{\ln 2}^{\ln 3} 2xe^x\,dx}_{J}$$

سنعود بعد قليل: يحتاج تجزئة:

$$J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2xe^x\,dx$$

$$u = 2x \Rightarrow u' = 2$$
$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$
$$J = [2xe^x]_{\ln 2}^{\ln 3} - \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2e^x\,dx$$
$$= [2xe^x]_{\ln 2}^{\ln 3} - [2e^x]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

عدنا:

$$I = [(x^2-1)e^x]_{\ln 2}^{\ln 3} - [2xe^x]_{\ln 2}^{\ln 3} + [2e^x]_{\ln 2}^{\ln 3}$$
$$I = [(x^2-2x+1)e^x]_{\ln 2}^{\ln 3}$$
$$I = ((\ln 3)^2 - 2\ln 3 + 1)3 - ((\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1)2$$
$$= (\ln 3)^2 - 6\ln 3 - 2(\ln 2)^2 + 4\ln 2 + 1$$

6. $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

$$u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$$
$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$
$$I = [\sin x\, e^x]_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi} \cos x\, e^x dx}_{J}$$

سنعود بعد قليل: يحتاج تجزئة:

$$u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$$
$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$
$$J = [e^x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -e^x\sin x\,dx$$
$$= [e^x\cos x]_0^{\pi} + I$$

عدنا:

$$I = [\sin x\, e^x]_0^{\pi} - [e^x\cos x]_0^{\pi} - I$$

$$2I = [(\sin x - \cos x)e^x]_0^{\pi}$$
$$2I = \left((0+1)e^{\pi}\right) - \left((0-1)e^0\right)$$
$$2I = e^{\pi} + 1$$
$$I = \frac{e^{\pi}+1}{2}$$

التمرين الثاني: أوجد التابع الأصلي في كل مما يلي:

1. $f(x) = x\sin 2x$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$
$$F(x) = \int_0^x t\sin 2t\ dt$$
$$u = t \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = \sin 2t \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2t$$
$$F(x) = \left[-\frac{1}{2}t\cos 2t\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{2}\cos 2t\ dt$$
$$= \left[-\frac{1}{2}t\cos 2t\right]_0^x + \left[\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^x$$
$$= \left[-\frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^x$$
$$= \left(-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\right) - 0$$
$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

2. $f(x) = x^2\ln x\,;I =]0,+\infty[$

$$F(x) = \int_a^x f(t).dt$$
$$F(x) = \int_1^x t^2\ln t.dt$$
$$u = \ln t \rightarrow u' = \frac{1}{t}$$
$$v' = t^2 \rightarrow v = \frac{t^3}{3}$$
$$F(x) = \left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^x - \left[\frac{1}{3}\frac{t^3}{3}\right]_1^x$$
$$= \left[\frac{t^3}{3}\ln t - \frac{1}{9}t^3\right]_1^x$$
$$= \left(\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3\right) - \left(-\frac{1}{9}\right)$$
$$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}$$

تطبيقات التكامل:

التطبيقة	حساب المساحات	حساب الحجوم
نص السؤال	احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني والمستقيم Δ (Δ مستقيم أفقي أو مائل) وبين $x=a$ و $x=b$	أوجد حجم المجسم الدوراني
فكرة الحل	* نرسم الخط البياني * نضع القانون: $S = \int_a^b (\text{تحت} - \text{فوق})dx$ * حيث فوق وتحت يقصد بها $f(x)$ و y_Δ * نتابع كما سبق.. **ملاحظات هامة:** ١. يمكن استخدام علاقة شال عند اللزوم لإيجاد المساحة المطلوبة ٢. أحياناً حدود التكامل تكون غير مُعطاة إنما تستنتج وفق: * محور التراتيب $x=0$ * عند وجود نقاط تقاطع مع محور الفواصل فإنّ حدود التكامل هي فواصل نقاط التقاطع * حدود التكامل في المساحة هي قيم لـ x وتكون من الصغير إلى الكبير ٣. عندما يكون Δ هو محور الفواصل فإن $y_\Delta = 0$ ٤. ناتج المساحة موجب حصراً	نطبق القانون: $V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = x\ln x$

أولاً:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم ارسم C.

ثانياً:

في كل من الحالات الآتية احسب المساحة S.

١. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمان $x=2$ و $x=e$

٢. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيم $x=e$

٣. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمان $x=\frac{1}{e}$ و $x=1$

٤. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C والمستقيم $y=x$ والمستقيمان $x=1$ و $x=e$

٥. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C والمستقيم $y=x$ والمستقيمان $x=e$ و $x=4$

الحل:

أولاً: دراسة تغيرات التابع f.

التابع f معرف ومستمر على المجال $]0,+\infty[$ ولدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}x$$
$$f'(x) = \ln x + 1$$

نعدم المشتق:

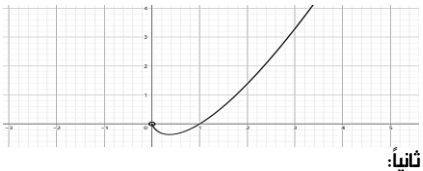
$$f'(x) = 0$$
$$\ln x + 1 = 0$$
$$\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$
$$x = \frac{1}{e} \in]0,+\infty[$$

ولدينا:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

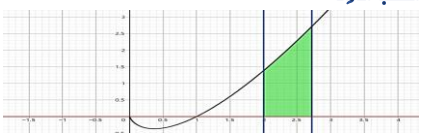
x	0		$\frac{1}{e}$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

الرسم:



ثانياً:

الطلب الأول:

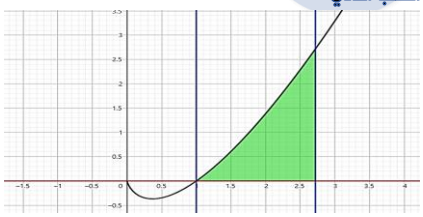


$$S = \int_2^e (f(x) - y_\Delta)\,dx$$

محور الفواصل يمثل مستقيم أفقي معادلته $\Delta: y = 0$

$$S = \int_2^e (f(x))dx = \int_2^e (x\ln x)dx$$
$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$
$$v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_2^e - \int_2^e \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_2^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_2^e$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_2^e = \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right) - (2\ln 2 - 1)$$
$$= \frac{e^2}{4} - 2\ln 2 - 1 = \frac{e^2 - 8\ln 2 + 4}{4}$$

الطلب الثاني:

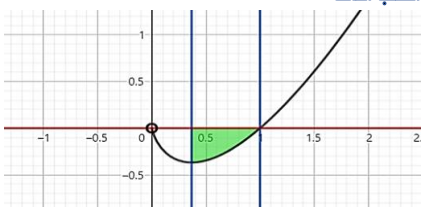


$$S = \int_1^e (f(x) - y_\Delta)dx$$

محور الفواصل يمثل مستقيم أفقي معادلته $\Delta: y = 0$

$$S = \int_1^e (f(x))dx = \int_1^e (x\ln x)dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

الطلب الثالث:



$$S = \int_{\frac{1}{e}}^1 (y_\Delta - f(x))dx = -\int_{\frac{1}{e}}^1 (f(x))dx$$
$$= -\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{e}}^1 = -\left[\left(0 - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2}\right)\right]$$
$$= -\left[\frac{(-e^2+3)}{4e^2}\right] = \frac{e^2-3}{4e^2}$$

التمرين الثالث:

في كل من الحالات الآتية , جد تابعاً أصلياً F للتابع f على مجال I يطلب تحديده ويحقق الشرط المعطى:

1. $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x \ , F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$f(x) = -(-\sin x)\cos^2 x \quad ; I = \mathbb{R}$

$F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$

ولدينا: $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$0 + c = 0 \to c = 0$

$\to F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3}$

2. $f(x) = \frac{-1}{3-x} \ , F(1) = 1$

$F(x) = ln|3-x| + c \quad ; I =]-\infty, 3[$

$= ln(3-x) + c$

ولدينا: $F(1) = 1$

$ln(2) + c = 1 \to c = 1 - ln(2)$

$\to F(x) = ln(3-x) + 1 - ln(2)$

التمرين الرابع:

أثبت صحة المساواة

$$\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$$

ثم احسب:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$$

إثبات صحة المساواة:

$\cos^2 x \cdot \sin^2 x = \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)$

$= \frac{1}{4}[1 - \cos^2(2x)] \ = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2}\right]$

$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$

حساب التكامل:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$

$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1)\, dx - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \, dx$

$= \frac{1}{8}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}.0 - \frac{1}{4}.0\right]$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \ dx = \frac{\pi}{16}$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا العددين:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, dx \ , \ J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$$

١. احسب J

٢. احسب $I + J$ ثم استنتج قيمة I

الحل:

الطلب الأول:

$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan\, x \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(-\sin x)}{\cos x} dx$

$= [-ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left(-ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - (-ln(1)) = \frac{ln\, 2}{2}$

باستخدام القسمة الاقليدية نجد:

$$f(x) = e^x + 2 - \frac{1}{e^x + 1} \ldots (*)$$

ولدينا:

$$f(x) = ae^x + b + \frac{c}{e^x + 1} \ldots (**)$$

بالمطابقة بين $(*)$ و $(**)$ نجد:

$a = 1$ و $b = 2$ و $c = -1$

الطلب الثاني:

$I = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{e^{2x} + 3e^x + 1}{e^x + 1} dx$

$= \int_0^1 e^x + 2 - \frac{1}{e^x + 1} dx$

$= \int_0^1 e^x + 2 - \frac{1 + e^x - e^x}{e^x + 1} dx$

$= \int_0^1 e^x + 2 - \left(\frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}\right) dx$

$= \int_0^1 e^x + 2 - 1 + \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

$= [e^x + 2x - x + \ln|e^x + 1|]_0^1$

$= [e^x + x + \ln|e^x + 1|]_0^1$

$= (e + 1 + \ln(e + 1)) - (1 + \ln 2)$

$= e + 1 + \ln(e + 1) - 1 - \ln 2$

$= e + \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right)$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = e^{2x}\cos x$$

١. احسب $f'(x), f''(x)$

٢. عين عددين a, b يحققان المساواة:

$$f(x) = af'(x) + bf''(x)$$

٣. استنتج تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$.

الحل:

الطلب الأول:

$f'(x) = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x$

$= e^{2x}(2\cos x - \sin x)$

$f''(x) = 2e^{2x}(2\cos x - \sin x) + (-2\sin x - \cos x)e^{2x}$

$= e^{2x}(4\cos x - 2\sin x - 2\sin x - \cos x)$

$= e^{2x}(3\cos x - 4\sin x)$

الطلب الثاني:

$f(x) = a\, f'(x) + b\, f''(x)$

$e^{2x}\cos x = a\left(e^{2x}(2\cos x - \sin x)\right) + b\left(e^{2x}(3\cos x - 4\sin x)\right)$

$e^{2x}\cos x = ae^{2x}(2\cos x - \sin x) + be^{2x}(3\cos x - 4\sin x)$

$e^{2x}.\cos x = e^{2x}(2a.\cos x - a.\sin x) + e^{2x}(3b.\cos x - 4b.\sin x)$

$\cos x = (2a + 3b)\cos x + (-a - 4b)\sin x$

بالمقارنة نجد:

$2a + 3b = 1 \ldots (1)$

$-a - 4b = 0 \ldots (2)$

نضرب المعادلة (2) بالعدد 2 :

$2a + 3b = 1 \ldots (1)$

$-2a - 8b = 0 \ldots (2)'$

بجمع (1) و (2)' نجد:

$-5b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{5}$

نعوض في (1) :

$2a - \frac{3}{5} = 12 \to a = \frac{8}{5}$

$a = \frac{8}{10} \to a = \frac{4}{5}$

$f(x) = \frac{4}{5}f'(x) - \frac{1}{5}f''(x)$

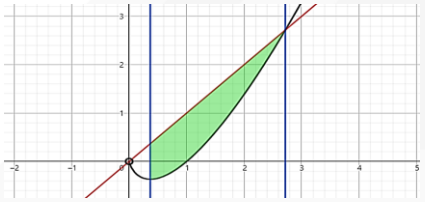
الطلب الثالث:

لدينا:

$f(x) = \frac{4}{5}f'(x) - \frac{1}{5}f''(x)$

$F(x) = \frac{4}{5}f(x) - \frac{1}{5}f'(x)$

الطلب الرابع:

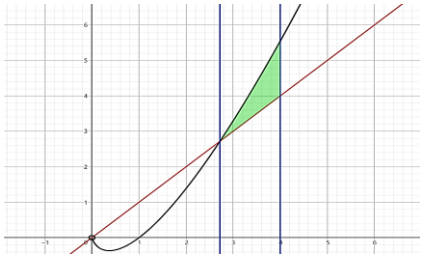


$S = \int_1^e (x - f(x))dx = \int_1^e (x - x\, ln\, x)dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}ln\, x + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \left[\frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}ln\, x\right]_1^e$

$= \left(\frac{3e^2}{4} - \frac{e^2}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4}$

الطلب الخامس:



$S = \int_e^4 (f(x) - x)dx = \int_e^4 (x.\ln x - x)dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}ln\, x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_e^4$

$= (8\, ln\, 4 - 12) - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{3e^2}{4}\right)$

$= 8\, ln\, 4 - 12 + \frac{e^2}{4} = \frac{e^2 + 32\, ln\, 4 - 48}{4}$

التمرين الثاني:

احسب حجم المجسم الناتج عن دوران الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ دورة كاملة حول محور الفواصل على المجال $[0,1]$

الحل:

$V = \pi \int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx$

$= \pi \int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx$

$= \pi \int_0^1 \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x} dx$

$= \pi \int_0^1 \frac{1 + e^x}{1 - e^x} - \frac{e^x}{1 + e^x} \, dx$

$= \pi \int_0^1 1 - \frac{e^x}{1 + e^x} \, dx$

$= \pi[x - ln(1 + e^x)]_0^1$

$= \pi\left(1 - ln(1 + e) - (-ln\, e)\right)$

$= \pi(1 - ln(1 + e) + ln\, 2)$

تمارين داعمة:

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 3e^x + 1}{e^x + 1}$$

١. عين الأعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق:

$$f(x) = ae^x + b + \frac{c}{e^x + 1}$$

٢. احسب $I = \int_0^1 f(x)\, dx$

الحل:

الطلب الأول:

لدينا:

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 3e^x + 1}{e^x + 1}$$

مكثفة شيفرة الـ 600
ELITE MATH
0940 91 67 53 Elite Math خالد عامر

الطلب الثاني:

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^3\,x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan\,x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tan^3\,x+tan\,x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}((1+tan^2\,x)\,tan\,x)\,dx$$
$$=\left[\frac{tan^2\,x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)-(0)=\frac{1}{2}$$

استنتاج I:

لدينا: $I+J=\frac{1}{2}$ ولدينا: $J=\frac{\ln(2)}{2}$.

$$I+\frac{ln\,2}{2}=\frac{1}{2}$$
$$I=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}\rightarrow I=\frac{1-\ln 2}{2}$$

التمرين السادس:

ليكن لدينا العددان I و J وفق:

$$I=\int_1^2\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}dx \quad \text{و} \quad J=\int_1^2\frac{1}{x(x^2+1)}dx$$

احسب $(I+J)$ و $(I-J)$ ثم استنتج قيمة كل من I و J

الحل:

حساب $I+J$:

$$I+J=\int_1^2\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}dx+\int_1^2\frac{1}{x(x^2+1)}dx$$
$$=\int_1^2\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}+\frac{1}{x(x^2+1)}dx$$
$$=\int_1^2\frac{2x^2+2}{x(x^2+1)}dx=\int_1^2\frac{2(x^2+1)}{x(x^2+1)}dx$$
$$=\int_1^2 2.\frac{1}{x}dx=2[\ln x]_1^2$$
$$=2\big((\ln 2)-(\ln 1)\big)=2\ln 2$$

حساب $I-J$:

$$I-J=\int_1^2\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}dx-\int_1^2\frac{1}{x(x^2+1)}dx$$
$$=\int_1^2\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}-\frac{1}{x(x^2+1)}dx$$
$$=\int_1^2\frac{2x^2}{x(x^2+1)}dx=\int_1^2\frac{2x}{(x^2+1)}dx$$
$$=[\ln(x^2+1)]_1^2=\big((\ln 5)-(\ln 2)\big)=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

حساب I و J:

لدينا:

$$\begin{cases} I+J=2\ln(2)\ldots(1)\\ I-J=\ln(5)-\ln(2)\ldots(2)\end{cases}$$

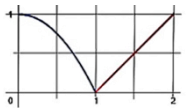
بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$2I=\ln(5)+\ln(2)$$
$$I=\frac{\ln(10)}{2}=\frac{1}{2}\ln(10)=\ln\left(\sqrt{10}\right)$$

نعوض في (1):

$$\ln\left(\sqrt{10}\right)+J=2\ln(2)$$
$$\ln(10)^{\frac{1}{2}}+J=2\ln(2)$$
$$\frac{1}{2}\ln(5\times 2)+J=2\ln(2)$$
$$J=2\ln(2)-\frac{1}{2}(\ln(5)+\ln(2))$$
$$=2\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(5)-\frac{1}{2}\ln(2)$$
$$=\frac{3}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(5)$$

التمرين السابع:



في الشكل المجاور نتأمل الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,2]$ وفق:

$$f(x)=\max(1-x^2,x-1)$$

احسب التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx$, ماذا يمثل هذا العدد؟

الحل:

التخلص من الـ max على المجال $[0,2]$.

ندرس إشارة الفرق:

$$1-x^2-(x-1)$$
$$1-x^2-x+1$$
$$-x^2-x+2=0$$
$$a=-1\ ,\ b=-1\ ,\ c=2$$
$$\Delta=1+8=9>0$$
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-3}{-2}=-1$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+3}{-2}=-2$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
الفرق		$-$	0	$+$	0	$-$	

عندما $x\in[0,1]$ فإن:

$$-x^2-x+2\geq 0$$
$$1-x^2-(x-1)\geq 0$$
$$1-x^2\geq x-1$$

أي أنّ max التابع f على المجال $[0,1]$ هو: $1-x^2$

عندما $x\in[1,2]$ فإن:

$$-x^2-x+2\leq 0$$
$$1-x^2-(x-1)\leq 0$$
$$1-x^2\leq x-1$$

أي أنّ max التابع f على المجال $[1,2]$ هو: $x-1$

ومنه:

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2;x\in[0,1]\\ x-1\ ;x\in[1,2]\end{cases}$$

حساب التكامل:

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(1-x^2)dx+\int_2^1(x-1)dx$$
$$=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+(2-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

العدد $\int_0^2 f(x)dx=\frac{7}{6}$ يمثل مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع ومحور الفواصل والمستقيمين الشاقوليين $x=2$ و $x=0$.

التمرين الثامن:

نرمز إلى الخط البياني للتابع f المعرف على $[-1,1]$ بالعلاقة: C_f

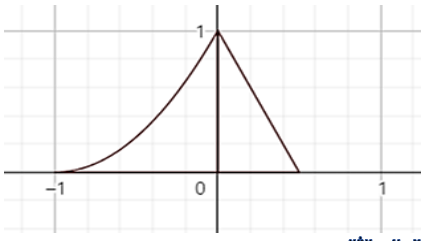
$$f(x)=\min((x+1)^2,1-2x)$$

١. ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,3]$

٢. احسب $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

الحل:

الطلب الأول:



الطلب الثاني:

التخلص من الـ min على المجال $[-1,1]$.

ندرس إشارة الفرق:

$$(x+1)^2-(1-2x)$$
$$=x^2+2x+1-1+2x$$
$$=x^2+4x=x(x+4)$$

نعدم الفرق:

$$x(x+4)=0$$

إما $x=0$, أو $x=-4$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
الفرق		$+$	0	$-$	0	$+$	

عندما $x\in[-1,0]$ فإن:

$$(x+1)^2-(1-2x)\leq 0$$
$$(x+1)^2\leq 1-2x$$

أي أنّ min التابع f على المجال $[-1,0]$ هو: $(x+1)^2$

عندما $x\in[0,1]$ فإن:

$$(x+1)^2-(1-2x)\geq 0$$
$$(x+1)^2\geq 1-2x$$

أي أنّ min التابع f على المجال $[0,1]$ هو: $1-2x$

ومنه:

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2\ ;x\in[-1,0]\\ 1-2x\ \ ;x\in[0,1]\end{cases}$$

حساب التكامل:

$$\int_{-1}^1 f(x).dx$$
$$=\int_{-1}^0(x+1)^2\,dx+\int_0^1(1-2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^0+\left[x-\frac{2x^2}{2}\right]_0^1$$
$$=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^0+[x-x^2]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-0+0-0=\frac{1}{3}$$

التمرين التاسع:

F و G تابعان أصليان للتابعين:

$f:x\mapsto\cos(\ln(x))$ و $g:x\mapsto\sin(\ln(x))$

على $]0,+\infty[$, ينعدمان عند $x=1$ انطلاقاً من الصيغتين:

* $F(x)=\int_1^x\cos(\ln(t))\,dt$
* $G(x)=\int_1^x\sin(\ln(t))\,dt$

الطلب الأول:

أثبت باستعمال التكامل بالتجزئة أنّ:

* $F(x)=x.cos(ln(x))-1+G(x)$
* $G(x)=x.sin(ln(x))-F(x)$

الحل:

إثبات أنّ $F(x)=x.\cos(\ln(x))-1+G(x)$

لدينا:

$$\underbrace{F(x)}_{l_1}=\underbrace{x.\cos(\ln(x))-1+G(x)}_{l_2}$$
$$l_1=F(x)=\int_1^x\cos(\ln(t))\,dt$$
$$u=\cos(\ln(t))\rightarrow u'=-\frac{1}{t}\sin(ln(t))$$
$$v'=1\rightarrow v=t$$
$$=[t.\cos(\ln(t))]_1^x-\int_1^x t\left(-\frac{1}{t}\sin(\ln(t))\right)dt$$
$$=[t.\cos(ln(t))]_1^x+\int_1^x\sin(\ln(t))\,dt$$
$$=x.\cos(\ln(x))-1+G(x)=l_2$$

ومنه العلاقة محققة.

إثبات أنّ: $G(x)=x.\sin(\ln(x))-F(x)$

لدينا:

$$\underbrace{G(x)}_{l_1}=\underbrace{x.\sin(\ln(x))-F(x)}_{l_2}$$
$$l_1=G(x)=\int_1^x\sin(\ln(t))\,dt$$
$$u=\sin(\ln(t))\rightarrow u'=\frac{1}{t}\cos(\ln(t))$$
$$v'=1\rightarrow v=x$$
$$=[t.\sin(\ln(t))]_1^x-\int_1^x t\left(\frac{1}{t}.\cos(\ln(t))\right)dt$$
$$=[t.\sin(\ln(t))]_1^x-\int_1^x\cos(\ln(t))\,dt$$
$$=x.\sin(\ln(x))-F(x)=l_2$$

الطلب الثاني:

استنتج عبارتي $F(x)$ و $G(x)$.

مما سبق وجدنا أنّ:

$$F(x) = x.\cos(\ln(x)) - 1 + G(x)$$
$$G(x) = x.\sin(\ln(x)) - F(x)$$

أيّ لدينا:

$$\begin{cases} F(x) - G(x) = x.\cos(\ln(x)) - 1 \dots (1) \\ F(x) + G(x) = x.\sin(\ln(x)) \dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$2F(x) = x.\cos(\ln(x)) + x.\sin(\ln(x)) - 1$$
$$F(x) = \frac{1}{2}x.\cos(\ln(x)) + \frac{1}{2}x.\sin(\ln(x)) - \frac{1}{2}$$

نعوض في (2) نجد أنّ:

$$\frac{1}{2}x.\cos(\ln(x)) + \frac{1}{2}x.\sin(\ln(x)) - \frac{1}{2} + G(x) = x.\sin(\ln(x))$$
$$G(x) = \frac{1}{2}x.sin(ln(x)) - \frac{1}{2}x.cos(ln(x)) + \frac{1}{2}$$

التمرين العاشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x^3.e^{-x}$ والمطلوب:

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

٢. اكتب معادلة مماس التابع T في النقطة التي فاصلتها تساوي (-1)

٣. ارسم في معلم متجانس كل من المماس T والخط البياني C

٤. جد تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$ بالصيغة $F(x) = P(x)e^{-x}$ حيث P تابع كثير حدود.

٥. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = 1$

الحل:

الطلب الأول:

التابع f معرف ومستمر على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

لدينا:

$$f(x) = x^3.e^{-x} = \frac{x^3}{e^x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{e^x}\right) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط البياني C في جوار الـ $+\infty$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = (x^3)'e^{-x} + (e^{-x})'(x^3)$$
$$= 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = (3x^2 - x^3)e^{-x}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$
$$(3x^2 - x^3)e^{-x} = 0$$

مستحيلة الحل إما $e^{-x} = 0 \to$

أو $3x^2 - x^3 = 0$

$$x^2(3 - x) = 0$$

إما $x^2 = 0 \to x = 0 \in D_f \to f(0) = 0$

أو $3 - x = 0 \to x = 3 \in D_f \to f(3) = \frac{27}{e^3}$

ننظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{27}{e^3}$	$\searrow$	0

الطلب الثاني:

تحديد النقطة A :

$$x_A = -1$$
$$y_A = f(x_A) = f(-1) = -e$$
$$A(-1, -e)$$

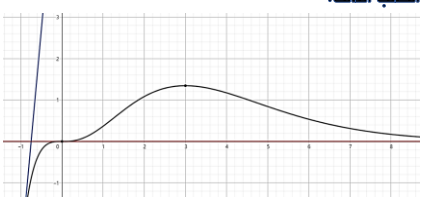
تحديد الميل m :

$$m = f'(x_A) = f'(-1) = 4e$$

المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$
$$T: y = 4e(x + 1) - e$$
$$T: y = 4ex + 3e$$

الطلب الثالث:



الطلب الرابع:

(a

لدينا: $F(x) = P(x).e^{-x}$

بفرض: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

نعلم أنّ:

$$F'(x) = f(x)$$
$$P'(x).e^{-x} + (e^{-x})'P(x) = f(x)$$
$$P'(x).e^{-x} - P(x)e^{-x} = x^3.e^{-x}$$
$$P'(x) - P(x) = x^3$$
$$3ax^2 + 2bx + c - ax^3 - bx^2 - cx - d = x^3$$
$$-ax^3 + (3a - b)x^2 + (2b - c)x + c - d = x^3$$

وبالمقارنة نجد:

$$\begin{cases} -a = 1 \dots (1) \\ 3a - b \dots (2) \\ 2b - c = 0 \dots (3) \\ c - d = 0 \dots (4) \end{cases}$$

من (1) نجد أنّ: $a = -1$

نعوض في (2) :

$$-3 - b = 0 \to b = -3$$

نعوض في (3) :

$$-6 - c = 0 \to c = -6$$

نعوض في (4) :

$$-6 - d = 0 \to d = -6$$

ومنهُ:

$$F(x) = (-x^3 - 3x^2 - 6x - 6)e^{-x}$$

(b



$$S = \int_0^1 (f(x) - y_\Delta)\,dx$$
$$S = \int_0^1 f(x) = [F(x)]_0^1$$
$$= F(1) - F(0)$$
$$= \left((-1 - 3 - 6 - 6)e^{-1}\right) - \left((-6)e^0\right)$$
$$= -\frac{16}{e} + 6 = \frac{-16 + 6e}{e}$$

التمرين الحادي عشر:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = (2 - x)e^x$ وليكن C خطه البياني في جملة متجانسة

١. ادرس تغيرات f وارسم C.

٢. ليكن C_1 جزء من الخط C المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 2$ و $x = 0$ وليكن S السطح المحصور بين C_1 ومحور الفواصل. احسب مساحة S

٣. عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنه يولد مجسماً دورانياً حجمه V.

a) عين الاعداد a و b و c حتى يكون التابع $G: x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x \mapsto \left(f(x)\right)^2$

b) استنتج قيمة V.

الحل:

الطلب الأول:

دراسة تغيرات f:

التابع f معرف ومستمر على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعين من الشكل $(\infty)(0)$

$$f(x) = (2 - x)e^x = 2e^x - xe^x$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} (xe^x) = 0$$

المستقيم الذي معادلته $y = 0$

مقارب افقي للخط البياني C في جوار الـ $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = (-1)(e^x) + (e^x)(2 - x)$$
$$= -e^x + 2e^x - xe^x = (1 - x)e^x$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$
$$(1 - x)e^x = 0$$

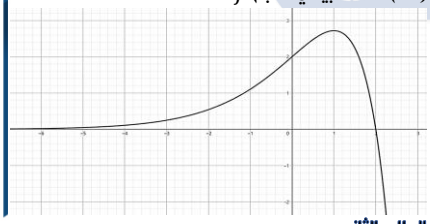
إما $1 - x = 0 \to x = 1 \in D_f \to f(1) = e$

مستحيلة الحل $e^x = 0 \to$ أو

ننظم جدول تغيرات التابع f وفق:

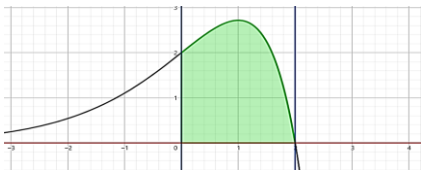
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

رسم الخط البياني للتابع f :



الطلب الثاني:

حساب S مساحة السطح المحصور بين C_1 ومحور الفواصل.



$$s = \int_0^2 (f(x) - y_\Delta)dx$$

حيث $\Delta: y = 0$ محور الفواصل

$$s = \int_0^2 \left(f(x)\right)dx = \int_0^2 \left((2 - x)e^x\right)dx$$
$$u = 2 - x \to u' = -1$$
$$v' = e^x \to v = e^x$$
$$s = [(2 - x)e^x]_0^2 - \int_0^2 -e^x dx$$
$$= [(2 - x)e^x]_0^2 + \int_0^2 e^x dx$$
$$= [(2 - x)e^x]_0^2 + [e^x]_0^2 = [(2 - x)e^x + e^x]_0^2$$
$$= [(3 - x)e^x]_0^2 = e^2 - 3$$

مكثفة شيفرة الـ 600

الطلب الثالث:

a) تعيين قيمة a و b و c:

بما أن G تابعاً اصلياً لـ $(f(x))^2$ فإنه يحقق:

$$G'(x) = (f(x))^2 \dots (*)$$

حيث:

$$G'(x) = (2ax+b)e^{2x} + (2e^{2x})(ax^2+bx+c)$$
$$= (2ax+b+2ax^2+2bx+2c)e^{2x}$$
$$= (2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)e^{2x}$$
$$(f(x))^2 = ((2-x)e^x)^2 = (2-x)^2e^{2x}$$
$$= (4-4x+x^2)e^{2x}$$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$(2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)e^{2x} = (x^2-4x+4)e^{2x}$$
$$2ax^2+(2a+2b)x+b+2c = x^2-4x+4$$

بالمطابقة نجد:

$$2a = 1 \dots (1)$$
$$2a+2b = -4 \dots (2)$$
$$b+2c = 4 \dots (3)$$

من (1) نجد: $a = \frac{1}{2}$

نعوض في (2) فنجد: $1+2b = -4$

$$2b = -5 \to b = -\frac{5}{2}$$

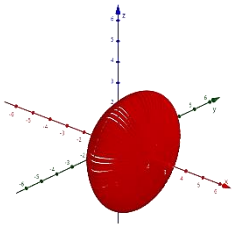
نعوض في (3) فنجد: $-\frac{5}{2}+2c = 4$

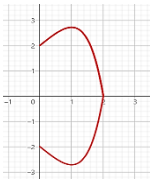
$$2c = 4+\frac{5}{2} \to 2c = \frac{13}{2} \to c = \frac{13}{4}$$

ومنه:

$$G: x \to \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}$$

b) قيمة V حجم المجسم الدوراني الذي يولده s عندما يدور حول محور الفواصل:





$$V = \pi\int_0^2 (f(x))^2 dx = \pi[G(x)]_0^2$$
$$= \left[\pi\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}\right]_0^2$$
$$= \left(\pi\left(2-5+\frac{13}{4}\right)e^4\right) - \left(\pi\left(\frac{13}{4}\right)\right)$$
$$= \frac{\pi}{4}(e^4-13)$$

التمرين الحادي عشر:

نفرض $a \geq 0$

أ. أثبت أنّ $\sin a \leq a$

نعلم أنّ: $\cos x \leq 1$ مهما يكن $x \in \mathbb{R}$ وبفرض $a \geq 0$

$$\int_0^a \cos x \leq \int_0^a 1\,dx$$
$$[\sin x]_0^a \leq [x]_0^a$$
$$\sin a - \sin 0 \leq a - 0$$
$$\sin a \leq a$$

ب. $1 - \frac{a^2}{2} \leq \cos a$

$$\sin x \leq x$$

$$\int_0^a \sin x\,dx \leq \int_0^a x\,dx$$
$$[-\cos x]_0^a \leq \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a$$
$$-\cos a + \cos 0 \leq \frac{a^2}{2} - 0$$
$$1 - \frac{a^2}{2} \leq \cos a$$

التمرين الثاني عشر:

أ. تيقن أنه في حالة $0 < x < a$ يكون:

$$\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$$

ب. في حالة $a > 0$ فإنّ:

$$\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$$

الحل:

الطلب الأول:

$$0 < x < a$$
$$1 \leq 1+x \leq 1+a$$
$$1 \geq \frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{1+a}$$
$$\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$$

الطلب الثاني:

إذن في حالة $a > 0$ لدينا:

$$\int_0^a \frac{1}{1+a}dx \leq \int_0^a \frac{1}{1+x}dx \leq \int_0^a dx$$

أيّ:

$$\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$$

إنّ لي نفسًا تتبّث بالتّعب..

لا توقفها العَثرة، ولا تطفئها الكثرة، تبحث عن القِلّة، تتنفَّس المُحاولة، تؤمن أنّ جهادَ النَّفس راحتها، وجُهدَ الغرس ساحتها، والآخرة ميدانها، يُبنى الإنسان في تفاصيله، وتقوى روحُه داخل سِرّه، يَصقِل نفسه الصِّدق، ويُرَتِّبُ قلبه الإخلاص! يعيش للّه ويموت سائراً إليه.

إنّ الصّادق لَيَجِدُ في السِرّ مَكانه الآمِن.

مسائل شاملة:

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}\{1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x^2-3x+3}{x-1}$$

١. اكتب $f(x)$ بالشكل:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

٢. عين معادلة المقارب المائل Δ وبين وضع C لـ Δ

٣. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج وجود مقارب شاقولي

٤. ارسم Δ ثم ارسم C

٥. ناقش هندسياً عدد حلول المعادلة

$$2x^2-(3+m)x+3+m=0$$

٦. احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين $x=2$ و $x=3$

الحل:

الطلب الأول:

بالقسمة الإقليدية نجد:

$$f(x)=2x-1+\frac{2}{x-1}$$

إذاً:

$$c=2\ ,\ b=-1\ ,\ a=2$$

الطلب الثاني:

تعيين معادلة المقارب المائل:

$$f(x)=2x-1+\frac{2}{x-1}$$

ليكن لدينا التابع $g(x)=\frac{2}{x-1}$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

إذاً: $\Delta: y=2x-1$ مقارب مائل الخط البياني في جوار $+\infty$ و $-\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$

$$=2x-1+\frac{2}{x-1}-(2x-1)=\frac{2}{x-1}$$

$$h(x)=0\to\frac{2}{x-1}=0$$

مستحيلة الحل ومنه: $h(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
الوضع النسبي		C تحت Δ	$\|\|$	C فوق Δ	

الطلب الثالث:

التابع f معرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ ولدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=2-\frac{2}{(x-1)^2}=2-\frac{2}{x^2-2x+1}$$

$$=\frac{2x^2-4x+2-2}{x^2-2x+1}=\frac{2x^2-4x}{x^2-2x+1}$$

$$f'(x)=0\to\frac{2x^2-4x}{x^2-2x+1}=0$$

$$2x^2-4x=0$$

$$2x(x-2)=0$$

إما $2x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=-3$

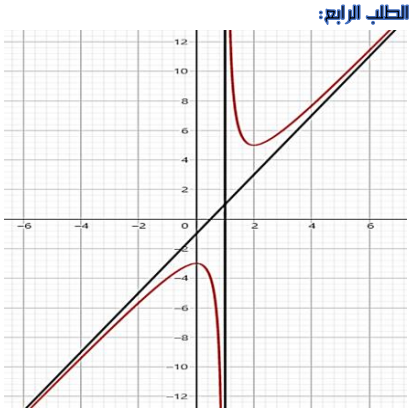
أو $x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow f(2)=5$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	↗	$+\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي

من اليسار نحو $-\infty$ oy ومن اليمين نحو $+\infty$ oy

الطلب الرابع:



الطلب الخامس:

$$2x^2-(3+m)x+3+m=0$$

$$2x^2-3x-mx+3+m=0$$

$$2x^2-3x+3=mx-m$$

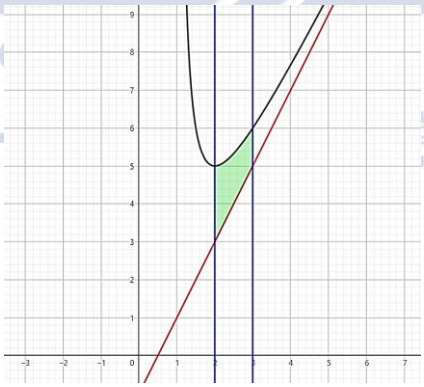
$$2x^2-3x+3=m(x-1)$$

$$\frac{2x^2-3x+3}{x-1}=m$$

$$f(x)=m$$

- أياً كان $m\in]-\infty,-3[$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلّان.
- عندما $m=-3$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد
- أياً كان $m\in]-3,5[$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ مستحيلة الحل
- عندما $m=5$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد
- أيا كان $m\in]5,+\infty[$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلان.

الطلب السادس:



$$S=\int_2^3(f(x)-y_\Delta)\,dx$$

$$=\int_2^3\left(2x-1+\frac{2}{x-1}-(2x-1)\right)dx$$

$$=\int_2^3\frac{2}{x-1}dx=\int_2^3 2.\frac{1}{x-1}dx$$

$$=[2\ln|x-1|]_2^3$$

$$=2\ln(2)-2\ln(1)=2\ln(2)=\ln(4)$$

المسألة الثانية:

ليكن الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[-3,3]$ وفق: $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$

١. ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند -3 وعند 3

٢. أثبت أن التابع f فردي

٣. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ودل على القيمة الحدية

٤. عين معامل c في النقطتين $A(3,0),B(-3,0)$

٥. ارسم معاملي C في A و B ثم ارسم C

٦. باستخدام التقريب التألفي أوجد قيمة تقريبية لـ $f(0.2)$

الحل:

١. دراسة قابلية الاشتقاق عند -3 :

ليكن لدينا التابع المساعد $g(x)$ المعرف على $[-3,3[$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=\frac{x\sqrt{9-x^2}}{x+3}$$

$$\lim_{x\to-3}g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{x\sqrt{9-x^2}}{x+3}$$

$$=\frac{x\sqrt{(3-x)(3+x)}}{x+3}$$

$$=\frac{x\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}}{x+3}=\frac{x\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+3}}$$

$$\lim_{x\to-3}g(x)=\frac{-3\sqrt{6}}{0^+}=-\infty$$

ومنه f غير اشتقاقي عند -3.

دراسة قابلية الاشتقاق عند 3 :

ليكن لدينا التابع المساعد $g(x)$ المعرف على $]-3,3]$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{x\sqrt{9-x^2}}{x-3}$$

نوجد النهاية:

$$\lim_{x\to3}g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{x\sqrt{9-x^2}}{x-3}$$

$$=\frac{x\sqrt{(3-x)(3+x)}}{x-3}$$

$$=\frac{x\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}}{-(3-x)}=\frac{x\sqrt{3+x}}{-\sqrt{3-x}}$$

$$\lim_{x\to3}g(x)=\frac{3\sqrt{6}}{0^+}=+\infty$$

التابع f غير اشتقاقي عند 3.

٢. إثبات أن التابع f فردي:

الشرط الأول:

أياً كان $x\in[-3,3]$ فإن $-x\in[-3,3]$ محقق وضوحاً..

الشرط الثاني:

$$\underbrace{f(-x)}_{l_1}=\underbrace{-f(x)}_{l_2}$$

$$l_1=f(-x)=(-x)\sqrt{9-(-x)^2}$$

$$=-x\sqrt{9-x^2}=-f(x)=l_2$$

محققة ومنه التابع f فردي.

٣. دراسة تغيرات f:

$$f(x)=x\sqrt{9-x^2}$$

$$f(-3)=0$$

$$f(3)=0$$

التابع f اشتقاقي على المجال $]-3,3[$ ومنه:

$$f'(x)=(x)'\left(\sqrt{9-x^2}\right)+\left(\sqrt{9-x^2}\right)'(x)$$

$$=\sqrt{9-x^2}+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}\right)(x)$$

$$=\sqrt{9-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{9-x^2-x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0\to\frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}=0$$

$$9-2x^2=0\to2x^2=9\to x^2=\frac{9}{2}$$

إما $x=\frac{3}{\sqrt{2}}\to f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=\frac{9}{2}$

أو $x=-\frac{3}{\sqrt{2}}\to f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{9}{2}$

مكثفة شيفرة الـ 600

نظم جدول التغيرات:

x	-3		$-\frac{3}{\sqrt{2}}$		$\frac{3}{\sqrt{2}}$		3
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	$\mathbf{0}$

القيم الحدية:

$f(-3)=0$ قيمة حدية كبرى محلياً

$f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{9}{2}$ قيمة حدية صغرى محلياً

$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=\frac{9}{2}$ قيمة حدية كبرى محلياً

$f(3)=0$ قيمة حدية صغرى محليا

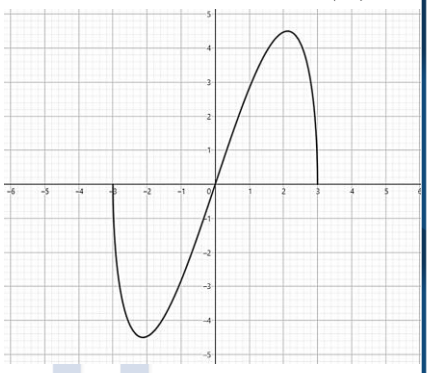
٤. مما سبق نجد:

بما أن f غير اشتقاقي عند (-3) و (3) فإن:

المماس عند النقطة $A(3,0)$ هو: $x=3$ مماس شاقولي

المماس عند النقطة $B(-3,0)$ هو: $x=-3$ مماس شاقولي

٥. رسم



٦. إيجاد a و h:

$$f(0)=0\ ,\ h=0.2=\frac{2}{10}$$

$$f'(x)=\frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}\ ,\ f'(0)=3$$

$$f(a+h)\backsimeq f(a)+h\,f'(a)$$

$$f(0.2)\backsimeq f(0)+\frac{2}{10}f'(0)$$

$$\backsimeq 0+\frac{2}{10}\,3\backsimeq\frac{6}{10}\backsimeq 0.6$$

المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ والمطلوب:

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

٢. أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-\ln 2$ مقارب للخط C في جوار الـ $+\infty$

٣. ادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d.

٤. أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$

٥. ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C.

الحل:

الطلب الأول:

دراسة تغيرات التابع f:

التابع f معرف ومستمر على I ولدينا:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على I ومشتقهُ:

$$f'(x)=1-\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)'}{2+\frac{1}{x}}=1-\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}}$$

$$=1+\frac{1}{2x^2+x}=\frac{2x^2+x+1}{2x^2+x}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0\rightarrow\frac{2x^2+x+1}{2x^2+x}=0$$

$$2x^2+x+1=0$$

$$a=2\ ,\ b=1\ ,\ c=1$$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(2)(1)-7<0$$

مستحيلة الحل ومنه المشتق f' لا ينعدم

نظم جدول التغيرات للتابع f:

x	$\mathbf{0}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني:

إثبات أن d مقارب للخط C في جوار $+\infty$:

نشكل الفرق:

$$h(x)=f(x)-y_d$$

$$=x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-x+\ln 2$$

$$=\ln 2-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=\ln\left(\frac{2}{\frac{2x+1}{x}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\ln(1)=0$$

ومنهُ المستقيم Δ مقارب مائل لـ C في جوار الـ $+\infty$.

الطلب الثالث:

الوضع النسبي للخط البياني C مع مقاربه d:

نشكل الفرق:

$$h(x)=f(x)-y_d=\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$

$$\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)=0$$

$$\frac{2x}{2x+1}=1\rightarrow 2x=2x+1\rightarrow 0\neq 1$$

مستحيل الحل ومنه الفرق $h(x)$ لا ينعدم

نظم جدول الوضع النسبي

x	$\mathbf{0}$	$+\infty$
$h(x)$	$\|\|$	$-$
الوضع النسبي	$\|\|$	C تحت d

الطلب الرابع:

التابع f مستمر ومطرد تماماً على مجموعة تعريفه

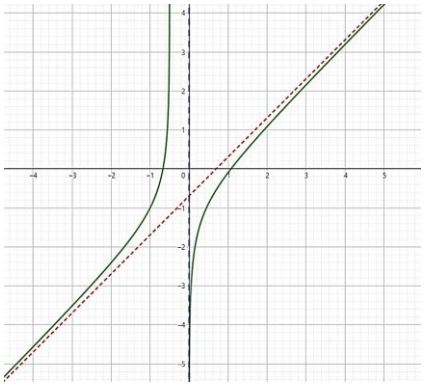
ولدينا:

$$f(1)=1-\ln 3<0\ ,\ f(2)=2-\ln\left(\frac{5}{2}\right)>0$$

ومنه: $f(1).f(2)<0$ إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي الى المجال $]1,2[$

الطلب الخامس:

الرسم:



المسألة الرابعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=\frac{2}{e^x+1}$ والمطلوب:

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

٢. اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C وادرس وضعه النسبي.

٣. اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة منهُ فاصلتها صفر وادرس وضعه النسبي.

٤. أثبت أنّ النقطة $I(0,1)$ مركز تناظر للخط البياني C

٥. ارسم مقاربات C و T ثم ارسم C

٦. أثبت أنّ التابع f يكتب بالشكل

$f(x)=2-\frac{2e^x}{e^x+1}$ أياً كان x من $\mathbb{R}$

٧. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمان $x=0$ و $x=1$

٨. أثبت أنّ التابع f حل للمعادلة التفاضلية

$(e^x+1)^2(y+y')=2$

الحل:

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{-e^x(2)}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}=0$$

$$-2e^x=0$$

مستحيلة الحل إذاً $f'(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		
$f(x)$	2	$\searrow$	$\mathbf{0}$

الطلب الثاني:

$\Delta_1: y=2$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$\Delta_2: y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي مع Δ_1 :

$$h(x)=f(x)-y_{\Delta_1}=\frac{2}{e^x+1}-2$$

$$=\frac{2-2e^x-2}{e^x+1}=\frac{-2e^x}{e^x+1}$$

$$h(x)=0\rightarrow\frac{-2e^x}{e^x+1}=0\rightarrow -2e^x=0$$

مستحيلة الحل أذاً $h(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	$-$	
الوضع النسبي	C تحت Δ_1	

دراسة الوضع النسبي مع Δ_2 :

$$g(x)=f(x)-y_{\Delta_2}$$

$$=\frac{2}{e^x+1}-0=\frac{2}{e^x+1}$$

$$g(x)=0\rightarrow\frac{2}{e^x+1}=0\rightarrow 2\neq 0$$

مستحيلة الحل إذاً $g(x)$ لا ينعدم

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	
الوضع النسبي	C فوق Δ_2	

الطلب الثالث:

النقطة:

$$x_A=0\ ,\ y_A=f(0)=1\rightarrow A(0,1)$$

الميل:

$$m=f'(0)=-\frac{1}{2}$$

المعادلة:

$$T: m(x-x_A)+y_A$$

$$T: y=-\frac{1}{2}x+1$$

دراسة الوضع النسبي:

$$l(x)=f(x)-T$$

$$l(x)=\frac{2}{e^x+1}+\frac{1}{2}x-1$$

$$l(x)=0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية

سنعود بعد قليل..

ليكن لدينا التابع $k(x)$ المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$k(x)=\frac{2}{e^x+1}+\frac{1}{2}x-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}k(x)=2-\infty-1=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}k(x)=+\infty$$

التابع $k(x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$k'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{-4e^x+e^{2x}+2e^x+1}{2(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}-2e^x+1}{2(e^x+1)^2}$$

$$k'(x)=0\to\frac{e^{2x}-2e^x+1}{2(e^x+1)^2}=0$$

$$e^{2x}-2e^x+1=0$$

لتكن $t=e^x$ فتكون: $t^2=e^{2x}$

$$t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)(t-1)=0$$

$$(t-1)^2=0$$

$$t-1=0\to t=1$$

$$e^x=1\to x=0\in D_k\to k(0)=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$+$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أنه يوجد للمعادلة حل $x=0$ إذاً $l(x)$ ينعدم عند $x=0$

عدنا..

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$l(x)$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	C تحت T		$\|$	C فوق T	

الطلب الرابع:

$$a=0\to 2a=0$$

$$b=1\to 2b=2$$

الشرط الأول:

أياً كان $x\in D_f$ فإن: $-x\in D_f$ محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

يجب تحقق:

$$f(2a-x)+f(x)=2b$$

$$\underbrace{f(-x)+f(x)}_{l_1}=\underbrace{2}_{l_2}$$

$$l_1=f(-x)+f(x)$$

$$=\frac{2}{e^{-x}+1}+\frac{2}{e^x+1}=\frac{2}{\frac{1+e^x}{e^x}}+\frac{2}{e^x+1}$$

$$=\frac{2e^x}{1+e^x}+\frac{2}{e^x+1}=\frac{2e^x+2}{1+e^x}$$

$$=\frac{2(1+e^x)}{1+e^x}=2=l_2$$

الشرط الثاني محقق إذا النقطة $I(0,1)$ مركز تناظر للخط البياني C.

الطلب الخامس:



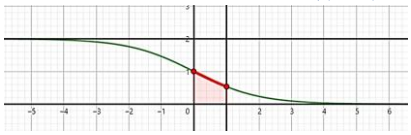
الطلب السادس:

$$f(x)=2-\frac{2e^x}{e^x+1}$$

$$=\frac{2e^x+2-2e^x}{e^x+1}=\frac{2}{e^x+1}$$

وهو المطلوب

الطلب السابع:



$$S=\int_0^1(f(x)-y_\Delta)\,dx$$

$$=\int_0^1\left(2-\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$=[2x-2\ln|e^x+1|]_0^1$$

$$=(2-2\ln(e+1))-(-2\ln 2)$$

$$=2-2\ln(e+1)+2\ln 2$$

$$=2+2\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$$

الطلب الثامن:

$$\underbrace{(e^x+1)^2\,(y+y')}_{l_1}=\underbrace{2}_{l_2}$$

$$l_1=(e^x+1)^2(y+y')$$

$$=(e^x+1)^2\left(\frac{2}{e^x+1}+\frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}\right)$$

$$=2(e^x+1)-2e^x$$

$$=2e^x+2-2e^x=2=l_2$$

ومنه التابع f هو حل للمعادلة التفاضلية.

المسألة الخامسة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=e^{-x}(1+\ln(x))$

والتابع g المعرف على I وفق:

$$g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln(x)$$

١. ادرس تغيرات التابع g نظم جدولاً بها

٢. بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلاً وحيداً α ثم تحقق أنّ: $\alpha=1$

٣. جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

٤. أثبت أن $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$

٥. مستفيداً من تغيرات التابع $g(x)$ وادرس تغيرات التابع $f(x)$ ونظم جدولاً بها

٦. في معلم متجانس ارسم الخط C_f

الحل:

الطلب الأول:

دراسة تغيرات التابع g :

$$\lim_{x\to0}g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln(x)$$

$$=\ln(x)\left(\frac{1}{x.\ln(x)}-\frac{1}{\ln(x)}-1\right)$$

$$\lim_{x\to0}g(x)=-\infty\left(\frac{1}{0^-}+0-1\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$$

g معرف ومستمر واشتقاقي على I

$$g'(x)=\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{-1-x}{x^2}$$

نعدم $g'(x)$

$$g'(x)=0\to\frac{-1-x}{x^2}=0$$

$$-1-x=0\to x=-1$$

ننظم جدول تغيرات التابع g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	
$g(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

الطلب الثاني:

التابع g مستمر ومتناقص على المجال $[0,+\infty[$ ولدينا:

$$g([0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[\to 0\in]-\infty,+\infty[$$

ومنه للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α

$g(1)=1-1-\ln(1)=0$ ومنه $\alpha=1$ محققة

الطلب الثالث:

$$\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty)(0)$

$$f(x)=e^{-x}(1+\ln x)$$

$$=e^{-x}+e^{-x}\ln x=e^{-x}+\frac{\ln x}{x}.\frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0+0+0=0$$

الطلب الرابع:

$$\underbrace{f'(x)}_{l_1}=\underbrace{\frac{g(x)}{e^x}}_{l_2}$$

$$l_1=f'(x)$$

$$=(e^{-x})'(1+\ln x)+(1+\ln x)'(e^{-x})$$

$$=-e^{-x}(1+\ln x)+\frac{1}{x}(e^{-x})$$

$$=-e^{-x}-e^{-x}\ln x+\frac{e^{-x}}{x}=e^{-x}\left(1-\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1-\ln x\right)=e^{-x}(g(x))=l_2$$

ومنه العلاقة محققة..

الطلب الخامس:

دراسة تغيرات التابع f :

التابع f معرف واشتقاقي على I

$$f'(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1-\ln x\right)$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية

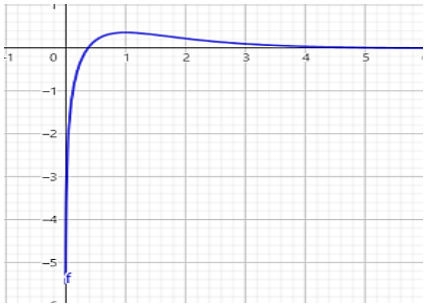
بالاستفادة من تغيرات التابع g ننظم جدول تغيرات f

نلاحظ أن $x=1$ تعدم $g(x)$ ومنه تعدم $f'(x)$

$$f(1)=\frac{1}{e}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

الطلب السادس:



مكثفة شيفرة الـ 600

المسألة السادسة:

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نجد C_f و C_g خطان بيانيان للتابعين f و g المعرفان على $\mathbb{R}$

$$f(x)=e^x-\frac{1}{2}e.x^2 \quad , \quad g(x)=e^x-ex$$

١. ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

٣. ادرس الوضع النسبي بين C_f و C_g

٤. ارسم في نفس المعلم كلاً من C_f و C_g

٥. ارسم في معلم آخر كلاً من C_f و C_g على المجال $[0,2]$

٦. احسب مساحة السطح المحصور بين C_f و C_g .

الحل:

الطلب الأول:

التابع g معرف ومستمر على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$g(x)=e^x-ex=x\left(\frac{e^x}{x}-e\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

التابع g اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$g'(x)=e^x-e$$

نعدم المشتق:

$$g'(x)=0\to e^x-e=0$$

$$e^x=e\to\ x=1\in D_f\to g(1)=0$$

ننظم جدول تغيرات التابع g ، وفق:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

من جدول تغيرات التابع g نجد: $f(\mathbb{R})=[0,+\infty[$

أيّ أنّ: $g(x)\geq 0$ أياً كانت x من $\mathbb{R}$.

الطلب الثاني:

التابع f معرف ومستمر على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty-\infty)$

$$f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2=x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{2}e\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{2}e(2x)=e^x-ex=g(x)\geq 0$$

أيّ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ننظم جدول تغيرات التابع f وفق:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثالث:

نشكل الفرق:

$$f(x)-g(x)$$

$$=e^x-\frac{1}{2}ex^2-(e^x-ex)$$

$$=e^x-\frac{1}{2}ex^2-e^x+ex=ex-\frac{1}{2}ex^2$$

نعدم الفرق:

$$f(x)-g(x)=0\to ex-\frac{1}{2}ex^2=0\to ex\left(1-\frac{1}{2}x\right)=0$$

إما $ex=0\Rightarrow x=0\in\mathbb{R}$

أو $1-\frac{1}{2}x=0\Rightarrow x=2\in\mathbb{R}$

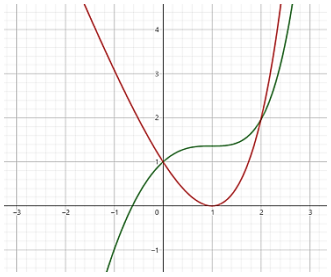
ننظم جدول الوضع النسبي وفق:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
الفرق	$-$	0	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	C_g تحت C_f	|	C_g فوق C_f	|	C_f تحت C_g

يتقاطع C_f و C_g في النقطتين: $(0,1)$ و $(2,e^2-2)$

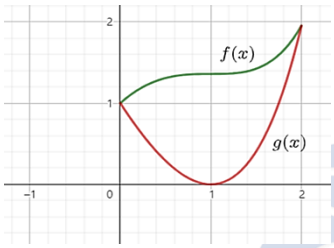
الطلب الرابع:

ارسم في نفس المعلم كلاً من C_f و C_g :



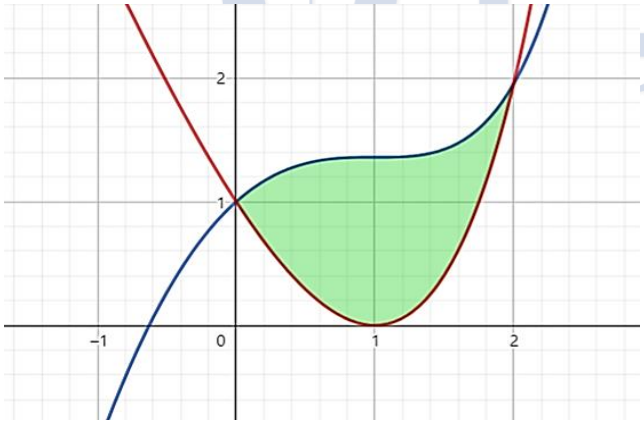
الطلب الخامس:

رسم C_f و C_g على المجال $[0,2]$



الطلب السادس:

حساب المساحة:



من الرسم وجدنا أن السطح المحصور بين C_f و C_g يكون على المجال $[0,2]$ لذلك نوجد:

$$s=\int_0^2 (f(x)-g(x))\,dx$$

$$s=\int_0^2 \left(e^x-\frac{1}{2}ex^2-(e^x-ex)\right)dx$$

$$=\int_0^2 \left(ex-\frac{1}{2}ex^2\right)dx=\left[e\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}e\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$=e\left(\frac{4}{2}\right)-\frac{1}{2}e\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{2}{3}e$$

المسألة السابعة:

ليكن f التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ وفق:

$f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$ وليكن C خطه البياني في معلم متجانس والمطلوب:

١. أثبت أنّ $\frac{f(x)+f(1-x)}{2}=-\frac{1}{4}$ أياً يكن x من D_f.

٢. استنتج أنّ النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للخط C.

٣. ادرس تغيرات التابع f على مجموعة تعريفه.

٤. أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}x$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه.

٥. ارسم في معلم واحد d ثم C.

الحل:

الطلب الأول:

$$\underbrace{\frac{f(x)+f(1-x)}{2}}_{l_1}=\underbrace{-\frac{1}{4}}_{l_2}$$

$$l_1=\frac{f(x)+f(1-x)}{2}$$

$$=\frac{-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{-1+x}{2}+\ln\left|\frac{-x}{1-x}\right|}{2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}+\ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\times\left|\frac{-x}{1-x}\right|\right)}{2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}+\ln\left|\left(\frac{x-1}{x}\right).\left(\frac{-x}{1-x}\right)\right|}{2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}+\ln\left|\frac{-1}{-1}\right|}{2}=\frac{-\frac{1}{2}+\ln 1}{2}=-\frac{1}{4}=l_2$$

الطلب الثاني:

استنتاج أنّ النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر:

$$2a=2\left(\frac{1}{2}\right)=1\ ,\ 2b=2\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

الشرط الأول:

أياً كان: $x\in]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$

فإنّ: $1-x\in]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$

الإثبات:

$$x\in]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$$
$$-x\in]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$$
$$1-x\in]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(1-x)+f(x)=-\frac{1}{2}$$

الإثبات: لدينا من الطلب السابق:

$$\frac{f(1-x)+f(x)}{2}=-\frac{1}{4}$$
$$\rightarrow f(1-x)+f(x)=-\frac{1}{2}$$

ومنه الشرط الثاني محقق.

ومنه النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للخط البياني

الطلب الثالث:

دراسة تغيرات التابع f على مجموعة تعريفه.

$$D_f=]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$$

التخلص من القيمة المطلقة: ندرس إشارة مضمون القيمة المطلقة:

نعدم البسط: $x=1$ نعدم المقام: $x=0$

نظم جدول الإشارة:

x	$-\infty$	$\mathbf{0}$		$\mathbf{1}$	$+\infty$
البسط	$-$	$-$	$-$	0	$+$
المقام	$-$	0	$+$	$+$	$+$
الكسر	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

ومنه:

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\ ;x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\\ -\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{-x+1}{x}\right)\ ;x\in]0,1[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to1^+}f(x)=-\infty$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-x^2+x+2}{2x^2-2x}\ ;x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\\ \frac{x^2-x-2}{-2x^2+2x}\ ;x\in]0,1[\end{cases}$$

نعدم:

$$f'(x)=0\rightarrow-x^2+x+2=0$$
$$-(x^2-x-2)=0\rightarrow-(x-2)(x+1)$$

إما $x=2\in D_f\rightarrow f(2)=-1-\ln 2$

أو $x=-1\in D_f\rightarrow f(-1)=\frac{1}{2}+\ln(2)$

نظم جدول التغيرات وفق:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$ $+\infty$ $\searrow$	$-\infty$	$\|\|$ $-\infty$ $\nearrow$	$-1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

الطلب الرابع:

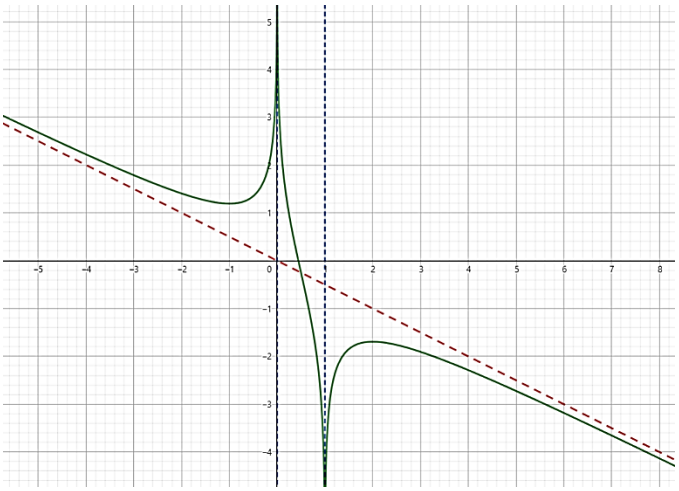
إثبات أنّ المستقيم $d:y=-\frac{1}{2}x$ مقارب للخط C.

$$h(x)=f(x)-y_d$$
$$=-\frac{1}{2}x+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{1}{2}x$$
$$=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\ln(1)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\ln(1)=0$$

ومنه d مقارب مائل للخط C في جوار الـ $-\infty$ و $+\infty$

الطلب الخامس:

الرسم:



مكثفة شيفرة الـ 600

المسألة الثامنة:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$$

والمطلوب:

١. **قارن كلاً من $f(-x)$ و $f(x+2\pi)$ مع $f(x)$**

استنتج أنه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$

٢. **أثبت أنّ $f'(x) = 6.\cos x.\sin x\,(1-2\cos x)$ عند كل عدد حقيقي x.**

٣. **ادرس تغيرات f على $[0,\pi]$**

٤. **ارسم الخط البياني للتابع f على $[-2\pi, 2\pi]$**

الحل:

الطلب الأول:

إيجاد $f(-x)$:

$$f(-x) = 3\sin^2(-x) + 4\cos^3(-x)$$
$$= 3(-\sin x)^2 + 4\cos^3 x$$
$$= 3.\sin^2 x + 4.\cos^3 x = f(x)$$

نلاحظ أنّ:

أياً كان $x \in \mathbb{R}$ فإنّ $-x \in \mathbb{R}$ ولدينا من دقيقة

$f(-x) = f(x)$ ومنه التابع f زوجي.

إيجاد $f(x+2\pi)$:

$$f(x+2\pi) = 3\sin^2(x+2\pi) + 4\cos^3(x+2\pi)$$
$$= 3\sin^2(x) + 4\cos^3 x = f(x)$$

ومنهُ التابع f دوري دورهُ 2π وهو تابع زوجي متناظر بالنسبة لـ yy' فيكفي دراسته على المجال $[0,\pi]$

الطلب الثاني:

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f'(x) = 3(2)\sin x\,(\cos x) + 4(3)\cos^2 x\,(-\sin x)$$
$$= 6\sin x.\cos x - 12\sin x.\cos^2 x$$
$$= 6\sin x\cos x\,(1-2\cos x)$$

الطلب الثالث:

دراسة تغيرات التابع f على المجال $[0,\pi]$:

f معرف واشتقاقي على $[0,\pi]$ ومنهُ:

$$f(0) = 4 \;,\; f(\pi) = -4$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$
$$6\sin x\cos x\,(1-2\cos x) = 0$$

إما $\cos x = 0 \to x = \frac{\pi}{2}\;;f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

أو $\sin x = 0 \begin{cases} x = 0\;;f(0) = 4 \\ x = \pi\;;f(\pi) = -4 \end{cases}$

أو $1 - 2\cos x = 0 \to \cos x = \frac{1}{2}$

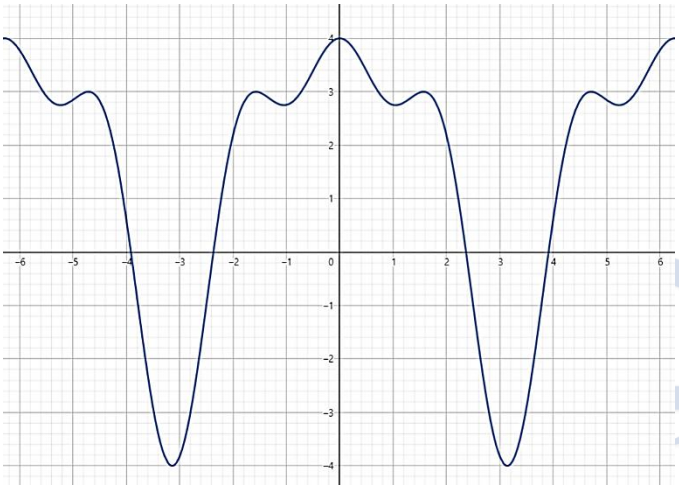
$$x = \frac{\pi}{3}\;;f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{11}{4}$$

نظم جدول التغيرات وفق:

x	**0**		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	**0**
$f(x)$	4	↘	$\frac{11}{4}$	↗	3	↘	-4

الطلب الرابع:

الرسم:



لا تترك لحظة..

دون أن تسأل اللّه الفَهم عند الحيرة، والحكمة عند الشتات، والقوّة عند الخوف،

والثبات عند الارتجاف، وأن يجعل صدرك جَنَّةً مهما ضاقت حولك الحياة، واسأله ألّا تميل الخُطى حيث الأسبق، بل الأصدق وإن أردت مزيداً ..

فاسأل اللّه أن تكون له وحده، خالصاً مُخلِصاً، نجماً لا يَضرّه قلّة الوَهَج، ولا تُغريه زينة الناظرين، ولا ينطفئ إن لم يصفّق له أحد، يأخذ مكانه بقوّة، يُكمل مهمّته، يرفع رايته، يُحرّك السفينة كأنه الناجي الوحيد، يضبط شراع النيّة كل لحظة، إن تعثّر قام، وإن مالَ استقام، هو أمّةٌ وحده، كونٌ بما حَوى.

يا نخبة، تمسّك جيّداً، لا بأس أن تعثرَ، لكن لا تُفلِت يدك. 💙

فهرس قسم التوابع:

١. التأسيس.
٢. أنواع التوابع.
٣. خواص لوغاريتمي وأسي.
٤. معادلات لوغاريتمي وأسي.
٥. مجموعات التعريف.
٦. النهايات.
٧. محدودية تابع.
٨. سلوك تابع.
٩. النهاية باستخدام التعريف.
١٠. المقاربات.
١١. الاستمرار.
١٢. قواعد الاشتقاق.
١٣. استنتاج مشتق.
١٤. المشتقات من مراتب عليا.
١٥. المماس والعمود المشترك.
١٦. التقريب التآلفي.
١٧. قابلية الاشتقاق.
١٨. اطراد تابع.
١٩. دراسة تغيرات تابع.
٢٠. قراءة جدول التغيرات.
٢١. مبرهنة القيمة الوسطى والحصر.
٢٢. المعادلة والمتراجحة المختلطة.
٢٣. رسم الخطوط البيانية.
٢٤. استنتاج رسم خط بياني.
٢٥. الصفات التناظرية.
٢٦. قراءة الخط البياني.
٢٧. تحديد الثوابت.
٢٨. المعادلات التفاضلية.
٢٩. التأطير التابعي.
٣٠. التكامل والتوابع الأصلية.
٣١. مسائل شاملة.

شيفرة الـ 600 في المتتاليات

التعريف

هي تابع مجموعة تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو أيّ مجموعة جزئية غير منتهية منها من النمط: $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$ حيث n_0 عدد طبيعي معطى (يمكن أن يتغير من متتالية إلى أخرى) ونرمز إلى المتتالية بالرمز: $(u_n)_{n\geq n_0}$ أو $(u_n)_{n\geq 0}$ ونسمي u_n حد المتتالية ذا الدليل n وللمتتالية عدد لا نهائي من الحدود بقطع النظر عن هذه الحدود.

أشكال المتتالية

الشكل	الشكل الصريح	الشكل التدريجي	شكل التعايش	شكل المجموع
التعريف	تكون u_n مُعطاة بدلالة n	تكون u_{n+1} معطاة بدلالة u_n	تكون المتتالية مُعطاة بدلالة متتالية أخرى	مجموع يحوي نقاط حيث النقاط يعني وجود حدود متخفية
مثال	$u_n = 2-7n$ $u_n = 3^n$	$u_{n+1} = 2-7u_n\ , u_0 = 1$ $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2-u_n}\ , u_0 = 1$	$u_n = v_n - 3$ $w_n = \frac{1}{u_n} + 2$	$u_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ $u_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$
كيفية التعويض	يكفي استبدال كل n بدليل الحد المطلوب.	لا يمكن إيجاد حدّ دون معرفة الحد الذي يسبقهُ.	نستخدم الاستبدال.	نحدد الحد الأول وذلك باستبدال كل n بالدليل المطلوب (هذه الخطوة تطبق عند اللزوم) ثم نحدد الحد الأخير باستبدال كل n بالدليل المطلوب ثم نملأ ما بينهما (عند اللزوم) وفقاً للمتتالية.	

تمرين:

لتكن لدينا المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(w_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ و $(t_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = 3n-2$$

أوجد كلاً من u_1 و u_2 و u_{100} و $u_{\text{علامتك}}$ و u_{n+1}.

الحل:

- $u_1 = 3(1)-2 = 1$
- $u_2 = 3(2)-2 = 4$
- $u_{100} = 3(100)-2 = 298$
- $u_{\text{علامتك}} = 3(\text{علامتك})-2$
- $u_{n+1} = 3(n+1)-2 = 3n+1$

$$\begin{cases} v_{n+1} = 3v_n + 4 \\ v_0 = 6 \end{cases}$$

أوجد كلاً من v_1 و v_2 و v_3 و v_5 و v_{n+2}.

الحل:

- $v_1 = 3v_0 + 4 = 3(6)+4 = 22$
- $v_2 = 3v_1 + 4 = 3(22)+4 = 70$
- $v_3 = 3v_2 + 4 = 3(70)+4 = 214$
- $v_5 = 3v_4 + 4 = ?$

سنعود بعد دقيقة..

حساب v_4:

$$v_4 = 3v_3 + 4 = 3(214)+4 = 646$$

عُدنا..

$$v_5 = 3v_4 + 4 = 3(646)+4 = 1942$$

- $v_{n+2} = 3v_{n+1} + 4$
$= 3(3v_n+4)+4 = 9v_n + 16$

$$w_n = v_n + 2$$

أوجد w_0 و w_1 و w_2 و w_3 و w_{n+1}.

- $w_0 = v_0 + 2 = 6+2 = 8$
- $w_1 = v_1 + 2 = 22+2 = 24$
- $w_2 = v_2 + 2 = 70+2 = 72$
- $w_3 = v_3 + 2 = 214+2 = 216$
- $w_{n+1} = v_{n+1} + 2 = 3v_n + 6$

$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

أوجد s_0 و s_1 و s_2 و s_3 و s_{n+1}.

- $s_0 = 1$
- $s_1 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
- $s_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2} = \frac{3}{2}+\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$
- $s_{n+1} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}$

$$t_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

أوجد t_1 و t_2 و t_3 و t_{n+1}.

- $t_1 = \frac{1}{2}$
- $t_2 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
- $t_3 = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$
- $t_{n+1} = \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$

المتتالية الحسابية والهندسية:

الفكرة	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
التعريف	كل حد فيها ينتج عن الحد الذي يسبقه بإضافة عدد حقيقي هو أساس المتتالية حيث: رمزه: r وقانونه: $r = (\text{حد} - \text{حد يسبقه})$	كل حد ينتج عن الحد الذي يسبقه بضربه بعدد حقيقي هو أساس المتتالية حيث: رمزه: q وقانونه: $q = \left(\frac{\text{حد}}{\text{حد يسبقه}}\right)$
إثبات نوع	لإثبات أن المتتالية حسابية فإننا: (1) نوجد u_{n+1} (2) نشكل الفرق $u_{n+1}-u_n$ (3) نميز * إذا كان ناتج الفرق يحوي n فالمتتالية ليست حسابية * إذا كان ناتج الفرق لا يحوي n فالمتتالية تكون حسابية وأساسها هو ناتج الفرق	لإثبات أن المتتالية هندسية فإننا: (1) نوجد u_{n+1} (2) نشكل النسبة: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (3) ونميز: * إذا كان ناتج النسبة يحوي n فالمتتالية ليست هندسية * إذا كان ناتج النسبة لا يحوي n فالمتتالية تكون هندسية وأساسها هو ناتج النسبة
العلاقة بين حدان كيفيان	لدينا u_n و u_m حدان كيفيان من متتالية حسابية إذاً: $u_n - u_m = (n-m)r \quad \backslash \quad u_m - u_n = (m-n)r$ الفائدة: تفيد في حساب u_n أو u_m أو r بمعرفة اثنان منها	لدينا u_n و u_m حدان كيفيان من متتالية هندسية إذاً: $\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m} \quad \backslash \quad \frac{u_m}{u_n} = q^{m-n}$ الفائدة: تفيد في حساب u_n أو u_m أو q بمعرفة اثنان منها
علاقة الحد العام (كتابة u_n بدلالة n)	* في حال معرفة الحد u_0 فإنّ: $u_n - u_0 = (n-0)r$ * في حال معرفة u_7 (مثلاً) فإنّ: $u_n - u_7 = (n-7)r$ * وهكذا...	* في حال معرفة الحد u_0 فإن: $\frac{u_n}{u_0} = q^{n-0}$ * في حال معرفة الحد u_7 (مثلاً) فإن: $\frac{u_n}{u_7} = q^{n-7}$ * وهكذا...
انتبه في حال كان نوع المتتالية غير معلوم:	* يكون المعطى هو متتالية u_n نوعها معلوم ومتتالية v_n نوعها غير معلوم مكتوبة بدلالة u_n (علاقة التعايش) فإننا: (1) نكتب u_n بدلالة n وفقاً لنوعها ثم من علاقة التعايش (2) نعزل المتتالية v_n (3) نعوض الحد العام للمتتالية u_n بالعلاقة الجديدة	

التمرين الأول:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

في حالة $n \geq 0$ نعرف المتتالية v_n وفق: $v_n = \frac{2}{u_n - 1}$

1. أثبت أنّ v_n حسابية.
2. اكتب v_n بدلالة n
3. اكتب u_n بدلالة n.

الحل:

الطلب الأول:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{u_{n+1}-1} - \frac{2}{u_n - 1}$$

$$= \frac{2}{\frac{2u_n-1}{u_n}-1} - \frac{2}{u_n-1}$$

$$= \frac{2}{\frac{2u_n-1-u_n}{u_n}} - \frac{2}{u_n-1}$$

$$= \frac{2u_n}{u_n-1} - \frac{2}{u_n-1} = \frac{2u_n-2}{u_n-1}$$

$$= \frac{2(u_n-1)}{u_n-1} = 2$$

حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول:

$$v_0 = \frac{2}{u_0-1} = \frac{2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

الطالب الثاني:

نعلم أنّ المتتالية v_n متتالية حسابية ومنهُ:

$$v_n - v_0 = (n-0)r$$
$$v_n - 2 = 2n$$
$$v_n = 2n+2$$

الطالب الثالث:

المتتالية u_n لا نعلم نوعها ولدينا:

$$v_n = \frac{2}{u_n - 1}$$

نعزل u_n من علاقة التعايش وفق:

$$u_n - 1 = \frac{2}{v_n} \to u_n = \frac{2}{v_n} + 1 \to u_n = \frac{2+v_n}{v_n}$$

$$u_n = \frac{2+2n+2}{2n+2} = \frac{2n+4}{2n+2} = \frac{n+2}{n+1}$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3 - \dfrac{10}{u_n + 4} \\ u_0 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

ولتكن المتتالية v_n المعرفة وفق:

$$v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$$

أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية , عيّن أساسها وحدها الأول ثم اكتب علاقة الحد العام للمتتالية u_n .

الحل:

إثبات أنّ المتتالية v_n هندسية:

نوجد v_{n+1} وفق:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{1 - u_{n+1}}$$

$$= \frac{3 - \dfrac{10}{u_n + 4} + 2}{1 - \left(3 - \dfrac{10}{u_n + 4}\right)}$$

$$= \frac{5 - \dfrac{10}{u_n + 4}}{-2 + \dfrac{10}{u_n + 4}} = \frac{\dfrac{5u_n + 20 - 10}{u_n + 4}}{\dfrac{-2u_n - 8 + 10}{u_n + 4}}$$

$$= \frac{5u_n + 10}{-2u_n + 2} = \frac{5(u_n + 2)}{2(1 - u_n)}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{5(u_n + 2)}{2(1 - u_n)}}{\dfrac{u_n + 2}{1 - u_n}} = \frac{5}{2}$$

ومنهُ المتتالية v_n هندسية أساسها $q = \frac{5}{2}$ وحدها الأول:

$$v_0 = \frac{u_0 + 2}{1 - u_0} = \frac{\frac{1}{4} + 2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{9}{3} = 3$$

كتابة u_n بدلالة n :

المتتالية u_n نوعها غير معلوم.

سنعود بعد دقيقة..

لدينا المتتالية v_n متتالية هندسية ومنهُ:

$$\frac{v_n}{v_0} = q^{n-0} \rightarrow \frac{v_n}{3} = \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

$$v_n = 3.\left(\frac{5}{2}\right)^n$$

عُدنا..

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$$

$$v_n(1 - u_n) = u_n + 2$$

$$v_n - v_n.u_n = u_n + 2$$

$$v_n - 2 = u_n + v_n.u_n$$

$$v_n - 2 = u_n(1 + v_n)$$

$$u_n = \frac{v_n - 2}{v_n + 1} = \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n + 1}$$

مجموع حدود متوالية من متتالية:

المتتالية الحسابية		$\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$
المتتالية الهندسية		$\text{المجموع} = (\text{الحد الأول})\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right)$
مجموع حدود متوالية من متتالية نوعها معلوم	لا تحوي قفزات	(1) نضع القانون المناسب (2) نوجد جميع المجاهيل مع مراعاة أن: $\text{عدد الحدود} = \text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول} + 1$ (3) نعوّض
	تحوي قفزات	(1)نضع القانون المناسب (2)نوجد جميع المجاهيل مع مراعاة أنّ: $\text{عدد الحدود} = \frac{\text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول}}{\text{طول القفزة}} + 1$ (3) نعوض مع مراعاة أنّهُ في المتتالية الهندسية يكون: $\text{الحد الأول} = \text{المجموع} \times \left[\frac{1-(q')^{\text{عدد الحدود}}}{1-(q')}\right]$, حيث: $q' = q^{\text{طول القفزة}}$
مجموع حدود متوالية من متتالية نوعها غير معلوم	وجود علاقة تعايش	* بالاستفادة من علاقة التعايش نحولها إلى متتالية نوعها معلوم * نكمل كما سبق في المجموع لمتتالية نوعها معلوم ملاحظة: - تذكر أن عدد الخيول يساوي عدد القطط - مجموع العدد نفسه عدد من المرات يساوي جداء هذا العدد بعدد المرات $\text{مجموع الرقم مع نفسهُ عدداً من المرات} = (\text{الرقم نفسهُ}) \times (\text{عدد المرات})$
	عدم وجود علاقة تعايش	نستخدم التعويض ثم الإصلاح.
مجموع حدود تحوي أرقام	حسابية	(1)نحدد أساس المتتالية r (2)نضرب الطرفين بمقلوب الأساس (3)نطبق القانون: $\frac{1}{r}\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$ (4)نعوض حيث: $\text{عدد الحدود} = \text{الحد الأخير} - \text{الحد الأول} + 1$ (5)نعزل S
	هندسية	(1)نطبق القانون: $S = (\text{الحد الأول})\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$ (2)نعوض مع مراعاة أن: $\text{عدد الحدود} = \text{أس الحد الأخير} - \text{أس الحد الأول} + 1$
	نكشات	* نكشة اتركوني بحالي: وجود عدد مختلف عن المجموع فإننا: (1)نتركه بحاله (2)نجمع الأرقام (3)نجمع ناتج الأرقام مع الرقم المختلف. * نكشة أخرجني: وجود إشارة سالب ضمن المجموع فإننا: (1)نخرجها كعامل مشترك (2)نجمع الأرقام.

التمرين الأول:

$(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق:

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{1 + v_n} \quad , \quad v_0 = 1$$

١. أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = \frac{1}{v_n}$ متتالية حسابية

٢. اكتب u_n بدلالة n

٣. اكتب v_n بدلالة n

٤. احسب كلاً من المجاميع الآتية:

* $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$
* $S_2 = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
* $S_3 = u_2 + u_4 + \cdots + u_{24}$
* $S_4 = u_3 + u_6 + \cdots + u_{3n}$

الحل:

الطلب الأول:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$$

$$= \frac{1}{\frac{v_n}{1 + v_n}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1 + v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n}$$

$$= \frac{1 + v_n - 1}{v_n} = \frac{v_n}{v_n} = 1$$

ومنهُ المتتالية u_n متتالية حسابية أساسها $r = 1$ وحدها الأول:

$$u_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{1} = 1$$

الطلب الثاني:

لدينا المتتالية u_n متتالية حسابية ومنهُ:

$$u_n - u_0 = (n - 0)r$$

$$u_n - 1 = n \rightarrow u_n = n + 1$$

الطلب الثالث:

المتتالية v_n لا نعلم نوعها ولدينا:

$$u_n = \frac{1}{v_n}$$

$$\rightarrow v_n = \frac{1}{u_n} = \frac{1}{n + 1}$$

الطلب الرابع:

$$S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$$

حيث:

* $\text{عدد الحدود} = 10 - 0 + 1 = 11$
* $\text{الحد الأول} = u_0 = 1$
* $\text{الحد الأخير} = u_{10} = 10 + 1 = 11$

$$S_1 = \frac{11}{2}(1 + 11) = 11 \times 6 = 66$$

$$S_2 = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$$

حيث:

- عدد الحدود $= n - 0 + 1 = n + 1$
- الحد الأول $= u_0 = 1$
- الحد الأخير $= u_n = n + 1$

$$S_3 = \frac{n+1}{2}(1 + n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 2n + n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$$S_3 = u_2 + u_4 + \cdots + u_{24}$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$$

حيث:

- عدد الحدود $= \frac{24-2}{2} + 1 = 11 + 1 = 12$
- الحد الأول $= u_0 = 2 + 1 = 3$
- الحد الأخير $= u_{24} = 24 + 1 = 25$

$$S_4 = \frac{12}{2}(3 + 25) = 6 \times 28 = 168$$

$$S_4 = u_3 + u_6 + \cdots + u_{3n}$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$$

حيث:

- عدد الحدود $= \frac{3n-3}{3} + 1 = n - 1 + 1 = n$
- الحد الأول $= u_3 = 3 + 1 = 4$
- الحد الأخير $= u_{3n} = 3n + 1$

$$S_4 = \frac{n}{2}(4 + 3n + 1)$$
$$= \frac{(n)(3n+5)}{2} = \frac{3n^2 + 5n}{2}$$

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$u_{n+1} = 3u_n - 6 \quad , \quad u_0 = 1$$

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 3$

١. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ثم عيّن أساسها وحدها الأول.

٢. احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

٣. احسب كلاً من المجاميع الآتية:

- $S_1 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$
- $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
- $S_3 = v_2 + v_4 + v_6 + \cdots + v_{20}$
- $S_4 = v_3 + v_6 + v_9 \ldots + v_{3n}$
- $S_5 = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_n$

الحل:

الطالب الأول:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} = \frac{3u_n - 6 - 3}{u_n - 3}$$
$$= \frac{3u_n - 9}{u_n - 3} = \frac{3(u_n - 3)}{u_n - 3} = 3$$

ومنه المتتالية v_n متتالية حسابية أساسها $q = 3$ وحدها الأول:

$$v_0 = u_0 - 3 = 1 - 3 = -2$$

الطالب الثاني:

كتابة v_n بدلالة n.

نعلم أنّ المتتالية v_n متتالية هندسية ومنه:

$$\frac{v_n}{v_0} = q^{n-0} \rightarrow \frac{v_n}{-2} = (3)^n$$
$$v_n = -2(3)^n$$

كتابة u_n بدلالة n :

المتتالية u_n لا نعلم نوعها ولدينا:

$$v_n = u_n - 3 \rightarrow u_n = v_n + 3$$
$$u_n = -2(3)^n + 3$$

الطالب الثالث:

$$S_1 = v_0 + v_1 + \cdots v_9$$

$$\text{المجموع} = (\text{الحد الأول})\left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right]$$

حيث:

- عدد الحدود $= 9 - 0 + 1 = 10$
- الحد الأول $= v_0 = -2$
- $q = 3$

$$S_1 = (-2)\left[\frac{1 - (3)^{10}}{1 - 3}\right]$$
$$= (-2)\left[\frac{1 - (3)^{10}}{-2}\right] = 1 - (3)^{10}$$

$$S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

$$\text{المجموع} = (\text{الحد الأول})\left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right]$$

حيث:

- عدد الحدود $= n - 0 + 1 = n + 1$
- الحد الأول $= v_0 = -2$
- $q = 3$

$$S_2 = (-2)\left[\frac{1 - (3)^{n+1}}{1 - 3}\right]$$
$$= (-2)\left[\frac{1 - (3)^{n+1}}{-2}\right] = 1 - (3)^{n+1}$$

$$S_3 = v_2 + v_4 + v_6 + \cdots + v_{20}$$

حيث:

- عدد الحدود $= \frac{20-2}{2} + 1 = 10$
- الحد الأول $= v_2 = -2(3)^2 = -18$
- $q' = (q)^2 = (3)^2 = 9$

$$S_3 = (-18)\left[\frac{1 - (9)^{10}}{1 - 9}\right]$$
$$= \frac{-18}{-8}(1 - (9)^{10}) = \frac{9}{2}(1 - (9)^{10})$$
$$= \frac{9}{2} - \frac{9}{2}(9)^{10} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(9)^{11}$$

$$S_4 = v_3 + v_6 + v_9 + \cdots + v_{3n}$$

حيث:

- عدد الحدود $= \frac{3n-3}{3} + 1 = n - 1 + 1 = n$
- الحد الأول $= v_3 = -2(3)^3 = -54$
- $q' = (q)^3 = (3)^3 = 27$

$$S_4 = (-54)\left[\frac{1 - (27)^n}{1 - 27}\right]$$

$$= \frac{-54}{-26}(1 - (27)^n) = \frac{27}{13}(1 - (27)^n)$$

$$= \frac{27}{13} - \frac{27}{13}(27)^n = \frac{27}{13} - \frac{1}{13}(27)^{n+1}$$

$$S_5 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

المتتالية u_n لا نعلم نوعها ولدينا علاقة تعايشر:

$$v_n = u_n - 3$$
$$\rightarrow u_n = v_n + 3$$
$$u_0 = v_0 + 3$$
$$u_1 = v_1 + 3$$
$$u_2 = v_2 + 3$$

نعوض في المجموع:

$$S_5 = v_0 + 3 + v_1 + 3 + v_2 + 3 \ldots + v_n + 3$$
$$= \underbrace{(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n)}_{S_2} + \underbrace{(3 + 3 + 3 + \cdots + 3)}_{3(n+1)}$$
$$S_5 = s_2 + 3(n+1)$$
$$= 1 - (3)^{n+1} + 3n + 3$$
$$= -(3)^{n+1} + 3n + 4$$

التمرين الثالث:

$(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة بالعلاقة:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

١. أوجد عددين حقيقيين a و b بحيث:

$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n

٢. ليكن في حالة n عدد طبيعي:

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 \ \ldots + u_n$

عبّر عن S_n بدلالة n.

الحل:

الطالب الأول:

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$
$$= \frac{a.n + a + b.n}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)}$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$\begin{cases} a + b = 0 \ldots (1) \\ a = 1 \ldots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد أنّ: $a = 1$

نعوض في (2) وفق:

$$1 + b = 0 \rightarrow b = -1$$

ومنه:

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

الطالب الثاني:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 \ \ldots + u_n$$

المتتالية u_n لا نعلم نوعها ولدينا:

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$u_1 = 1 - \frac{1}{2}$$
$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

نعوض في المجموع:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

التمرين الرابع:

أحسب كلاً من المجاميع الآتية:

1. $S_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} + \cdots + 20$

المجموع S يمثل مجموع حدود متوالية من متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{4}$ لذلك نضرب المجموع S بـ 4 وفق:

$$4S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 80$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$$

حيث:

- عدد الحدود $= 80 - 1 + 1 = 80$
- الحد الأول $= 1$
- الحد الأخير $= 80$

$$4s = \frac{80}{2}(1 + 80) \rightarrow 4s = 40(81)$$
$$4s = 3240 \rightarrow s = 810$$

2. $s_2 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \cdots + n$

المجموع S يمثل مجموع حدود متوالية من متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ لذلك نضرب المجموع S بـ 2 وفق:

$$2s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2n$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$$

- عدد الحدود $= 2n - 1 + 1 = 2n$
- الحد الأول $= 1$

مكثفة شيفرة الـ 600

* الحد الأخير $= 2n$

$$2s = \frac{2n}{2}(1+2n) \rightarrow 2s = n(1+2n)$$
$$2s = n + 2n^2 \rightarrow s = \frac{n+2n^2}{2}$$

3. $S_3 = -3 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots + 10^{-9}$

$$S_3 = -3 + \underbrace{\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^9}}_{S'}$$
$$S' = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^9}$$

المجموع S' يمثل حدود متوالية من متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{10}$ وقانونه:

$$\text{المجموع} = (\text{الحد الأول})\left[\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right]$$

حيث:

* الحد الأول $= \frac{1}{10}$
* عدد الحدود $= 9-1+1 = 9$
* $q = \frac{1}{10}$

ومنه:

$$S' = \frac{1}{10}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^9}{1-\left(\frac{1}{10}\right)}\right)$$
$$= \frac{1}{10}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^9}{\frac{9}{10}}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{10}{9}\right)\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^9\right)$$
$$= \frac{1}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^9\right) \quad = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^9$$

إذاً:

$$S_3 = -3 + S'$$
$$= -3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^9 = -\frac{26}{9} - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^9$$

4. $S_4 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{2^n}$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$
$$= 2 - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{S'}$$

$$S' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

المجموع S' يمثل حدود متوالية من متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{2}$ وقانونه:

$$\text{المجموع} = (\text{الحد الأول})\left[\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right]$$

حيث:

* الحد الأول $= \frac{1}{2}$
* عدد الحدود $= n-1+1 = n$
* $q = \frac{1}{2}$

ومنه:

$$s' = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

إذاً:

$$S_4 = 2 - S' = 2 - \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$
$$= 2 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

العلاقة بين ثلاثة حدود متوالية من متتالية:

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
الفكرة	* a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإنّ: $a + c = 2b$ تعميم: (الثاني) $2 =$ الثالث + الأول * a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها r فإن: $b = a + r \quad , \quad c = a + 2r$	* a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإنّ: $a.c = b^2$ تعميم: $(\text{الثاني})^2 =$ الثالث × الأول * a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q فإن: $b = a.q \quad , \quad c = a.q^2$

النمط		المعطى	المطلوب	الخطوات
أنماط التمارين	الأول	هو علاقتين تحويان a و b و c لمتتالية نوعها معلوم	تعيين قيمة a و b و c	* حساب b (وفقاً لنوع المتتالية) * نعوض قيمة b في العلاقتين فنحصل على جملة معادلتين بمجهولين ولحل هذه الجملة نستخدم (الحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض) وبذلك نكون قد حصلنا على المطلوب
	الثاني	هو معلومات عن متتالية حسابية وهندسية	تعيين q أو تعيين r	* نضع العلاقات المناسبة * بالإصلاح والتعويض المناسب نحصل على المطلوب

التمرين الأول:

لتكن (v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 وتحقق:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{4} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 6 \end{cases}$$

١. عين الحدود v_1 و v_2 و v_3 للمتتالية وأساسها.

٢. احسب الحد العام v_n بدلالة n

٣. عبر بدلالة n عن المجموع:

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

٤. عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث:

يكون $S_n = -21$

الحل:

الطلب الأول:

تعيين v_1 و v_2 و v_3 :

بما أنّ v_1 و v_2 و v_3 ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإنّ:

$$v_1 + v_3 = 2v_2$$

وبما أنّ:

$$v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{4}$$
$$\underbrace{v_1 + v_3}_{2v_2} + v_2 = 8$$
$$2v_2 + v_2 = \frac{3}{4}$$
$$3v_2 = \frac{3}{4} \rightarrow v_2 = \frac{1}{4}$$

إذاً:

$$\begin{cases} v_1 + v_3 = \frac{1}{2} \ldots (1) \\ v_1 - v_3 = 5 \ldots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2v_1 = \frac{11}{2} \rightarrow v_1 = \frac{11}{4}$$

نعوض في (1) :

$$\frac{11}{4} + v_3 = \frac{1}{2} \rightarrow v_3 = -\frac{9}{4}$$

وبالتالي:

$$v_1 = \frac{11}{4} \quad , \quad v_2 = \frac{1}{4} \quad , \quad v_3 = -\frac{9}{4}$$

أساس v :

حد يسبقه − حد = الأساس

$$r = v_2 - v_1 = \frac{1}{4} - \frac{11}{4} = -\frac{5}{2}$$

الطلب الثاني:

الحد العام:

$$v_n - v_1 = (n-1)r$$
$$v_n - \frac{11}{4} = (n-1)\left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$v_n - \frac{11}{4} = -\frac{5}{2}n + \frac{5}{2}$$
$$v_n = -\frac{5}{2}n + \frac{21}{4}$$

الطلب الثالث:

حساب S_n:

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$
$$S_n = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2}(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

حيث:

* عدد الحدود $= n-1+1 = n$
* الحد الأول $= v_1 = \frac{11}{4}$
* الحد الأخير $= v_n = -\frac{5}{2}n + \frac{21}{4}$

ومنه:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(\frac{11}{4} - \frac{5}{2}n + \frac{21}{4}\right)$$
$$= \frac{n}{2}\left(8 - \frac{5}{2}n\right) = 4n - \frac{5}{4}n^2$$

الطلب الرابع:

تعيين n علماً أن $S_n = -21$

لدينا:

$$S_n = -21$$
$$4n - \frac{5}{4}n^2 = -21$$
$$\frac{5}{4}n^2 - 4n - 21 = 0$$
$$a = \frac{5}{4} \quad , \quad b = -4 \quad , \quad c = -21$$
$$\Delta = b^2 - 4(a)(c) = (-4)^2 - 4\left(\frac{5}{4}\right)(-21)$$
$$= 16 + 105 = 121 > 0$$

ومنه للمعادلة حلان

$$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-11}{2\left(\frac{5}{4}\right)} = -\frac{7}{\frac{5}{2}}$$

$n_1 = -\frac{14}{5} \notin \mathbb{N} \rightarrow$ مرفوض

$$n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+11}{2\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{15}{\frac{5}{2}}$$

$n_2 = 6 \in \mathbb{N} \rightarrow$ مقبول

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماماً حدها الأول u_1 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 . u_2 . u_3 = 216 \end{cases}$$

١. عين الحدود u_1 وu_2 وu_3 للمتتالية وعين أساسها

٢. اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

٣. احسب S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون

$$S_n = 728$$

الحل:

الطلب الأول:

لدينا u_1 وu_2 وu_3 ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية تحقق:

$$u_1 . u_3 = (u_2)^2$$

ولدينا:

$$u_1 . u_2 . u_3 = 216$$
$$(u_2)^2 \, u_2 = 216$$
$$(u_2)^3 = 216 \rightarrow u_2 = 6$$

ومنه:

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 20 \ldots (1) \\ u_1 . u_3 = 36 \ldots (2) \end{cases}$$

من (1) نجد أنّ:

$$u_1 = 20 - u_3 \ldots (*)$$

نعوض في (2) وفق:

$$(20 - u_3)u_3 = 36$$
$$20u_3 - (u_3)^2 = 36$$
$$(u_3)^2 - 20u_3 + 36 = 0$$
$$(u_3 - 18)(u_3 - 2) = 0$$

إما $u_3 - 18 = 0 \rightarrow u_3 = 18$

نعوض في $(*)$

مقبول $\rightarrow u_1 = 20 - 18 \rightarrow u_1 = 2$

أو $u_3 - 2 = 0 \rightarrow u_3 = 2$

نعوض في $(*)$

مرفوض $\rightarrow u_1 = 20 - 2 \rightarrow u_1 = 18$

ومنه:

$$u_1 = 2 < u_2 = 6 < u_3 = 18$$

أساس المتتالية u_n:

$$q = \frac{\text{حد}}{\text{حد يسبقه}} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$$

الطلب الثاني:

$$\frac{u_n}{u_1} = q^{n-1} \rightarrow u_n = u_1 \, q^{n-1}$$

حيث:

$$u_1 = 2 \quad , \quad q = 3$$

ومنه:

$$u_n = 2(3)^{n-1}$$

الطلب الثالث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$\text{المجموع} = (\text{الحد الأول}) \left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right]$$

حيث:

* الحد الأول $= u_1 = 2$
* عدد الحدود $= n - 1 + 1 = n$
* $q = 3$

$$S_n = 2\left[\frac{1 - (3)^n}{1 - 3}\right] = 2\left[\frac{1 - (3)^n}{-2}\right]$$
$$= \frac{2}{-2}(1 - (3)^n) = -1 + (3)^n$$

تعيين العدد الطبيعي n :

لدينا:

$$s_n = 728$$
$$-1 + (3)^n = 728$$
$$(3)^n = 729$$
$$(3)^n = (3)^6$$
$$n = 6$$

التمرين الثالث:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r فيها a وb وc ثلاثة حدود متعاقبة تحقق العلاقة: $b^2 - 1 = a.c$

والمطلوب احسب r.

بما أنّ a وb وc ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها r فإنه يتحقق:

$b = a + r$ و $c = a + 2r$ ومنه نعوض:

$$(a + r)^2 - 1 = a(a + 2r)$$
$$a^2 + 2ar + r^2 - 1 = a^2 + 2ar$$
$$r^2 - 1 = 0 \rightarrow r^2 = 1$$

إما $r = 1$

أو $r = -1$

التمرين الرابع:

a وb و أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$ ، نعلم أن a وb وc ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q ، كما نعلم أن $(-3a)$ وb وc ثلاث حدود متوالية من متتالية حسابية والمطلوب:

١. احسب q

٢. إذا علمت أن $b = 2$ وأنّ المتتالية الهندسية متزايدة تماماً، فجد قيمة كل من a وc

الحل:

الطلب الأول:

بما أن a وb وc ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية:

$$b = a.q \quad , \quad c = a.q^2$$

بما أن $(-3a)$ وb وc ثلاث حدود متوالية من متتالية حسابية فإنّ:

$$\text{الثاني})2 = \text{الثالث} + \text{الأول}$$
$$-3a + c = 2b$$

نعوض:

$$-3a + aq^2 = 2aq$$
$$aq^2 - 2aq - 3a = 0$$
$$a(q^2 - 2q - 3) = 0$$

الحل مستحيلة $\rightarrow a \neq 0$ إما

أو $q^2 - 2q - 3 = 0$

$$(q - 3)(q + 1) = 0$$

إما $q = 3$ أو $q = -1$

الطلب الثاني:

لدينا:

$$b = 2$$

بما أن المتتالية متزايدة تماماً فإن:

مقبول $\rightarrow q = 3$

نعلم أن:

$$b = a.q \rightarrow 2 = a(3) \rightarrow a = \frac{2}{3}$$
$$c = aq^2 \rightarrow c = \left(\frac{2}{3}\right)(3)^2 \rightarrow c = 6$$

ومنه:

$$a = \frac{2}{3} \quad , \quad b = 2 \quad , \quad c = 6$$

الإثبات بالتدريج:

الاستخدام	نستخدم الإثبات بالتدريج لإثبات صحة خاصة ويتم ذلك وفق:
الخطوات	* ترميز الخاصة * نثبت صحة الخاصة من أجل القيمة الابتدائية أي نثبت صحة $E(n_0)$ * نفرض صحة الخاصة $E(n)$ * نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$
القيمة الابتدائية	يتم تحديد القيمة الابتدائية بالاعتماد على نص السؤال, حيث:

نص السؤال	القيمة الابتدائية
أياً كان $n > 0$	$n_0 = 1$
أياً كان $n \geq 0$	$n_0 = 0$
أياً كان $n > 5$	$n_0 = 6$
أيا كان العدد الطبيعي	$n_0 = 0$
أيا كان العدد الطبيعي الموجب تماماً	$n_0 = 1$
أيا كان $n \in \mathbb{N}$	$n_0 = 0$
أياً كان $n \in \mathbb{N}^*$	$n_0 = 1$
أيا كان n العدد الطبيعي غير المعدوم	$n_0 = 1$

من أجل إثبات الخاصة $E(n+1)$ نميز ما يلي وفقًا للأنماط الآتية:

المساواة	المضاعفات	المتراجحات	إثبات محدودية متتالية معطاة بشكل تدريجي	
ننطلق من العلاقة الهدف وتحديداً من l_1 نصل ونستفيد من الفرض $(*)$ من أجل الوصول إلى الطرف الثاني l_2 من علاقة الهدف	ننطلق من العلاقة الهدف ونستفيد من علاقة $(*)$, نصل ثم نناقش تعريف: المضاعف للعدد 3 هو ناتج جداء عدد طبيعي k للعدد 3 رمزه $3k$ مجموعة مهارات: * ناتج جداء عدد طبيعي بمضاعف العدد 3 هو مضاعف للعدد 3 * ناتج مجموع مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3 * ناتج جداء مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3 * ناتج طرح مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3 بشرط الكبير ناقص الصغير * العدد صفر مضاعف لجميع الأعداد	* ننطلق من العلاقة الفرض $(*)$ * نصل بحيث نأخذ الأوامر من العلاقة الهدف وصولاً إلى العلاقة الهدف ملاحظات مهمة جداً: * إن إضافة أو طرح عدد إلى طرفي المتراجحة لا يغير من جهة التراجح * إن ضرب (قسمة) طرفي المتراجحة بعدد موجب لا يغير من جهة المتراجحة * إن ضرب (قسمة) طرفي المتراجحة بعدد سالب يغير من جهة التارجح * القلب يغير جهة التراجح * تكبير الكبير لا يغير من جهة المتراجحة ويتم وفق: إما إضافة مقدار موجب أو إهمال مقدار سالب أو استبدال مقدار بمقدار أكبر منه * تصغير الصغير لا يغير من جهة المتراجحة ويتم وفق: إما إضافة مقدار سالب أو إهمال مقدار موجب أو استبدال مقدار بمقدار أصغر منه	وجود طلب اطراد تابع f قبل طلب إثبات المحدودية نستخدم طريقة التصوير وفق: * ننطلق من العلاقة الفرض $(*)$ * نصور أطراف العلاقة $(*)$ وفق التابع f مع الانتباه إلى أن: ○ إذا كان التابع f متزايد تماماً فإنه يتحقق: $f(a) > f(b) \leftrightarrow a > b$ ○ إذا كان التابع f متناقص تماماً فإنه يتحقق: $f(a) < f(b) \leftrightarrow a > b$ * نصل وصولاً إلى العلاقة الهدف	عدم وجود طلب تزايد تابع f قبل طلب إثبات المحدودية * نطبق مرحلتين: ✌ مرحلة الإصلاح: باستخدام إصلاحات مناسبة (قسمة إقليدية – الإتمام إلى مربع كامل ...) أي نكتب u_{n+1} بدلالة u_n واحدة ✌ مرحلة الحصر: حيث ننطلق من العلاقة الفرض $(*)$ ونبدأ رحلة تأليف u_{n+1} * ثم نصل وصولاً للهدف.

التمرين الأول:

نعتبر المجموع $s_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$ والمطلوب:

أ. احسب s_0 و s_1 و s_2

ب. أثبت بالتدريج أن $s_n = 2^{n+1} - 1$

الحل الأول:

حساب s_0 و s_1 و s_2:

* $s_0 = 2^0 = 1$
* $s_1 = 1 + 2^1 = 3$
* $s_2 = 1 + 2 + 2^2 = 7$

الحل الثاني:

إثبات أنّ: $s_n = 2^{n+1} - 1$

* نرمز الخاصة: $E(n)$:

$$E(n): \underbrace{s_n}_{l_1} = \underbrace{2^{n+1} - 1}_{l_2}$$

* نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$l_1 = s_0 = 1$$
$$l_2 = 2^1 - 1 = 1$$

ومنه $l_1 = l_2$ محققة الخاصة $E(0)$.

* نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$E(n): \ll s_n = 2^{n+1} - 1 \gg \cdots (*)$$

* نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:

أي يجب إثبات أنّ: $s_{n+1} = 2^{n+2} - 1$

لدينا:

$$\underbrace{s_{n+1}}_{t_1} = \underbrace{2^{n+2} - 1}_{t_2}$$

الإثبات:

$$t_1 = s_{n+1}$$
$$= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1}$$
$$= \underbrace{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n}_{s_n} + 2^{n+1}$$
$$= \underbrace{s_n}_{\text{من}(*)} + 2^{n+1}$$
$$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1$$
$$= 2^{n+2} - 1 = t_2$$

بما أنّ $t_1 = t_2$ فإن الخاصة $E(n+1)$ محققة.

ومنه الخاصة $E(n)$ محققة.

التمرين الثاني:

أثبت بالتدريج أياً كان: $n \geq 1$:

$$1 + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$$

الحل:

نرمز الخاصة $E(n)$:

$$E(n): \underbrace{1 + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n!}_{l_1} = \underbrace{(n+1)! - 1}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$l_1 = 1! = 1$$
$$l_2 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$1 + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1 \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:

أيّ إثبات أنّ:

$$\underbrace{1 + 2.2! + \cdots + n.n! + (n+1)(n+1)!}_{l_1} = \underbrace{(n+2)! - 1}_{l_2}$$

$$l_1 = \underbrace{1 + 2.2! + \cdots + n.n!}_{\text{من}(*)} + (n+1)(n+1)!$$
$$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$
$$= (n+1)! + (n+1)(n+1)! - 1$$
$$= (n+1)!(1 + n + 1) - 1$$
$$= (n+1)!(n+2) - 1$$
$$= (n+2)! - 1 = l_2$$

ومنه القضية $E(n)$ محققة.

التمرين الثالث:

أثبت أنّ العدد $3^{2n} + 7$ مضاعف للعدد 8 أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$.

الحل:

نرمز الخاصة:

$$E(n): 3^{2n} + 7$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$3^0 + 7 = 1 + 7 = 8 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$

$$E(n): 3^{2n} + 7$$

أيّ يوجد عدد طبيعي k يحقق:

$$3^{2n} + 7 = 8k \rightarrow 3^{2n} = 8k - 7 \ldots (*)$$

نثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أنّ:

$$3^{2(n+1)} + 7 = 3^{2n+2} + 7$$
$$= 3^2 . \underbrace{3^{2n}}_{\text{من}(*)} + 7$$
$$= 9(8k - 7) + 7 = 72k - 63 + 7$$
$$= 72k - 56 = 8(9k - 7)$$

إذاً $3^{2n} + 7$ من مضاعفات الـ (8) .

التمرين الرابع:

أثبت بالتدريج صحة الخاصة الآتية: $n^3 - 4n + 6$

يقبل القسمة على 3 حيث $n \geq 1$

الحل:

نرمز الخاصة $E(n)$:

$$E(n): n^3 - 4n + 6$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(1)$

$$E(1): 1 - 4 + 6 = 3$$

يقبل القسمة على (3)

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$

$$E(n): n^3 - 4n + 6$$

أي يوجد عدد طبيعي k يحقق:

$$n^3 - 4n + 6 = 3k$$
$$n^3 = 3k + 4n - 6 \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$

أي يجب إثبات أنّ:

$$(n+1)^3 - 4(n+1) + 6$$
$$= \underbrace{n^3}_{\text{من}(*)} + 3n^2 + 3n + 1 - 4n - 4 + 6$$
$$= 3k + 4n - 6 + 3n^2 + 3n + 1 - 4n - 4 + 6$$
$$= 3k + 3n^2 + 3n - 3 = 3(k + n^2 + n - 1)$$

إذاً $n^3 - 4n + 6$ يقبل القسمة على العدد (3)

التمرين الخامس:

ليكن $x > 1$ في حالة عدد طبيعي n

ونرمز $E(n)$ إلى المتراجحة: $(1+x)^n \geq 1 + nx$

أثبت أنّ المتراجحة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n

الحل:

نرمز الخاصة:

$$E(n): (1+x)^n \geq 1 + nx$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$

$$(1+x)^0 \geq 1 + 0x \rightarrow 1 \geq 1 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x$$

الإثبات: لدينا من الفرض الذي يدعى $(*)$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

نضرب الطرفين ب $1 + x > 0$:

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + x + nx + nx^2$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2$$

المشكلة في الصغير لذلك نستخدم تصغير الصغير ويتم ذلك "إهمال موجب - إضافة سالب (للطرفين) - استبدال مقدار بمقدار أصغر منه" وبما أنّ $nx^2 > 0$ فإنّ:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x$$

فالقضية محققة.

التمرين السادس:

أثبت أنه أياً كان $n \geq 1$ فإن: $n! \geq 2^{n-1}$

الحل:

نرمز الخاصة:

$$E(n): n! \geq 2^{n-1}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n=1)$

$$1! \geq 2^0 \rightarrow 1 \geq 1 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$n! \geq 2^{n-1} \ldots (*)$$

نثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن

$$(n+1)! \geq 2^n$$

لدينا من الفرض: $n! \geq 2^{n-1}$

نضرب الطرفين ب $(n+1)$

$$\underbrace{(n+1)n!}_{(n+1).n!=(n+1)!} \geq \underbrace{(n+1)2^{n-1}}_{\text{نستخدم تصغير الصغير}}$$

نعلم أنّ: $2 \leq n + 1 \leq 2n$

ومنه:

$$(n+1)! \geq 2 . 2^{n-1} \rightarrow (n+1)! \geq 2^n \rightarrow \text{محققة}$$

ELITE MATH

التمرين السابع:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5} \\ u_0=13 \end{cases}$$

أثبت بالتدريج من أجل كل عدد طبيعي n أنّ $u_n>1$

الحل:

نرمز الخاصة $E(n)$:

$$E(n): u_n>1$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$u_0=13>1 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_n>1 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

أيّ يجب إثبات أنّ: $u_{n+1}>1$

الإثبات:

لدينا من علاقة الفرض $(*)$:

$$u_n>1$$

نضرب بـ $\left(\frac{1}{5}\right)$ وفق:

$$\frac{1}{5}u_n>\frac{1}{5}$$

نضيف $\left(\frac{4}{5}\right)$ وفق:

$$\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}>\frac{1}{5}+\frac{4}{5}$$

$$u_{n+1}>1$$

ومنه الخاصة $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

التمرين الثامن:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة: $u_{n+1}=u_n^2+4u_n+2$ و $u_0=-\frac{3}{2}$ والمطلوب:

أثبت أنّ $-2\leq u_n\leq -1$ أياً كان العدد الطبيعي n

الحل:

نرمز الخاصة:

$$E(n): -2\leq u_n\leq -1$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$$-2\leq u_0=-\frac{3}{2}\leq -1 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$-2\leq u_n\leq -1 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أنّ:

$$-2\leq u_{n+1}\leq -1$$

مرحلة الإصلاح:

$$u_{n+1}=u_n^2+4u_n+2$$

$$u_{n+1}=u_n^2+4u_n+4-4+2$$

$$u_{n+1}=(u_n+2)^2-2$$

مرحلة الحصر: لدينا من العلاقة الفرض $(*)$:

$$-2\leq u_n\leq -1$$

نضيف (2) :

$$0\leq u_n+2\leq 1$$

نربع:

$$0\leq (u_n+2)^2\leq 1$$

نضيف (-2) :

$$-2\leq (u_n+2)^2-2\leq -1$$

$$-2\leq u_{n+1}\leq -1$$

ومنه الخاصة $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

التمرين التاسع:

لتكن لدينا المتتالية $(u)_{n\geq 0}$ المعطاة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{2u_n+6} \\ u_0=1 \end{cases}$$

أثبت أنّ $\frac{1}{2}\leq u_n\leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

الحل:

نرمز الخاصة $E(n)$:

$$E(n): \frac{1}{2}\leq u_n\leq 1$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$\frac{1}{2}<u_0=1\leq 1 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$E(n): \frac{1}{2}\leq u_n\leq 1 \dots (*)$$

نثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$$\frac{1}{2}\leq u_{n+1}\leq 1$$

الإثبات:

مرحلة الإصلاح:

باستخدام القسمة الإقليدية نجد أنّ:

$$u_{n+1}=\frac{3}{2}-\frac{7}{2u_n+6}$$

مرحلة الحصر:

لدينا من $(*)$:

$$\frac{1}{2}\leq u_n\leq 1$$

نضرب بـ (2):

$$1\leq 2u_n\leq 2$$

نضيف (6) :

$$7\leq 2u_n+6\leq 8$$

نقلب:

$$\frac{1}{7}\geq \frac{1}{2u_n+6}\geq \frac{1}{8}$$

نضرب بـ (-7) :

$$-1\leq \frac{-7}{2u_n+6}\leq -\frac{7}{8}$$

نضيف $\left(\frac{3}{2}\right)$:

$$\frac{1}{2}\leq \frac{3}{2}-\frac{7}{2u_n+6}\leq \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2}\leq u_{n+1}\leq 1$$

ومنه الخاصة $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

التمرين العاشر:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً فق:

$$u_{n+1}=\frac{4u_n-1}{u_n+2} \quad , \quad u_0=7$$

١. أثبت أنّ التابع $f(x)=\frac{4x-1}{x+2}$ متزايد تماماً على $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

٢. أثبت بالتدريج أنّ: $u_n>1$ أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 0$.

الحل:

الطلب الأول:

$$f(x)=\frac{4x-1}{x+2}$$

التابع f اشتقاقي على $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{4(x+2)-(1)(4x-1)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{4x+8-4x-1}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}>0$$

ومنه التابع f متزايد تماماً على $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

الطلب الثاني:

نرمز الخاصة:

$$E(n): u_n>1$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$$u_0=7>1 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_n>1 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

أيّ يجب إثبات أنّ: $u_{n+1}>1$.

لدينا من علاقة الفرض:

$$u_n>1$$

ولدينا من الطلب السابق أنّ التابع f متزايد تماماً ومنه:

$$f(u_n)>f(1)$$

$$\frac{4u_n-1}{u_n+2}>\frac{3}{3}$$

$$u_{n+1}>1$$

ومنه الخاصة $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

اطراد متتالية:

لدراسة اطراد متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ يمكننا أن نتبع إحدى الطرق الآتية:

	طريقة الفرق	طريقة النسبة	طريقة التابع
شرط التطبيق	لا يوجد شروط ويمكن تطبيقها دوماً	يجب أن تكون جميع حدود المتتالية موجبة تماماً	يجب أن تكون المتتالية $u_n=f(n)$ بالشكل الصريح أي:
كيفية التطبيق	نشكل الفرق: $u_{n+1}-u_n$ نقارن مع الصفر ونميز: * <0 الفرق ومنهُ تكون u_n متناقصة تماماً * ≤ 0 الفرق ومنهُ تكون u_n متناقصة * >0 الفرق ومنهُ تكون u_n متزايدة تماماً * ≥ 0 الفرق ومنهُ تكون u_n متزايدة * $=0$ الفرق ومنهُ تكون u_n ثابتة	نشكل النسبة: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ نقارن مع الواحد ونميز: * <1 النسبة ومنهُ u_n متناقصة تماماً * ≤ 1 النسبة ومنهُ u_n متناقصة * >1 النسبة ومنهُ u_n متزايدة تماماً * ≥ 1 النسبة ومنهُ u_n متزايدة * $=1$ النسبة ومنهُ u_n ثابتة	* نضع التابع المناسب بحيث نستبدل كل u_n بـ $f(x)$ وكل n بـ x * ندرس اطراد التابع f * تكون جهة اطراد المتتالية هي ذاتها جهة اطراد التابع

ملاحظات:

* طريقة الفرق تنفع دوماً.
* طريقة النسبة يمكن اللجوء إليها عند وجود قوى أو عاملي مع الانتباه لتحقق شرط التطبيق "أن تكون جميع حدود المتتالية موجبة"
* طريقة التابع لا نستخدمها إلا في حال كانت المتتالية معطاة بالشكل الصريح واشتقاق التابع بسيطاً.
* أحياناً نحتاج وضع كلمة (بدءاً من) بحيث كلمة بدءاً تعني تغيير سلوك
* كلمة بدءاً من الحد ذو الدليل $n=0$ لا معنى لها
* قد نواجه بعض المتتاليات غير المطردة ويتم الكشف عنها بالتعويض (التجريب)
* في المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بحيث أنها تمثل مجموع حدود (متتالية مجاميع) أو (تحتوي نقاط) فإننا نستخدم طريقة الفرق حصراً.

دراسة اطراد متتالية مُعطاة بشكل تدريجي:

وتقسم المتتالية التدريجية إلى ثلاثة أقسام من حيث الشكل

الشكل	$u_{n+1}=u_n+$ عدد	$u_{n+1}=u_n\times$ عدد	$u_{n+1}=u_n+$ عدد
كيفية التعامل معها	نستخدم طريقة الفرق: $u_{n+1}-u_n$ ونقارن الناتج مع الصفر ونميز: * إذا كان: $u_{n+1}-u_n>0$ فالمتتالية u_n متزايدة تماماً * إذا كان: $u_{n+1}-u_n<0$ فالمتتالية متناقصة تماماً	نستخدم طريقة النسبة: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ونقارن الناتج مع الواحد ونميز: * إذا كان: $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ فالمتتالية u_n متزايدة تماماً * إذا كان: $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ فالمتتالية u_n متناقصة تماماً	

نص السؤال	فكرة الحل
أثبت أن u_n متزايدة	نثبت باستخدام الإثبات بالتدريج صحة العلاقة $u_{n+1}\geq u_n$
أثبت أن u_n متزايدة تماماً	نثبت باستخدام الإثبات بالتدريج صحة العلاقة $u_{n+1}>u_n$
أثبت أن u_n متناقصة	نثبت باستخدام الإثبات بالتدريج صحة العلاقة $u_{n+1}\leq u_n$
أثبت أن u_n متناقصة تماماً	نثبت باستخدام الإثبات بالتدريج صحة العلاقة $u_{n+1}\leq u_n$
ادرس اطراد المتتالية	نوجد الحدود الأولى منها ونحدد جهة الاطراد ثم نثبت صحة ما توصلنا له بالإثبات بالتدريج
ادرس اطراد المتتالية وذلك بوجود طلب محدودية سابق	(1) نشكل الفرق. (2) نناقش.

التمرين الأول:

بيّن أيّ المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطردة (ربما بدءاً من حد معيّن n_0).

1. $u_n=-3n+1$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=-3(n+1)+1+3n-1=-3n-3+1+3n-1=-3<0$$

ومنهُ المتتالية u_n متناقصة تماماً.

2. $u_n=\frac{n+1}{n+2}$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+2}{n+3}-\frac{(n+1)}{n+2}=\frac{(n+2)(n+2)-(n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)}=\frac{n^2+4n+4-(n^2+4n+3)}{(n+3)(n+2)}=\frac{1}{(n+3)(n+2)}>0$$

ومنهُ المتتالية u_n متزايدة تماماً.

3. $u_n=2^n$

نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=\frac{2.2^n}{2^n}=2>1$$

ومنهُ المتتالية u_n متزايدة تماماً.

4. $u_n=1+\frac{1}{n^2}$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=1+\frac{1}{(n+1)^2}-1-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^2-(n^2+2n+1)}{n^2(n+1)^2}=\frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2}=\frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2}<0$$

ومنهُ المتتالية u_n متناقصة تماماً.

5. $u_n=\frac{n^2}{n!}$

نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)n!}\cdot\frac{n!}{n^2}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n+1}{n^2}<1$$

ومنهُ المتتالية u_n متناقصة تماماً بدءاً من $n=3$

6. $u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}>0$$

ومنهُ المتتالية u_n متناقصة تماماً.

7. $u_n=\left(-\frac{1}{5}\right)^n$

$$u_0=\left(-\frac{1}{5}\right)^0=1$$
$$u_1=\left(-\frac{1}{5}\right)^1=-\frac{1}{5}$$
$$u_2=\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$$
$$u_3=\left(-\frac{1}{5}\right)^3=-\frac{1}{125}$$

ومنهُ المتتالية u_n غير مطردة.

التمرين الثاني:

بيّن أي المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطردة (ربما بدءاً من حد معين n_0)

1. $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n\\ u_0=1\end{cases}$

نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{2}u_n}{u_n}=\frac{1}{2}<1$$

المتتالية متناقضة تماماً

2. $\begin{cases}u_{n+1}=u_n-3\\ u_0=2\end{cases}$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=u_n-3-u_n=-3<0$$

المتتالية متناقصة تماماً

3. $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+2\\ u_0=2\end{cases}$

إيجاد الحدود الأولى:

$$u_1=\frac{3}{4}u_0+2=\frac{3}{4}(2)+2=\frac{7}{2}$$
$$u_2=\frac{3}{4}u_1+2=\frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right)+2=\frac{37}{8}$$
$$u_3=\frac{3}{4}u_2+2=\frac{3}{4}\left(\frac{37}{8}\right)+2=\frac{175}{32}$$

نلاحظ أنّ: $u_0<u_1<u_2<u_3$

إذا المتتالية متزايدة تماماً لنثبت صحة ذلك بالتدريج.

أي يجب إثبات صحة الخاصة: $u_{n+1}>u_n$

لتكن الخاصة $E(n)$

$E(n)$: $u_{n+1}>u_n$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$u_1>u_0\rightarrow\frac{7}{2}>2\rightarrow$ محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$u_{n+1}>u_n\ldots(*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$$u_{n+2}>u_{n+1}$$

الإثبات: لدينا من الفرض $(*)$:

$$u_{n+1}>u_n$$

نضرب بـ $\left(\frac{3}{4}\right)$: $\frac{3}{4}u_{n+1}>\frac{3}{4}u_n$

نضيف (2): $\frac{3}{4}u_{n+1}+2>\frac{3}{4}u_n+2$

$$u_{n+2}>u_{n+1}$$

محققة إذاً المتتالية متزايدة تماماً.

التمرين الثالث:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\,,u_0=1$$

ا. أثبت أنّ $0\leq u_n<2$ أياً كان العدد الطبيعي n

٢. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

الحل:

الطلب الأول:

نرمز الخاصة:

$E(n)$: $0\leq u_n\leq 2$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$0\leq u_0=1\leq 2\rightarrow$ محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$E(n):\ 0\leq u_n\leq 2\ldots(*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أنّ:

$$0\leq u_{n+1}\leq 2$$

لدينا من الفرض $(*)$: $0\leq u_n\leq 2$

نضيف (2): $2\leq u_n+2\leq 4$

نجذر:

$$\sqrt{2}\leq\sqrt{u_n+2}\leq 2$$
$$0\leq\sqrt{2}\leq u_{n+1}\leq 2$$
$$0\leq u_{n+1}\leq 2$$

محققة أياً كان العدد n

الطلب الثاني:

يوجد طلب محدودية قبل طلب الاطراد لذلك نستخدم طريقة الفرق:

نشكل الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2+u_n}-u_n=\frac{(\sqrt{2+u_n}-u_n)(\sqrt{2+u_n}+u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}=\frac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n}=\frac{-(u_n^2-u_n-2)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}=\frac{-(u_n-2)(u_n+1)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}$$

مناقشة: بما أنّ: $1\leq u_n\leq 2$

فإنّ:

* $u_n-2\leq 0$
* $u_n+1>0$
* $\sqrt{2+u_n}+u_n>0$

فإنّ: $u_{n+1}-u_n>0$

إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

ELITE MATH

نهاية متتالية:

تمهيد يتم إيجاد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ عند الـ $+\infty$ أي: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

	المتتالية معطاة بشكل صريح	إيجاد نهاية $(\text{عدد})^n$	المتتالية معطاة بشكل تدريجي	شكل المجموع
إيجاد نهاية متتالية	نتعامل معها كما مر معنا في أفكار نهايات التوابع قاعدة: $\lim\limits_{n\to+\infty}(n!)=+\infty$	نتظر إلى العدد ونميز: ① إذا كان: $1<$ عدد فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\text{عدد})^n=+\infty$ ② إذا كان: $1=$ عدد فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(1)^n=1$ ③ إذا كان: $-1<$ عدد <1 فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\text{عدد})^n=0$ ④ إذا كان: $-1>$ عدد , فإنه لا يوجد نهاية ⑤ إذا كان: $-1=$ عدد , فإننا نحتاج إلى مرحلتين المرحلة الأولى: مرحلة الحصر حيث: $1\leq(-1)^n\leq -1$ ثم نبدأ في رحلة تأليف المتتالية. المرحلة الثانية: مرحلة إيجاد النهاية باستخدام مبرهنات الإحاطة والمقارنة	① نأخذ التابع f المستمر على المجال I , حيث: نستبدل كل u_{n+1} بـ $f(x)$ وكل u_n بـ x ② نحل المعادلة: $f(x)=x$ ⬅ نهاية المتتالية تكون أحد حلول المعادلة (نحدد هذا الحل حسب معطيات المسألة)	نوجد المجموع ثم نتابع كما سبق.

تمرين:

فيما يأتي احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ في حال وجودها.

1. $u_n=\frac{5n-3}{3n-5}$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{5}{3}$$

2. $u_n=\frac{n}{4}+\frac{2n}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty+0=+\infty$$

3. $u_n=\sqrt{\frac{4n-3}{n+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{4}=2$$

4. $u_n=sin\left(\frac{n\pi+1}{2n+1}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

5. $u_n=\frac{2n+(-1)^n}{3n}$

مرحلة الحصر: نعلم أنّ:

$$-1\leq(-1)^n\leq 1$$

نضيف $(2n)$:

$$2n-1\leq 2n+(-1)^n\leq 1+2n$$

نقسم على $3n>0$

$$\frac{2n-1}{3n}\leq\frac{2n+(-1)^n}{3n}\leq\frac{2n+1}{3n}$$

$$\frac{2n-1}{3n}\leq u_n\leq\frac{2n+1}{3n}$$

مرحلة إيجاد النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n-1}{3n}\right)=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{3n}\right)=\frac{2}{3}$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{3}$$

6. $u_n=\frac{n!-2}{n!}$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$u_n=\frac{n!-2}{n!}=\frac{n!\left(1-\frac{2}{n!}\right)}{n!}=1-\frac{2}{n!}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=1-0=1$$

7. $u_n=\frac{n}{\sqrt{n+1}}-\frac{n}{\sqrt{n+2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\to$ حالة عدم تعيين

$$u_n=\frac{n}{\sqrt{n+1}}-\frac{n}{\sqrt{n+2}}$$

$$=\frac{n\sqrt{n+2}-n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n+2}}$$

$$=\frac{n\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$$

$$=\frac{n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}{\sqrt{n^2+3n+2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$$

$$=\frac{n(n+1-n-2)}{\sqrt{n^2+3n+2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$$

$$=\frac{n(-1)}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=-\frac{1}{+\infty}=0$$

8. $u_n=n^2\left[\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{2}\right]$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n$$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$$u_n=\frac{n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{n^2\left[\left(2+\frac{1}{n}-2\right)\right]}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}=\frac{n^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$$

9. $u_n=\frac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$=\frac{\left(3n-\sqrt{9n^2+1}\right)\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{-1}{+\infty}=0$$

10. $u_n=\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$u_n=\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$$

$$=\frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{\infty}=0$$

11. $u_n=5-\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}-\cdots-\frac{1}{3^n}$

$$=5-\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)}_{v_n}$$

$$v_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}$$

تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $\frac{1}{3}$ وعدد الحدود n ومنه:

$$v_n=\frac{1}{3}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ومنه:

$$u_n=5-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

لما كان: $-1<\frac{1}{3}<1$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}(0)=\frac{9}{2}$$

مكثفة شيفرة الـ 600

حصر متتالية في مجال:

نص السؤال	النمط الأول	النمط الثاني
	جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \in]a,b[$ عند كل $n > n_0$	جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n > l$ عند كل $n > n_0$
الخطوات	* نوجد مركز المجال C وفق: $C = \frac{a+b}{2}$ * نوجد نصف قطر المجال وفق: $r = \frac{b-a}{2}$ * بما أن $u_n \in]a,b[$ فإنه يحقق: $\lvert u_n - c\rvert < r$ * نعوض في العلاقة ونصلح للوصول إلى: عدد $n >$ فيكون: هذا العدد $n_0 \geq$	* ننطلق من العلاقة $u_n > l$ * نعوض ونصلح للوصول إلى الشكل: عدد $n >$ * فيكون: هذا العدد $n_0 \geq$

التمرين الأول:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]1.9,2.1[$.

الحل:

إيجاد النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

إيجاد قيمة n_0:

نوجد كلاً من مركز المجال ونصف قطر المجال وفق:

$$C = \frac{a+b}{2} = \frac{1.9+2.1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1-1.9}{2} = \frac{0.2}{2} = \frac{1}{10}$$

بما أنّ u_n في المجال $]1.9,2.1[$ فإنّ:

$$\lvert u_n - c\rvert < r$$

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{-3}{n+1}\right| < \frac{1}{10} \to \frac{|-3|}{|n+1|} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10} \to \frac{n+1}{3} > 10$$

$$n+1 > 30 \to n > 29$$

ومنه:

$$n_0 \geq 29$$

التمرين الثاني: المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق:

$u_n = n\sqrt{n}$ ونعلم أنّ نهاية المتتالية عند $+\infty$ هي $+\infty$ والمطلوب: جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n > 10^6$ عند كل n أكبر تماماً من n_0

الحل:

انطلاقاً من العلاقة:

$$u_n > 10^6 \to n\sqrt{n} > 10^6$$

نربع الطرفين:

$$n^3 > (10^6)^2 \to n^3 > 10^{12} \to n > 10^4$$

ومنه:

$$n_0 \geq 10^4 \to n_0 \geq 10000$$

المتتاليتان المتجاورتان:

تعريف	نقول إن المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان إذا وفقط إذا كانت: إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة وتقاربت المتتالية $(s_n - t_n)_{n\geq 0}$ من الصفر
مبرهنة	نتأمل متتاليتين متجاورتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ عندئذٍ: * تكون المتتاليتان $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متقاربتين * يكون للمتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ النهاية نفسها.
نص السؤال	أثبت أن المتتاليتان x_n و y_n متجاورتان
فكرة الحل	(1)نثبت أن إحدى المتتاليتين متزايدة والأخرى متناقصة (2)نثبت أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$

تمرين:

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$:

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n} \text{ و } v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$$

والمطلوب:

١. أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة و $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

٢. استنتج أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

٣. أثبت أن $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

الحل:

الطالب الأول:

إثبات تزايد u_n:

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$$

ومنه u_n متزايدة أياً كان $n \geq 1$.

أثبات تناقص v_n.

نشكل الفرق:

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} - u_n - \frac{1}{2^n}$$

$$= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 5^{n+1}}{2^{n+1}\,5^{n+1}} < 0$$

ومنه v_n متناقصة أياً كان $n \geq 1$.

الطالب الثاني:

استنتاج تجاور المتتاليتان:

الشرط الأول:

لدينا المتتالية u_n متزايدة والمتتالية v_n متناقصة.

الشرط الثاني:

إيجاد نهاية الفرق $v_n - u_n$:

نشكل الفرق:

$$v_n - u_n = u_n + \frac{1}{2^n} - u_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لما كان $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$$

ومنه المتتاليتين u_n و v_n متجاورتان.

الطالب الثالث:

الطريقة الأولى: باستخدام قانون مجموع هندسية.

$$\underbrace{u_n}_{l_1} = \underbrace{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)}_{l_2}$$

$$l_1 = u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$

تمثل مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ وحدها الأول $\frac{1}{5}$ وعدد الحدود n.

$$u_n = \text{الحد الأول}\left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}\right] = \frac{1}{5}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{5^n}\right)}{\frac{4}{5}}\right]$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = l_2$$

محققة..

الطريقة الثانية: الإثبات بالتدريج (حلها وورجيني إياها)

إيجاد نهاية المتتالية u_n:

$$u_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

لما كان: $-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(0) = \frac{1}{4}$$

استنتاج نهاية v_n:

بما أن u_n و v_n متجاورتان فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{4}$$

ELITE MATH

محدوديّة متتالية:

نص السؤال:

(1) أثبت أن u_n محدودة من الأعلى بالعدد M (2) أثبت أنّ $u_n \le M$ (3)(أثبت – استنتج) عنصر راجح (4) أثبت أن u_n محدودة من الأدنى بالعدد m (5) أثبت أنّ $m \le u_n$

(6) (أثبت – استنتج) عنصر قاصر (7) أثبت أنّ $m \le u_n \le M$

طريقة الإجابة:

الشكل الصريح	الشكل التدريجي	شكل المجموع نميز:		
نشكل الفرق ثم مناقشة	نستخدم الإثبات بالتدريج	مجموع نوعه معلوم	مجموع نوعه غير معلوم ويوجد طلب مثبتة مسبقاً	غير ذلك
		نوجد المجموع ونحدد المطلوب	بالاستفادة من المتراجحة المثبتة مسبقاً نحول المجموع الذي نوعه غير معلوم إلى مجموع نوعه معلوم. نوجد المجموع ونحدد المطلوب	* نحدد أصغر حد ونحدد أكبر حد ونحدد عدد الحدود $\binom{\text{أكبر}}{\text{حد}}\binom{\text{عدد}}{\text{الحدود}} \le \text{المجموع} \le \binom{\text{أصغر}}{\text{حد}}\binom{\text{عدد}}{\text{الحدود}}$

التمرين الأول:

أثبت أنّ المتتالية $u_n = \frac{6}{n^2+2n+4}$ محدودة من الأعلى بالعدد 2 .

الحل:

يقصد إثبات أنّ: $u_n \le 2$

الإثبات:

المتتالية معطاة بالشكل الصريح لذلك نشكل الفرق:

$$u_n - 2 = \frac{6}{n^2+2n+4} - 2$$
$$= \frac{6-2n^2-4n-8}{n^2+2n+4} = \frac{-2n^2-4n-2}{n^2+2n+4}$$
$$= \frac{-2(n^2+2n+1)}{n^2+2n+4} \le 0$$
$$u_n - 2 \le 0 \to u_n \le 2$$

ومنه المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد 2 .

التمرين الثاني:

أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{n^2-2n-2}{n^2-2n+2}$$

تقبل 1 عنصراً راجحاً عليها وتقبل -3 عنصراً قاصراً عنها

الحل:

يقصد إثبات أنّ: $-3 \le u_n \le 1$

الإثبات:

المتتالية u_n معطاة بالشكل الصريح لذلك نستخدم الفرق من جهة أولى:

إثبات أنّ: $-3 \le u_n$:

$$u_n - (-3) = u_n + 3$$
$$= \frac{n^2-2n-2}{n^2-2n+2} + 3$$
$$= \frac{n^2-2n-2+3n^2-6n+6}{n^2-2n+2}$$
$$= \frac{2n^2-8n+4}{n^2-2n+2} \ge 0$$
$$u_n + 3 \ge 0 \to u_n \ge -3$$

من جهة ثانية:

إثبات أنّ: $u_n \le 1$

$$u_n - 1 = \frac{n^2-2n-2}{n^2-2n+2} - 1$$
$$= \frac{n^2-2n-2-n^2+2n-2}{n^2-2n+2}$$
$$= \frac{-4}{n^2-2n+2} \le 0$$
$$u_n - 1 \le 0 \to u_n \le 1$$

ومنه: $-3 \le u_n \le 1$ وبالتالي المتتالية u_n تقبل 1 عنصراً راجحاً عليها وتقبل -3 عنصراً قاصراً عنها

التمرين الثالث:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\ge 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$

استنتج عنصراً راجحاً على u_n .

الحل:

(u_n) تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ وحدها الأول $\frac{1}{5}$ وعدد الحدود n ومنه:

$$u_n = \frac{1}{5}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}\right] = \frac{1}{5}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}}\right]$$
$$= \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = \frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

تكافئ:

$u_n \le \frac{1}{4}$ إذاً $\left(\frac{1}{4}\right)$ عنصر راجح على المتتالية u_n .

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية $(v_n)_{n\ge 1}$ حيث:

$$v_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+1}{n^2+2} + \frac{n+1}{n^2+3} + \cdots + \frac{n+1}{n^2+n}$$

أثبت أنّ:

$$1 \le v_n \le 1 + \frac{n-1}{n^2+1}$$

الحل:

* أصغر حد $= \frac{n+1}{n^2+n}$
* أكبر حد $= \frac{n+1}{n^2+1}$
* عدد الحدود $= n-1+1 = n$

نطبق القانون:

$$\binom{\text{عدد}}{\text{الحدود}}\binom{\text{أصغر}}{\text{حد}} \le \text{المجموع} \le \binom{\text{عدد}}{\text{الحدود}}\binom{\text{أكبر}}{\text{حد}}$$
$$n\left(\frac{n+1}{n^2+n}\right) \le v_n \le n\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)$$
$$\frac{n^2+n}{n^2+n} \le v_n \le \frac{n^2+n}{n^2+1}$$
$$1 \le v_n \le \frac{n^2+n}{n^2+1}$$

سنعود بعد دقيقة..

$$\frac{n^2+n}{n^2+1} = \frac{n^2+n+1-1}{n^2+1}$$
$$= \frac{(n^2+1)+(n-1)}{n^2+1} = \frac{n^2+1}{n^2+1} + \frac{n-1}{n^2+1}$$
$$= 1 + \frac{n-1}{n^2+1}$$

أو بالقسمة الإقليدية نجد أنّ:

$$\frac{n^2+n}{n^2+1} = 1 + \frac{n-1}{n^2+1}$$

عُدنا..

$$1 \le v_n \le 1 + \frac{n-1}{n^2+1}$$

التمرين الخامس:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{n}{e^n}$$

أثبت أن $n \le 2^n$ أياً كان العدد الطبيعي $n \ge 1$.

استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\ge 1}$.

الحل:

الحالة الأولى:

نرمز للقضية:

$$E(n): n \le 2^n$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$1 \le 2^1 \to$ محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$n \le 2^n \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$n+1 \le 2^{n+1}$$

لدينا من $(*)$:

$$n \le 2^n$$

نضرب بـ (2) :

$$2n \le 2^n.2 \to 2n \le 2^{n+1}$$

نعلم أن: $2 \le n+1 \le 2n$ ومنه:

$$n+1 \le 2^{n+1}$$

محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

الحالة الثانية:

استنتاج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية u_n:

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{n}{e^n}$$

بالاستفادة من المتراجحة المثبتة مسبقاً:

$$n \le 2^n$$

تكون:

$$u_n \le \frac{2}{e} + \frac{2^2}{e^2} + \frac{2^3}{e^3} + \cdots + \frac{2^n}{e^n}$$
$$u_n \le \underbrace{\frac{2}{e} + \left(\frac{2}{e}\right)^2 + \left(\frac{2}{e}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{e}\right)^n}$$

تمثل مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{e}$ وحدها الأول $\frac{2}{e}$ وعدد الحدود هو n.

$$u_n \le \frac{2}{e}\left[\frac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^n}{1-\frac{2}{e}}\right]$$
$$u_n \le \frac{2}{e}\left[\frac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^n}{\frac{e-2}{e}}\right]$$
$$u_n \le \frac{2}{e}.\frac{e}{e-2}\left[1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right]$$
$$u_n \le \frac{2}{e-2}\left[1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right]$$
$$u_n \le \frac{2}{e-2} - \frac{2}{e-2}\left(\frac{2}{e}\right)^n$$

تكافئ: $u_n \le \frac{2}{e-2}$ إذاً $\left(\frac{2}{e-2}\right)$ عنصر راجح على المتتالية u_n.

مكثفة شيفرة الـ 600

دراسة المتتاليات المحدودة:

مبرهنات	(1) كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تتهي إلى الـ $+\infty$ (2) كل متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى تنتهي إلى الـ $-\infty$ (3) كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة (4) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة		
نص السؤال	هل المتتالية متقاربة؟ أو هل يوجد للمتتالية نهاية حقيقية؟ تميز:		
فكرة الحل	وجود طلب محدودية وطلب اطراد متتالية	وجود طلب محدودية متتالية فقط	عدم وجود طلب محدودية وعدم وجود طلب اطراد
	نستخدم المبرهنات فورا: * كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة * كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى تكون متقاربة	ندرس اطراد المتتالية حتى ولو لم يطلب ذلك نتابع باستخدام المبرهنات	* الأسلوب الأول: نوجد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ونميز: (1) ناتج النهاية عدد حقيقي فالمتتالية متقاربة (2) ناتج النهاية لا نهاية فالمتتالية متباعدة * الأسلوب الثاني: ندرس المحدودية وندرس اطراد المتتالية.

التمرين الأول:

هل المتتاليات الآتية متقاربة:

$$u_n = \frac{n - 3\sin n}{n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \to$ إحاطة

نعلم أنّ:

$$-1 \le \sin n \le 1$$
$$3 \ge -3\sin n \ge -3$$
$$n+3 \ge n - 3\sin n \ge n-3$$

نقسم على $n > 0$:

$$\frac{n+3}{n} \ge \frac{n-3\sin n}{n} \ge \frac{n-3}{n}$$
$$\frac{n-3}{n} \le u_n \le \frac{n+3}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right) = 1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

ومنه المتتالية u_n متقاربة.

$$u_n = \frac{3^n - 5^n}{2^n + 5^n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \to$ حالة عدم تعيين

$$u_n = \frac{3^n - 5^n}{2^n + 5^n} = \frac{5^n\left(\frac{3^n}{5^n} - 1\right)}{5^n\left(\frac{2^n}{5^n} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}$$

لما كان: $-1 < \frac{3}{5} < 1$ و $-1 < \frac{2}{5} < 1$ فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-1}{1} = -1$$

ومنه المتتالية u_n متقاربة.

$$u_n = \frac{n + (-1)^n}{3n+1}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \to$ إحاطة

نعلم أنّ:

$$-1 \le (-1)^n \le 1$$
$$n-1 \le n + (-1)^n \le n+1$$

نقسم على $3n+1 > 0$:

$$\frac{n-1}{3n+1} \le \frac{n+(-1)^n}{3n+1} \le \frac{n+1}{3n+1}$$
$$\frac{n-1}{3n+1} \le u_n \le \frac{n+1}{3n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{3n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

ومنه المتتالية u_n متقاربة.

التمرين الثاني:

لتكن المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ حيث:

$$u_n = \frac{n+1}{n^2} + \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+1}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+1}{n^2+n}$$

أثبت أنّ:

$$\frac{n+1}{n} \le u_n \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \text{ عند كل عدد طبيعي } n \ge 1$$

واستنتج نهاية $(u_n)_{n\ge1}$ وهل هي متقاربة؟

الحل:

* أصغر حد $= \frac{n+1}{n^2+n}$
* أكبر حد $= \frac{n+1}{n^2}$
* عدد الحدود $= n - 0 + 1 = n+1$

نطبق القانون:

$$\text{عدد الحدود}\left(\text{أصغر حد}\right) \le \text{المجموع} \le \text{عدد الحدود}\left(\text{أكبر حد}\right)$$
$$(n+1)\left(\frac{n+1}{n^2+n}\right) \le u_n \le (n+1)\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$$
$$\frac{(n+1)^2}{n(n+1)} \le u_n \le \frac{(n+1)^2}{n^2}$$
$$\frac{n+1}{n} \le u_n \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

إيجاد النهاية: لدينا من دقيقة..

$$\frac{n+1}{n} \le u_n \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = (1)^2 = 1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

ومنه المتتالية u_n متقاربة.

التمرين الثالث:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 1} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

١. أثبت أن: $2 \le u_n \le 5$ أياً كان $n \ge 0$.

٢. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً، واستنتج تقاربها، ثم احسب نهايتها.

الحل:

الطالب الأول:

نرمز للقضية:

$$E(n): 2 \le u_n \le 5$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$2 \le u_0 = 2 \le 5 \to \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$2 \le u_n \le 5 \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$2 \le u_{n+1} \le 5$$

ننطلق من $(*)$: لدينا:

$$2 \le u_n \le 5$$
$$1 \le u_n - 1 \le 4$$
$$1 \le \sqrt{u_n - 1} \le 2$$
$$4 \le 3 + \sqrt{u_n - 1} \le 5$$
$$2 \le 4 \le u_{n+1} \le 5$$
$$2 \le u_{n+1} \le 5$$

محققة أياً كان $n \ge 0$

الطالب الثاني:

نرمز للقضية:

$$E(n): u_{n+1} > u_n$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$u_1 = 4 > u_0 = 2 \to \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_{n+1} > u_n \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

حيثُ: $u_{n+2} = 3 + \sqrt{u_{n+1} - 1}$

ننطلق من $(*)$: لدينا:

$$u_{n+1} > u_n$$
$$u_{n+1} - 1 > u_n - 1$$
$$\sqrt{u_{n+1} - 1} > \sqrt{u_n - 1}$$
$$3 + \sqrt{u_{n+1} - 1} > 3 + \sqrt{u_n - 1}$$
$$\to u_{n+2} > u_{n+1}$$

محققة ومنه u_n متزايدة تماماً أياً كان $n \ge 0$.

استنتاج التقارب:

بما أن المتتالية u_n متزايدة تماماً

ومحدودة من الأعلى بالعدد 5 إذاً هي متقاربة.

حساب النهاية:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$$

لإيجاد النهاية نحل المعادلة: $f(x) = x$

$$3 + \sqrt{x-1} = x$$
$$\sqrt{x-1} = x - 3$$

نربع بشرط $x > 3$:

$$x - 1 = (x-3)^2$$
$$x - 1 = x^2 - 6x + 9$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x-2)(x-5) = 0$$

إما $x = 2 \to$ مرفوض

أو $x = 5 \to$ مقبول

إذاً: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$

التمرين الرابع:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6 \\ u_0 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

١. اثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $2 \le u_n \le 3$ أياً كان العدد الطبيعي n.

٢. أثبت ان $u_{n+1} - u_n = (u-3)(u-2)$

٣. استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة.

٤. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

الطالب الأول:

نرمز للقضية:

$$E(n): 2 \le u_n \le 3$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$2 \le u_0 = \frac{5}{2} \le 3 \to \text{محققة}$$

ELITE MATH

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$2 \le u_n \le 3 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$2 \le u_{n+1} \le 3$$

مرحلة الاصلاح:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 4n + 6$$
$$u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 4 - 4 + 6$$
$$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$$

مرحلة الحصر: لدينا من العلاقة الفرض $(*)$:

$$2 \le u_n \le 3$$
$$0 \le u_n - 2 \le 1$$
$$0 \le (u_n - 2)^2 \le 1$$
$$2 \le (u_n - 2)^2 + 2 \le 3$$
$$2 \le u_{n+1} \le 3$$

محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

الطلب الثاني:

$$\underbrace{u_{n+1} - u_n}_{l_1} = \underbrace{(u_n - 3)(u_n - 2)}_{l_2}$$
$$l_1 = u_{n+1} - u_n$$
$$= u_n^2 - 4u_n + 6 - u_n = u_n^2 - 5u_n + 6$$
$$= (u_n - 3)(u_n - 2) = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

الطلب الثالث:

استنتاج أنّ المتتالية u_n متناقصة:

لدينا من الطلبات السابقة:

$$2 \le u_n \le 3$$

ومنه:

* $u_n \ge 2 \rightarrow u_n - 2 \ge 0$
* $u_n \le 3 \rightarrow u_n - 3 \le 0$
* $u_{n+1} - u_n \le 0$

ومنه نجد أن المتتالية u_n متناقصة.

الطلب الرابع:

بما أن المتتالية متناقصة

ومحدودة من الأدنى بالعدد 2 فهي متقاربة.

حساب النهاية:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

لإيجاد النهاية نحل المعادلة: $f(x) = x$

$$x^2 - 4x + 6 = x$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

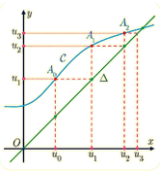
إما $x = 3 \rightarrow$ مرفوض

أو $x = 2 \rightarrow$ مقبول

ومنه:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$$

التمثيل الهندسي الحدود الأولى من متتالية معطاة بشكل تدريجي:



① نرسم الخط البياني C_f للتابع f (الموافق)

② نرسم المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = x$ المنصف للربعين الأول والثالث

③ نحدد u_0 (معطاة) على محور الفواصل

④ نرسم المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = u_0$ ونحدد A نقطة تقاطعه مع الخط البياني

⑤ نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته $(y = A$ ترتيب$)$ ونحدد B نقطة تقاطعه مع المنصف Δ

⑥ فاصلة B هي u_1

⬅ نكرر ما سبق

فوائد التمثيل الهندسي لحدود متتالية:

* دراسة اطراد متتالية
* محدودية متتالية
* نهاية متتالية u_n

تمرين:

أولاً: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-2, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$ والمستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ والمطلوب:

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

٢. حل المعادلة $f(x) = y_\Delta$

٣. ارسم في معلم متجانس كل من C_f و Δ .

الحل:

الطلب الأول:

لدينا التابع f معرف ومستمر على $]-2, +\infty[$ ومنه:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3}{1} = 3$$

التابع f اشتقاقي على $]-2, +\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - (1)(3x+2)}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{3x + 6 - 3x - 2}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$$

نعدم المشتق:

مستحيلة الحل $\rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 4 \neq 0$

ننظم جدول التغيرات وفق:

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3

الطلب الثاني:

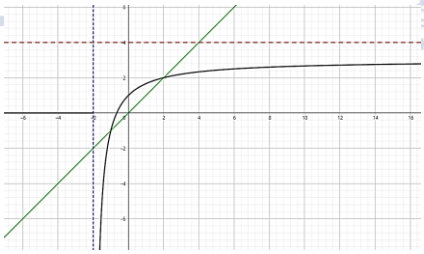
$$f(x) = y_\Delta$$
$$\frac{3x+2}{x+2} = x$$
$$3x + 2 = x^2 + 2x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

إما $x = 2$

أو $x = -1$

الطلب الثالث:

الرسم:



ثانياً:

لتكن $(u_n)_{n \ge 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق:

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} \quad , \quad u_0 = 1$$

عند كل $n \in \mathbb{N}$ والمطلوب:

١. باستعمال الرسم السابق مثل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_0 و u_1 و u_2 و u_3 .

٢. ضع تخميناً حول جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n \ge 0}$ وتقاربها ونهايتها المحتملة.

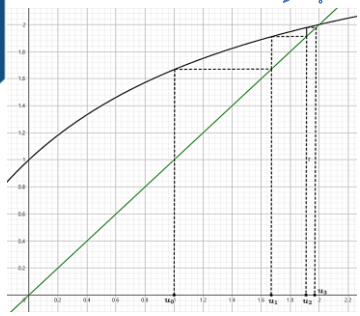
٣. نعرف المتتالية $(v_n)_{n \ge 0}$ بالعلاقة: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$

a) بيّن أنّ $(v_n)_{n \ge 0}$ متتالية هندسية وعين أساسها وحدها الأول.

b) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

الحل:

الطلب الأول:



الطلب الثاني:

نلاحظ أنّ المتتالية متزايدة وتتقارب نحو الـ 2 وأن نهايتها المحتملة هي الـ 2 .

الطلب الثالث:

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$

(a) :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - 2}{\frac{3u_n + 2}{u_n + 2} + 1}$$
$$= \frac{\frac{3u_n + 2 - 2u_n - 4}{u_n + 2}}{\frac{3u_n + 2 + u_n + 2}{u_n + 2}} = \frac{u_n - 2}{4u_n + 4}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_n - 2}{4u_n + 4}}{\frac{u_n - 2}{u_n + 1}} = \frac{u_n - 2}{4u_n + 4} \cdot \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$$
$$= \frac{u_n - 2}{4(u_n + 1)} \cdot \frac{u_n + 1}{u_n - 2} = \frac{1}{4}$$

ومنه المتتالية v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{1 - 2}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

(b) :

كتابة v_n بدلالة n :

$$\frac{v_n}{v_0} = q^{n-0}$$
$$v_n = v_0 . q^n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

كتابة u_n بدلالة n :

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$
$$v_n . u_n + v_n = u_n - 2$$
$$v_n . u_n - u_n = -v_n - 2$$
$$u_n(v_n - 1) = -v_n - 2$$
$$u_n = \frac{-v_n - 2}{v_n - 1} = \frac{-(v_n + 2)}{-(1 - v_n)} = \frac{v_n + 2}{1 - v_n}$$
$$u_n = \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

إيجاد نهاية المتتالية u_n :

لما كان: $-1 < \left(\frac{1}{4}\right) < 1$ فإنّ $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

ومنه:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2 - \frac{1}{2}(0)}{1 + \frac{1}{2}(0)} = \frac{2}{1} = 2$$

مكثفة شيفرة الـ 600

فهرس المتتاليات ونهايتها:

١. أشكال المتتالية.
٢. المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية.
٣. الإثبات بالتدريج.
٤. أطراد متتالية.
٥. نهاية متتالية.
٦. المتتاليتان المتجاورتان.
٧. محدودية متتالية.
٨. تقارب متتالية.
٩. التمثيل الهندسي.

النماذج الامتحانية:

النموذج الأول	الأشعة بأبعادها الثلاث

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (لكل سؤال 40 درجة):

السؤال الأول: في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-1,1)$ والمطلوب:

أعطِ معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة $MA=MB$ وما طبيعة المجموعة S ؟

السؤال الثاني: نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ و $C(5,0,5)$ و $D(6,2,5)$ والمطلوب:

١) أثبت أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

٢) عيّن العددين α و β بحيث: $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ واستنتج أنّ النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد.

السؤال الثالث: في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي $P:2x+y-2z-4=0$ والمطلوب:

١) احسب بُعد A عن المستوي P

٢) اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .

السؤال الرابع:

$(a$ اكتب معادلة الاسطوانة التي محورها $(O,\vec{k})$ ومركزي قاعدتيها $O(0,0,0)$ و $A(0,0,7)$ ونصف قطر قاعدتها $r=3$

$(b$ بيّن أيّ النقاط $D(3,0,3)$ و $E(\sqrt{3},\sqrt{6},4)$ و $F(1,0,1)$ تقع على الأسطوانة.

ثانياً: أجب عن التمارين الآتية: (لكل تمرين 60 درجة)

التمرين الأول: نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(-1,2,-1)$ و $B(1,0,0)$ و $C(2,1,0)$ والمطلوب:

١) أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) .

٢) اكتب معادلة ديكارتيّة للمستوي (ABC)

- لدينا الكرة (S) المعرفة بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$.

٣) عيّن نصف قطر الكرة (S) وحدد مركزها.

٤) عيّن تقاطع الكرة (S) والمستوي (ABC) .

٥) بيّن أنّ المستقيم (AB) يقطع الكرة (S) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

التمرين الثاني: أوجد نقطة تقاطع المستويات: $P:3x-y+z=5$ و $Q:2x+y-z=0$ و $R:x-2y+z=0$

التمرين الثالث: في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{j},\vec{k})$ يعطى المستقيم $D:\begin{cases}x=2-t\\y=2-3t\\z=1+t\end{cases};t\in\mathbb{R}$ ولتكن النقطة $A(3,-2,1)$.

١) أوجد معادلة المستوي P العمودي على D والذي يشمل النقطة A .

٢) احسب إحداثيات النقطة H المسقط العامودي لـ A على D .

٣) احسب المسافة بين A و D .

التمرين الرابع: نعتبر المستقيمات الثلاثة (D_1) و (D_2) و (D_3) حيث:

$$(D_1):\begin{cases}x-y-2z=0\\2x+3y=0\end{cases}\quad,\quad(D_2):\begin{cases}x=5-4t\\y=-2t\\z=-1+2t\end{cases};t\in\mathbb{R}\quad,\quad(D_3):\begin{cases}x=1+2s\\y=-2+s\\z=1-s\end{cases};s\in\mathbb{R}$$

١) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (D_1)

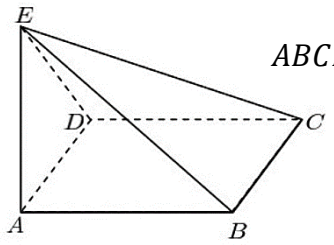
٢) بيّن أنّ المستقيمين (D_2) و (D_3) منطبقان.

٣) بيّن أنّ المستقيمين (D_1) و (D_2) ليسا من نفس المستوي.

٤) (Δ) مستقيم يمر من النقطة $A(5,-1,4)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(3,1,1)$, بيّن أنّ المستقيمين (D_3) و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة يطلب تعيين إحداثياتها.

600 أداة شرح مرئية

ثالثاً: أجب عن المسائل الآتية: (لكل مسألة 100 درجة):



المسألة الأولى: $ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدتهُ مربع , المستقيم (AE) عمودي على المستوي $ABCD$ وفيه $AB = 4$ و $AE = 3$ نتأمل المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

١) جد إحداثيات النقاط A و B و C و D و E .

٢) جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة $4\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CE}$.

٣) احسب $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BC}$ واستنتج نوع المثلث (EBC) ثم احسب مساحتهُ.

٤) أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC) .

٥) اكتب معادلة للمستوي (EBC) واحسب بُعد النقطة A عن المستوي (EBC) ثم استنتج حجم الهرم $AEBC$.

المسألة الثانية: في معلم متجانس $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ لتكن لدينا النقاط $A(3,2,6)$ و $B(1,2,4)$ و $C(4,-2,5)$ والمطلوب:

١) أثبت أنّ النقاط A و B و C تشكل رؤوس مثلث

عيّن نوعهُ واحسب مساحتهُ ثم تحقق أنّ معادلة المستوي (ABC) هي من الشكل: $2x + y - 2z + 4 = 0$

٢) إذا كان Δ مستقيم يمرّ من النقطة O وشعاع توجيهه $\vec{u}(2,1,-2)$ ويعامد المستوي (ABC) , أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ .

٣) أثبت أنهُ $H\left(-\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$ هي نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي (ABC) ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $OABC$

٤) إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(O,3)$ أثبت أنّ G تقع على المستقيم (OI) حيث I مركز ثقل المثلث (ABC) ثم عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق: $\left\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6$.

مكثفة شيفرة الـ 600

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (لكل سؤال 40 درجة):

السؤال الأول: ليكن لدينا الأعداد العقديّة $w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $w_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ والمطلوب:

١) اكتب كلاً من w_1 و w_2 بالشكل الاسي.

٢) اثبت أن $(w_1)^{12} + (w_2)^{12}$ عدد حقيقي.

السؤال الثاني: أوجد الجذور التكعيبية للعدد $w = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$

السؤال الثالث: أثبت صحة المساواة: $|iz + 2i|^2 + |z - 2|^2 = 2|z|^2 + 8$

السؤال الرابع: ليكن لدينا العدد العقدي $w = \sqrt{3} + i$ والمطلوب:

١) أوجد الجذور التربيعية لـ w بالشكل الأسي.

٢) أوجد الجذور التربيعية لـ w بالشكل الجبري.

٣) استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

ثانياً: أجب عن التمارين الآتية: (لكل تمرين 60 درجة)

التمرين الأول: ليكن لدينا $\alpha = e^{\frac{2\pi}{7}i}$ والمطلوب:

١) أثبت أنّ: $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0$

٢) بفرض أن: $S = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ و $T = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$

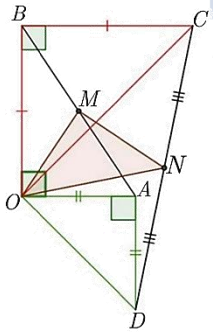
a) أثبت أن $S + T = -1$ و $S.T = 2$

b) استنتج أن S و T هما جذرا المعادلة $z^2 + z + 2 = 0$ ثم حل المعادلة السابقة.

التمرين الثاني: ليكن العدد العقدي $w = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{\pi}{3}i}$ ، والمطلوب:

١) بين أن $|w| = 1$ ، ثم اكتب العدد w بالشكل الأسي.

٢) ليكن z عدد عقدي ما أثبت أن $Z = \frac{z - \bar{z}w}{1 - w}$ عدد حقيقي.



التمرين الثالث: نتأمل في المستوي مثلثاً OAB قائماً في O مباشر التوجيه كيفياً لتكن M منتصف $[AB]$ وليكن OCB و ODA مثلثين قائمين في B و A بالترتيب ومتساويي الساقين مباشرين وبفرض N منتصف $[CD]$ نختار معلماً مباشراً مبدؤه النقطة O ونرمز بالرموز a و b و c و d و m و n إلى الأعداد العقدية الممثلة للنقاط A و B و C و D و M و N بالترتيب.

١) أثبت أن $c = b - ib$ و $d = a - ia$.

٢) احسب $\frac{m-n}{m}$ واستنتج طبيعة المثلث OMN.

التمرين الرابع: لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية $a = 1 + 2i$ و $b = -2 + 3i$ و $c = 2$ و $d = 2 + i$ والمطلوب:

وضع النقاط A و B و C و D في شكل.

١) جد العدد العقدي g الممثل للنقطة G مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

٢) أثبت أنّ: $\frac{(b-c)}{a-c} = \frac{a-c}{d-c}$ وماذا يمثل المستقيم (AC) في المثلث BCD .

ثالثاً: أجب عن المسائل الآتية: (لكل مسألة 100 درجة):

المسألة الأولى:

أولاً:

ليكن $P(z)$ كثير حدود معرف بالصيغة $P(z)=z^3-2(\alpha+i\sqrt{3})z^2-4(\alpha-i\sqrt{3})z+8$ حيثُ $\alpha\in\mathbb{R}$، المطلوب:

١) احسب العدد α لكي يكون $z=2$ حلاً للمعادلة $P(z)=0$.

٢) بفرض $\alpha=1$ جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق: $P(z)=(z-2)Q(z)$ ثم استنتج حلول المعادلة $P(z)=0$.

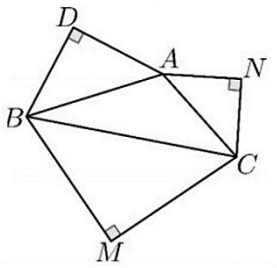
ثانياً:

لتكن A و B و C نقاط المستوي التي تمثل الأعداد العقدية بالترتيب: $a=2$ و $b=1+i\sqrt{3}$ و $c=-1+i\sqrt{3}$ والمطلوب:

a) أثبت أن: $\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ، واستنتج طبيعية المثلث ABC.

b) ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق التناظر بالنسبة لمحور الفواصل عيّن a' و b' و c' التي تمثلها نقاط المستوي A' و B' و C' على الترتيب.

المسألة الثانية:



نتأمل في المستوي العقدي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً. نشئ خارجه النقاط D و M و N التي تجعل المثلثات DAB و MCB و NAC قائمة في D و M و N بالترتيب، ومتساوية الساقين كما في الشكل المجاور بفرض a و b و c و d و m و n الأعداد العقدية الممثلة بالترتيب للنقاط: A و B و C و D و M و N والمطلوب:

١) إذا كانت النقطة $F'(z')$ هي صورة $F(z)$ وفق دوران ربع دورة مباشرة حول $\Omega(\omega)$ ، فأثبت أنّ:

$$\omega=\frac{1}{2}[(1-i)z+(1+i)z']$$

٢) اكتب d بدلالة a و b واكتب m بدلالة b و c واكتب n بدلالة c و a.

٣) استنتج أن للمثلثين: DMN و ABC مركز الثقل ذاته.

٤) نختار معلماً مباشراً متجانساً مبدؤه النقطة A أثبت أن المستقيمين (AM) و (DN) متعامدان، ثم استنتج أن: $AM=DN$.

مكثفة شيفرة الـ 600
ELITE MATH

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (لكل سؤال 40 درجة):

السؤال الأول: لتكن المجموعة $E = \{1,2,3,4,5\}$ والمطلوب:

١) كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من 4 منازل يمكن تشكيلهُ من عناصر المجموعة E

٢) كم عدداً زوجياً مختلف الأرقام ومؤلفاً من 4 منازل وكل عدد منها أكبر تماماً من 5000

السؤال الثاني: رف يحوي سبعة كتب لمؤلفين ثلاثة للمؤلف A وأربعة للمؤلف B

١) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B

٢) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية؟

السؤال الثالث: يريد طالب أن يدرس مواده السبعة بشكل متتابع.

١) بكم طريقة يمكن للطالب أن يرتب المواد لدراستها؟

٢) بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد إذا كانت المادة الأولى هي الرياضيات والأخيرة هي الفيزياء؟

السؤال الرابع: نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير ونائب مدير وأمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص , بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً أنّ في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها.

ثانياً: أجب عن التمارين الآتية: (لكل تمرين 60 درجة)

التمرين الأول: صندوق يحتوي كرتين زرقاوين وكرة حمراء واحدة , نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضيف كرتين من اللون ذاته إلى الصندوق ثم نسحب مجدداً كرة من الصندوق , الحدث R_1 للكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون , الحدث R_2 الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون. والمطلوب:

١) أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة واحسب احتمال الحدث R_2

٢) إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى زرقاء.

التمرين الثاني: ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنوليّة توقعه الرياضي $E(X) = 1$ والمطلوب:

أكمل الجدول الآتي الذي يمثل قانونهُ الاحتمالي.

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i					1

التمرين الثالث: صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وكرتين زرقاوين يسحب لاعب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة فإذا علمت أن اللاعب يكسب نقطة واحدة عن كل كرة حمراء مسحوبة , ويخسر نقطة واحدة عن كل كرة زرقاء مسحوبة , ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد النقاط التي يحصل عليها اللاعب..

١) اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتباينه وانحرافه المعياري.

٢) احسب احتمال الحدث A : ظهور كرة زرقاء واحدة على الأكثر.

٣) إذا ظهرت كرة زرقاء واحدة على الأكثر بين الكرات المسحوبة فما احتمال الحدث B :أن يكسب اللاعب نقطة واحدة.

التمرين الرابع: يحوي صندوق على خمس كرات، ثلاث حمراء اللّون وتحمل الأرقام $\{2,1,0\}$ وكرتين بيضاء اللون وتحمل الأرقام $\{1,0\}$ نسحب عشوائيّاً كرتين على التّتالي دون إعادة من هذا الصّندوق.

١) الحدث A (الكرتان المسحوبتان لهما اللّون ذاته) احسب $P(A)$.

٢) نعرّف متحوّلاً عشوائيّاً X يدلّ على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين. عيّن مجموعة قيم المتحوّل العشوائي X، واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثمّ احسب توقّعه الرّياضي.

600 أوراق شرح مفصل

ثالثاً: أجب عن المسائل الآتية: (لكل مسألة 100 درجة):

المسألة الأولى: صندوق يحتوي على أربع بطاقات مرقمة بالأرقام 1 و 2 و 3 و 4 نسحب من الصندوق بطاقتين على التتالي مع الإعادة ليكن S متحول عشوائي يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين وليكن X متحول عشوائي يدل على باقي قسمة S على 2 وليكن Y متحول عشوائي يدل على باقي قسمة S على 3 والمطلوب:

١) عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S .

٢) عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب $E(X)$.

٣) عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y واحسب $E(Y)$.

٤) عين القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)

٥) هل المتحولان العشوائيان X و Y مستقلان احتمالياً.

المسألة الثانية:

يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع الأقلام عندما ورد طلب عدد من الأقلام قدره 1000 قلم، صنعت الورشة Aمنها 600 قلم، وصنعت البقيّة الورشة B، هناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالحة للاستعمال في حين تكون نسبة 2% من أقلام الورشة B غير صالحة للاستعمال، نسحب عشوائيّاً قلماً من الطّلب، نرمز بالرّمز Aإلى الحدث (القلم مصنوع في الورشة A)، وبالرّمز B إلى الحدث (القلم مصنوع في الورشة B) وبالرّمز D إلى الحدث (القلم غير صالح للاستعمال.

١) اعط تمثيلاً شجريّاً للتّجربة.

٢) احسب احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال.

٣) إذا كان القلم صالحاً للاستعمال،

٤) فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A

٥) نسحب عشوائيّاً من الورشة A قلمين معاً وليكن X المتحوّل العشوائي الّذي يمثّل عدد الأرقام المسحوبة الصّالحة للاستعمال.

٦) احسب $P(x=0)$

مكثفة شيفرة الـ 600
ELITE MATH

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (لكل سؤال 40 درجة):

السؤال الأول: نتأمل جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على المجال $[0,+\infty[$ خطه البياني C والمطلوب:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$\frac{1}{e-1}$	↘	0

١) ما القيم الحدية المحلية للتابع f ؟ وما نوعها؟

٢) اكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي للخط C .

٣) قارن بين $f(e^2)$ و $f(e^3)$ مبرراً إجابتك.

٤) احسب $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)+1}{x}\right)$.

السؤال الثاني: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$ والمطلوب:

ادرس تغيرات التابع f واستنتج أنهُ تابع محدود.

السؤال الثالث: حل جملة المعادلتين: $\begin{cases} 2^x\times 2^y=4\ ...(1) \\ 2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^y=6\ ...(2)\end{cases}$

السؤال الرابع: ليكن $I=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}dx$ و $J=\int_0^1 \frac{x^7}{1+x^4}dx$ والمطلوب:

احسب I ثم $I+J$ واستنتج J

ثانياً: أجب عن التمارين الآتية: (لكل تمرين 60 درجة)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ وفق: $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ والمطلوب:

١) جد نهاية التابع f عند الـ $-\infty$ وفسر النتيجة هندسياً.

٢) هل يقبل C مستقيماً مماساً موازياً للمستقيم Δ الذي معادلتهُ: $y=x+1$

٣) احسب حجم المجسم الناتج عن الدوران دورة كاملة حول محور الفواصل للسطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$

التمرين الثاني: ليكن f تابعاً معرفاً على $[0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x-\ln x} & ;x>0\\ 0 & ;x=0\end{cases}$ والمطلوب:

١) أثبت أنّ التابع f مستمر عند الصفر

٢) ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر وفسر النتيجة التي حصلت عليها هندسياً.

٣) بيّن أنّ الخط البياني C للتابع f يقبل مقارباً أفقياً عند الـ $+\infty$, جد معادلتهُ.

٤) اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منهُ فاصلتها 1 واستعمل التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$.

التمرين الثالث: ليكن التابع f المعرف على $]e^{-1},+\infty[$ وفق العلاقة: $f(x)=\frac{2+\ln x}{1+\ln x}$ والمطلوب:

١) جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعط عدداً حقيقياً A يحقق الشرط إذا كانت $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]0.9,1.1[$

٢) احسب $\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$.

التمرين الرابع: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=1-3x+E(x)$ والمطلوب:

١) اكتب التابع $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[1,3]$

٢) هل التابع f مستمر عند الـ 2 ؟

٣) ارسم التابع f على المجال $[1,3]$

٤) احسب $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{3-x^2}\right]$.

600 أداة شرح مفصلة

ثالثاً: أجب عن المسائل الآتية: (لكل مسألة 100 درجة):

المسألة الأولى: ليكن التابع g المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق: $g(x)=x-1+\ln x$

وليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$ والمطلوب:

١) بيّن أنّ $g(1)=0$ ثم ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها واستنتج إشارة $g(x)$

٢) جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

٣) بيّن أنّ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ونظم جدول تغيرات التابع f وبيّن أن $f(x)\geq 0$ أياً كانت $x\in 1$

٤) أثبت أنّ التابع F المعرف على I وفق: $F(x)=x.\ln x-x-\frac{1}{2}(\ln x)^2$ هو تابع أصلي للتابع f

٥) احسب مساحة السطح المحصور بين C_f ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=e$

المسألة الثانية: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{1-e^x}{e^x+1}$ والمطلوب:

١) أثبت أنّ المستقيمين d_1 الذي معادلته $y=1$ و d_2 الذي معادلته $y=-1$ مقاربين للخط C_f

٢) أثبت أنّ التابع f فردي ثم اذكر الصفة التناظرية لخطه البياني C_f

٣) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

٤) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في المبدأ O ثم ادرس وضع C_f بالنسبة إلى T.

٥) ارسم في معلم متجانس كلاً من d_1 و d_2 و C_f

٦) ارسم الخط البياني C_h للتابع $h(x)=\frac{|1-e^x|}{e^x+1}$ المعرف على $\mathbb{R}$ وذلك انطلاقاً من C_f

مكثفة شيفرة الـ 600

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (لكل سؤال 40 درجة):

السؤال الأول: لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ والمطلوب:

١) بيّن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تكتب بالصيغة: $u_n = a + b\left(\frac{1}{2}\right)^n$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

٢) إذا علمت أنّ $a = 1$ و $b = -1$

ولنعرف المتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ وفق: $t_n = 1+\frac{1}{n}$ أثبت أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(t_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

السؤال الثاني: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة: $u_n = e.n + 2e$ والمطلوب:

١) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها e واستنتج اطراد المتتالية واحسب حدها الرابع.

٢) احسب المجموع: $S = u_2 + u_4 + \cdots + u_{20}$

السؤال الثالث: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث: $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ والمطلوب:

١) تحقق أنّ u_n تكتب بالصيغة: $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

٢) احسب نهاية المتتالية $(s_n)_{n\geq 1}$ حيث: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

السؤال الرابع: a و b و c ثلاث حدود متوالية غير معدومة في متتالية هندسية أساسها q كما لدينا $12a$ و $5b$ و $2c$ ثلاث حدود متوالية في متتالية حسابية , احسب q .

ثانياً: أجب عن التمارين الآتية: (لكل تمرين 60 درجة)

التمرين الأول: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_0 = 2$ وعند كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.

١) أثبت أنّ $u_n > 1$ أياً كان العدد الطبيعي n .

٢) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

٣) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$

a) أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حسابية.

b) اكتب v_n بدلالة n واستنتج أنّ: $u_n = \frac{n+2}{n+1}$.

التمرين الثاني: لتكن لدينا المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2 \\ x_0 = 3 \end{cases}$ و $\begin{cases} y_{n+1} = x_n + y_n \\ y_0 = 0 \end{cases}$ والمطلوب

١) أثبت أنّ المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية , عيّن أساسها r ثم اكتب x_n بدلالة n

٢) ادرس اطراد المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$

٣) أثبت أنّ: $y_{n+1} = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

٤) استنتج عبارة y_n بدلالة n وهل المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ متقاربة أم متباعدة؟ ولماذا؟

التمرين الثالث: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{n!}{n^2}$ والمطلوب:

١) احسب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية.

٢) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

٣) أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ: $\left(n! \geq n(n-1)(n-2)\right)$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 3$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ وهل هي متقاربة أم متباعدة.

600 أداة شرح تفاعلية

التمرين الرابع: لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة: $u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \cdots + \frac{n-1}{5^{n-1}}$ والمطلوب:

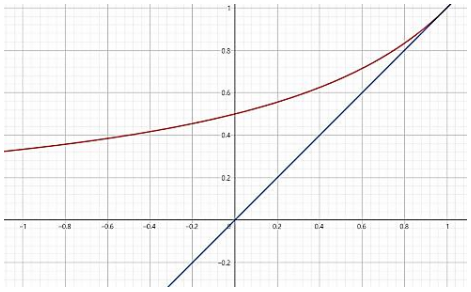
أثبت بالتدريج أنه من أجل كل عدد طبيعي n أنّ $3^n > n$

استنتج أنّ $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

هل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة؟ علل إجابتك.

ثالثاً: أجب عن المسائل الآتية: (لكل مسألة 100 درجة):

المسألة الأولى: لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$ و $u_0 = 2$ والمطلوب:



١) أثبت بالتدريج أنّ $u_n > 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

٢) تحقق أنّ $u_{n+1} - u_n = \frac{15}{16}(u_n - 1)$ ثم استنتج أنّ المتتالية u_n متناقصة.

٣) استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة.

٤) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n = u_n - 1$:

a) أثبت أنّ v_n متتالية هندسية , عيّن حدها الأول وأساسها.

b) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم اكتب أنّ $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$, استنتج نهاية المتتالية u_n

٥) نضع $S_n = v_0 + v_1 + \cdots v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

a) احسب كلاً من S_n و S'_n بدلالة n .

b) استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-\infty, 1]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{1}{2-x}$ وليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$ ولتكن (u_n) المتتالية المعرفة بالعلاقة: $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $u_0 = -1$ والمطلوب:

١) أعد رسم الشكل المجاور ثم مثل هندسياً الحدود الأولى للمتتالية u_n .

٢) برهن بالتدريج أنّ $u_n < 1$ أياً كان العدد الطبيعي n .

٣) ادرس اطراد المتتالية u_n ثم استنتج أنها متقاربة.

٤) نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقة $v_n = \frac{2}{1-u_n}$ والمطلوب:

a) أثبت أنّ المتتالية v_n حسابية , عيّن حدها الأول وأساسها واكتب عبارة v_n بدلالة n .

b) استنتج عبارة u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

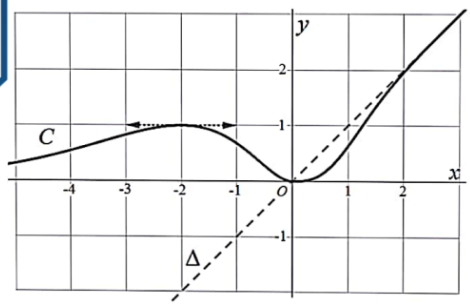
٥) نضع المتتالية S_n المعرفة وفق: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$, أثبت أنّ $S_n = n^2$ واستنتج نهاية المتتالية S_n .

٦) أيّ من المتتاليات u_n و v_n و S_n محدودة وأيّ منها غير محدودة , برر إجابتك.

مكثفة شيفرة الـ 600

النموذج السادس شامل

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الآتية: "32 درجة لكل سؤال":



السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

١. أوجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

٢. اذكر قيمتين حديتين للتابع مبيناً نوع كل منهما.

٣. أوجد $f(]-\infty,0])$

٤. حل المتراجحة $f'(x) \leq 0$

السؤال الثاني: أثبت صحة العلاقة الآتية: $\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}$

السؤال الثالث: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \cos^4 x$

١. اكتب التابع f بدلالة $\cos 2x$ و $\cos 4x$ ثم عيّن تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$

٢. احسب $I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} f(x)\,dx$

السؤال الرابع: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \begin{cases} (x-3)^{\frac{2}{x-4}} & ;x \neq 4 \\ e^2 & ;x = 4 \end{cases}$ أثبت أنّ التابع f مستمر عند الـ 4

السؤال الخامس: أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي للمتحولان العشوائيان (X,Y) إذا علمت أنّ المتحولان X و Y مستقلان احتمالياً.

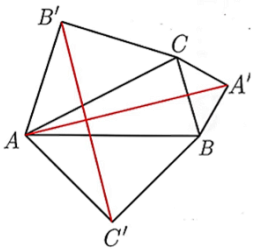
X \ Y	0	1	2	قانون X
0				0.2
1				
2	0.04			
قانون Y		0.1	0.5	

السؤال السادس: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{2e^x+3}{e^x-1}$ والمطلوب:

احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم عيّن عدداً حقيقياً A يحقق الشرط إذا كان $x > A$ فإنّ $f(x)$ في المجال $]1.95,2.05[$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية "60 درجة لكل تمرين":

التمرين الأول: نتأمل في المستوي الموجه الشكل المجاور: ABC مثلث مباشر التوجيه كيفي نشئ خارجهُ المثلثات BCA' و CAB' و ABC' القائمة في A' و B' و C' ومتساوية الساقين ونرمز بالأعداد a و b و c و a' و b' و c' الممثلة للنقاط A و B و C و A' و B' و C' بالترتيب.

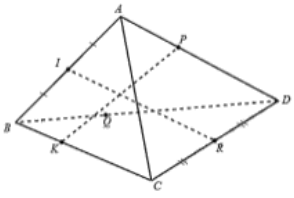


١. B هي صورة C وفق دوران مركزه A' وزاويتهُ $\frac{\pi}{2}$, استعمل الصيغة العقدية للدوران لتثبت أنّ $a' = \frac{b-ic}{1-i}$

٢. عبر بالمثل عن b' و c' بدلالة a و b و c

٣. أثبت أنّ $(a'-a) = i(c'-b')$ ثم استنتج أنّ المستقيمين (AA') و $(B'C')$ متعامدان $AA' = B'C'$

التمرين الثاني: $ABCD$ رباعي وجوه , النقاط I و K و R و Q و P تحقق: $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ ولدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,1)$ و $(C,1)$ و $(B,2)$ و $(A,2)$ و R منتصف $[AB]$ والمطلوب:



١. أثبت أنّ G تقع على المستقيم (PK)

٢. أثبت أنّ G تقع على المستقيم (IR)

٣. استنتج أنّ المستقيمان (IR) و (PK) متقاطعان

٤. عين موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(C,1)$

٥. عين مجموعة النقاط M التي تحقق: $\left\|2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}\right\| = \left\|2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM}\right\|$

التمرين الثالث: لدينا a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية تحقق العلاقات:

$$\begin{cases} a+b+c=15 \\ a+3b+2c=30 \end{cases}$$

١. احسب كلاً من a و b و c ثم استنتج r أساس المتتالية u_n

٢. اكتب u_n بدلالة n إذا علمت أنّ $u_0=a$

٣. احسب المجموع: $S=u_2+u_4+u_6+\cdots+u_{24}$

التمرين الرابع: صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً , نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراء وكرة خضراء والقيمة صفر في غير ذلك والمطلوب:

عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتباينهُ.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين "100 درجة لكل مسألة"

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

احسب نهاية التابع f عند كل طرف من أطراف تعريفه D_f

١. أوجد $f'(x)$ ثم ادرس إشارة المشتق ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f

٢. ارسم الخط C في معلم متجانس.

٣. لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق: $u_n=f(n)$

نضع $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ أثبت أنّ $S_n=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$

المسألة الثانية: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(-1,1,3)$	$B(1,0,-1)$	$C(2,-1,1)$	$D(2,0,-1)$

والمستوي P الذي معادلته $P:=2y+z+1=0$ والمستقيم Δ الذي تمثيله الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases};\beta\in\mathbb{R}$$

١. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $[BC]$ ثم تحقق ان المستقيم $[BC]$ محتوى في P.

٢. بين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا في نفس المستوي.

٣. احسب المسافة بين النقطة A والمستوي P.

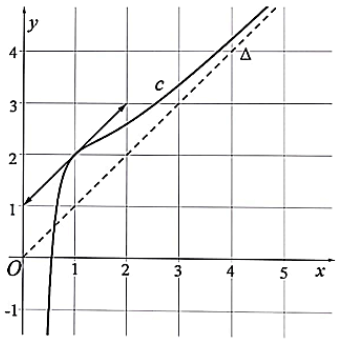
٤. بين أن النقطة D من المستوي P وأنّ المثلث BCD قائم.

٥. احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

مكثفة شيفرة الـ 600

النموذج السابع شامل

أولاً: أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: "40 درجة لكل سؤال":



السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ والمستقيم Δ مقارب مائل للخط C والمطلوب:

١. أوجد $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

٢. أوجد $f(1)$ و $f'(1)$

٣. أوجد $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - x)$

٤. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ حيث $m \in \mathbb{R}$ ؟

السؤال الثاني: نتأمل النقطتين: $A(1,0,1)$ و $B(5,2,1)$ والمطلوب:

١. اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

٢. صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

السؤال الثالث:

١. أثبت أنّ: $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

٢. استنتج قيمة $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$

السؤال الرابع: ما آحاد ومئات العدد 11^{11} ؟

السؤال الخامس:

أثبت أنّ المستقيم الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط البياني في جوار الـ $+\infty$ للتابع:

$$f(x) = x - x.\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية "60 درجة لكل تمرين":

التمرين الأول: لتكن لدينا النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

$a = 2 - 2i$	$b = -1 + 7i$	$c = 4 + 2i$	$d = -4 - 2i$

لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد العقدي $\omega = -1 + 2i$ والمطلوب:

١. أثبت وقوع النقاط A و B و C و D على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها $R = 5$

٢. ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E منتصف $[AB]$ احسب e وبرهن أنّ $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

٣. ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث (DEC) .

التمرين الثاني: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = e^{-x}.\sin x$

١. احسب $f'(x)$ و $f''(x)$

٢. عين العددين a و b التي تحقق: $f(x) = a.f'(x) + bf''(x)$ أياً كان x .

٣. استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

التمرين الثالث: لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة بالعلاقة: $u_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!} + \cdots + \frac{e}{n!}$ والمطلوب:

١. أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

٢. استنتج أنّ العدد $3e$ راجح على المتتالية u_n ثم استنتج تقارب المتتالية u_n

التمرين الرابع: يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء وكرتين حمراوين وكرة خضراء, نسحب ثلاث كرات من الصندوق على التتالي دون إعادة وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرافق كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق والمطلوب:

١. عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

٢. احسب التوقع الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين "100 درجة لكل مسألة"

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقطة $A(1,0,1)$ والمستقيمين Δ_1 و Δ_2 المعرفين وسيطياً وفق:

$$\Delta_1:\begin{cases}x=1-t\\y=0\\z=1-t\end{cases};t\in\mathbb{R}\quad,\quad \Delta_2:\begin{cases}x=2+s\\y=4-2s\\z=2+s\end{cases};s\in\mathbb{R}$$

١. أثبت أن المستقيمين Δ_1 و Δ_2 ليسا من نفس المستوي.

٢. أثبت أن المستقيمين Δ_1 و Δ_2 متعامدان.

٣. تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم Δ_1 ثم أوجد إحداثيات النقطة B المسقط القائم للنقطة A على المستقيم Δ_2

٤. احسب بعد النقطة A عن المستقيم Δ_2.

٥. أوجد إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$

٦. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحور للقطعة $[AB]$

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=2.\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

والمطلوب:

١. أثبت أن التابع f فردي

٢. ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0,+\infty[$

٣. اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0{,}1$

٤. في معلم متجانس ارسم C

٥. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$ و $x=\ln 3$

مكثفة شيفرة ال 600

النموذج الثامن شامل

أولاً: أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: "40 درجة لكل سؤال":

السؤال الأول: نتأمل جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	-1	↗	2

١. أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واكتب معادلة كل مقارب أفقي.

٢. دل على القيم الحدية للتابع f مبيناً نوعها.

٣. أوجد $f([0,\ln(2)])$

٤. ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

السؤال الثاني: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{e^{2x}+3e^{x}+1}{e^{x}+1}$

١. عين الأعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق $f(x)=ae^{x}+b+\frac{c}{e^{x}+1}$.

٢. احسب $I=\int_{0}^{1} f(x)\,dx$

السؤال الثالث: نتأمل جانباً جدول القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي والمطلوب:

x_i	0	1	2	3	4	Σ
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{\alpha}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{\beta}{16}$	1

١. عين العددين الحقيقيين α و β إذا علمت أنّ $E(X)=2$

٢. من أجل $\alpha=6$ و $\beta=1$ احسب تباين المتحول العشوائي $V(X)$

السؤال الرابع: ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x\,.\ln(1+4x)}{\sqrt{x^2+1}-1} & ;x\neq 0\\ 8 & ;x=0\end{cases}$$

هل التابع f مستمر عند الصفر؟

السؤال الخامس: لتكن المجموعة $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ والمطلوب:

١. ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث منازل مختلفة التي يمكن تشكيلها من عناصر S ؟

٢. ما عدد الأعداد الزوجية المؤلفة من ثلاث منازل وأصغر من 500 التي يمكن تشكيلها من عناصر S ؟

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية "60 درجة لكل تمرين":

التمرين الأول: لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة: $u_{n+1}=u_n^2+4u_n+2$ و $u_0=-\frac{3}{2}$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ $-2\leq u_n\leq -1$ أياً كان العدد الطبيعي n

٢. أثبت أنّ $u_{n+1}-u_n=(u_n+1)(u_n+2)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

٣. استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

التمرين الثاني: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]2,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x-2-\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

١. ادرس تغيرات التابع f على المجال I واستنتج $f(I)$

٢. أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في I ثم تحقق أنّ $3<\alpha<4$

٣. أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-2$ مقارب مائل لـ C في جوار الـ $+\infty$

التمرين الثالث:

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $A(1,1,1)$ و $B(1,4,7)$ و $C(0,1,2)$ و $D(-2,7,16)$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ النقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.

٢. عين العددين α و β اللذين يحققان: $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$, هل تقع النقاط A و B و C و D في مستو واحد؟

٣. استنتج أنّ النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,a) و (B,b) و (C,c) حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

التمرين الرابع:

لتكن الأعداد العقدية التالية:

$z_3=-\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$	$z_2=2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)\right]$	$z_1=1+i$

١. اكتب z_1 و z_2 و z_3 بالشكل الأسي.

٢. مستفيداً من الطلب السابق أثبت أنّ $\left[\frac{(z_1)^2}{(z_2)^3(z_3)^6}\right]$ تخيلي بحت.

٣. أوجد $(z_1.z_2)$ بالشكل الجبري

٤. أوجد $(z_1.z_2)$ بالشكل المثلثي واستنتج $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين "100 درجة لكل مسألة"

المسألة الأولى: في معلم متجانس $O;\vec{\imath},\vec{j},\vec{k}$ نتأمل النقطة $A(-2,0,2)$ والمستقيمين Δ_1 و Δ_2 المعرفيّن وسطياً وفق:

$$\Delta_1:\begin{cases}x=-1-t\\y=4+t\\z=5+t\end{cases};t\in\mathbb{R}\quad,\quad \Delta_2:\begin{cases}x=s\\y=6-4s\\z=-2+5s\end{cases};s\in\mathbb{R}$$

١. أثبت أنّ المستقيمين Δ_1 و Δ_2 متعامدان.

٢. جد إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع المستقيمين Δ_1 و Δ_2

٣. أثبت أن المستقيم (AB) يعامدالمستقيمين Δ_1 و Δ_2

٤. اكتب معادلة المستوي P الذي يشمل المستقيمين Δ_1 و Δ_2

٥. احسب بعد النقطة A عن المستوي P

٦. استنتج معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\ln(x+e^{-x})$$

١. أثبت أنّ التابع f يكتب بالشكل $f(x)=\ln(1+xe^{x})-x$

٢. أثبت أنّ المستقيم الذي معادلتهُ $y=-x$ مقارب مائل لـ C في جوار الـ $-\infty$ وادرس وضعه النسبي

٣. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

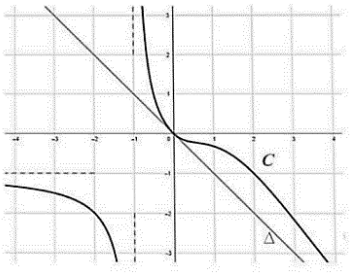
٤. في معلم متجانس ارسم Δ ثم C

٥. استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=\ln(e^{x}-x)$

مكتفة شيفرة الـ 600

أولاً: أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: "40 درجة لكل سؤال":

السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\{-1\}$ والمستقيم $\Delta: y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $+\infty$ والمستقيم Δ يمس الخط C في النقطة O والمطلوب:



١. أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

٢. أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+x)$

٣. أوجد $f(2)$ و $f(-2)$

٤. حدد $f(0)$ و $f'(0)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x}$

السؤال الثاني: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},;\vec{k})$ لتكن النقاط $C(1,2,1)$ و $B(0,2,7)$ و $A(3,2,1)$ والمطلوب:

٣. أوجد إحداثيات النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,3)$ و $(B,2)$ و $(A,1)$

٤. صف Γ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$

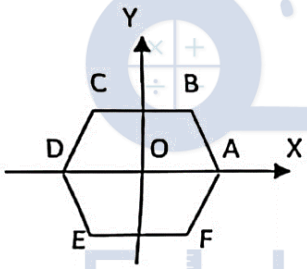
السؤال الثالث: حل المعادلة $(36)^x + 6^{x+1} = 7$ واستنتج حلول المتراجحة $(36)^x + 6^{x+1} \geq 7$

السؤال الرابع: ليكن a و b عددين حقيقيين و C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$f(x) = ax.\ln(x) + bx$$

عين العددين a و b بحيث يكون المماس للخط في النقطة $A(1,-1)$ موازياً لمحور الفواصل.

السؤال الخامس: $(ABCDEF)$ مسدس منتظم طول ضلعهُ (1) والمطلوب:



١. اكتب العدد العقدي الممثل للنقطة B

○ نصل بين ثلاث نقاط لنحصل على مثلث والمطلوب:

٢. ما عدد المثلثات التي يمكن الحصول عليها؟

٣. ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن الحصول عليها؟

٤. ما عدد القطع المستقيمة التي تصل بين رأسيين مختلفين من رؤوس المسدس السابق؟

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية "60 درجة لكل تمرين":

التمرين الأول: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}$ وفق: $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ التابع f يكتب بالشكل $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

٢. احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$

٣. لتكن المتتالية $S_n = f(0) + f(1) + \cdots + f(n)$, أثبت أنّ $S_n = \frac{n+1}{n+2}$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ $u_0 = 4$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$ ثم استنتج أنّ العدد 2 حد قاصر على المتتالية u_n

٢. أثبت أنّ المتتالية u_n متناقصة تماماً.

٣. استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

600 أوراق شرح مفصل

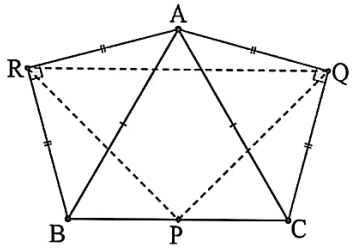
التمرين الثالث: ينتج معمل أسلاك الحديدية بعضها معيب فإذا كانت نسبة الأسلاك المعيبة من انتاج المعمل 6% يشارك في انتاج الأسلاك ألتين A و B تنتج الآلة A: 60% من الأسلاك وتنتج الالة B: 40% من الأسلاك من بينها 5% معيب نختار سلكاً عشوائياً من الأسلاك وليكن E "حدث أن السلك معيب" والمطلوب:

١. ما احتمال أن يكون السلك المعيب وتنتجه الآلة A

٢. ما احتمال أن يكون السلك معيب.

٣. إذا علمت أن السلك معيب ما احتمال أن يكون من انتاج الالة A

التمرين الرابع: نتأمل في الشكل المجاور مثلثاً متساوي الأضلاع ABC نشئ على الضلع $[AB]$ مثلثاً ARB قائماً في R ومتساوي الساقين ونشئ على الضلع [AC] مثلثاً ACQ قائماً في Q ومتساوي الساقين , النقطة P منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ ولتكن الأعداد العقدية r و q و p و c و b و a الممثلة للنقاط R و Q و P و C و B و A في المعلم المتجانس المباشر $(A;\vec{u},\vec{v})$ والمطلوب:



١. أثبت أنّ $r=\frac{1-i}{2}b$ و $q=\frac{1+i}{2}c$

٢. اكتب العدد العقدي p بدلالة c و b

٣. احسب $\frac{p-r}{p-q}$

٤. استنتج طبيعة المثلث PQR

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين "100 درجة لكل مسألة"

المسألة الأولى: نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{v},\vec{k})$ وليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً , وليكن Q المستوي الذي معادلتهُ $x-y+2z+4=0$ وأخيراً لتكن S الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB والمطلوب:

١. أثبت أنّ $2x+y-z-8=0$ هي معادلة المستوي P

٢. جد معادلة الكرة S

٣. أثبت أنّ المستوي Q مستوي مماس للكرة S

٤. أثبت أنّ النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q

- ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً: $d:\begin{cases}x=t\\y=12-5t\\z=4-3t\end{cases};t\in\mathbb{R}$

٥. أثبت أنّ المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q

٦. أثبت أنّ المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

المسألة الثانية: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,2[$ وفق: $f(x)=\ln\left(-1+\frac{2}{x}\right)$ والمطلوب:

١. أثبت أن $(2-x)\in D_f$ أياً كان $x\in D_f$

٢. احسب عند كل x من D_f المقدار: $f(2-x)+f(x)$

٣. استنتج أن النقطة $A(1,0)$ هي مركز تناظر للخط C_f

٤. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

٥. اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة A وادرس الوضع بين C_f و T

٦. ارسم المقاربات والمماس T والخط C_f

٧. استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g المعرف وفق: $g(x)=\ln\left(\frac{2-x}{e.x}\right)$

مكثفة شيفرة الـ 600

النموذج العاشر شامل

أولاً: أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: "40 درجة لكل سؤال":

السؤال الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المستمر على المجال $[0,+\infty[$, جدول تغيراته هو الآتي:

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	3 $\|\|$ -1	$-$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-3

١. هل للخط C مقاربات مائلة؟ علل إجابتك.

٢. دل على القيم الحدية محلياً مبيناً نوعها.

٣. اكتب معادلة لنصف المماس من اليسار للخط C في النقطة $A(1,5)$

٤. عيّن $f([0,+\infty[)$

السؤال الثاني: ليكن العدد $A_n = (1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n$ والمطلوب:

١. احسب A_0 و A_1 و A_2

٢. أثبت أنّ $A_n \in \mathbb{N}$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$

السؤال الثالث: في مجموعة الأعداد القدية $\mathbb{C}$ ليكن لدينا العددان $b = -1+\sqrt{3}i$ و $c = -1-\sqrt{3}i$ والمطلوب:

١. اكتب العدد b بالشكل الأسي واستنتج الشكل الأسي للعدد c

٢. في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن لدينا النقاط A و B و C حيث: $Z_A = a$ و $Z_B = b$ و $Z_C = c$ حيث $a \in \mathbb{R}^+$, عيّن a ليكون المثلث ABC متساوي الأضلاع.

السؤال الرابع: ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{3^n-5^n}{2^n+5^n}$

جد نهاية المتتالية u_n وهل المتتالية u_n متقاربة؟

السؤال الخامس: ليكن لدينا التابع f المعرف وفق: $f(x) = (x+\lambda)e^{2x}$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' - 2y = e^{2x}$

٢. عيّن قيمة λ إذا علمت أنّ مماس الخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 0$ يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = 1 - x$

٣. بفرض $\lambda = -1$ احسب $\int_1^0 f(x)\,dx$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية "60 درجة لكل تمرين":

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sqrt{x^2+ax+b}$ والمطلوب:

١. عيّن a و b بحيث تكون $f(-3) = 1$ قيمة حدية للتابع.

- بفرض $a = 6$ و $b = 10$:

٢. أوجد العددين الحقيقيين m و p اللذان يحققان $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $p = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$

٣. استنتج معادلة للمقارب المائل للخط C في جوار الـ $+\infty$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ والمطلوب:

١. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

٢. أثبت أنّ العدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

٣. احسب نهاية المتتالية عند الـ $+\infty$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]1.9,2.1[$

التمرين الثالث: صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء اللون , نسحب من الصندوق ثلاث كرات وفي آن معاً ليكن A ≪ الحصول على كراء حمراء على الأقل≫ وليكن B ≪ الحصول على كرتين سوداء على الأقل≫ والمطلوب:

١. احسب احتمالات كل من الأحداث A و B و $(A|B)$

٢. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة , اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينهُ.

التمرين الرابع: نتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان

$z_A = 4$	$z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

وليكن I منتصف [AB] والمطلوب:

١. ارسم شكلاً مناسباً وبين طبيعة المثلث OAB

٢. استنتج قياس للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$

٣. احسب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.

٤. استنتج كلاً من $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين "100 درجة لكل مسألة"

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,2[\cup]2,+\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{3\ln x}{4-x^2}$

وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق: $g(x) = \frac{4}{x^2} - 1 + 2\ln x$

١. ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.

٢. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$

٣. احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.

٤. أثبت من أجل كل x من I أنّ: $f'(x) = \frac{3x.g(x)}{(4-x^2)^2}$ ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f

٥. اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 1$

٦. في معلم متجانس ارسم T ثم ارسم C.

المسألة الثانية: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 3$ و $BC = 2$ و $AE = 1$ و J مركز ثقل المثلث BGE

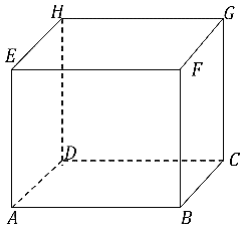
١. أثبت صحة المساواة الشعاعية $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

٢. في معلم متجانس $\left(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ أوجد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات النقطة J.

٣. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DF)

٤. أثبت أنّ النقاط D و J و F تقع على استقامة واحدة.

٥. اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها $[AE]$ ونصف قطرها $[AD]$



مكثفة شيفرة ال 600

2024

النخبة
ELITE MATH

by:Hisham Labanieh
0998817522

شيفرة الـ 600

1. أوراق تم ترتيب الكتاب فيها بهيئة أسئلة بالصيغ المحتملة لورودها وفقاً للتوصيف الوزاري و خطوات الإجابة عنها
2. مخططات وجداول وفهارس لخصت الأفكار بطريقة احترافية مساعدة
3. مسائل امتحانية جزئية و شاملة محلولة
4. نماذج امتحانية شاملة لكل أفكار المنهاج مرفقة بالحل

TELEGRAM: ELITE MATH