شغف رفيقك خطوة بخطوة

شغف التعليمي

Educational passion

القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "

https://t.me/alsh276

مكتبة شغف " بوت الملفات "

https://t.me/passion_study_bot

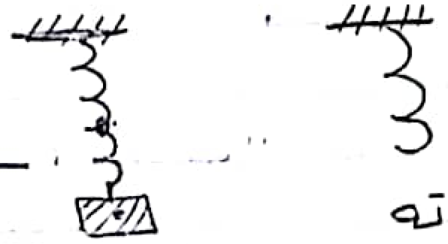
Phy: MARWA AL-Ebied

الوحدة الأولى

الحركة والتموج (1)

الدرس الأول: « الحركة التوافقية البسيطة »

الحركة الاهتزازية: حركة جسم يهتز إلى جانبي نقطة ثابتة تدعى « مركز الاهتزاز » أو « توازن ».



نابض حلقاته متباعدة عديم الكتلة (متوازن).

نابض حلقاته متباعدة له كتلة ← يحتط

← إن حركة اهتزاز جسم معلق بنابض مرن حلقاته متباعدة هي حركة توافقية بسيطة ويدعى هذا المواس المرن.

النواس المرن: جسم صلب معلق بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة. نزيح الجسم عن وضع التوازن شاقولياً نحو الأسفل نلاحظ أن الجسم يهتز اهتزازات حرة على جانبي وضع التوازن وتدعى حركة الجسم بـ الحركة التوافقية البسيطة

تعاريف:

المطال $\bar{X}$: بُعد الجسم المتحرك عن وضع التوازن في لحظة ما من الحركة وهو مقدار متغير مع تغير الزمن $\bar{X} = f(t)$

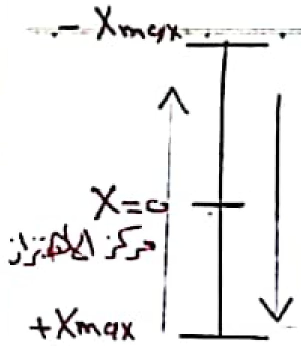
سعة الحركة X_{max}: المطال الأعظمي (أقصى بُعد الجسم عن وضع توازنه) وهو مقدار موجب تماماً.

* مسار الحركة: من $+X_{max} \rightarrow X=0 \rightarrow -X_{max}$

$\rightarrow X=0 \rightarrow +X_{max}$

وعندها نقول أن الجسم قد أجرى هزة كاملة.

Nehad S A B B A G H



- يتحرك الجسم على قطعة مستقيمة طولها $2X_{max}$ قاطعاً مسافة معينة.

الدور الخاص T_0: الزمن اللازم لينجز المتحرك هزة كاملة واحدة في الجملة الدولية (sec) (ثانية)

نواس المرن حركته غير متخامد إنسحابية: توضيح المعاني =

نواس: لأنه يتوسل (يهتز) إلى جانبي موضع التوازن.

مرن: سبب الاهتزاز هو مرونة النابض

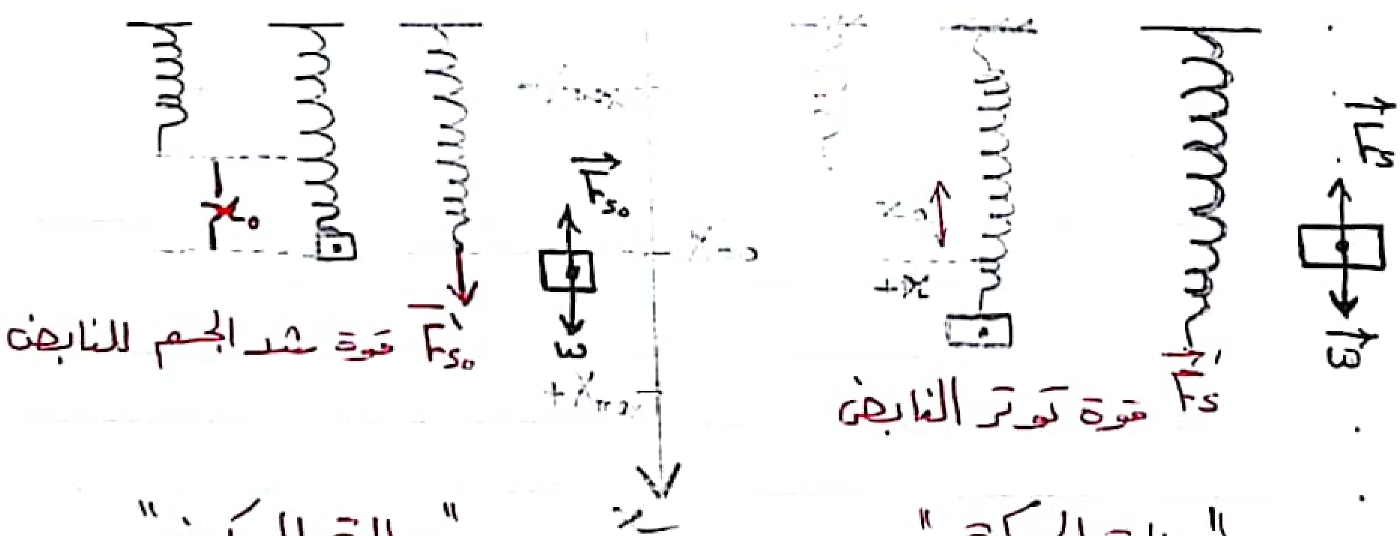
غير متخامد: لا يوجد ضياع في الطاقة، طاقته الكلية تبقى ثابتة

حركة إنسحابية: جميع نقاط الجسم تنتقل من مكان إلى آخر.

Note: تدعى حركته حركة جيبية إنسحابية لا تتخامد عن الطال، تتابع جيبي أي أن الجسم يتحرك بين $+X_{max}$ و $-X_{max}$ مروراً بموضع التوازن.

دراسة تحريكية - قوة الارجاع:

سؤال: في النواس المرن غير متخامد برهن أن محصلة القوة المؤثرة في الجسم هي قوة إرجاع من الشكل $\vec{F} = -K.\vec{x}$ + فسر سبب تسميتها بقوة إرجاع، + بين متى تكون شدة هذه القوة: 1- عظمى ، 2- معدومة.



"حالة السكون" "حالة الحركة"

Nehad S A B B A G H

الاستنتاج

• في حالة السكون :

1- النابض : يتأثر بقوة شد الجسم $\vec{F'_{s_0}}$ تسبب له إستطالة x_0 وحسب قانون هوك شدتها

$$F'_{s_0} = k x_0$$

2- الجسم : يتأثر بقوتين : $\vec{\omega}$ ثقل الجسم & $\vec{F_{s_0}}$ قوة توتر النابض

• نطبق العلاقة الأساسية في التحريك على الجسم في حالة السكون :

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{\omega} + \vec{F_{s_0}} = \vec{0}$$

• بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل :

$$\omega - F_{s_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = F_{s_0} \quad ...(*)$$

يتعرض النابض لقوة شد تسبب له استطالة x_0 وتساوي :

• لكن $F_{s_0} = F'_{s_0} = k x_0$

حيث [F_{s_0} ، F'_{s_0} قوتان متساويتان شدة متعاكستان بالاتجاه لأن النابض مهمل الكتلة] .

نعوض في (*) :

$$\omega = F_{s_0} = k x_0 \quad ....(1)$$

حيث k ثابت صلابة النابض فاحدته N/m

$$; \omega = m.g \Rightarrow m.g = k x_0$$

- x_0 استطالة سكونية : (m) متر

$$\Rightarrow x_0 = \frac{m.g}{k}$$

- كتلة الجسم : (kg) :

$$\Rightarrow m = \frac{k x_0}{g}$$

- ثابت صلابة النابض : $(N.m^{-1})$

$$\Rightarrow k = \frac{m.g}{x_0}$$

• في حالة الحركة :

1- النابض : يتأثر بقوة $\vec{F_s'}$ تسبب له استطالة $(\bar{x}+x_0)$ وشدتها حسب قانون هوك $F_s'=K(\bar{x}+x_0)$

2- الجسم : يتأثر بقوتين : $\vec{\omega}$ ثقل الجسم و $\vec{F_s}$ قوة توتر النابض.

• بتطبيق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي :

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{\omega}+\vec{F_s} = m.\vec{a}$$

• بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل :

$$\omega - F_s = m.a \quad ---(2)$$

• يتعرض النابض لقوة شد تسبب له استطالة $K(\bar{x}+x_0)$ متساوي :

$$F_s' = F_s = K(\bar{x}+x_0)$$

نعوض (1) و(3) في (2) :

$$Kx_0 - K(\bar{x}+x_0) = m.a$$

$$\Rightarrow \cancel{Kx_0} - K\bar{x} - \cancel{Kx_0} = m.a$$

$$\Rightarrow \bar{F} = -K.\bar{x} = m.\bar{a} \quad ; F = m.\bar{a}$$

نستنتج محصلة القوى الخارجية المؤثرة $\Leftarrow \bar{F} = -K\bar{x}$ في مركز عطالة الجسم في كل لحظة هي قوة إرجاع جواب فقرة ؟ لأنها تعيد الجسم إلى مركز الاهتزاز دوماً.

الأسئلة المتوقع تأتي على هذه الفقرة [1] استنتج من الحركة التوافقية البسيطة استطالة سكونية
الحل يكون حالة سكون فقط

[2] استنتج من الحركة التوافقية البسيطة محصلة القوى الخارجية المؤثرة في الجسم هي قوة إرجاع : الحل حالة السكون و الحركة.

+ نستنتج : إن محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في كل لحظة هي قوة إرجاع ؛ لأنها تعيد الجسم إلى مركز الاهتزاز دوماً .

+ مناقشة : ①

$$\underset{(N)}{F} = -\underset{(N.m^{-1})}{K} \cdot \underset{(m)}{\bar{x}}$$

عند المرور بوضع التوازن : $\Leftarrow$ $x = 0$ $\Leftarrow$ $F = 0$

" تنعدم قوة الارجاع في وضع التوازن " مركز الاهتزاز "

$-X_{max}$: $x<0$, $F>0$
$x=0$, $F=0$
$+X_{max}$: $x>0$, $F<0$

② عند المرور بوضع المطال الأعظمي الموجب & السالب $\mp X_{max}$ $\Leftarrow$ $F_{max} = \mp K \cancel{X_{max}}$

" تكون قوة الارجاع عظمى بالوضعين الطرفين "

③ . $\bar{F} = -K\bar{x}$ أي أن عندما $x>0$ موجبة $\Leftarrow$ $F<0$
$x<0$ سالبة $\Leftarrow$ $F>0$

$\Leftarrow$ أي أن F تتناسب طرداً مع المطال & تعاكسه بالإشارة.

استنتاج طبيعة حركة النواس المرن :

في الحركة التوافقية البسيطة: انطلاقاً من أن محصلة القوى هي قوى إرجاع $\Sigma F = -K\bar{x}$ برهن أن حركة النواس المرن حركة جيبية انسحابية ، ثم استنتج علاقة الدور لهذا النواس .

$$\bar{F} = -K\bar{x} \quad ; \quad F = m.a$$

نعوض $\Rightarrow$ $m.a = -K\bar{x}$

• نعلم أن $\bar{a} = (\bar{x})''_t$ التسارع هو المشتق الثاني للمطال.

نعوض $\Rightarrow$ $m \cdot (x)''_t = -K\bar{x}$

نعزل $\Rightarrow$ $(x)''_t = \dfrac{-K}{m}\bar{x}$ .... ①

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل :

$$x = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \dots ②$$

• نشتق مرتين بالنسبة للزمن :

مشتقا أول $(x)'_t = \overline{v} = -\omega_0 X_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$

مشتقا ثاني $(x)''_t = \overline{a} = \underbrace{-\omega_0^2 X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)}_{\overline{x} =}$

$$\Rightarrow \overline{a} = (x)''_t = -\omega_0^2 \cdot \overline{x} \quad \dots ③$$

بالمطابقة (مقارنة) بين ① و ③ نجد:

$\omega_0^2 = \dfrac{K}{m} \Rightarrow$ بالجذر

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} > 0$$

النبض الخاص

مباأن $K > 0$ ، $m > 0$ موجبتان دوما $\Rightarrow$ أن حركة نواس المرن حركة جيبية انسحابية (تواخفية بسيطة)

تابعها الزمني :

$$x = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

استنتاج الدور الخاص في النواس المرن :

• ننطلق $\Leftarrow T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ $\Leftarrow$ نعزل النبض $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

نعلم : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$ نعوض :

$\sqrt{\dfrac{K}{m}} = \dfrac{2\pi}{T_0}$ نقلب $\Rightarrow \sqrt{\dfrac{m}{K}} = \dfrac{T_0}{2\pi}$

$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$ وهي علاقة الدور الخاص.

حيث: T_0: الدور واحدته (S) ثانية

m: كتلة الجسم واحدتها (Kg)

K: الثابت صلابة النابض $(N \cdot m^{-1})$

مناقشة : ① الدور الخاص T_0 يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم المهتز

② الدور الخاص T_0 يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض

أمثلة هامة ستأتي على شكل اختيار أو مسألة :

مثال 1 : نواس مرن مطال الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته K معلق به كتلة m دوره الخاص T_0 نستبدل الكتلة m بكتلة أخرى $m' = 6m$ فما هو الدور الخاص T_0'

الحل:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad ...① \qquad \& \qquad T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{K}} \quad ...②$$

نسبة ① و ② $\Leftarrow$

$$\frac{T_0}{T_0'} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}{2\pi\sqrt{\frac{m'}{K}}} \Rightarrow \frac{T_0}{T_0'} = \sqrt{\frac{m}{m'}}$$

نعوض $m' = 6m \Leftarrow$

$$\frac{T_0}{T_0'} = \sqrt{\frac{\cancel{m}}{6\cancel{m}}} \Rightarrow \frac{T_0}{T_0'} = \sqrt{\frac{1}{6}} \Rightarrow T_0' = \sqrt{6}\, T_0$$

مثال 2 : نواس مرن مطال الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته K معلق به كتلة m دوره الخاص T_0 نستبدل النابض بآخر ثابت صلابته $K' = 3K$ فما هو دوره الخاص T_0' :

الحل ؟ ^^

Not important : لا تتعلق الدور الخاص T_o بسعة الاهتزاز X_{max}

مثال: نواس مرن دوره الخاص $T_o = 2\,sec$ سعة اهتزازه $X_{max} = 5\times10^{-2}\,m$ نجعل سعة اهتزازه $X'_{max} = 10^{-1}\,m$ هل يتغير دوره الخاص ؟.

القوانين المستخدمة:

الدور * $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ (S)

النبض * $\omega_o = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (rad/S)

الدور * $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$

توابع حركة النواس المرن تبدأ دائماً بـ تابع المطال

1) استنتج تابع المطال في النواس المرن، ومتى ينعدم ومتى يكون أعظمياً مع رسم الخط البياني لتغيرات x بدلالة الزمن:

- تابع المطال: $\bar{x} = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

- باختيار شروط بدء مناسبة:

$t=0 \quad , x = \mp X_{max}$

- نعوض في تابع المطال:

$$\cancel{X_{max}} = \cancel{X_{max}} \cdot \cos(\omega_0 (0) + \bar{\varphi})$$

$$\text{نعزل} \Rightarrow \cos(\bar{\varphi}) = \frac{X_{max}}{X_{max}} = 1$$

$$\Rightarrow \bar{\varphi} = 0\ rad$$

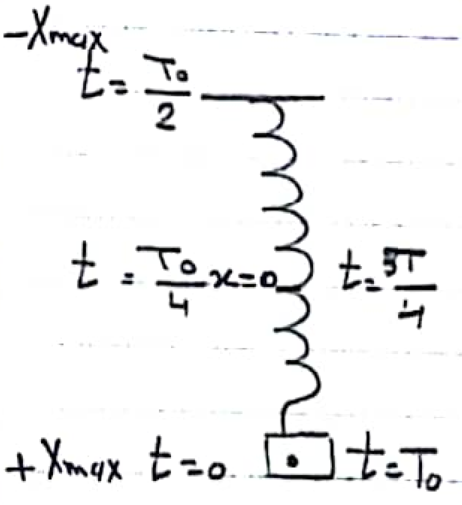
نعوض:

الشكل المختزل لتابع المطال:

$$\Rightarrow \bar{x} = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t)$$

لكن: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ النبض

$$\Rightarrow \bar{x} = X_{max} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$



* مناقشة متى يكون أعظمياً ومتى يكون معدوم:

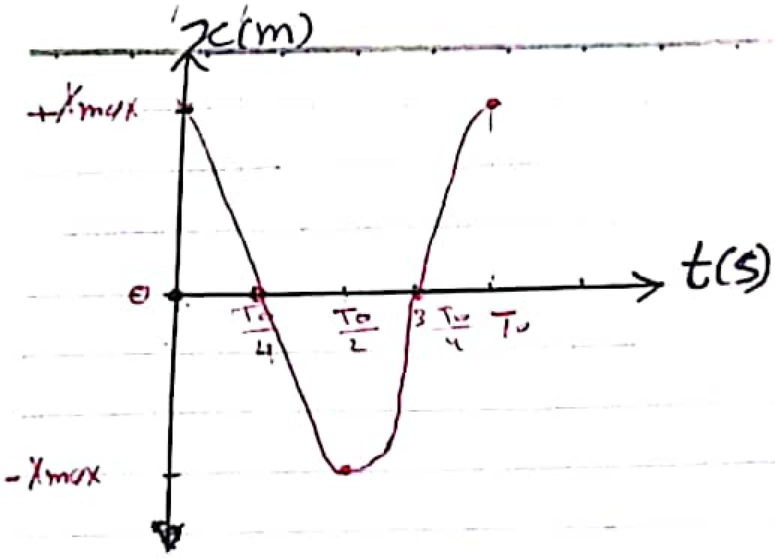
- نقسم النواس إلى أقسام خمسة عند كل قسم يكون له زمن، نعوض الزمن في تابع المطال المختزل فنجد:

$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\bar{x}(m)$	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$

نتائج: 1- يكون المطال أعظمي = في الوضعين الطرفيين $X = |\mp X_{max}|$

2- يكون المطال معدوم = في مركز الاهتزاز $x = 0$.

1



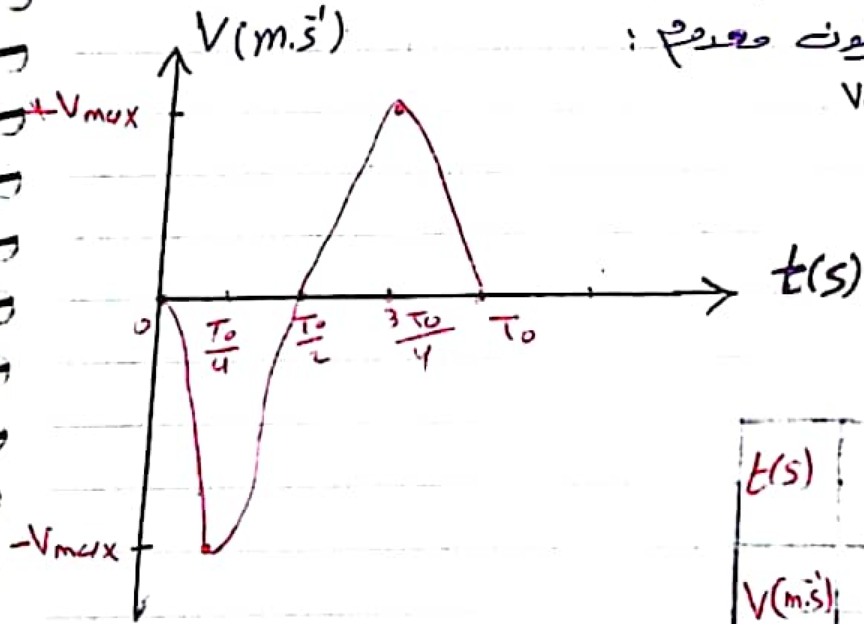
2) تابع السرعة : نبدأ بتابع المطال :

$x = X_{max}.\cos(\omega_0 t + \cancel{\varphi})$ بشكله المختزل

لإيجاد تابع السرعة نشتق مرة بالنسبة للزمن :

$\Rightarrow (x)'_t = (\bar{v}) = -\omega_0 . X_{max} . \sin(\omega_0 t)$

$\Rightarrow \bar{V} = -\omega_0 . X_{max} . \sin(\omega_0 t)$



مناقشة متى يكون أعظمي ومتى يكون معدوم :

عظمى : $V_{max} = -\omega_0 X_{max} (\mp 1)$

$\Rightarrow \sin(\omega_0 t) = \mp 1$

معدوم :

$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$V(m.s^{-1})$	0	$-\omega_0 X_{max}$	0	$+\omega X_{max}$	0

نتائج : 1- يكون السرعة عظمى = في مركز التوازن $v = v_{max} = \omega_0 X_{max}$

2- تكون السرعة معدومة = في الوضعين الطرفين

$X = \mp X_{max} \Rightarrow v = 0$

Nehad S A B B A G H

③ **تابع التسارع:** نبدأ بتابع المطال.

$x = X_{max} . \cos(\omega_0 t)$

نشتق تابع التسارع مرتين بالنسبة للزمن:

$\Rightarrow (x)''_t = \underbrace{-\omega_0^2 . X_{max}(\omega_0 t)}_{x}$

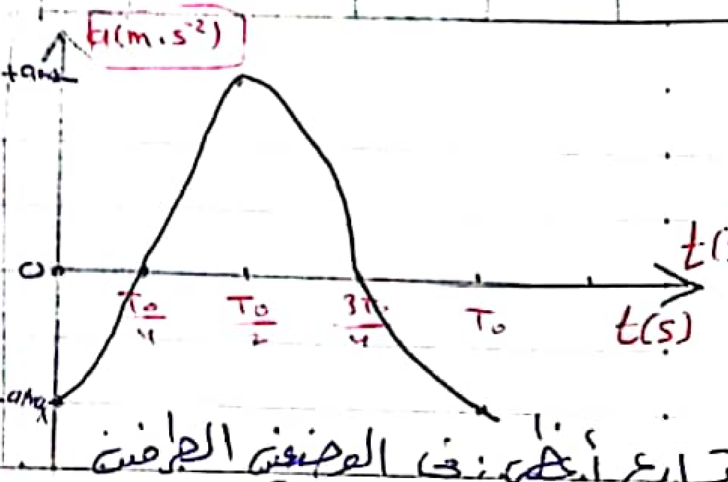
$\Rightarrow a = -\omega_0^2 . x$

- التسارع يتناسب طرداً مع المطال ولكن يعاكسه بالإشارة.
- التسارع متغير بتغير المطال.

مناقشة متى يكون التسارع أعظمي ومتى يكون معدوم:

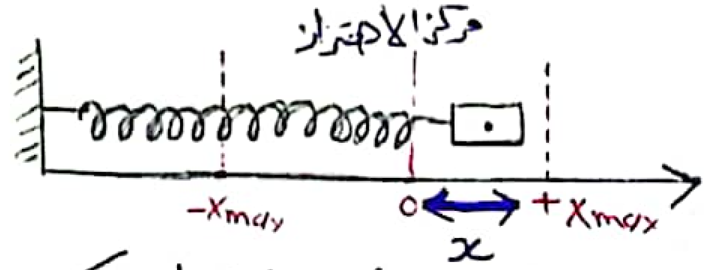
نعوض الأزمنة في تابع التسارع

$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
a $(m.s^{-2})$	[illegible]	0	$+\omega_0^2 X_{max}$	0	$-\omega_0^2 X_{max}$



تسارع أعظمي في الوضعين الطرفين
معدوم: في مركز التوازن

الطاقة الكامنة في الحركة التوافقية البسيطة



نشكل نواساً مرناً أفقياً كما في الشكل،
- نعد مركز عطالة الجسم وهو ساكن مبدأ للفواصل $X=0$:

نزيح الجسم عن وضع توازنه فيتركه يهتز إلى جانبي وضع توازنه على قطعة مستقيمة طولها $2X_{max}$ فيتشكل نواس مرن غير متخامد

الحل: إن الطاقة الميكانيكية للنواس هي مجموع طاقتيه كامنة و حركية:

$E_{tot} = E_p + E_k \quad ... ①$

الطاقة الحركية:

$E_k = \frac{1}{2} m v^2$

$v = -\omega_0 X_{max} . \sin(\omega_0 t + \varphi)$ و

$\Leftarrow$ نربع + نعوض:

$E_k = \frac{1}{2} m . \omega_0^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad ... ②$

الطاقة الكامنة:

$E_p = \frac{1}{2} K x^2$

$x = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \varphi)$ و

Nehad

نربع x و نعوض في E_p:

$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} K X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) \quad ...③$$

& نأخذ عامل مشترك:

نعلم أن: $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

نربع $\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{K}{m}$

$$\Rightarrow K = m.\omega_0^2$$

نعوض في E_k:

$$E_k = \frac{1}{2} K . X_{max}^2 . \sin^2(\omega_0 t + \theta)$$

نعوض في E_{tot}:

$$E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) + \frac{1}{2} K X_{max}^2 . \sin^2(\omega_0 t + \theta)$$

$$\Rightarrow ; \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

عامل مشترك:

$$\Rightarrow E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2 [\cos^2(\omega_0 t + \theta) + \sin^2(\omega_0 t + \theta)]$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2}$$

مناقشة:

$\boxed{1}$ عند $X=0 \Leftarrow E_p = 0$

$\Leftarrow E_{tot} = E_k$

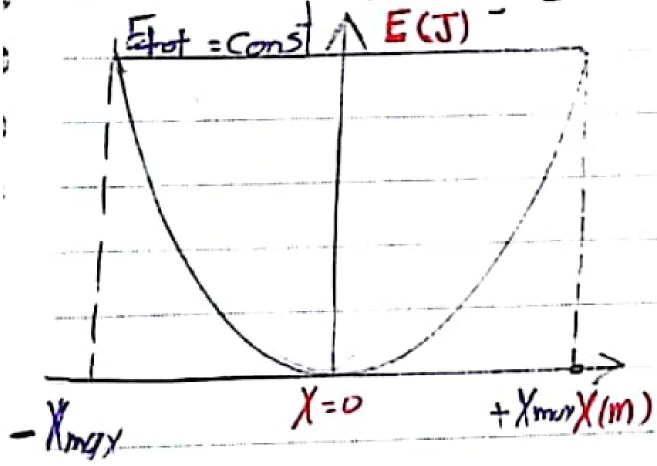
أي عند مركز الاهتزاز تنعدم الطاقة المرونية و تكون الطاقة الكلية هي طاقة حركية فقط

$\boxed{2}$ عند $X = \mp X_{max} \Leftarrow \vartheta = 0$

$\Leftarrow E_k = 0 \Leftarrow$

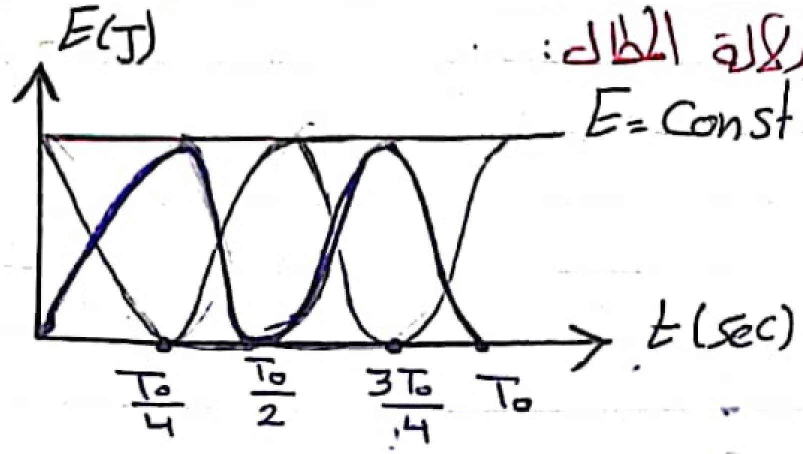
$E_{tot} = E_p$

أي عند الموضعين الطرفين تنعدم الطاقة الحركية و تكون الطاقة الكلية هي طاقة كامنة مرونية فقط



Nehad S A B B A G H

تغيرات الطاقة الكامنة المرونية بدلالة الطال:



سؤال:

1. استنتج علاقة الطاقة الكلية (الميكانيكية) لنواس المرن

ارسم خطا يبين تغيرات الطاقة الميكانيكية & الطاقة الكلية بدلالة الطال

مبيناً متى تنعدم E_p & متى تنعدم E_k باستخدام العلاقات.

Phy: MARWA AL_Ebied

/ /

المسألة الأولى :

1-

$$x = 0{,}05 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$x = x_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$x_{max} = 0{,}05\ m$

$\omega_0 = \pi\ rad.s^{-1}$

$\varphi = \frac{\pi}{2}\ rad$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$$

2-

$$k = m\,\omega_0^2$$
$$m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{10}{10} = 1\ kg$$

3-

$x = 3\times10^{-2}$ عندئذ $v = ?$

$v > 0$ يتحرك باتجاه الموجب

$$v = \omega_0 \sqrt{x_{max}^2 - x^2}$$
$$= \pi\sqrt{25\times10^{-4} - 9\times10^{-4}} = \pi\sqrt{10^{-4}(25-9)}$$
$$v = \pi\sqrt{16\times10^{-4}}$$

$-4\pi\times10^{-2}$ مرفوض

$+4\pi\times10^{-4}$ مقبول

$$v = 4\pi\times10^{-2}\ m.s^{-1}$$

شغف التعليمي
Educational passion

4- عند موضع : احسب x عند بدء الحركة : احسب v

في بدء الزمن $t = 0$

$$x = 0{,}05 \cos\left(\pi(0) + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 0{,}05 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$x = 0\ m$$

الجسم في مركز اهتزازه وضع توازنه

لتحديد جهة الحركة نحسب v :

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 (t) + \phi)$$

$$v = -\pi \times 5 \times 10^{-2} \sin(\frac{\pi}{2})$$

$$v = -5\pi \times 10^{-2} \ m.s^{-2}$$

$v < 0$ الجسم يتحرك باتجاه السالب

شغف التعليمي
Educational passion

المسألة 2 ص 17 :

$m = 4 \times 10^{-1}\ kg \qquad X_{max} = 10 \times 10^{-2} = 10^{-1}\ m \qquad E = 5 \times 10^{-2}$

1.

$$E = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \Longrightarrow 5 \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times k \times (10^{-1})^2$$

$$\Longrightarrow k = \frac{2 \times 5 \times 10^{-2}}{10^{-2}} = 10\ N.m^{-1}$$

2. حساب T_0 : طريقة 1

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\Longrightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{4 \times 10^{-1}}{10}} = 2\sqrt{\frac{4}{10}} = 2 \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{\pi}$$

$$\Longrightarrow T_0 = \frac{4\pi}{\pi^2} = 4\pi \times 10^{-1} = 12{,}5 \times 10^{-1}$$

$$= 1{,}25\ S$$

شغف التعليمي
Educational passion

طريقة 2 (نفس الأولى ولكن الإختلاف بالحسابات) :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\Longrightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{4 \times 10^{-1}}{10}} = 2\pi \sqrt{4 \times 10^{-2}}$$

$$= 2\pi \times 2 \times 10^{-1} = 4\pi \times 10^{-1}$$

$$= 1{,}25\ S$$

طريقة 3 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{4\times10^{-1}}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{10}{2} = 5\,Rad.S^{-1}$$

$$\Longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{10} = \frac{12{,}5}{10} = 1{,}25\,S$$

- حساب السرعة عند المرور بمركز الاهتزاز :

نعلم أنه في مركز الاهتزاز $E = E_k$: و $E_p = 0$

$$\Longrightarrow E = 5\times10^{-2}\,J$$

ونعلم أن $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

$$\Longrightarrow 5\times10^{-2} = \frac{1}{2}\times 4\times10^{-1}\times v^2$$

$$\Longrightarrow 10^{-1} = 4\times10^{-1}\times v^2$$

$$\Longrightarrow 1 = 4v^2 \Longrightarrow v^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow v = \frac{1}{2}\,m.S^{-1}$$

شغف التعليم
Educational passion

المسألة الثالثة ص[18] :

$d = 16 \times 10^{-2} m$, $t = 10 s$, $n = 10$ هزة , $m = 1 Kg$.

$$T_0 = \frac{t}{n} = \frac{10}{10} = 1 s$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi \; Rad.s^{-1}$$

$$d = 2 x_{max} \Rightarrow x_{max} = 8 \times 10^{-2} m.$$

1- جملة مقارنة خارجية المدروسة لنواس مرن ، القوة المؤثرة :

1- $\vec{w}$ ثقل الجسم 2- $\vec{f_{so}}$ قوة توتر النابض 3- $\vec{f'_{so}}$ قوة شد النابض

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$
$$\vec{w} + \vec{f_{so}} = \vec{0}$$

نسقط شاقولياً للأسفل

$$w - f_{so} = 0 \Rightarrow w = f_{so}$$

ولدينا $f'_{so} = f_{so} = k x_0$

$$\Rightarrow w = k x_0$$

$$x_0 = \frac{w}{k} = \frac{m.g}{k}$$

$$x_0 = \frac{m.g}{\omega_0^2 m} = \frac{g}{\omega_0^2}$$

$$x_0 = \frac{10}{4\pi^2} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} m$$

2- حساب [illegible] :

$v_{max} = |-\omega_0 x_{max}|$

$v_{max} = 2\pi \times 8 \times 10^{-2}$

$= 16\pi \times 10^{-2}$

$= 50 \times 10^{-2} = 5 \times 10^{-1}\ m.s^{-1}$

3- حساب قيمة التسارع عندما $x = 6 \times 10^{-2}\ m$.

$\bar{a} = -\omega_0^2 x$

$\bar{a} = -4\pi^2 \times 6 \times 10^{-2} = -24 \times 10^{-1}\ m.s^{-2}$

4- حساب E_p عند $x = -4 \times 10^{-2}\ m$ وكذلك E_k :

$E_p = \frac{1}{2} k x^2$

$k = \omega_0^2 m = 40 \times 1 = 40\ N.m^{-1}$

$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}(40)(-4 \times 10^{-2})^2$

$\Rightarrow E_p = 20 \times 16 \times 10^{-4} = 32 \times 10^{-3}\ J.$

$E_k = \frac{1}{2} k (x^2_{max} - x^2)$

$E_k = 20\ (64 - 16) \times 10^{-4}$

$E_k = 2 \times 48 \times 10^{-3} \Rightarrow E_k = 96 \times 10^{-3}\ J.$

المسألة الرّابعة : ص 18

$x_{max} = 10^{-1} m$. $T_0 = 1 s$. $k = 16\ N.m^{-1}$. $m = ?$

شروط البدء : $t=0$

$x = x_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$x = \frac{x_{max}}{2}$

$v < 0$

1- تحدد الثوابت :

$\omega_0 = 2\pi\ Rad.s^{-1}$ $x_{max} = 10^{-1} m$

$\overline{x} = x_{max} . \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$t = 0$

$x = \frac{x_{max}}{2} \Longrightarrow \frac{x_{max}}{2} = x_{max} . \cos(\varphi)$

$\Longrightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}$

$v < 0$ مقبول إما $\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad

$v > 0$ مرفوض أو $\varphi = \frac{-\pi}{3}$ rad

السبب :

$\overline{v} = - \omega_0\, x_{max} \sin\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{+\frac{\sqrt{3}}{2}} < 0$

$\Longrightarrow \overline{x} = -10^{-1} \cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$

2 ـ في لحظة التوازن تكون : $x = 0$

$$x = 10^{-1} \cdot \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi K\right)$$

$$2t + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + K$$

$$12t + 2 = 3 + 6K$$

$$12t = 1 + 6K$$

$$t = \frac{1}{12} + \frac{K}{2} \quad : K \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

$K = 0$ المرور الأول : $t_1 = \frac{1}{12} s$

$K = 1$ المرور الثاني :

$K = 2$ المرور الثالث : $t_3 = \frac{1}{12} + \frac{2}{2} = \frac{13}{12} s$

3 ـ حساب شدة قوة الإرجاع عند $x = 0.1 m$

قوة إرجاع $f = -Kx$ $\quad f = +Kx$

$$f = 16 \times 10^{-1} = 1.6 N$$

شدة قوة الإرجاع $f = +Kx$ $\quad w_0^2 = \frac{K}{m}$

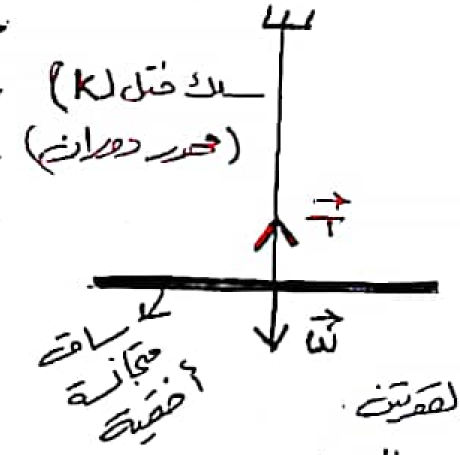
$$\Rightarrow m = \frac{K}{w_0^2} = \frac{16}{4\pi^2} = \frac{4}{10}$$

$$= 0.4 \, Kg$$

Phy: MARWA Al-Ebied

الدرس الثاني: « الاهتزازات الجيبية الدورانية نواس الفتل
غير متخامد »

1- نواس الفتل: يتكون من ساق متجانسة أفقية تعلق من مركز عطالتها بسلك فتل
شاقولي ثابت فتله (K) مركزها لتتوازن



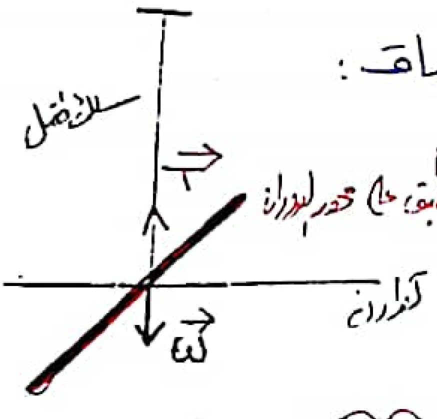
2- الدراسة التحريكية للنواس الفتل:

- عند التوازن تتأثر الساق
بقوتين $\vec{\omega}$ ثقل الساق
$\vec{T}$ قوة توتر الخيط

$\Gamma_{\vec{\omega}/\Delta}$ ، $\Gamma_{\vec{T}/\Delta} = 0$ لأن حامل كل من القوتين
منطبق على محور الدوران

- ندير الساق بزاوية θ عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي
تنشأ في سلك الفتل مزدوجة فتل η تقاوم عملية الفتل ، تحاول إعادة الساق
إلى وضع توازنها.

إن Γ_{η} (عزم مزدوجة الفتل) متناسب طرداً مع زاوية الفتل θ ويعاكسها بالإشارة
أي $\Gamma_{\eta/\Delta} = -K\theta$ ← عزم مزدوجة الفتل
ثابت الفتل



- نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني على الساق:

$$\Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} + \Gamma_{\vec{T}/\Delta} + \Gamma_{\vec{\omega}/\Delta} = I_{\Delta}.\bar{\alpha}$$

عزم قوة الثقل وقوة التوتر معدوم (انعدام) لأن حامل ω و T منطبق على محور الدوران

$$-K\bar{\theta} + 0 + 0 = I_{\Delta}.\bar{\alpha}$$

$$\Rightarrow \Sigma\bar{\Gamma} = -K\bar{\theta} = I_{\Delta}.\bar{\alpha}$$

أي أن محصلة عزوم القوى المؤثرة على الساق هو عزم إرجاع
لأنه: يحاول إعادة الساق إلى وضع توازنها.

سؤال: في نواس الفتل: برهن أن محصلة عزوم القوى المؤثرة على الساق
هو عزم إرجاع

سؤال: في نواس الفتل انطلاقاً من أن محصلة عزوم القوى الخارجية هو عزم إرجاع 1 استنتج طبيعة حركة نواس الفتل .
2 استنتج علاقة دوره الخاص

الجواب:

وجدنا
$$\sum \overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_{\eta/\Delta} = -K\overline{\theta} = I_\Delta . \alpha$$

لكن
$$\overline{\alpha} = (\overline{\omega})'_t = (\overline{\theta})''_t$$
; [التسارع الزاوي هو المشتق الثاني للمطال الزاوي]
$$\Rightarrow -K\overline{\theta} = I_\Delta (\overline{\theta})''_t$$

$$\text{نعزل} \Rightarrow (\theta)''_t = -\frac{K}{I_\Delta}\overline{\theta} \quad \ldots\ (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:
$$\theta = \theta_{max} . \cos(\omega_0 t + \overline{\varphi}) \ldots (2)$$
• نشتقها (2) مرتين بالنسبة للزمن (للتحقق):

$$(\theta)'_t = \overline{\omega} = -\omega_0 \theta_{max} . \sin(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$ تابع السرعة الزاوية

$$(\theta)''_t = \overline{\alpha} = -\omega_0^2 . \theta_{max} . \underbrace{\cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})}_{\theta}$$

$$\Rightarrow \alpha = (\theta)''_t = -\omega_0^2 . \overline{\theta} \quad \ldots\ (3)$$

بالمطابقة بين (1) و (3) نجد أن:
$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow \text{بالجذر}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} > 0$$
هامة

وهذا محقق لأن $\sqrt{I_\Delta} > 0$, $\sqrt{K} > 0$ فإن I_Δ & K موجبتان دوماً ⇐ حركة نواس الفتل حركة جيبية دورانية تابعية الزمن
$$\overline{\theta} = \theta_{max} . \cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$

استنتاج الدور الخاص في النواس الفتل :

ننطلق من : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ و $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$

نعوض $\Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$ $\Rightarrow$ نقلبا

$\Rightarrow \frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$ $\Rightarrow$ نعزل $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$.

مناقشة : 1. الدور الخاص T_0 لا يتعلق بـ السعة الزاوية للحركة θ_{max}

2. " " T_0 يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لعزم عطالة $\sqrt{I_\Delta}$

3_. الدور الخاص يتناسب ~~عكساً~~ عكساً مع الجذر التربيعي لثابت فتل السلك $\sqrt{k}$

ملاحظات هامة :

1. يعطى ثابت فتل السلك K بالعلاقة : $K = K' \frac{(2r)^4}{l}$

حيث :

K' : ثابت يتعلق بنوع المادة المصنوع منها السلك

$2r$: قطر للسلك الفتل l : طول سلك الفتل

تطبيق: في نواس الفتل إذا جعلنا طول سلك الفتل نصف ما كان عليه $l' = \frac{1}{2} l$

فإن ثابت فتل السلك K :

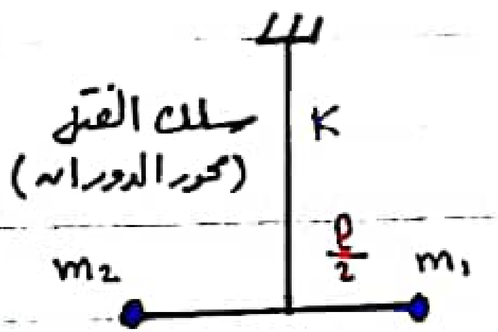
$$K_1 = K' \frac{(2r)^4}{(l')} \Rightarrow K_1 = K' \frac{(2r)^4}{(\frac{1}{2} l)}$$

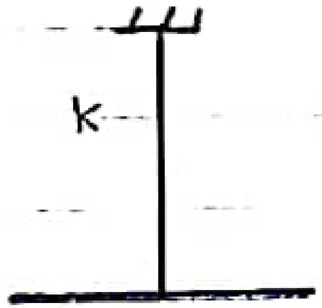
$$K_1 = 2\left[K' \frac{(2r)^4}{l}\right] = 2K$$

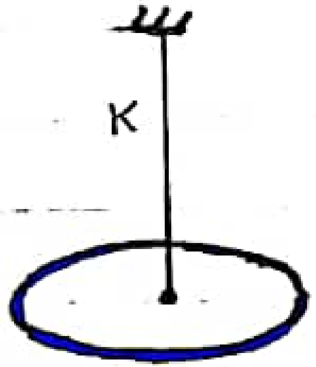
$$\Rightarrow K_1 = 2K$$

الموضوع: التاريخ: / /

* يمكن استبدال الساق الأفقية بقرص متجانس أو بساق أفقية نثبت على جانبيها كتلتين متماثلتين $m_1 = m_2$ عندها يختلف فقط I_Δ عزم عطالة النواس







$$I_\Delta = \frac{1}{12} m \ell^2 + 2\left(m_1 \frac{\ell^2}{4}\right)$$

$$I_{\Delta/\ell} = \frac{1}{12} m \ell^2$$

$$I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} M R^2$$

3- التشابه الشكلي بين النواس المرن ونواس الفتل :

النواس المرن	الواحدة	نواس الفتل	الواحدة
$\bar{x} = x_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	(m متر)	$\bar{\theta} = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	(rad)
$\bar{v} = -\omega_0 x_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	(m/s)	$\bar{\omega} = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	(rad/s)
$\bar{a} = -\omega_0^2 \bar{x}$	(m/s²)	$\bar{\alpha} = -\omega_0^2 \bar{\theta}$	(rad/s²)
الكتلة (m)	(Kg)	* عزم العطالة I_Δ	(Kg.m²)
ثابت صلابة النابض K	(N/m)	ثابت فتل سلك التعليق K	(m.N.rad⁻¹)
قوة الإرجاع $\bar{F} = -K\bar{x}$ (المعادل الرجوع لموضع التوازن)	(N)	عزم الإرجاع $\Gamma = -K\bar{\theta}$	(m.N)
النبض الخاص $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$	(rad/s)	النبض الخاص $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$	(rad/s)
الدور الخاص $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$	(Sec)	الدور الخاص $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$	(Sec)
طبيعة الحركة : جيبية إنسحابية		طبيعة الحركة : جيبية دورانية	
الطاقة الكامنة : $E_p = \frac{1}{2} K x^2$	(J)	الطاقة الكامنة $E_p = \frac{1}{2} K \theta^2$	(J)
الطاقة الحركية : $E_K = \frac{1}{2} m v^2$	(J)	الطاقة الحركية : $E_K = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$	(J)
الطاقة الكلية : $E_{tot} = \frac{1}{2} K x_{max}^2$	(J)	الطاقة الكلية : $E_{tot} = \frac{1}{2} K \theta_{max}^2$	(J)

ملاحظات:

1 ميقاتية تؤخر ⇐ للإصلاح يجب إنقاص الدور الخاص T_0

2 ميقاتية تقدم ⇐ للإصلاح يجب زيادة الدور الخاص T_0.

- المسألة الأولى -

قرص متجانس : $M = 2kg$ $r = 4\times10^{-2} m$ $K = 16\times10^{-3} m.N.Rad^{-1}$

$\theta = \theta_{max} = +\frac{\pi}{4}\,Rad$

الحل:

1) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$

نحسب أولاً I_Δ :

$I_\Delta = \frac{1}{2}Mr^2 = \frac{1}{2}\times2\times(16\times10^{-4}) = 16\times10^{-4}\,kg.m^2$

$\Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-4}}{16\times10^{-3}}} = 2\pi\sqrt{10^{-1}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2\sqrt{1} = 2s$

2) التابع الزمني للمطال :

الشكل العام : $\theta = \theta_{max}\cdot\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

نريد تعيين الثوابت: ω_0 ، θ_{max} ، $\bar{\varphi}$:

A] $\bar{\varphi}$: $t=0$

$\theta = \theta_{max} \Longrightarrow \theta_{max} = \theta_{max}\cdot\cos\bar{\varphi} \Longrightarrow \cos\bar{\varphi} = \frac{\theta_{max}}{\theta_{max}} = 1$

$\Longrightarrow \boxed{\bar{\varphi} = 0}$

B] $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,Rad.S^{-1}$

C] $\theta_{max} = +\frac{\pi}{4}\,Rad$

شغف التعليمي
Educational passion

نعوض في الشكل العام :

$$\theta = \frac{\pi}{4} \cdot \cos(\pi t)$$

3) حساب E_p و E_k عندما $\theta = \frac{\pi}{8}$ Rad

- $E_p = \frac{1}{2} k\theta^2$

$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} \times 16 \times 10^{-3} \times \left(\frac{\pi^2}{64}\right) \Rightarrow E_p = \frac{1}{8} \times 10^{-2} J$$

$$E_p = 0{,}125 \times 10^{-2} J$$

$$E_k = \frac{1}{2} k(\theta_{max}^2 - \theta^2)$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \times 16 \times 10^{-3} \times \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{64}\right)$$

$$\Rightarrow E_k = 8 \times 10^{-3} \times \frac{3\pi^2}{64} = \frac{3}{8} \times 10^{-2} J$$

$$\Rightarrow E_k = 0{,}375 \times 10^{-2} J$$

الشغف التعليمي
Educational passion

المسألة الثانية :

1 استنتاج التابع الزمني لمطال الحركة :

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

تحديد الثوابت :

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ \omega = 0 \end{array}\right] \Rightarrow \theta = \boxed{\theta_{max} = \frac{\pi}{3} \, rad}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{5}{2}} = \boxed{\frac{4\pi}{5} \, rad.s^{-1}}$$

لتحديد φ من شروط البدء :

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ \theta = \theta_{max} \end{array}\right] \cancel{\theta_{max}} = \cancel{\theta_{max}} \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = 0 \, rad}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{4\pi}{5} t\right)$$

2

شغف التعليمي
Educational passion

$$t_1 = \frac{T_0}{4} = \frac{\frac{5}{2}}{4} = t_1 = \frac{5}{8} \, s$$

$$\omega = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$= -\frac{4\pi}{5} \times \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{4\pi}{5} \times \frac{5}{8} + 0\right)$$

$$\omega = -\frac{8}{3} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 1$$

$$\boxed{\omega = -\frac{8}{3} \, rad.s^{-1}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{D,\text{مجموعة}}}{k}}$$ $\boxed{3}$

$$\frac{5}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{D,\text{مجموعة}}}{16\times10^{-3}}}$$ تربيع

$$\frac{25}{\cancel{4}} = \cancel{4}0\,\frac{I_{D,\text{مجموعة}}}{\cancel{4}\,\cancel{16}\times10^{-3}}$$

$$I_{D,\text{مجموعة}} = 25\times10^{-4}\ kgm^2$$

$$I_{D,\text{مجموعة}} = \cancel{I_{D,c}} + I_{D,m_1} + I_{D,m_2}$$

مهملة الكتلة $\qquad m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$$r_1 = r_2 = \frac{l}{2}\ /\ m_1 = m_2$$

$$I_{D,\text{مجموعة}} = 2m_1 r_1^2 \Rightarrow 2m_1\frac{l^2}{4}$$

$$l^2 = \frac{4\,I_{D,\text{مجموعة}}}{2m_1} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\times\cancel{25}\times\cancel{10^{-4}}}{\cancel{2}\times\underset{5}{\cancel{125}}\times10^{-3}}$$

$$l^2 = 4\times10^{-2}$$

$$l = 2\times10^{-1}\ m$$

شغف التعليمي
Educational passion

- المسألة الثالثة -

$I_{\Delta/c} = 2\times10^{-3}\,kg.m^2 \quad T_0 = 1s \quad \theta = \frac{\pi}{3}\,Rad \quad l = ab = 40\,cm$

1) التّابع الزمني للمطال الزّاوي :

نكتب الشكل العام : $\theta = \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

نريد تعيين الثوابت ω_0 , θ_{max} , $\bar{\varphi}$ ،

A] $\bar{\varphi}$: $t=0$

$\theta = \theta_{max} \Longrightarrow \theta_{max} = \theta_{max}.\cos\bar{\varphi} \Longrightarrow \cos\varphi = 1$

$\Longrightarrow \varphi = 0\,Rad$

B] $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\,Rad.s^{-1}$

C] $\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\,Rad$

نعوض : $\theta = \frac{\pi}{3}.\cos(2\pi t)$

2) حساب السرعة الزاوية لحظة المرور الثاني بالتوازن :

نكتب تابع السرعة $\omega_2 = -\omega_0.\theta_{max}.\sin(2\pi t)$

$\omega_2 = -2\pi.\frac{\pi}{3}.\sin(2\pi t)$

عند التوازن $\theta = 0$ ، أي :

$\cos(2\pi t) = \cos(\frac{\pi}{2} + \pi k)$

$\Longrightarrow 2t = \frac{1}{2} + k \Longrightarrow t = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$ ؛ $k = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

/ /

. عند المرور الأول $k=0$

. عند المرور الثاني (هو المطلوب) $k=1$

$$\Longrightarrow t = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{4}\,s}$$

نعوض t في تابع السرعة:

$$\omega_2 = -2\pi \times \frac{\pi}{3} \cdot \sin\left(2\pi \times \frac{3}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow \omega_2 = -\frac{2\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = +\frac{2\pi}{3}\ Rad.s^{-1}$$

3) حساب قيمة التسارع عندما $\theta = -\frac{\pi}{6}$ Rad :

$$\alpha = -\omega_0^2\,\bar{\theta} = -4\pi^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = +\frac{2\pi}{3}\pi\ .\ Rad.s^{-2}$$

b) ؟ تثبيت كتلتين $m_1 = m_2 = 75\times10^{-3}\,kg$:

. نحسب $I_{D_{\text{مجلة}}}$:

$$I_{D_{\text{مجلة}}} = I_{D/C} + m_1 d^2 + m_2 d^2$$

$$\Longrightarrow I_{D_{\text{مجلة}}} = I_{D/C} + 2m_1 d^2 = I_{D/C} + 2m\frac{\ell^2}{4}$$

$$\Longrightarrow I_{D_{\text{مجلة}}} = 2\times10^{-3} + 2(75\times10^{-3}) \times \frac{16\times10^{-2}}{4} = 8\times10^{-3}\ kg.m^2$$

$$\star\ \frac{T_0'}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I_{D\text{مجلة}}}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_{D/C}}{k}}} \Longrightarrow \frac{T_0'}{T_0} = \frac{\sqrt{I_{D\text{مجلة}}}}{\sqrt{I_{DC}}}$$

شغف التعليمي
Educational passion

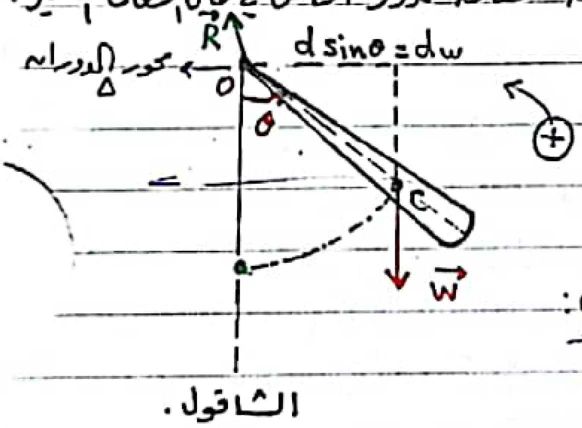
الدرس الثالث : الإهتزازات غير التوافقية
النواس الثقلي غير المتخامد

تعريف : النواس الثقلي :
كل جسم صلب يهتز بتأثير عزم قوة ثقله حول محور دوران عمودي على مستويه ، ولا يمر من مركز عطالته.

الدراسة التحريكية للنواس الثقلي :

سؤال: جسم صلب كتلته m ، مركز عطالته c ، معلق إلى محور دوران أفقي Δ عمودي على مستويه مار من النقطة o حيث $oc = d$
نزيح الجسم عن موضع توازنه الشاقولي بزاوية θ ونتركه دون سرعة ابتدائية ليهتز في مستوٍ شاقولي والمطلوب :
١- إدرس تحريكياً هذا الجسم واستنتج المعادلة التفاضلية التي تصف حركته.
٢- كيف تصبح هذه المعادلة في حال السعات الصغيرة ، استنتج طبيعة الحركة في هذه الحالة واستنتج العلاقة العامة لدوره الخاص في حال السعات الصغيرة.

الجواب :



تؤثر في الجسم قوتان: ١. ثقل الجسم $\vec{W}$
٢- رد فعل محور الدوران على الجسم $\vec{R}$

بتطبيق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني:
$$\Sigma \Gamma_{\Delta} = I_{\Delta}\bar{\alpha}$$

$$\Gamma_{\vec{W}/\Delta} + \Gamma_{\vec{R}/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha} \quad ...(1$$

$\Gamma_{\vec{R}/\Delta} = 0$ لأن حامل القوة $\vec{R}$ يمر من محور الدوران.

عزم قوة الثقل $\Gamma_{\vec{W}/\Delta} = -\underbrace{d_W}_{\text{ذراع قوة الثقل}} \cdot W = -d \cdot \sin\theta \cdot m \cdot g$

(-) لأنه $\Gamma_{\vec{W}/\Delta}$ تسبب الحركة بالجهة السالبة.

نعوض في 1) $-d\sin\theta\, mg + 0 = I_\Delta \cdot \bar{\alpha}$

لكن $\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t \Leftarrow$

$$-d\, m.g.\sin\theta = I_\Delta (\bar{\theta})''_t$$

هام جداً دورة

[I وحدة الجدول التي على الشكل الجدول) $\Rightarrow$ $\boxed{(\bar{\theta})''_t = -\frac{m.g\,d}{I_\Delta}\sin\theta}$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تحوي $\sin\theta$ بدلاً من θ فحلها ليس جيبياً $\Leftarrow$ حركة النواس الثقلي هي حركة اهتزازية غير توافقية

في حالة السعات الزاوية الصغيرة: $\theta \leq 0{,}24\ rad$ ($14°$) : $[\theta \leq 14°]$:

فإن $\sin\theta \simeq \theta \Leftarrow$

لا نضع واحدة لأننا نسب مثلثية

تُعطى بـ rad

$$\boxed{(\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\cdot\bar{\theta}} \quad ...1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \quad ....2) \quad (\text{المطال الزاوي})$$

للتحقق من أن 2) حل لـ 1) نشتق تابع المطال الزاوي مرتين بالنسبة للزمن.

$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ ← السرعة الزاوية

$\bar{\alpha} = (\theta)''_t = -\omega_0^2\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ ← التسارع الزاوي.

$$\bar{\alpha} = (\theta)''_t = -\omega_0^2\bar{\theta} \quad ...3)$$

بمطابقة 1) مع 3) نجد أن: $\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta}$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا محقق لأنه: I_Δ, d, g, m موجبة $\Leftarrow$ 2) هي حل لـ 1)

$\Leftarrow$ حركة النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية.

Al Abrash

إستنتاج علاقة الدور الخاص للاهتزاز:

وجدنا أن: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}$

لكن: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}}$$

وهي العلاقة العامة للدور الخاص للنواس الثقلي في حالة الإهتزازات صغيرة السعة

حيث: I_Δ عزم عطالة النواس وحدته $Kg.m^2$

m كتلة النواس (Kg).

d : بُعد مركز عطالة النواس C عن محور الدوران Δ المار بـ O

أي: $d = OC$ يمكن حساب d بإحدى الطريقتين:

① من علاقة التوازن الدوراني $\sum \Gamma_{\Delta/C} = 0$ [المجموع الجبري لعزوم القوى الخارجية حول محور مار من مركز عطالة الجسم معدوم].

② من العلاقة:

$$d = OC = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

$\bar{r}_i$ بُعد الكتلة m_i عن محور الدوران : وهو مقدار جبري يُعتبر:

موجباً إذا كان مركز عطالة الكتلة المهتزة تحت محور الدوران.

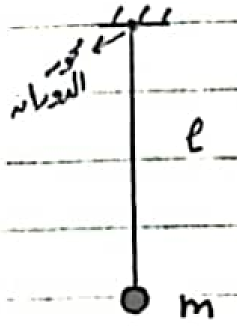
سالباً إذا كان مركز عطالة الكتلة المهتزة فوق محور الدوران.

T_0 : دور النواس الثقلي الخاص بسعة زاوية صغيرة (sec).

- النواس الثقلي البسيط :

نظرياً : نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها على بعد ثابت l من محور أفقي ثابت.

عملياً : كرة صغيرة كتلتها m كثافتها النسبية كبيرة معلقة بخيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله l كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة.



الدراسة التحريكية :

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة : $\vec{W}$ ثقل الكرة

$\vec{T}$ توتر الخيط.

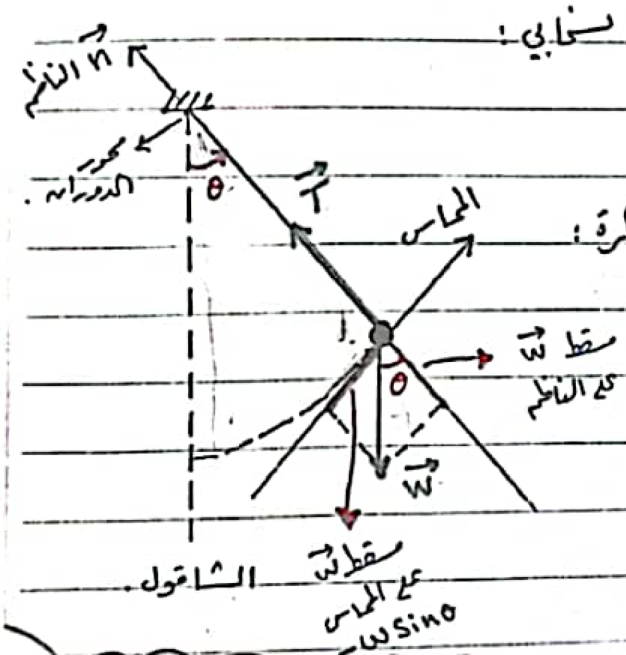
بتطبيق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي :

$$\Sigma \vec{F} = m\cdot\vec{a}$$

$$\vec{W}+\vec{T} = m\cdot\vec{a}$$

بالإسقاط على المماس الموجه بجهة إزاحة الكرة :

$$-mg\sin\theta + 0 = m\cdot\bar{a}_t \quad ...(*$$



لكن : $\bar{a}_t = l\cdot\bar{\alpha} = l\cdot(\bar{\theta})''_t$ ، $r = l$

$$\Rightarrow -\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}\,l\,(\bar{\theta})''_t$$

$$\Rightarrow (\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

$\sin\theta \simeq \theta$
$\theta \le 0.24$
$\theta \le 14^\circ$

• ملاحظة : من (* نجد
$a_t = -g\sin\theta$
وهي علاقة التسارع المماسي.

• في حال السعات الزاوية الصغيرة : $\sin\theta \simeq \theta$:

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\bar{\theta} \quad ...(1$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل :

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \quad ...(2$$

للتحقق نشتق 2) مرتين بالنسبة للزمن :

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\,\bar{\theta} \quad ...(3$$

بالمطابقة بين 1) و 3) نجد :

الموضوع: التاريخ: / /

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} > 0$$

حيث g تسارع الجاذبية الأرضية.

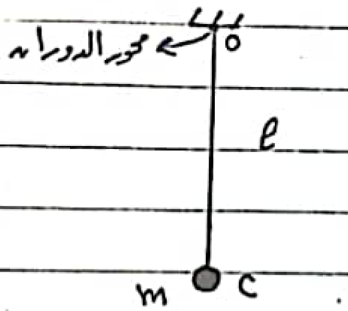
وهذا محقق لأن g ، ℓ مقداران موجبان ⇐

حركة النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية

استنتاج علاقة الدور الخاص:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

هام * ملاحظة: يمكن الوصول لعلاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط انطلاقاً من: العلاقة العامة للدور الخاص للنواس الثقلي المركب في حالة السعات الصغيرة:



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$$

حيث $d = oc = \ell$ ، $I_\Delta = m\ell^2$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{m}\ell^2}{\cancel{m} g \ell}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

هامة

مناقشة:

1- لا يتعلق دور النواس البسيط بـ كتلته m ولا بنوع مادة كرته.

2- النوسات صغيرة السعة لها الدور نفسه

3- الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط من أجل السعات الصغيرة: يتناسب طرداً مع $\sqrt{\ell}$ ويتناسب عكساً مع $\sqrt{g}$

ملاحظة هامة: في حال السعات الزاوية الكبيرة [$\theta_{max} > 0,24\,rad$] تعطى علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي بالعلاقة:

الدور في حال السعات الكبيرة ← $\boxed{T_0' = T_0 \left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]}$ مقدرة rad

← الدور في حال السعات الصغيرة

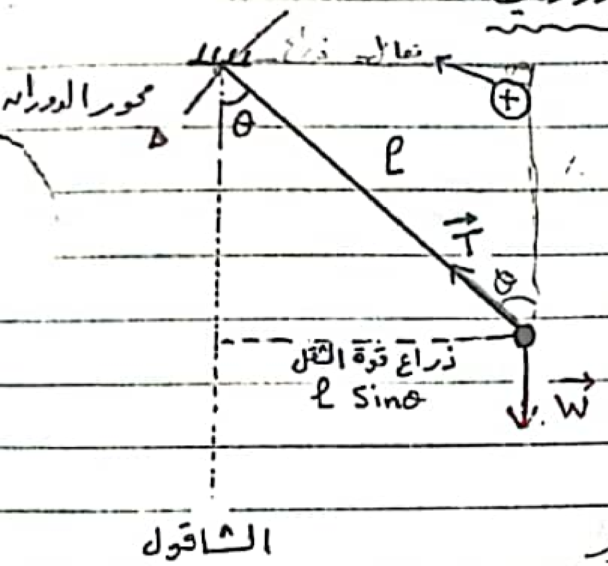
θ_{max} السعة الزاوية مقدرة بالراديان.

Al Abrash

الموضوع: التاريخ: / /

ملاحظة : (نظرية النواس الثقلي الزاوي).

يمكن إجراء الدراسة التحريكية للنواس الثقلي البسيط باستخدام العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني.



القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

$\vec{W}$ ثقل الكرة

$\vec{T}$ قوة توتر الخيط

$$\Sigma \bar{\Gamma} = I_\Delta . \bar{\alpha}$$

$$\Gamma_{\vec{W}} + \Gamma_{\vec{T}} = I_\Delta . \alpha$$

عزم محرك

لأن حامل $\vec{T}$ يلاقي محور الدوران $\Gamma_{\vec{T}} = 0$

قوة الثقل × الذراع

$$\Gamma_{\vec{W}} = - \ell \sin\theta . mg$$

نعوض:

$$- mg\,\ell \sin\theta + 0 = I_\Delta \bar{\alpha}$$

لكن $\boxed{I_\Delta = m\ell^2}$ و: $\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''$

$$- \cancel{m} g \cancel{\ell} \sin\theta = \cancel{m}\, \ell^{\cancel{2}} (\bar{\theta})''_t$$

$$\Rightarrow \quad (\bar{\theta})''_t = - \frac{g}{\ell} \sin\theta .$$

ليس جيبياً لأنه يحوي sinθ ...

ثم نتابع ....

إستنتاج العلاقة المحددة لسرعة كرة نواس وعلاقة توتر خيط التعليق:

نزيح كرة النواس عن موضع توازنها الشاقولي بزاوية θ_{max} ونتركها بدون سرعة إبتدائية.

لنوجد علاقة سرعة الكرة وقوة توتر الخيط في حالتين:

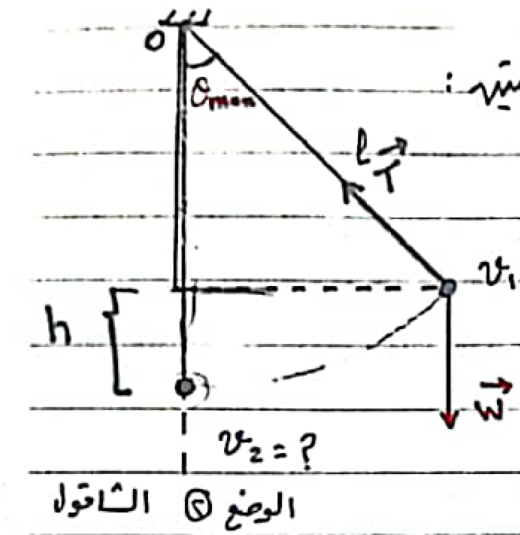
1 عند المرور بوضع التوازن الشاقولي:

1- إيجاد علاقة السرعة عند المرور بالشاقول:

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الوضع ① حيث: $\theta_1=\theta_{max}$ ، $v_1=0$

الوضع ② حيث $\theta_2=0$ ، $v_2=?$



من الشكل: $h=l-l\cos\theta_{max}$

$h=l(1-\cos\theta_{max})$

مجموع الجبري لأعمال القوى المؤثرة $E_{K_2}-E_{K_1}=\sum W_{\vec F(1\to 2)}$

$$E_{K_2}-E_{K_1}=W_{\vec w}+W_{\vec T}$$

لأنه ترك بدون سرعة إبتدائية $E_{K_1}=0$ ، $E_{K_2}=\frac{1}{2}mv_2^2$

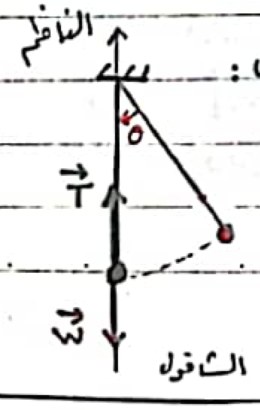
لأن حامل $\vec T$ يعامد الإنتقال في كل لحظة $W_{\vec T}=0$ عمل قوة التوتر

عمل قوة الثقل $W_{\vec w}=m.g.h=mgl(1-\cos\theta_{max})$

نعوض: $\frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2-0=\cancel{m}gl(1-\cos\theta_{max})+0$

$$\boxed{v_2=\sqrt{2gl(1-\cos\theta_{max})}}\quad ....(1)$$ علاقة السرعة عند المرور بالشاقول

2- إيجاد العلاقة المحددة لقوة توتر الخيط عند المرور بالشاقول:



$$\sum\vec F=m.\vec a$$

$$\vec w+\vec T=m.\vec a$$

بالإسقاط على محور الناظم:

Al Abrash

$$-W + T = m\,a_c$$

$a_c = \frac{v^2}{\ell}$ التسارع الناظمي / وفق شعاع التسارع مع الناظم /.

$$\Rightarrow \quad T = m\frac{v^2}{\ell} + mg$$

من 1) نجد:

$$T = m\,\frac{2g\ell(1-\cos\theta_{max})}{\ell} + mg$$

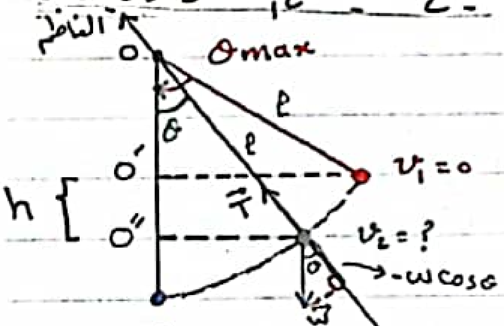
$$T = 2mg(1-\cos\theta_{max}) + mg$$

$$T = 3mg - 2mg\cos\theta_{max}$$

$$\boxed{T = mg(3-2\cos\theta_{max})}$$

وهي علاقة قوة توتر الخيط عند المرور بالشاقول.

$\boxed{2}$ لإيجاد علاقة السرعة وقوة توتر الخيط عندما يصنع الخيط مع الشاقول زاوية θ:



① إيجاد علاقة السرعة:

بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين

الوضع ① حيث $\theta_1=\theta_{max}$ ، $v_1=0$

الوضع ② حيث $\theta_2=\theta$ ، $v_2=?$

$$\Delta E_K = \Sigma W_{\vec{F}}(1\to 2)$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{T}}$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$$

$W_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$h = \ell(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

من الشكل: $h = OO'' - OO'$

$OO'' = \ell\cos\theta$

$OO' = \ell\cos\theta_{max}$

$h = \ell\cos\theta - \ell\cos\theta_{max}$

$\therefore h = \ell(\cos\theta - \cos\theta_{max})$

$$v_2 = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_{max})} \quad \ldots(1$$

وهي علاقة السرعة الخطية عند المرور بوضع يصنع فيه الخيط مع الشاقول زاوية θ.

لا تنسَ

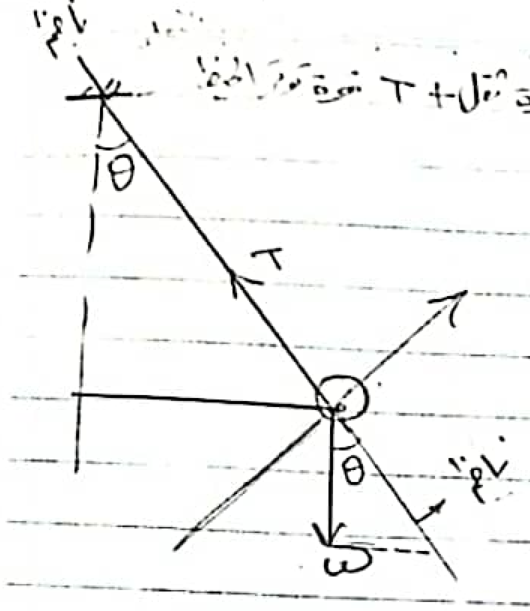
في النواس الثقلي

سعات زاوية صغيرة: التوابع الجيبية الزاوية محققة — نواس ...

سعات زاوية كبيرة: التوابع غير محققة إطلاقاً ⇐ نستخدم نظرية الطاقة الحركية

الموضوع: التاريخ: / /

② إيجاد علاقة قوة توتر الخيط: القوى المؤثرة: w قوة الثقل + T قوة توتر الخيط



$$\sum \vec{F} = m\cdot\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\cdot\vec{a}$$

بالإسقاط على محور الناظم:

$$-w\cos\theta + T = m\,a_c$$

(تسارع ناظمي) $a_c = \frac{v^2}{\ell}$

$$-mg\cos\theta + T = m\frac{v^2}{\ell}$$

نعوض v من 1

$$T = m\frac{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_{max})}{\ell} + m\cdot g\cos\theta$$

$$T = 2mg(\cos\theta - \cos\theta_{max}) + mg\cos\theta$$

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$$

وهي علاقة قوة توتر خيط النواس الثقلي عندما يصنع الخيط مع الشاقول زاوية θ.

الطاقة الميكانيكية للنواس الثقلي البسيط:

بإهمال القوى المبددة للطاقة تكون الطاقة الميكانيكية للنواس البسيط ثابتة والطاقة الميكانيكية هي مجموع الطاقتين الكامنة الثقالية والحركية أي

$$E_{tot} = E_k + E_p$$

حيث نعتبر مبدأ قياس الطاقة الكامنة هو المستوي الأفقي المار من مركز عطالة الكرة عند مرور النواس في وضع توازنه الشاقولي.

ملاحظة: نقول عن نواس أنه يواقت نواس آخر إذا كان دورها متساويان $T_0 = T_0'$

$E_p = m.g.h$

$E_k = \frac{1}{2} m v^2$

Al Abrash

/ /

ـ المسألة الأولى ـ

المعطيات: $M=\frac{1}{2}\,kg$ ، $\ell=\frac{3}{2}\,m$ ، المحور مار من الطرف العلوي

① الساق متجانسة. $m'=\frac{1}{2}\,kg$

$$I_{\Delta_{\text{هايفز+نقطة}}} = I_{\Delta_{\text{هايفز}}} + I_{\Delta/m'}$$

① نحسب الدور الخاص للنواس في حالة السعات الصغيرة:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m^{*}\cdot g\cdot d}}$$

• $m^{*} = M + m' = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \boxed{1\,kg}$

• $d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{M\cdot\frac{\ell}{2}+m'\ell'}{m+m'}$

$$\Longrightarrow d = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\times 1}{1} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2} = \frac{3}{8}+\frac{1}{2} = \frac{7}{8}\,m$$

• $I_{\Delta_{\text{هايفز}}} = I_{\Delta/c_{\text{ساق}}} + M d^2_{\text{ساق}} = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{4}M\ell^2$$

$$= \frac{4}{12}M\ell^2 = \frac{1}{3}M\ell^2$$

★ $I_{\Delta_{\text{هايفز+نقطة}}} = \frac{1}{3}M\ell^2 + m'\ell'^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)(1)$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2} = \frac{3}{8}+\frac{1}{2} = \frac{7}{8}\,kg.m^2$$

/ /

والآن نعوض m^* و d و I_Δ هايغنز + نقطة :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{8}}{1\times 10\times \frac{7}{8}}} = 2s$$

2) $\theta_{max} = \frac{\pi}{2}$ Rad ، نحسب E_{k_2} (عند الشاقول) :

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}\,①\to②}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = \overline{W}_{\vec{\omega}} + \overline{W}_{\vec{R}}$$

ولكن : $\overline{W}_{\vec{R}} = 0$ (لا تنتقل نقطة تأثيرها)

$E_{k_1} = 0$ (لا يوجد سرعة ابتدائية)

$$\Rightarrow E_{k_2} = m.g.d.(1 - \cos\theta_{max})$$

$$E_{k_2} = 1\times 10\times \frac{7}{8}(1-0) = \frac{70}{8}\,J$$

حساب السرعة الخطية لـ m' عندئذ (عند الشاقول):

$$v_m = \omega l'$$

?

نحسب ω :

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 \Rightarrow \frac{70}{8} = \frac{1}{2}\times\frac{7}{8}\times\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega = 2\sqrt{5}\ Rad.s^{-1} \Rightarrow v_m = 2\sqrt{5}\times 1 = 2\sqrt{5}\ m.s^{-1}$$

/ /

المسألة الثانية :

1 نطبق نظرية الطاقة الحركية بين :

وضع (1) عند ?? = θ_{max}

وضع (2) عند $\theta = 0\,Rad$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}(1\to 2)}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{T}}$$

$E_{K_1} = 0$ ترك دون سرعة ابتدائية

$W_T = 0$ حامل T عمودي على الانتقال في كل لحظة.

$$E_{K_2} = W_{\vec{\omega}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$h = l[1 - \cos\theta_{max}]$$

$$v^2 = 2gl[1 - \cos\theta_{max}]$$

$$\frac{v^2}{2gl} = 1 - \cos\theta_{max}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{4}{2\times 10\times 4\times 10^{-1}} \Rightarrow \cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ Rad}$$

2 جملة المقارنة : الخارجية

جملة مدروسة : كرة

القوى الخارجية المؤثرة : $\vec{\omega}$ قوة ثقل كرة

$\vec{T}$ قوة توتر الخيط

نطبق قانون نيوتن ثاني :

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{\omega} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

/ /

بالإسقاط على المحور العمودي حسب $\vec{T}$:

$$-W + T = m a_c$$

$$T = W + m a_c \qquad a_c = \frac{v^2}{\ell}$$

$$T = mg + m\frac{v^2}{\ell}$$

$$T = m\left[g + \frac{v^2}{\ell}\right]$$

$$T = 10^{-1}\left[10 + \frac{4}{4\times10^{-1}}\right]$$

$$T = 10^{-1}[20]$$

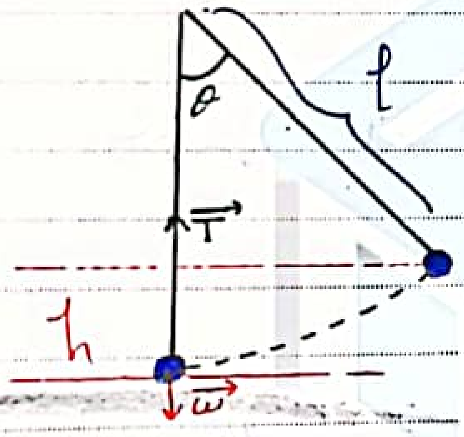
$$\boxed{T = 2N}$$

شغف التعليمي
Educational passion

المسألة الثالثة: بسيط .

المعطيات: $m = 5\times10^{-1}\,kg = \frac{1}{2}\,kg$ $\qquad \ell = 1.6\,m$

$h = 0.8\,m$



① استنتاج السرعة الخطية عند الشاقول وحساب قيمتها، نطبق نظرية الطاقة الحركية لوضعين:

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$

الثاني: $\theta_2 = 0$ (شاقول)

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}_{1\to 2}}$$

$$\Rightarrow E_{k2} - E_{k1} = W_{\vec{w}} + W_{\vec{T}}$$

ولكن: $W_{\vec{T}} = 0$ (لأن $\vec{T}$ عمودي على الانتقال)

$E_{k1} = 0$ (بدون سرعة ابتدائية)

شغف التعليمي
Educational passion

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = mgh$$

$$\Rightarrow v^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2\times10\times0.8} = \sqrt{16} = 4\,m.s^{-1}$$

/ /

2) استنتاج قيمة θ_0 وحسابها:

$$h = \ell(1-\cos\theta_{max}) \Longrightarrow \frac{h}{\ell} = 1-\cos\theta_{max}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\theta_{max} = 1-\frac{h}{\ell}}$$

$$\cos\theta_{max} = 1-\frac{8\times10^{-1}}{16\times10^{-1}} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ Rad.$$

3) حساب دور النواس:

$$T_0' = T_0\left(1+\frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$$

ومن أجل السعات الصغيرة $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$$\Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-1}}{10}} = 2\pi\sqrt{\frac{16}{100}} = 2\pi\frac{4}{10} = 8\pi\times10^{-1} = 25\times10^{-1} = 2,5\ S$$

$$T_0' = 2,5\left(1+\frac{\frac{\pi^2}{9}}{16}\right) = 2,5\left(1+\frac{10}{144}\right) = 2,5(1,07) = 2,675\ S$$

4) استنتاج $\vec{T}$ وحسابها:

القوى المؤثرة: ① ثقل الكرة $\vec{W}$ ② $\vec{T}$ قوة توتر الخيط

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{W}+\vec{T} = m.\vec{a}$$

نسقط على محور ناظمي منطبق على الخيط وجهة $\vec{T}$:

$$\Longrightarrow -W\cos\theta + T = m\frac{v^2}{\ell} \Longrightarrow T = \left(\frac{1}{2}\times10\times1\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{16}{16\times10^{-1}}\right) = 5+5 = 10$$

/ /

- المسألة الرابعة -

المعطيات : ① مهملة الكتلة $(M=0) \Longrightarrow I_{\Delta/C}=0$

$I_{\Delta_{\text{هايغنز}}}=0$

② $l=1m$ ، $m_1=4\times10^{-1}\,kg$ ، $r_1=\frac{l}{2}$

③ $m_2=2\times10^{-1}\,kg$ ، $r_2=l$

④ المحور مار من طرفها العلوي

1) حساب الدور الخاص لنوسات صغيرة السعة :

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m^*.g.d}} \xRightarrow{\text{للتبسيط}} m^*=m_1+m_2=4\times10^{-1}+2\times10^{-1}=6\times10^{-1}\,kg$$

$$d=\frac{\Sigma m_i r_i}{\Sigma m_i}=\frac{m_1\frac{l}{2}+m_2 l}{m_1+m_2}$$

$$\Longrightarrow d=\frac{(4\times10^{-1}\times\frac{1}{2})+(2\times10^{-1}\times1)}{6\times10^{-1}}=\frac{4\times10^{-1}}{6\times10^{-1}}=\frac{2}{3}\,m$$

I_Δ جملة نقطتين $=I_{\Delta/m_1}+I_{\Delta/m_2}$

$$=m_1r_1^2+m_2r_2^2=m_1\frac{l^2}{4}+m_2l^2$$

$$\Longrightarrow I_\Delta=4\times10^{-1}\times\frac{1}{4}+2\times10^{-1}\times1=3\times10^{-1}\,kg.m^2$$

/ /

والآن نعوض لحساب الدور :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3\times10^{-1}}{6\times10^{-1}\times10\times\frac{2}{3}}} = 2\sqrt{\frac{3}{4}} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,s$$

2) $\theta_{max} > 0,24\,Rad$ كبيرة :

$$v_d = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\,m.s^{-1}$$

$$\omega = \frac{v_d}{d} = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,Rad.s^{-1}$$

- حساب السرعة الخطية لـ m_2 :

$$v_{m_2} = \omega r_2 = \omega l = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times 1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,m.s^{-1}$$

1- استنتاج قيمة θ_{max} :

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين :

1) الأول $\theta_1 = \theta_{max}$

2) الثاني $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}\,(1\to2)}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{R}}$$

ولكن : $W_{\vec{R}} = 0$ (لاتنتقل نقطة تأثيرها)

$E_{k_1} = 0$ (دون سرعة ابتدائية)

/ /

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = m^* g d (1 - \cos\theta_{max})$$

$$\frac{1}{2} \times 3\times10^{-1} \times \frac{4\pi}{3} = 6\times10^{-1}\times10\times\frac{2}{3}(1-\cos\theta_{max})$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \cos\theta_{max}$$

$$\Longrightarrow \cos\theta_{max} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

شغف التعليمي
Educational passion

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ Rad$$

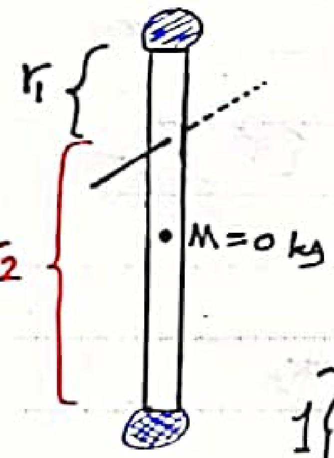
/ /

- المسألة الخامسة -

المعطيات: ① ساق شاقولية _ ② مهملة الكتلة (I_{Δ} الساق $= 0$ / $I_{\Delta/c} = 0$)

$T_0 = 2,5\,s$ ③ بالطرفين: $m' = m$ ④ $\ell = ??$

المحور يمر من $\frac{\ell}{4}$ من طرفها العلوي.



الحل:

① تابع المطال الزمني: من الشكل العام:

$$\theta = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$1\left\} \begin{matrix} t = 0 \\ \theta = \theta_{max} \end{matrix} \right. \longrightarrow \theta_{max} = \theta_{max} \cdot \cos\bar{\varphi} \Longrightarrow \cos\bar{\varphi} = 1$$

$$\Longrightarrow \bar{\varphi} = 0\,Rad$$

$$2\} \; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2,5} = \frac{2\pi}{25 \times 10^{-1}} = \frac{20\pi}{25}$$

$$= \boxed{\frac{4\pi}{5}} = 2,5\,Rad.s^{-1}$$

$$\Longrightarrow \theta = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{5} t\right)$$

/ /

2) استنتاج علاقة طول الساق :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m^* g d}}$$

لنوجد I_Δ , m^* , d :

- $m^* = m' + m' = \boxed{2m'}$ ★1

- I_Δ مج $= I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$
  $= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m\frac{\ell^2}{16} + m\frac{9\ell^2}{16} = \frac{10}{16} m\ell^2 = \boxed{\frac{5}{8} m\ell^2}$ ★2

- $d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{m'(-\frac{\ell}{4}) + m'(\frac{3\ell}{4})}{m' + m'} = \frac{m'\frac{\ell}{4}(-1+3)}{2m'}$

$$\Rightarrow d = \frac{\frac{\ell}{4}(2)}{2} = \boxed{\frac{\ell}{4}\ m}$$ ★3

نعوض في T_0 :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{5}{8} m'\ell^2}{2m' g \frac{\ell}{4}}}$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{10\ell}{8\times 10}} = 2\sqrt{\frac{5}{4}\ell} = 2\frac{\sqrt{5\ell}}{2} = \sqrt{5\ell}$$

$$\Rightarrow T_0^2 = 5\ell \Rightarrow \boxed{\ell = \frac{T_0^2}{5}}$$

حساب ℓ : $\ell = \frac{(25\times 10^{-1})^2}{5} = \frac{625\times 10^{-2}}{5} = 125\times 10^{-2} = \boxed{1,25\ m}$

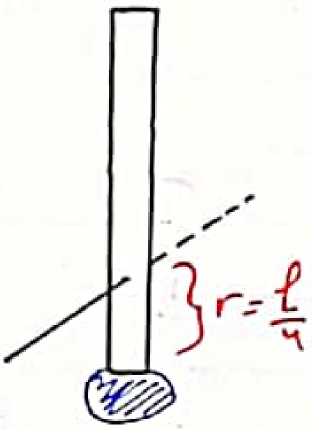
شغف التعليمي
Educational passion

/ /

3- حساب السرعة الزاوية العظمى :

$$\omega_{max} = |\omega_0 . \theta_{max}| = \frac{4\pi}{5} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{2}{5} = 0{,}4\ Rad.s^{-1}$$

4)



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m' g d}}$$

نحسب أولا m' , I_Δ , d

- $m' = m$ kg

- $d = \frac{\Sigma m_i r_i}{\Sigma m_i} = \frac{m\frac{l}{4}}{m} = \frac{l}{4}$ m

- $I_{\Delta/m} = mr^2 = m\frac{l^2}{16}$ kg.m²

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{16}}{m\times 10\times\frac{l}{4}}}$$

$$\Rightarrow T_0 = \sqrt{\frac{ml^2}{16}\times\frac{4}{m\times 10\times l}} = 2\sqrt{\frac{l}{4}} = 2\frac{\sqrt{l}}{2} = \sqrt{l}$$

$$\Rightarrow T_0 = \sqrt{125\times 10^{-2}} = \sqrt{25\times 5\times 10^{-2}} = 5\sqrt{5}\times 10^{-1}\ s$$

شغف رفيقك خطوة بخطوة

شغف التعليمي

Educational passion

القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "

https://t.me/alsh276

مكتبة شغف " بوت الملفات "

https://t.me/passion_study_bot