تـم تحميـل الملف بواسـطـة : بوت مكتبتي التعليمية

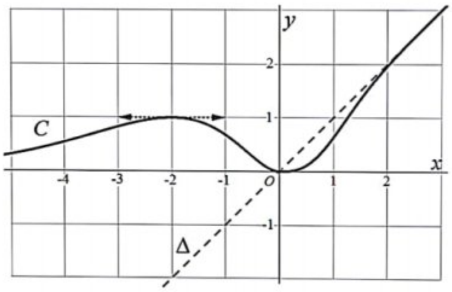
انقر هنا للوصول إلى ⇦ بوت مكتبتي التعليمية

بوت مكتبتي التعليمية : عبارة عن مكتبة إلكترونية تعليمية شاملة لغالبية ملفات المراحل الدراسية على تطبيق تيليجرام – يمكن الوصول لها عن طريق الرابط :

https://t.me/Science_2022bot

Telegram : @Science_2022bot ⭐

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الأسئلة الآتية: "32 درجة لكل سؤال":



السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

١. أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

٢. اذكر قيمتين حديتين للتابع مبيناً نوع كل منهما.

٣. أوجد $f(]-\infty,0])$

٤. حل المتراجحة $f'(x) \le 0$

السؤال الثاني: أثبت صحة العلاقة الآتية: $\dfrac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{n+1}{r+1}$

السؤال الثالث: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \cos^4 x$

١. اكتب التابع f بدلالة $\cos 2x$ و $\cos 4x$ ثم عيّن تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$

٢. احسب $I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} f(x)\,dx$

السؤال الرابع: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \begin{cases} (x-3)^{\frac{2}{x-4}} & ; x \neq 4 \\ e^2 & ; x = 4 \end{cases}$ أثبت أنّ التابع f مستمر عند الـ 4

السؤال الخامس: أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي للمتحولان العشوائيان (X,Y) إذا علمت أنّ المتحولان X و Y مستقلان احتمالياً.

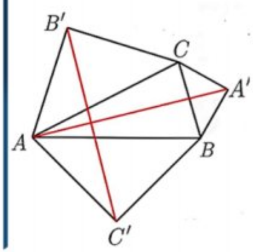
$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0				0.2
1				
2	0.04			
قانون Y		0.1	0.5	

السؤال السادس: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \dfrac{2e^x+3}{e^x-1}$ والمطلوب:

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم عيّن عدداً حقيقياً A يحقق الشرط إذا كان $x > A$ فإنّ $f(x)$ في المجال $]1.95, 2.05[$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية "60 درجة لكل تمرين":

التمرين الأول: نتأمل في المستوي الموجه الشكل المجاور: ABC مثلث مباشر التوجيه كيفي ننشئ خارجه المثلثات BCA' و CAB' و ABC' القائمة في A' و B' و C' ومتساوية الساقين ونرمز بالأعداد a و b و c و a' و b' و c' الممثلة للنقاط A و B و C و A' و B' و C' بالترتيب.

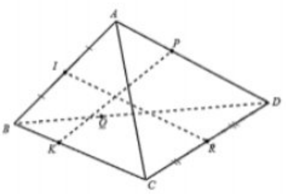


١. B هي صورة C وفق دوران مركزه A' وزاويته $\frac{\pi}{2}$, استعمل الصيغة العقدية للدوران لتثبت أنّ $a' = \dfrac{b-ic}{1-i}$

٢. عبر بالمثل عن b' و c' بدلالة a و b و c

٣. أثبت أنّ $(a'-a) = i(c'-b')$ ثم استنتج أنّ المستقيمين (AA') و $(B'C')$ متعامدان $AA' = B'C'$

التمرين الثاني: $ABCD$ رباعي وجوه , النقاط I و K و R و Q و P تحقق: $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ ولدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,1)$ و $(C,1)$ و $(B,2)$ و $(A,2)$ و R منتصف $[AB]$ والمطلوب:



١. أثبت أنّ G تقع على المستقيم (PK)

٢. أثبت أنّ G تقع على المستقيم (IR)

٣. استنتج أنّ المستقيمان (IR) و (PK) متقاطعان

٤. عين موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(C,1)$

٥. عين مجموعة النقاط M التي تحقق: $\left\|2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}\right\| = \left\|2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM}\right\|$

التمرين الثالث: لدينا a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية تحقق العلاقات:

$$\begin{cases} a+b+c=15 \\ a+3b+2c=30 \end{cases}$$

١. احسب كلاً من a و b و c ثم استنتج r أساس المتتالية u_n

٢. اكتب u_n بدلالة n إذا علمت أنّ $u_0=a$

٣. احسب المجموع: $S=u_2+u_4+u_6+\cdots+u_{24}$

التمرين الرابع: صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً , نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراء وكرة خضراء والقيمة صفر في غير ذلك والمطلوب:

عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتباينهُ.

__ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين "100 درجة لكل مسألة"__

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

احسب نهاية التابع f عند كل طرف من أطراف تعريفه D_f

١. أوجد $f'(x)$ ثم ادرس إشارة المشتق ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f

٢. ارسم الخط C في معلم متجانس.

٣. لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق: $u_n=f(n)$

نضع $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ أثبت أنّ $S_n=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$

المسألة الثانية: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط:

$A(-1,1,3)$	$B(1,0,-1)$	$C(2,-1,1)$	$D(2,0,-1)$

والمستوي P الذي معادلته $P:=2y+z+1=0$ والمستقيم Δ الذي تمثيله الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \quad ;\beta\in\mathbb{R} \\ z=1-2\beta \end{cases}$$

١. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $[BC]$ ثم تحقق ان المستقيم $[BC]$ محتوى في P.

٢. بين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا في نفس المستوي.

٣. احسب المسافة بين النقطة A والمستوي P.

٤. بين أن النقطة D من المستوي P وأنّ المثلث BCD قائم.

٥. احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

أولاً:

السؤال الأول:

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

الطلب الثاني:

$f(-2)=1$ قيمة حدية كبرى محلياً

$f(0)=0$ قيمة حدية صغرى محلياً

الطلب الثالث:

$$f(]-\infty,0]) = [0,1]$$

الطلب الرابع:

$$x \in [-2,0]$$

السؤال الثاني:

$$\underbrace{\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}}_{l_1} = \underbrace{\frac{n+1}{r+1}}_{l_2}$$

$$l_1 = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{\frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!}}{\frac{(n)!}{(r)!\,(n-r)!}}$$
$$= \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!}\cdot\frac{(r)!\,(n-r)!}{(n)!}$$
$$= \frac{(n+1)(n)!}{(r+1)(r)!\,(n-r)!}\cdot\frac{(r)!\,(n-r)!}{(n)!}$$
$$= \frac{n+1}{r+1} = l_2$$

ومنهُ: $l_1 = l_2$ محققة.

السؤال الثالث:

كتابة f بدلالة $\cos 2x$ و $\cos 4x$:

$$f(x) = \cos^4 x$$
$$= (\cos^2 x)^2$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

إيجاد التابع الأصلي:

$$f(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$
$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$$

الطلب الثاني:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} f(x)\,dx$$
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right)dx$$
$$= \left[\frac{3}{8}x = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{12}}$$
$$= \frac{2\pi + 8 + \sqrt{3}}{64}$$

السؤال الرابع:

حتى يكون التابع f مستمر عند ال (4) يجب تحقق:

$$\lim_{x\to4} f(x) = f(4)$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{x\to4} f(x)$$

وجود نهاية مميزة

$$f(x) = (x-3)^{\frac{2}{x-4}}$$

ليكن:

$$1 + t = x - 3$$
$$t = x - 4$$
$$x = t + 4$$

لما كان $x \to 4$ فإنَّ $t \to 0$

$$f(x) = (x-3)^{\left(\frac{2}{x-4}\right)} = (1+t)^{\frac{2}{t}}$$
$$= \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^2 = \left(e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}\right)^2$$
$$= \left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^2$$
$$\lim_{x\to4} f(x) = \lim_{x\to0}\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^2 = e^2$$

إيجاد الصورة:

$$f(4) = e^2$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x\to4} f(x) = f(4)$$

ومنهُ التابع f مستمر عند الـ 4 .

السؤال الخامس:

X \ Y	0	1	2	قانون X
0				$\frac{2}{10}$
1				
2	$\frac{4}{100}$			
قانون Y	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$	1

الخطوة الأولى: نحسب $P(X=2)$ وفق:

بما أنّ (X,Y) مستقلان احتمالياً فإنّ احتمال التقاطع يساوي احتمال الجداء ومنهُ:

$$P\big((X=2)\cap(Y=0)\big)$$
$$= P(X=2).P(Y=0)$$

$$\frac{4}{100} = \left(\frac{4}{10}\right)x$$
$$x = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{4}{10}} = \frac{4}{100}.\frac{10}{4} = \frac{1}{10}$$

ومنهُ: $P(X=2) = \frac{1}{10}$

X \ Y	0	1	2	قانون X
0				$\frac{2}{10}$
1				$\frac{7}{10}$
2	$\frac{4}{100}$			$\frac{1}{10}$
قانون Y	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$	1

بما أنّ المتحولان (X,Y) مستقلان احتمالياً فإنّ احتمال التقاطع يساوي احتمال الجداء ومنهُ نجد أنّ:

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	$\frac{8}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{2}{10}$
1	$\frac{28}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{35}{100}$	$\frac{7}{10}$
2	$\frac{4}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{1}{10}$
قانون Y	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$	1

السؤال السادس:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{2e^x + 3}{e^x - 1}$$
$$= \frac{e^x\left(2 + \frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2 + \frac{3}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

تعيين قيمة A :

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.95 + 2.05}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.05 - 1.95}{2} = \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20}$$

بما أنّ التابع $f(x)$ ينتمي من المجال $]1.95,2.05[$:

$$|f(x) - c| < r$$
$$\left|\frac{2e^x + 3}{e^x - 1} - 2\right| < \frac{1}{20}$$
$$\left|\frac{2e^x + 3 - 2e^x + 2}{e^x - 1}\right| < \frac{1}{20}$$
$$\left|\frac{5}{e^x - 1}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\frac{5}{e^x-1} < \frac{1}{20}$$
$$\frac{e^x-1}{5} > 20$$
$$e^x - 1 > 100$$
$$e^x > 101$$
$$x > \ln(101)$$
$$\to A = \ln(101)$$

ثانياً:

التمرين الأول:

الطلب الأول:

$$b - a' = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a')$$
$$b - a' = i(c - a')$$
$$b - a' = ic - ia'$$
$$a' - ia' = b - ic$$
$$a'(1 - i) = b - ic$$
$$a' = \frac{b - ic}{1 - i}$$

الطلب الثاني:

لدينا المثلث CAB' قائم في B' ومتساوي الساقين فيه النقطة C صورة A وفق دوران مركزه B' وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه:

$$c - b' = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - b')$$
$$c - b' = i(a - b')$$
$$c - b' = ia - ib'$$
$$b' - ib' = c - ia$$
$$b'(1 - i) = c - ia$$
$$b' = \frac{c - ia}{1 - i}$$

لدينا المثلث ABC' قائم في C' ومتساوي الساقين فيه النقطة B صورة A وفق دوران مركزه C' وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ومنه:

$$b - c' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(a - c')$$
$$b - c' = -i(a - c')$$
$$b - c' = -ia + ic'$$
$$c' + ic' = b + ia$$
$$c'(1 + i) = b + ia$$
$$c' = \frac{b + ia}{1 + i}$$

الطلب الثالث:

$$\underbrace{a' - a}_{l_1} = \underbrace{i(c' - b')}_{l_2}$$
$$l_1 = a' - a$$
$$= \frac{b - ic}{1 - i} - a$$
$$= \frac{(b - ic)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} - a$$
$$= \frac{b + ib - ic + c}{2} - a$$
$$= \frac{b + c - 2a + (b - c)i}{2}$$

$$l_2 = i(c' - b')$$
$$= i\left(\frac{b + ia}{1 + i} - \frac{c - ia}{1 - i}\right)$$
$$= i\left(\frac{(b + ia)(1 + i) - (c - ia)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}\right)$$
$$= i\left(\frac{b - ib + ia + a - c + ic - ia + a}{2}\right)$$
$$= i\left(\frac{2ia - ib - ic + b - c}{2}\right)$$
$$= \frac{-2a + b + c + ib - ic}{2}$$

وبما أنّ $l_1 = l_2$ فإنّ العلاقة محققة.

لدينا:

$$a' - a = i(c' - b')$$
$$\frac{a' - a}{c' - b'} = i \to \frac{z_{\overrightarrow{AA'}}}{z_{\overrightarrow{B'C'}}} = i$$

إيجاد الزاوية:

$$\arg\left[\frac{z_{\overrightarrow{AA'}}}{z_{\overrightarrow{B'C'}}}\right] = \arg[i]$$
$$(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{AA'}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه المستقيمان $(B'C') \perp (AA')$

إيجاد الطويلة:

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{AA'}}}{z_{\overrightarrow{B'C'}}}\right| = |i|$$
$$\frac{AA'}{B'C'} = 1 \to AA' = B'C'$$

التمرين الثاني:

الطلب الأول:

- النقطة K تحقق العلاقة: $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

إذاً K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(C,1)$	$(B,2)$

- النقطة P تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

إذاً P مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,1)$	$(A,2)$

- ولتكن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,1)$	$(A,2)$	$(B,2)$	$(C,1)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(K,3)$ و $(P,3)$ ومنه النقطة G تقع على المستقيم (PK)

الطلب الثاني:

G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,2)$	$(B,2)$	$(C,1)$	$(D,1)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(R,2)$ و $(I,4)$ ومنه النقطة G تقع على المستقيم (IR)

الطلب الثالث:

لدينا من الطلب الأول والثاني:

النقطة G تقع على كل من المستقيمين (PK) و (IR) ومنه نستنتج أنّ المستقيمين (IR) و (PK) متقاطعان.

الطلب الرابع:

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

الطلب الخامس:

لدينا Q مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(B,2)$ و $(D,1)$ إذاً:

$$2\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD} = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MQ} \dots (1)$$

ولدينا J مركز أبعاد متناسبة لـ $(C,1)$ و $(A,2)$

$$2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MJ} \dots (2)$$

ولدينا:

$$\left\|2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}\right\| = \left\|2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM}\right\|$$
$$\left\|3\overrightarrow{MJ}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MQ}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MJ}\right\| = \left\|\overrightarrow{MQ}\right\|$$

تمثل مستوي محوري للقطعة المستقيمة $[JQ]$

التمرين الثالث:

$$\begin{cases} a + b + c = 15 \dots (1) \\ a + 3b + 2c = 30 \dots (2) \end{cases}$$

الطلب الأول

بما أنّ a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإنّ: $a + c = 2b$

نعوض في (1):

$$2b + b = 15 \to 3b = 15 \to b = 5$$

نعوض قيمة b في كل من (1) و (2):

$$\begin{cases} a + c = 10 \dots (1) \\ a + 2c = 15 \dots (2) \end{cases}$$

نضرب (1) بـ (-2) نجد:

$$\begin{cases} -2a - 2c = -20 \dots (1)' \\ a + 2c = 15 \dots (2) \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد أنّ:

$$-a = -5 \to a = 5$$

نعوض في (1) نجد: $c = 5$

ومنه: $a = 5, b = 5, c = 5$.

استنتاج قيمة r:

$$r = b - a = 5 - 5 = 0$$

الطلب الثاني:

بما أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية فإنّ:

$$u_n - u_0 = (n - 0)r$$
$$u_n - 5 = 0$$
$$u_n = 5$$

الطلب الثالث:

$$S = u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{24}$$

حيث:

الحد الأول $= u_2 = ?$

$$u_2 - u_0 = (2 - 0)r$$
$$u_2 - 5 = 0 \to u_2 = 5$$

الحد الأخير $= u_{24} = ?$

$$u_{24} - u_0 = (24 - 0)r$$
$$u_{24} - 5 = 0 \to u_{24} = 5$$

عدد الحدود $= \frac{24 - 2}{2} + 1$

$$= 11 + 1 = 12$$

$$\text{المجموع} = \frac{12}{2}(5+5) = 60$$

التمرين الرابع:

مجموعة قيم المتحول العشوائي X هي:

$$X = \{0,3,5\}$$

$$P(X=5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

$$P(X=0) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}+\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{60}{120} = \frac{6}{12}$$

r	0	3	5
$P(X=r)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X) = (0)\left(\frac{6}{12}\right) + (3)\left(\frac{5}{12}\right) + (5)\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{5}{3}$$

$$E(X^2) = (0)^2\left(\frac{6}{12}\right) + (3)^2\left(\frac{5}{12}\right) + (5)^2\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{35}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \frac{35}{6} - \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{55}{18}$$

ثالثاً:

المسألة الأولى:

الطلب الأول:

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

الطلب الثاني:

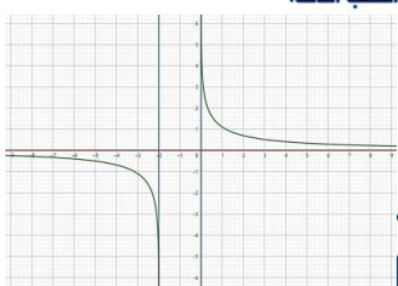
إنّ f معرف واشتقاقي على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)'}{\frac{x+2}{x}}$$

$$= \frac{x-x-2}{x^2}\cdot\frac{x}{x+2} = \frac{-2}{x(x+2)} < 0$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$		$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$		$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

الطلب الثالث:



الطلب الرابع:

$$u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) = \ln(n+2) - \ln(n)$$

نبرهن العلاقة:

$$E(n): S_n = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$$

نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$S_1 = \ln\left(\frac{3\times2}{2}\right) = \ln(3) = u_1$$

إذاً $E(1)$ محققة..

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$S_n = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right) \ldots (*)$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$ أي:

$$S_{n+1} = \ln\left(\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right)$$

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$$

$$= \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right) + \ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(n+3)(n+1)}{2}\cdot\frac{n+3}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right)$$

إذاً القضية $E(n)$ صحيحة أياً كان $n \in \mathbb{N}^*$

المسألة الثانية:

1. لكتابة التمثيل الوسيطي نحتاج:

النقطة: $B(1,0,-1)$

شعاع التوجيه: $\vec{u} = \overrightarrow{BC}(1,-1,2)$

التمثيل الوسيطي للمستقيم يكون:

$$(BC): \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z = 2t-1 \end{cases}$$

التحقق من أن المستقيم $[BC]$ محتوى في P:

- لدينا المستقيم (BC) شعاع توجيهه: $\vec{u}(1,-1,2)$
- ولدينا المستوي P ناظمه: $\vec{n}(0,2,1)$
- نختبر أن (BC) و P متوازيان:

$$\vec{n}.\vec{u} = 0 - 2 + 2 = 0$$

ومنه (BC) و P متوازيان

نختبر الاحتواء وفق:

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} 2y + z + 1 = 0 \ldots (1) \\ x = t+1 \ \ldots (2) \\ y = -t \quad \ldots (3) \\ z = 2t-1 \ldots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) فنجد:

$$2(-t) + 2t - 1 + 1 = 0$$

$$0 = 0$$

محققة ومنه للجملة عدد لا نهائي من الحلول إذاً المستقيم (BC) محتوى في المستوي P.

2. يقصد في السؤال أن نبين أنّ المستقيمين (Δ) و (BC) متخالفين.

- لدينا المستقيم (Δ) شعاع توجيهه: $\vec{u}_{\Delta}(0,1,-2)$
- لدينا المستقيم (BC) شعاع توجيهه: $\vec{u}_{(BC)}(1,-1,2)$

نلاحظ أن $\vec{u}_{\Delta}$ و $\vec{u}_{(BC)}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه فإنّ المستقيمان (Δ) و (BC) إما متقاطعان أو متخالفان (ليسا من نفس المستوي).

نجري اختبار الاشتراك بنقطة، لدينا الجملة:

$$\begin{cases} -1 = t+1 \ldots (1) \\ 2+\beta = -t \ldots (2) \\ 1-2\beta = 2t-1 \ldots (3) \end{cases}$$

من (1) نجد:

$$-1 = t+1 \Rightarrow t = -2$$

من (2) نجد:

$$2+\beta = -(-2) \Rightarrow \beta = 0$$

نتحقق في (3):

$$1 - 2(0) = 2(-2) - 1$$

$$1 \neq -5$$

وهذا غير ممكن إذاً الجملة مستحيلة الحل وبالتالي المستقيمان (Δ) و (BC) لا يشتركان بأية نقطة وبالتالي (Δ) و (BC) متخالفان، أي ليسا من نفس المستوي.

3. لحساب المسافة بين P و A:

$$dist(A,P) = \frac{|2(1)+3+1|}{\sqrt{0+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

4. نعوض إحداثيات النقطة D في المستوي P وفق:

$$2(0) - 1 + 1 = 0$$

$$0 = 0$$

محققة.

ومنه D نقطة من المستوي P.

لإثبات أن المثلث قائم، لدينا:

$$\overrightarrow{BC}(1,-1,2)$$

$$BC = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{BD}(1,0,0)$$

$$BD = \sqrt{1+0+0} = 1$$

$$\overrightarrow{CD}(0,1,-2)$$

$$CD = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5}$$

ومنه المثلث BCD مختلف الأضلاع نختبر كونه قائماً:

$$(BC)^2 = (BD)^2 + (CD)^2$$

$$\left(\sqrt{6}\right)^2 = (1)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$6 = 1 + 5$$

$$6 = 6$$

إذاً المثلث BCD مختلف الأضلاع وقائم في D ووتره BC

٥. حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

- تمهيد:

تحديد قاعدة رباعي الوجوه $ABCD$:
بما أن المستقيم (BC) محتوى في المستوى P.
وبما أن النقطة D من المستوي P ومنه المستوي P معين بالنقاط B و C و D
وبالتالي فإن المثلث BCD يمثل قاعدة رباعي الوجوه.

تحديد رأس رباعي الوجوه $ABCD$:
بما أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P
فإن A تمثل رأس رباعي الوجوه.

- قانون:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD}.h$$

حيث:
مساحة القاعدة S_{BCD} :
بما أن المثلث قائم فإنّ مساحته:

$$S_{BCD} = \frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2} = \frac{BC.CD}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

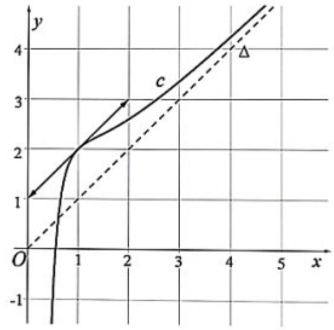
الارتفاع: $h = dist(A,P) = \frac{6}{\sqrt{5}}$

ومنهُ: $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.S_{BCD}.h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{6}{\sqrt{5}} = 1$$

سنحيا بعد كُربتنا ربيعاً كأننا لم نذق بالأمسِ مُرّاً!

أولاً: أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: "40 درجة لكل سؤال":



السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ والمستقيم Δ مقارب مائل للخط C والمطلوب:

١. أوجد $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

٢. أوجد $f(1)$ و $f'(1)$

٣. أوجد $\lim_{x\to +\infty} (f(x) - x)$

٤. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ حيث $m \in \mathbb{R}$ ؟

السؤال الثاني: نتأمل النقطتين: $A(1,0,1)$ و $B(5,2,1)$ والمطلوب:

١. اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

٢. صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

السؤال الثالث:

١. أثبت أنّ: $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

٢. استنتج قيمة $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$

السؤال الرابع: ما آحاد وعشرات ومئات العدد 11^{11} ؟

السؤال الخامس:

أثبت أنّ المستقيم الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط البياني في جوار الـ $+\infty$ للتابع:

$$f(x) = x - x.\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية "60 درجة لكل تمرين":

التمرين الأول: لتكن لدينا النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

$d = -4 - 2i$	$c = 4 + 2i$	$b = -1 + 7i$	$a = 2 - 2i$

لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد العقدي $\omega = -1 + 2i$ والمطلوب:

١. أثبت وقوع النقاط A و B و C و D على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها $R = 5$

٢. ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E منتصف $[AB]$ احسب e وبرهن أنّ $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

٣. ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث (DEC) .

التمرين الثاني: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = e^{-x}.\sin x$

1. احسب $f'(x)$ و $f''(x)$

2. عين العددين a و b التي تحقق: $f(x) = a.f'(x) + bf''(x)$ أياً كان x .

3. استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

التمرين الثالث: لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة بالعلاقة: $u_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!} + \cdots + \frac{e}{n!}$ والمطلوب:

1. أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
2. استنتج أنّ العدد $3e$ راجح على المتتالية u_n ثم استنتج تقارب المتتالية u_n

التمرين الرابع: يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء وكرتين حمراوين وكرة خضراء, نسحب ثلاث كرات من الصندوق على التتالي دون إعادة وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرافق كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق والمطلوب:

1. عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .
2. احسب التوقع الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين "100 درجة لكل مسألة"

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نتأمل النقطة $A(1,0,1)$ والمستقيمين Δ_1 و Δ_2 المعرفين وسيطياً وفق:

$$\Delta_1:\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \qquad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t \end{cases} \quad , \quad \Delta_2:\begin{cases} x = 2 + s \\ y = 4 - 2s \quad ; s \in \mathbb{R} \\ z = 2 + s \end{cases}$$

1. أثبت أن المستقيمين Δ_1 و Δ_2 ليسا من نفس المستوي.
2. أثبت أن المستقيمين Δ_1 و Δ_2 متعامدان.
3. تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقي Δ_1 ثم أوجد إحداثيات النقطة B المسقط القائم للنقطة A على المستقيم Δ_2
4. احسب بعد النقطة A عن المستقيم Δ_2.
5. أوجد إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$
6. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحور للقطعة $[AB]$

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = 2.\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

والمطلوب:

1. أثبت أن التابع f فردي
2. ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0, +\infty[$
3. اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x = 0{,}1$
4. في معلم متجانس ارسم C
5. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 0$ و $x = \ln 3$

أولاً:

السؤال الأول:

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

الطلب الثاني:

$$f(1) = 2$$
$$f'(1) = ?$$

نختار نقطتين من المماس وفق:

$$A(1,2) \quad , \quad B(2,3)$$
$$f'(1) = m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{2-1} = 1$$

الطلب الثالث:

المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $+\infty$ وعليه فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$$

الطلب الرابع:

للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

السؤال الثاني:

الطلب الأول:

المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

تحديد الناظم:

بما أنّ المستوي هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

فإنّ $\vec{n} = \overrightarrow{AB}(4,2,0)$

تحديد النقطة:

بما أنّ المستوي هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ فإنّ النقطة I منتصف القطعة المستقيمة تنتمي إلى معادلة المستوي المحوري أيّ:

$$I\left(\frac{1+5}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$$
$$\to I(3,1,1)$$

المعادلة:

$$4(x-3) + 2(y-1) + 0(z-1) = 0$$
$$4x - 12 + 2y - 2 = 0$$
$$4x + 2y - 14 = 0$$
$$2x + y - 7 = 0$$

الطلب الثاني:

لدينا:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \dots (*)$$

حيث:

$$\overrightarrow{MA}(1-x, -y, 1-z)$$
$$\overrightarrow{MB}(5-x, 2-y, 1-z)$$

نعوض في $(*)$ فنجد:

$$(1-x)(5-x) + (-y)(2-y) + (1-z)(1-z) = 0$$
$$5 - x - 5x + x^2 - 2y + y^2 + 1 - z - z + z^2 = 0$$
$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + z^2 - 2z + 6 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 - 2z + 1 - 1 + 6 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$$

وهي تمثل معادلة كرة مركزها $C(3,1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{5}$

السؤال الثالث:

الطلب الأول:

$$\underbrace{\frac{1}{1+e^x}}_{l_1} = \underbrace{\frac{e^{-x}}{e^x+1}}_{l_2}$$
$$l_1 = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^{-x}}}$$
$$= \frac{1}{\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = l_2$$

الطلب الثاني:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$$
$$I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$$
$$I = \int_0^1 \frac{-(-e^{-x})}{e^{-x}+1}\,dx$$
$$I = -\int_0^1 \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$$
$$I = -[\ln|e^{-x}+1|]_0^1$$
$$I = -\left[\ln\left(\frac{1}{e}+1\right) - \ln 2\right]$$
$$I = -\ln\left(\frac{e^{-1}+1}{2}\right)$$

السؤال الرابع:

$$11^{11} = (1+10)^{11}$$
$$a = 1 \quad , \quad b = 10 \quad , \quad n = 11$$
$$T_r = \binom{n}{r}.(a)^{n-r}.b^r$$
$$T_r = \binom{11}{r}.(1)^{11-r}(10)^r$$

الحد الأول: $T_0 = \binom{11}{0}(1)^{11}.(10)^0 = 1$

الحد الثاني: $T_1 = \binom{11}{1}(1)^{10}.(10)^1 = 110$

الحد الثالث: $T_2 = \binom{11}{2}(1)^{9}.(10)^2 = 5500$

الحد الرابع: $T_3 = \binom{11}{3}(1)^{8}.(10)^3 = 16500$

ومنهُ باقي الحدود آحادها وعشراتها ومئاتها أصفار وبالتالي بجمع هذه الحدود نجد أنّ الآحاد (1) والعشرات (1) والمئات (6) .

السؤال الخامس:

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y$$
$$= x - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - (x-1)$$
$$= -x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + 1$$
$$= 1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

نوجد نهاية الفرق:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين $(\infty)(0)$

$$h(x) = 1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

نحتاج تغير متحول:

بفرض: $t = \frac{1}{x}$ فتكون: $x = \frac{1}{t}$

لمّا كان: $x \to +\infty$ فإنّ: $t \to 0$

$$= 1 - \frac{1}{t}\ln(1+t)$$
$$= 1 - \frac{\ln(1+t)}{t}$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{t\to 0}\left(1 - \frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$
$$= 1 - 1 = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right) = 1$$

إذاً المستقيم الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط البياني في جوار $+\infty$.

ثانياً:

التمرين الأول:

الطلب الأول:

$$\Omega A = |z_{\overrightarrow{\Omega A}}| = |z_A - z_\Omega|$$
$$= |a - \omega| = |2 - 2i + 1 - 2i|$$
$$= |3 - 4i| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\Omega B = |z_{\overrightarrow{\Omega B}}| = |z_B - z_\Omega|$$
$$= |b - \omega| = |-1 + 7i + 1 - 2i|$$
$$= |5i| = \sqrt{0+25} = 5$$

$$\Omega C = |z_{\overrightarrow{\Omega C}}| = |z_C - z_\Omega|$$
$$= |c - \omega| = |4 + 2i + 1 - 2i|$$
$$= |5| = \sqrt{25+0} = 5$$

$$\Omega D = |z_{\overrightarrow{\Omega D}}| = |z_D - z_\Omega|$$
$$= |d - \omega| = |-4 - 2i + 1 - 2i|$$
$$= |-3 - 4i| = \sqrt{9+16} = 5$$

إذاً النقاط A و B و C و D تقع على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها $R = 5$

الطلب الثاني:

إيجاد العدد العقدي الممثل للنقطة E وفق:

$$e = \frac{a+b}{2} = \frac{2 - 2i - 1 + 7i}{2} = \frac{1+5i}{2}$$
$$\to e = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

إثبات:

$$\underbrace{\frac{a-e}{d-e}}_{l_1} = \underbrace{\frac{c-e}{a-e}}_{l_2}$$

$$l_1=\frac{a-e}{d-e}=\frac{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{-4-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}$$
$$=\frac{\frac{4-4i-1-5i}{2}}{\frac{-8-4i-1-5i}{2}}=\frac{3-9i}{-9-9i}$$
$$=\frac{3(1-3i)}{3(-3-3i)}=\frac{1-3i}{-3-3i}$$
$$=\frac{(1-3i)(-3+3i)}{(-3-3i)(3+3i)}$$
$$=\frac{-3+3i+9i+9}{9+9}$$
$$=\frac{6+12i}{18}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

$$l_2=\frac{c-e}{a-e}=\frac{4+2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}$$
$$=\frac{\frac{8+4i-1-5i}{2}}{\frac{4-4i-1-5i}{2}}=\frac{7-i}{3-9i}$$
$$=\frac{(7-i)(3+9i)}{(3-9i)(3+9i)}$$
$$=\frac{21+63i-3i+9}{9+81}=\frac{30+60i}{90}$$
$$=\frac{30}{90}+\frac{60}{90}i=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

نلاحظ أنّ:

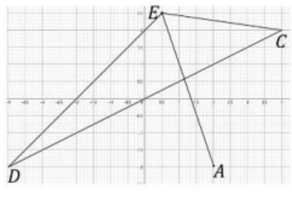
$$l_1=l_2$$

الطلب الثالث:

لدينا من الطلب السابق:

$$\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}\rightarrow\frac{z_{\overrightarrow{EA}}}{z_{\overrightarrow{ED}}}=\frac{z_{\overrightarrow{EC}}}{z_{\overrightarrow{EA}}}$$
$$(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA})=(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC})$$

إذاً المستقيم (EA) هو منصف للزاوية $D\hat{E}C$



التمرين الثاني:

الطلب الأول:

حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=(-e^{-x})(\sin x)+(\cos x)(e^{-x})$$
$$=e^{-x}(\cos x-\sin x)$$

حساب $f''(x)$:

$$f''(x)=(-e^{-x})(\cos x-\sin x)+(-\sin x-\cos x)(e^{-x})$$
$$=e^{-x}(-\cos x+\sin x-\sin x-\cos x)$$
$$=e^{-x}(-2\cos x)$$
$$=-2\cos x\,e^{-x}$$

الطلب الثاني:

تعيين a و b:

لدينا:

$$f(x)=af'(x)+bf''(x)e^{-x}\sin x$$
$$=a\left(e^{-x}(\cos x-\sin x)\right)+b(-2\cos x\,e^{-x})$$
$$e^{-x}\sin x=ae^{-x}\cos x-ae^{-x}\sin x-2be^{-x}\cos x\,e^{-x}\sin x$$
$$=-ae^{-x}\sin x+(a-2b)e^{-x}\cos x$$

بالمطابقة نجد:

$$-a=1\ldots(1)$$
$$a-2b=0\ldots(2)$$

من (1) نجد:

$$a=-1$$

نعوض في (2) نجد:

$$-1-2b=0\rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

إذاً:

$$f(x)=-f'(x)-\frac{1}{2}f''(x)$$

الطلب الثالث:

استنتاج تابعاً أصلياً للتابع f لدينا:

$$f(x)=-f'(x)-\frac{1}{2}f''(x)$$
$$F(x)=-f(x)-\frac{1}{2}f'(x)$$

التمرين الثالث:

$$u_n=e+\frac{e}{1!}+\frac{e}{2!}+\frac{e}{3!}+\cdots+\frac{e}{n!}$$

الطلب الأول:

$$\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$$

نرمز الخاصة:

$$E(n):\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(1)$:

$$\frac{1}{1!}\le\frac{1}{2^{1-1}}\rightarrow 1\le 1\rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}\ldots(*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:

$$\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$$

الإثبات..

لدينا من العلاقة الفرض $(*)$:

$$\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$$

نضرب الطرفين بـ $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ وفق:

$$\frac{1}{\underbrace{(n+1)n!}_{(n+1)n!=(n+1)!}}\le\frac{1}{\underbrace{(n+1)2^{n-1}}_{\frac{1}{2}\ge\frac{1}{n+1}\ge\frac{1}{2n}}}$$
$$\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2.2^{n-1}}$$
$$\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$$

محققة أياً كان العدد الطبيعي.

الطلب الثاني:

استنتاج أنّ $3e$ راجح على المتتالية u_n :

$$u_n=e+\frac{e}{1!}+\frac{e}{2!}+\frac{e}{3!}+\cdots+\frac{e}{n!}$$
$$=e\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]$$

بالاستفادة من المتراجحة المثبتة مسبقاً:

$$\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$$

تكون:

$$u_n\le e\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$
$$u_n\le e\left(2+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}\right)$$

تمثل مجموع أرقام من متتالية هندسية

أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$ وعدد الحدود $n-1$ ومنهُ:

$$u_n\le e\left(2+\frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\right]\right)$$
$$u_n\le e\left(2+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$
$$u_n\le e\left(3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$
$$u_n\le 3e-e\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

تكافئ:

$$u_n\le 3e$$

إذاً $3e$ عنصر راجح على المتتالية u_n .

استنتاج تقارب المتتالية u_n :

ندرس اطراد المتتالية u_n وفق:

$$u_{n+1}-u_n$$
$$=e+\frac{e}{1!}+\frac{e}{2!}+\cdots+\frac{e}{n!}+\frac{e}{(n+1)!}$$
$$-\left(e+\frac{e}{1!}+\frac{e}{2!}+\cdots+\frac{e}{n!}\right)$$
$$=\frac{e}{(n+1)!}>0$$

إذاً المتتالية u_n متزايدة تماماً.

ومنهُ بما أنّ المتتالية u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

التمرين الرابع:

الطلب الأول:

بما أنّ السحب على التتالي دون إعادة فإننا نستخدم التراتيب.

$$n(\Omega)=P_6^3=(6)(5)(4)=120$$

قيم المتغير العشوائي X :

$$X=\{0,1,2,3\}$$

احتمالات قيم المتغير العشوائي X :

حيث:

$X=0$ تدل على ظهور ثلاث كرات بيضاء.

$$P(X=0)=\frac{P_3^3}{P_6^3}=\frac{(3)(2)(1)}{120}=\frac{1}{20}$$

$X=1$ تدل على ظهور كرتين بيضاء وكرة غير بيضاء ومنه:

$$P(X=1)=\frac{P_3^2.P_3^1}{P_6^3}\times 3$$

$$=\frac{(3)(2)(1).(3).(3)}{120}=\frac{9}{20}$$

$X=2$ تدل على ظهور كرة بيضاء وكرتين غير بيضاء ومنه:

$$P(X=2)=\frac{P_3^1.P_3^2}{P_6^3}\times 3$$

$$=\frac{(3).(3)(2).(3)}{120}=\frac{9}{20}$$

$X=3$ تدل على عدم ظهور أيّ كرة بيضاء ومنه:

$$P(X=3)=\frac{P_3^3}{P_6^3}=\frac{(3)(2)(1)}{120}=\frac{1}{20}$$

القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

الطلب الثاني:

حساب الوقع الرياضي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i.p_i$$

$$=0\left(\frac{1}{20}\right)+1\left(\frac{9}{20}\right)+2\left(\frac{9}{20}\right)+3\left(\frac{1}{20}\right)$$

$$=\frac{9}{20}+\frac{18}{20}+\frac{3}{20}=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$$

حساب التباين:

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$

حيث:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2.p_i$$

$$=0\left(\frac{1}{20}\right)+1\left(\frac{9}{20}\right)+4\left(\frac{9}{20}\right)+9\left(\frac{1}{20}\right)$$

$$=\frac{9}{20}+\frac{36}{20}+\frac{9}{20}=\frac{54}{20}=\frac{27}{10}$$

$$\left(E(X)\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

نعوض:

$$V(X)=\frac{27}{10}-\frac{9}{4}=\frac{54-45}{20}=\frac{9}{20}$$

حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{20}}=\frac{3}{2\sqrt{5}}$$

ثالثاً:

المسألة الأولى:

الطلب الأول:

إثبات أنّ Δ_1 و Δ_2 ليس من نفس المستوي (متخالفين)

لدينا المستقيم Δ_1 شعاع توجيهه: $\vec{u}_{\Delta_1}(1,0,-1)$

لدينا المستقيم Δ_2 شعاع توجيهه: $\vec{u}_{\Delta_2}(1,-2,1)$

نلاحظ أنّ $\vec{u}_{\Delta_1}$ و $\vec{u}_{\Delta_2}$ غير مرتبطين خطياً ومنه المستقيمان Δ_1 و Δ_2 إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة لدينا الجملة:

$$\begin{cases}1+t=2+s\ldots(1)\\ 0=4-2s\ldots(2)\\ 1-t=2+s\ldots(3)\end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$1+t=2+s\ldots(1)$$
$$1-t=2+s\ldots(3)$$

بجمع (1) و (3) نجد:

$$2=4+2s$$
$$2s=-2$$
$$s=-1$$

نعوض في (1) نجد:

$$1+t=2-1$$
$$1+t=1$$
$$t=0$$

نتحقق في (2):

$$0=4-2(-1)$$
$$0=6$$

وهذا غير ممكن إذاً ليس للجملة السابقة حل وبالتالي المستقيمان Δ_1 و Δ_2 لا يشتركان بأية نقطة ومنه فإنّ المستقيمان Δ_1 و Δ_2 ليسا من نفس المستوي "متخالفين"

الطلب الثاني:

إثبات أنّ Δ_1 و Δ_2 متعامدان:

لدينا:

$$\vec{u}_{\Delta_1}.\vec{u}_{\Delta_2}$$
$$=(1)(1)+(0)(-2)+(-1)(1)$$
$$=1+0-1=0$$

إذاً المستقيمان Δ_1 و Δ_2 متعامدان.

الطلب الثالث:

التحقق من أنّ A تنتمي إلى المستقيم Δ_1:

نعوض إحداثيات A في التمثيل الوسيطي لـ Δ_1 وفق:

* $1=1+t\rightarrow t=0$
* $0=0$
* $1=1-t\rightarrow t=0$

إذا النقطة A تنتمي إلى المستقيم Δ_1

إيجاد B المسقط القائم للنقطة A على المستقيم Δ_2:

* لدينا المستقيم Δ_2 تمثيله الوسيطي:

$$\Delta_2:\begin{cases}x=2+s\\ y=4-2s\quad ;s\in\mathbb{R}\\ z=-2+s\end{cases}$$

* بما أنّ B تمثيل المسقط القائم للنقطة A على المستقيم Δ_2 فإنّ إحداثياتها تحقق:

$$B(2+s,4-2s,2+s)\ldots(*)$$

* ويتحقق أيضاً:

$$\overrightarrow{AB}.\vec{u}_{\Delta_2}=0$$

حيث:

$$\overrightarrow{AB}(1+s,4-2s,1+s)$$
$$\vec{u}_{\Delta_2}(1,-2,1)$$

إذاً:

$$(1+s)(1)+(4-2s)(-2)+(1+s)(1)=0$$
$$1+s-8+4s+1+s=0$$
$$6s-6=0$$
$$6s=6$$
$$s=1$$

نعوض قيمة s في $(*)$ فنجد: $B(3,2,3)$

الطلب الرابع:

بعد A عن Δ_2:

$$dist\ (A,\Delta_2)=AB$$
$$=\sqrt{(3-1)^2+(2-0)^2+(3-1)^2}$$
$$=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(2)^2}$$
$$=\sqrt{4+4+4}$$
$$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

الطلب الخامس:

إحداثيات I

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$
$$y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0+2}{2}=1$$
$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$
$$I(2,1,2)$$

الطلب السادس:

معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$:

تحديد الناظم:

ناظم المستوي المحوري للقطعة $[AB$

$$\overrightarrow{AB}(2,2,2)$$

تحديد النقطة: النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$:

$$I(2,1,2)$$

المعادلة:

$$2(x-2)+2(y-1)+2(z-2)=0$$
$$2x-4+2y-2+2z-4=0$$
$$2x+2y+2z-10=0$$
$$x+y+z-5=0$$

المسألة الثانية:

الطلب الأول

الشرط الأول: أياً كان $x \in D_f$ فإن $-x \in D_f$ محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

يجب تحقق:

$$\underbrace{f(-x)}_{l_1} = \underbrace{-f(x)}_{l_2}$$

$$l_1 = 2.\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = 2.\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}$$

$$= 2.\frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1-e^x}{e^x}} = 2\,.\frac{1-e^x}{1+e^x}$$

$$= -2.\frac{(e^x-1)}{e^x+1} = -f(x) = l_2$$

الشرط الثاني محقق إذاً التابع f فردي

الطلب الثاني:

التابع f معرف على $]0,+\infty[$ ولدينا:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{2e^x-2}{e^x+1} = \frac{e^x\left(2-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x+1)-e^x(2e^x-2)}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{4e^x}{(e^x+1)^2} = 0$$

$$4e^x = 0$$

مستحيلة الحل إذاً $f'(x)$ لا ينعدم.

x	**0**		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	**2**

الطلب الثالث:

النقطة:

$$x_A = 0$$
$$y_A = f(0) = 0$$
$$\to A(0,0)$$

الميل:

$$m = f'(0) = 1$$
$$T: y = m(x-x_A)+y_A$$
$$T: y = x$$

حساب القيمة التقريبية:

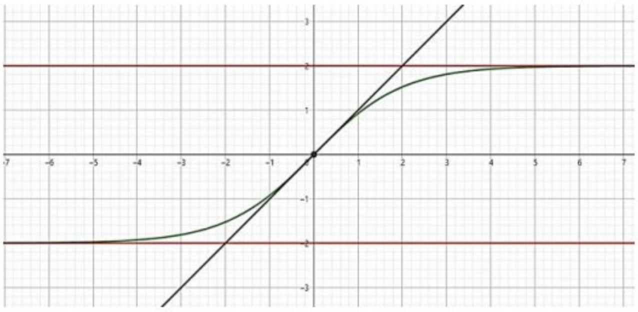
$$a = 0 \quad , \quad h = 0{,}1$$

ولدينا:

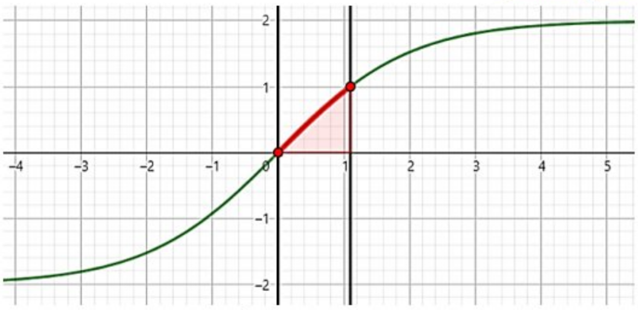
$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = 1$$
$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a).h$$
$$f(0{,}1) \cong f(0) + f'(0).(0{,}1)$$
$$f(0{,}1) \cong 0 + 1\times 0{,}1$$
$$f(0{,}1) \cong 0{,}1$$

الطلب الرابع:

الرسم:



الطلب الخامس:



$$S = \int_0^{\ln 3} (f(x) - y_\Delta)\ dx$$

$$S = \int_0^{\ln 3} f(x)\ dx$$

$$S = \int_0^{\ln 3} 2.\frac{e^x-1}{e^x+1}\ dx$$

$$S = 2\int_0^{\ln 3}\left(\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{e^x+1}\right) dx$$

$$S = 2\int_0^{\ln 3}\left(\frac{e^x}{e^x+1} + \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\right) dx$$

$$S = 2\,[\ln|e^x+1| + \ln|1+e^{-x}|]_0^{\ln 3}$$

$$S = 2\left[\left(\ln 4 + \ln\frac{4}{3}\right) - (\ln 2 + \ln 2)\right]$$

$$S = 2\ln\frac{4}{3}$$

أولاً: أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: "40 درجة لكل سؤال":

السؤال الأول: نتأمل جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

1. أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واكتب معادلة كل مقارب أفقي.
2. دل على القيم الحدية للتابع f مبيناً نوعها.
3. أوجد $f([0,\ln(2)])$
4. ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

السؤال الثاني: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+1}$

1. عين الأعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق $f(x)=ae^x+b+\frac{c}{e^x+1}$.
2. احسب $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

السؤال الثالث: نتأمل جانباً جدول القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي والمطلوب:

x_i	0	1	2	3	4	Σ
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{\alpha}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{\beta}{16}$	1

1. عين العددين الحقيقيين α و β إذا علمت أنّ $E(X)=2$
2. من أجل $\alpha=6$ و $\beta=1$ احسب تباين المتحول العشوائي $V(X)$

السؤال الرابع: ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x\,.\ln(1+4x)}{\sqrt{x^2+1}-1} & ;x\neq 0\\ 8 & ;x=0\end{cases}$$

هل التابع f مستمر عند الصفر؟

السؤال الخامس: لتكن المجموعة $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ والمطلوب:

1. ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث منازل مختلفة التي يمكن تشكيلها من عناصر S ؟
2. ما عدد الأعداد الزوجية المؤلفة من ثلاث منازل وأصغر من 500 التي يمكن تشكيلها من عناصر S ؟

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية "60 درجة لكل تمرين":

التمرين الأول: لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة بالعلاقة: $u_{n+1}=u_n^2+4u_n+2$ و $u_0=-\frac{3}{2}$ والمطلوب:

1. أثبت أنّ $-2\leq u_n\leq -1$ أياً كان العدد الطبيعي n
2. أثبت أنّ $u_{n+1}-u_n=(u_n+1)(u_n+2)$ أياً كان العدد الطبيعي n .
3. استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

التمرين الثاني: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]2,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x-2-\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

1. ادرس تغيرات التابع f على المجال I واستنتج $f(I)$
2. أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في I ثم تحقق أنّ $3<\alpha<4$
3. أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-2$ مقارب مائل لـ C في جوار الـ $+\infty$

التمرين الثالث:

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نتأمل النقاط $A(1,1,1)$ و $B(1,4,7)$ و $C(0,1,2)$ و $D(-2,7,16)$ والمطلوب:

1. أثبت أنّ النقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.
2. عين العددين α و β اللذين يحققان: $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ ، هل تقع النقاط A و B و C و D في مستو واحد؟
3. استنتج أنّ النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,a) و (B,b) و (C,c) حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

التمرين الرابع:

لتكن الأعداد العقدية التالية:

$z_3=-\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$	$z_2=2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)\right]$	$z_1=1+i$

1. اكتب z_1 و z_2 و z_3 بالشكل الأسي.
2. مستفيداً من الطلب السابق أثبت أنّ $\left[\frac{(z_1)^2}{(z_2)^3(z_3)^6}\right]$ تخيلي بحت.
3. أوجد $(z_1.z_2)$ بالشكل الجبري
4. أوجد $(z_1.z_2)$ بالشكل المثلثي واستنتج $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

__ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين "100 درجة لكل مسألة"__

المسألة الأولى: في معلم متجانس $O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ نتأمل النقطة $A(-2,0,2)$ والمستقيمين Δ_1 و Δ_2 المعرفيّن وسطياً وفق:

$$\Delta_1:\begin{cases}x=-1-t\\y=4+t\\z=5+t\end{cases};t\in\mathbb{R}\quad,\quad\Delta_2:\begin{cases}x=s\\y=6-4s\\z=-2+5s\end{cases};s\in\mathbb{R}$$

1. أثبت أنّ المستقيمين Δ_1 و Δ_2 متعامدان.
2. جد إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع المستقيمين Δ_1 و Δ_2
3. أثبت أن المستقيم (AB) يعامدالمستقيمين Δ_1 و Δ_2
4. اكتب معادلة المستوي P الذي يشمل المستقيمين Δ_1 و Δ_2
5. احسب بعد النقطة A عن المستوي P
6. استنتج معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\ln(x+e^{-x})$$

1. أثبت أنّ التابع f يكتب بالشكل $f(x)=\ln(1+xe^{x})-x$
2. أثبت أنّ المستقيم الذي معادلتهُ $y=-x$ مقارب مائل لـ C في جوار الـ $-\infty$ وادرس وضعه النسبي
3. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
4. في معلم متجانس ارسم Δ ثم C
5. استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=\ln(e^{x}-x)$

أولاً:

السؤال الأول:

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C_f في جوار الـ $-\infty$

$y=2$ مقارب أفقي للخط C_f في جوار الـ $+\infty$

الطلب الثاني:

$f(0)=1$ قيمة حدية كبرى محلياً.

$f(\ln(2))=-1$ قيمة حدية صغرى محلياً.

الطلب الثالث:

$$f([0,\ln(2)])=[-1,1]$$

الطلب الرابع:

حلّان.

السؤال الثاني:

الطلب الأول:

الإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية:

نجد أن:

$$f(x)=e^x+2+\frac{-1}{e^x+1}$$

بالمقارنة مع:

$$f(x)=ae^x+b+\frac{c}{e^x+1}$$

نجد أن:

$$a=1\quad,\quad b=2\quad,\quad c=-1$$

الطلب الثاني:

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$I=\int_0^1\left(e^x+2-\frac{1}{e^x+1}\right)dx$$
$$I=\int_0^1\left(e^x+2+\frac{-1-e^x+e^x}{e^x+1}\right)dx$$
$$I=\int_0^1\left(e^x+2+\frac{-1-e^x}{e^x+1}+\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$
$$I=\int_0^1\left(e^x+2+\frac{-1(1+e^x)}{e^x+1}+\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$
$$I=[e^x+2x-x+\ln|e^x+1|]_0^1$$
$$I=(e+2-1+\ln(e+1))-(1+0-0+\ln 2)$$
$$I=e+2-1+\ln(e+1)-1-\ln 2$$
$$I=e+\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

السؤال الثالث:

الطلب الأول:

تعيين α و β :

نعلم أنّ مجموع قيم المتحول العشوائي X يساوي الواحد أيّ أنّ:

$$\Sigma x_i=1$$
$$\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{\alpha}{16}+\frac{4}{16}+\frac{\beta}{16}=1$$
$$\frac{9+\alpha+\beta}{16}=1$$
$$\alpha+\beta+9=16$$
$$\alpha+\beta=7\ldots(1)$$

وبما أنّ $E(X)=2$ فإنّ:

$$E(X)=2$$
$$\Sigma x_i=2$$
$$(0)\left(\frac{1}{16}\right)+1\left(\frac{4}{16}\right)+2\left(\frac{\alpha}{16}\right)+3\left(\frac{4}{16}\right)+4\left(\frac{\beta}{16}\right)=2$$
$$\frac{4}{16}+\frac{2\alpha}{16}+\frac{12}{16}+\frac{4\beta}{16}=2$$
$$\frac{16+2\alpha+4\beta}{16}=2$$
$$16+2\alpha+4\beta=32$$
$$2\alpha+4\beta=16$$
$$\alpha+2\beta=8\ldots(2)$$

لدينا الجملة:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=7\ldots(1)\\ \alpha+2\beta=8\ldots(2)\end{cases}$$

نضرب (1) بـ (-2) :

$$\begin{cases}-2\alpha-2\beta=-14\ldots(1)'\\ \alpha+2\beta=8\ldots(2)\end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد أنّ:

$$-\alpha=-6\to\alpha=6$$

نعوض في (2) :

$$6+2\beta=8$$
$$2\beta=2\to\beta=1$$

الطلب الثاني:

لدينا:

x_i	0	1	2	3	4	Σ
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$

حيث:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{5}x_i^2.p_i$$
$$=0\left(\frac{1}{16}\right)+1\left(\frac{4}{16}\right)+4\left(\frac{6}{16}\right)+9\left(\frac{4}{16}\right)+16\left(\frac{1}{16}\right)$$
$$=\frac{0+4+24+36+16}{16}=\frac{80}{16}=5$$
$$\left(E(X)\right)^2=(2)^2=4$$

نعوض:

$$V(X)=5-4=1$$

السؤال الرابع:

حتى يكون التابع f مستمر عند الصفر يجب تحقق العلاقة:

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)\ldots(*)$$

حيث:

$$f(0)=8$$
$$\lim_{x\to0}f(x)$$

$\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x)=\frac{\sin x\ln(1+4x)}{\sqrt{x^2+1}-1}$$
$$=\frac{\sin x\ln(1+4x)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}$$
$$=\frac{\sin x\ln(1+4x)}{x^2}.\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$$
$$=\frac{\sin x}{x}.\frac{\ln(1+4x)}{x}.\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$$
$$=\frac{\sin x}{x}.\frac{\ln(1+4x)}{4x}.4\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=(1)(1)(4)(2)=8$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}=1$$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

ومنهُ التابع f مستمر عند الصفر.

السؤال الخامس:

الطلب الأول:

مئات	عشرات	احاد
4 ط	5 ط	6 ط

عدد الطرق $=(6)(5)(4)=120$

الطلب الثاني:

مئات	عشرات	احاد
4 ط	6 ط	3 ط

عدد الطرق $=(3)(6)(4)=72$

ثانياً:

التمرين الأول:

$$\begin{cases}u_{n+1}=u_n^2+4u_n+2\\ u_0=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

الطلب الأول:

إثبات $-2\le u_n\le-1$:

نستخدم الإثبات بالتدريج:

لتكن الخاصة:

$$E(n):-2\le u_n\le-1$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$$-2\le u_0=-\frac{3}{2}\le-1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$-2\le u_n\le-1\ldots(*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أنّ:

$$-2\le u_{n+1}\le-1$$

مرحلة الإصلاح:

$$u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2$$
$$u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 4 - 4 + 2$$
$$u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2$$

مرحلة الحصر: لدينا من العلاقة الفرض $(*)$:

$$-2 \le u_n \le -1$$

نضيف (2) :

$$0 \le u_n + 2 \le 1$$

نربع:

$$0 \le (u_n + 2)^2 \le 1$$

نضيف (-2) :

$$-2 \le (u_n + 2)^2 - 2 \le -1$$
$$-2 \le u_{n+1} \le -1$$

محققة ومنه الخاصة محققة

أياً كان العدد الطبيعي n .

الطلب الثاني:

$$\underbrace{u_{n+1} - u_n}_{l_1} = \underbrace{(u_n + 1)(u_n + 2)}_{l_2}$$
$$l_1 = u_{n+1} - u_n$$
$$= u_n^2 + 4u_n + 2 - u_n$$
$$= u_n^2 + 3u_n + 2$$
$$= (u_n + 1)(u_n + 2) = l_2$$

الطلب الثالث:

دراسة اطراد المتتالية u_n :

من الطلبات السابقة لدينا:

$$-2 \le u_n \le -1$$
$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)(u_n + 2)$$

مناقشة:

- $u_n + 1 \le 0$
- $u_n + 2 \ge 0$
- $u_{n+1} - u_n \le 0$

ومنهُ نجد أنّ المتتالية u_n متناقصة.

بما أنّ المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

حساب النهاية:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = x^2 + 4x + 2$$

لحساب النهاية نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$
$$x^2 + 4x + 2 = x$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$(x + 2)(x + 1) = 0$$

إما $x = -2 \to$ مقبول

أو $x = -1 \to$ مرفوض

$$\lim_{x \to +\infty} u_n = -2$$

التمرين الثاني:

الطلب الأول:

دراسة تغيرات التابع f على المجال I:

التابع f معرف ومستمر على I ولدينا:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 2$

مقارب شاقولي للخط البياني C_f

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على I ولدينا:

$$f'(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{x-2}\right)'}{\frac{x}{x-2}}$$
$$= 1 - \left(\frac{x - 2 - x}{(x-2)^2}\right)\left(\frac{x-2}{x}\right)$$
$$= 1 + \frac{2}{x^2 - 2x}$$
$$= \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} = 0$$
$$x^2 - 2x + 2 = 0$$
$$a = 1 \ , \ b = -2 \ , \ c = 2$$
$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$
$$= (-2)^4 - 4(1)(2)$$
$$= 4 - 8 = -4 < 0$$

مستحيلة الحل ومنه المشتق لا ينعدم

ننظم جدول تغيرات التابع f

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

استنتاج $f(I)$:

$$f(I) = f(\,]2, +\infty[\,)$$
$$=]-\infty, +\infty[$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في I :

لدينا التابع f مستمر ومتزايد تماماً على I ولدينا: $0 \in f(I)$ ومنهُ للمعادلة حلاً وحيداً α في I

التحقق من أنّ $3 < \alpha < 4$:

التابع f مستمر ومطرد على المجال $]3,4[$:

$$f(3) = 1 - \ln 3 < 0$$
$$f(4) = 2 - \ln 2 > 0$$

ومنه نجد:

$$f(3).f(4) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α يحقق:

$$3 < \alpha < 4$$

الطلب الثالث:

إثبات أن Δ مقارب مائل لـ C جوار $+\infty$:

لدينا:

$$f(x) - y_\Delta = x - 2 - \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) - (x - 2)$$
$$= -\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

ومنه المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

التمرين الثالث:

الطلب الأول: لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(0,3,6) \ \ , \ \ \overrightarrow{AC}(-1,0,1)$$

الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً ومنه النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

الطلب الثاني: لدينا:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$
$$\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$-3 = -\beta \ \dots (1)$$
$$6 = 3\alpha \ \dots (2)$$
$$15 = 6\alpha + \beta \ \dots (3)$$

من (1) نجد أنّ:

$$\beta = 3$$

من (2) نجد أنّ:

$$\alpha = 2$$

نتحقق في (3) :

$$15 = 6(2) + 3$$
$$15 = 15$$

محققة ومنهُ للجملة حل وحيد $\beta = 3$ و $\alpha = 2$

ومنهُ: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

مما سبق نجد أنّ الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً ومنهُ النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

الطلب الثالث:

لدينا:

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + 3(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$
$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DC}$$
$$4\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$
$$-4\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

ومنه النقطة D مركز الأبعاد متناسبة للنقاط المثقلة: $(A, -4)$ و $(B, 2)$ و $(C, 3)$

أي: $a = -4$ و $b = 2$ و $c = 3$

التمرين الرابع:

الطلب الأول:

كتابة z_1 بالشكل الأسي:

$$z = 1 + i$$
$$x = 1 \ , \ y = 1$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$
$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

كتابة z_2 بالشكل الأسي:

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

كتابة z_3 بالشكل الأسي:

$$z_3 = -\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$= e^{i\pi}\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$= \sqrt{3}\, e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)}$$
$$z_3 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

الطلب الثاني:

لدينا:

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$(z_1)^2 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$
$$z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$(z_2)^3 = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = 8\, e^{i2\pi} = 8$$
$$(z_3)^6 = \sqrt{3} e^{i\frac{7\pi}{6}}$$
$$(z_3)^6 = \left(\sqrt{3} e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^6$$
$$= 27e^{i7\pi} = 27e^{i\pi}$$
$$= -27$$

ومنه:

$$\frac{(z_1)^2}{(z_2)^3 (z_3)^6} = \frac{2i}{(8)(-27)} = \frac{-1}{108} i$$

ومنه المقدار تخيلي بحت.

الطلب الثالث:

لدينا:

$$z_1 = 1 + i$$
$$z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$r = 2 \ , \ \theta = \frac{2\pi}{3}$$
$$\theta = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi - \pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$$
$$\cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$
$$\sin\theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = r\cos\theta = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$
$$y = r\sin\theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$
$$z_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

ومنه:

$$z_1 . z_2 = (1+i)(-1+i\sqrt{3})$$
$$= -1 + i\sqrt{3} - i - \sqrt{3}$$
$$= (-1-\sqrt{3}) + (-1+\sqrt{3})i$$

الطلب الرابع:

لدينا:

$$z_1 . z_2 = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(2e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}$$
$$= 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

لدينا:

$$\underbrace{z_1 . z_2}_{\text{جبري}} = \underbrace{z_1 . z_2}_{\text{مثلثي}}$$
$$(-1-\sqrt{3}) + (-1+\sqrt{3})i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$
$$(-1+\sqrt{3}) + i(-1+\sqrt{3}) = 2\sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{12} + 2\sqrt{2}i\sin\frac{11\pi}{12}$$

بالمطابقة نجد:

$$-1+\sqrt{3} = 2\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{12}$$
$$\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

ثالثاً:

المسألة الأولى:

الطلب الأول:

إثبات تعامد Δ_1 و Δ_2:

لدينا المستقيم Δ_1 شعاع توجيه: $\vec{u}_{\Delta_1}(-1,1,1)$

لدينا المستقيم Δ_2 شعاع توجيه: $\vec{u}_{\Delta_2}(1,-4,5)$

ولدينا:

$$\vec{u}_{\Delta_1} . \vec{u}_{\Delta_2} = -1 - 4 + 5 = 0$$

ومنه المستقيمان Δ_1 و Δ_2 متعامدان.

الطلب الثاني:

إيجاد B لدينا الجملة:

$$\begin{cases} -1 - t = S \dots (1) \\ 4 + t = 6 - 4S \dots (2) \\ 5 + t = -2 + 5S \dots (3) \end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$-1 - t = S \dots (1)$$
$$4 + t = 6 - 4S \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$3 = 6 - 3S$$
$$3S = 3 \rightarrow S = 1$$

نعوض في (1) فنجد:

$$-1 - t = 1 \rightarrow t = -2$$

نتحقق في (3) وفق:

$$5 - 2 = -2 + 5(1)$$
$$3 = 3$$

محققة ومنه للجملة حل وحيد $t = -2$ و $S = 1$ وبالتالي المستقيمان يشتركان بنقطة لتحديدها نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ_1 وفق:

- $x = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1$
- $y = 4 - 2 = 2$
- $z = 5 - 2 = 3$

$$\rightarrow B(1,2,3)$$

الطلب الثالث:

إثبات أنّ (AB) يعامد كلاً من Δ_1 و Δ_2 :

لدينا المستقيم (AB) شعاع توجيهه:

$$\overrightarrow{AB}(3,2,1)$$

اختبار تعامد (AB) و Δ_1:

$$\vec{u}_{\Delta_1} . \overrightarrow{AB} = -3 + 2 + 1 = 0$$

إذاً (AB) و Δ_1 متعامدان

اختبار تعامد (AB) و Δ_2:

$$\vec{u}_{\Delta_2} . \overrightarrow{AB} = 3 - 8 + 5 = 0$$

إذاً (AB) و Δ_2 متعامدان.

الطلب الرابع:

معادلة المستوي P:

تحديد الناظم $\vec{n}_P$:

بما أن المستوي P يشمل كلاً من المستقيمان Δ_1 و Δ_2 والمستقيم (AB) عمودي على كلاً من Δ_1 و Δ_2 فإنّ شعاع توجيه المستقيم (AB) يمثل ناظم المستوي P

أيّ: $\vec{n}_P = \overrightarrow{AB}(3,2,1)$

تحديد النقطة:

بما أنّ المستوي P يشمل كلاً من المستقيمان Δ_1 و Δ_2 وهما مستقيمان متقاطعان في B فإنّ B من المستوي P أيّ أن النقطة هي:

$$B(1,2,3)$$

المعادلة:

$$P: 3(x-1) + 2(y-2) + 1(z-3) = 0$$
$$P: 3x - 3 + 2y - 4 + z - 3 = 0$$
$$P: 3x + 3y + z - 10 = 0$$

الطلب الخامس:

بُعد A عن P:

$$dist\,(A,P) = \frac{|3(-2) + 2(0) + 2 - 10|}{\sqrt{9+4+1}}$$
$$= \frac{|-6+2-10|}{\sqrt{14}} = \frac{|-14|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

الطلب السادس:

معادلة الكرة:

المركز: $A(-2,0,2)$

نصف القطر:

بما أن الكرة تمس المستوي P فإنّ:

$$R = dist\,(A,P)$$
$$R=\sqrt{14}$$

المعادلة:

$$(x+2)^2+(y-0)^2+(z-2)^2=(\sqrt{14})^2$$
$$(x+2)^2+y^2+(z-2)^2=14$$

المسألة الثانية:

الطلب الأول:

$$\underbrace{\ln(x+e^{-x})}_{l_1} = \underbrace{\ln(1+xe^{x})-x}_{l_2}$$
$$l_1=\ln(x+e^{-x})$$
$$=\ln\left(x+\frac{1}{e^x}\right)=\ln\left(\frac{xe^x+1}{e^x}\right)$$
$$=\ln(xe^x+1)-\ln e^x$$
$$=\ln(1+xe^x)-x=l_2$$

الطلب الثاني:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=\ln(1+x\,e^x)-x+x$$
$$=\ln(1+xe^x)$$
$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\ln(1)=0$$

إذا المستقيم $\Delta: y=-x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x)=0$$
$$\ln(1+xe^x)=0$$
$$1+xe^x=1$$
$$x.e^x=0$$

إما $x=0$

أو $e^x=0 \to$ **مستحيلة الحل**

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	|	C **فوق** Δ

الطلب الثالث:

التابع f معرف على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \quad =+\infty$$

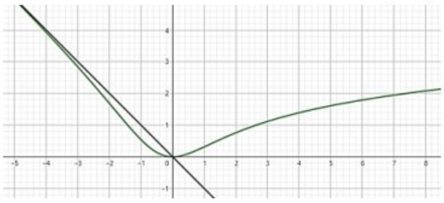
التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(x+e^{-x})'}{x+e^{-x}}=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$
$$f'(x)=0$$
$$\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}=0$$
$$1-e^{-x}=0$$
$$e^{-x}=1$$
$$-x=0$$
$$x=0\in D_f \to f(0)=0$$

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

الطلب الرابع:

الرسم:



الطلب الخامس:

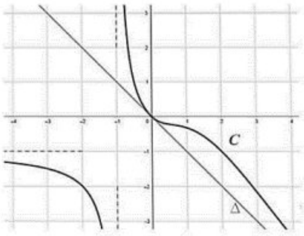
نلاحظ أن: $g(x)=f(-x)$

إذا الخط C' نظير C بالنسبة إلى محور التراتيب.

وَما استَعصى عَلى قَومٍ مَنالٌ إِذا الإِقدامُ كانَ لَهُمْ رِكابا

أولاً: أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: "40 درجة لكل سؤال":

السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\{-1\}$ والمستقيم $\Delta: y=-x$ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $+\infty$ والمستقيم Δ يمس الخط C في النقطة O والمطلوب:



١. أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

٢. أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)$

٣. أوجد $f(2)$ و $f(-2)$

٤. حدد $f(0)$ و $f'(0)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$

السؤال الثاني: في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},;\vec{k}\right)$ لتكن النقاط $C(1,2,1)$ و $B(0,2,7)$ و $A(3,2,1)$ والمطلوب:

١. أوجد إحداثيات النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,3)$ و $(B,2)$ و $(A,1)$

٢. صف Γ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تحقق: $\left|\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|\right|$

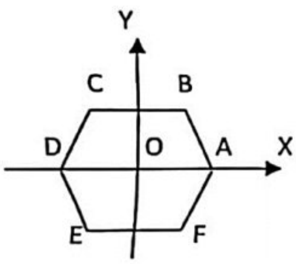
السؤال الثالث: حل المعادلة $(36)^x+6^{x+1}=7$ واستنتج حلول المتراجحة $(36)^x+6^{x+1}\geq 7$

السؤال الرابع: ليكن a و b عددين حقيقيين و C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$f(x)=ax.\ln(x)+bx$$

عين العددين a و b بحيث يكون المماس للخط في النقطة $A(1,-1)$ موازياً لمحور الفواصل.

السؤال الخامس: $(ABCDEF)$ مسدس منتظم طول ضلعه (1) والمطلوب:



١. اكتب العدد العقدي الممثل للنقطة B

○ نصل بين ثلاث نقاط لنحصل على مثلث والمطلوب:

٢. ما عدد المثلثات التي يمكن الحصول عليها؟

٣. ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن الحصول عليها؟

٤. ما عدد القطع المستقيمة التي تصل بين رأسيين مختلفين من رؤوس المسدس السابق؟

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية "60 درجة لكل تمرين":

التمرين الأول: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}$ وفق: $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ التابع f يكتب بالشكل $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

٢. احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$

٣. لتكن المتتالية (n) $S_n=f(0)+f(1)+\cdots+f(n)$, أثبت أنّ $S_n=\frac{n+1}{n+2}$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+\frac{2}{u_n}$ $u_0=4$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ التابع $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$ ثم استنتج أنّ العدد 2 حد قاصر على المتتالية u_n

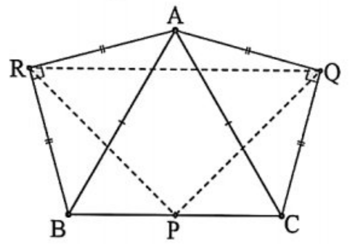
٢. أثبت أنّ المتتالية u_n متناقصة تماماً.

٣. استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

التمرين الثالث: ينتج معمل أسلاك الحديدية بعضها معيب فإذا كانت نسبة الأسلاك المعيبة من انتاج المعمل 6% يشارك في انتاج الأسلاك ألتين A و B تنتج الألة A: 60% من الأسلاك وتنتج الالة B: 40% من الأسلاك من بينها 5% معيب نختار سلكاً عشوائياً من الأسلاك وليكن E "حدث أن السلك معيب" والمطلوب:

1. ما احتمال أن يكون السلك المعيب وتنتجه الآلة A
2. ما احتمال أن يكون السلك معيب.
3. إذا علمت أن السلك معيب ما احتمال أن يكون من انتاج الالة A

التمرين الرابع: نتأمل في الشكل المجاور مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ننشئ على الضلع $[AB]$ مثلثاً ARB قائماً في R ومتساوي الساقين وننشئ على الضلع $[AC]$ مثلثاً ACQ قائماً في Q ومتساوي الساقين , النقطة P منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ ولتكن الأعداد العقدية r و q و p و c و b و a الممثلة للنقاط R و Q و P و C و B و A في المعلم المتجانس المباشر $(A;\vec{u},\vec{v})$ والمطلوب:



1. أثبت أنّ $r=\frac{1-i}{2}b$ و $q=\frac{1+i}{2}c$
2. اكتب العدد العقدي p بدلالة c و b
3. احسب $\frac{p-r}{p-q}$
4. استنتج طبيعة المثلث PQR

<u>ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين "100 درجة لكل مسألة"</u>

المسألة الأولى: نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{v},\vec{k})$ وليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً , وليكن Q المستوي الذي معادلتهُ $x-y+2z+4=0$ وأخيراً لتكن S الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB والمطلوب:

1. أثبت أنّ $2x+y-z-8=0$ هي معادلة المستوي P
2. جد معادلة الكرة S
3. أثبت أنّ المستوي Q مستوي مماس للكرة S
4. أثبت أنّ النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q

- ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً: $d:\begin{cases}x=t\\y=12-5t\,;\,t\in\mathbb{R}\\z=4-3t\end{cases}$

5. أثبت أنّ المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q
6. أثبت أنّ المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

المسألة الثانية: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,2[$ وفق: $f(x)=\ln\left(-1+\frac{2}{x}\right)$ والمطلوب:

1. أثبت أن $(2-x)\in D_f$ أياً كان $x\in D_f$
2. احسب عند كل x من D_f المقدار: $f(2-x)+f(x)$
3. استنتج أن النقطة $A(1,0)$ هي مركز تناظر للخط C_f
4. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
5. اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة A وادرس الوضع بين C_f و T
6. ارسم المقاربات والمماس T والخط C_f
7. استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g المعرف وفق: $g(x)=\ln\left(\frac{2-x}{e.x}\right)$

أولاً:

السؤال الأول:

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

الطلب الثاني:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = 0$$

الطلب الثالث:

$$f(2) = -1$$
$$f(-2) = -2$$

الطلب الرابع:

$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = m_\Delta = -1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]$$
$$= f'(0) = -1$$

السؤال الثاني:

الطلب الأول:

$$x_G = \frac{(3)(1)+(0)(2)+(1)(3)}{1+2+3} = 1$$
$$y_G = \frac{(2)(1)+(2)(2)+(2)(3)}{1+2+3} = 2$$
$$z_G = \frac{(1)(1)+(7)(2)+(1)(3)}{1+2+3} = 3$$
$$\to G(1,2,3)$$

الطلب الثاني:

نعلم أنّ:

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC} = (1+2+3)\overrightarrow{MG}$$
$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$$

ولدينا:

$$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-6\overrightarrow{MC}\right\|$$
$$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|6\overrightarrow{MG}-6\overrightarrow{MC}\right\|$$
$$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|6(\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MC})\right\|$$
$$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|6(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{CM})\right\|$$
$$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|6(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MG})\right\|$$
$$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|6\overrightarrow{CG}\right\|$$
$$6\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 6\left\|\overrightarrow{CG}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{CG}\right\|$$

ومنهُ Γ مجموعة النقاط من الفراغ تمثل معادلة كرة مركزها G ونصف قطرها $R = CG$

السؤال الثالث:

$$(36)^x + 6^{x+1} = 7$$
$$(6^2)^x + 6^{x+1} = 7$$
$$6^{2x} + 6.6^x - 7 = 0$$

لتكن $t = 6^x$ فتكون $t^2 = 6^{2x}$

$$t^2 + 6t - 7 = 0$$
$$(t+7)(t-1) = 0$$

إما $t = -7$

$$6^x = -7$$

مستحيلة الحل.

أو $t = 1$

$$6^x = 1$$
$$x.\ln(6) = 0$$
$$x = 0$$

استنتاج حلول المتراجحة:

$$(36)^x + 6^{x+1} \geq 7$$
$$(6^2)^x + 6^{x+1} - 7 \geq$$
$$6^{2x} + 6.6^x - 7 \geq 0$$

من المعادلة السابقة نجد أنّ: $x = 0$

ننظم جدول الإشارة وفق:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
المقدار	$-$	0	$+$
≥ 0	غ.م	|	م

$$\to S = [0,+\infty[$$

السؤال الرابع:

بما أنّ التابع f يمر من A فإنّ:

$$f(1) = -1$$
$$b = -1 \ldots (1)$$

بما أنّ الخط البياني يقبل مماساً موازياً لمحور الفواصل فإنّ:

$$f'(1) = 0$$

سنعود بعد قليل..

$$f'(x) = a.\ln(x) + \frac{1}{x}ax + b$$
$$= a.\ln(x) + a + b$$

عندئذ..

$$f'(1) = 0$$
$$a + b = 0 \ldots (2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} b = -1 \ldots (1) \\ a + b = 0 \ldots (2) \end{cases}$$

من (1) نجد أنّ:

$$b = -1$$

نعوض في (2) :

$$a = 1$$

السؤال الخامس:

الطلب الأول:

نعلم أنه في المثلث متساوي الأضلاع الذي طول ضلعه a يكون طول الارتفاع $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

وهنا طول ضلع المثلث هو 1 ومنهُ طول الارتفاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنهُ:

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \to Z_B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الطلب الثاني:

$$\begin{pmatrix}\text{عدد}\\\text{المثلثات}\end{pmatrix} = \binom{6}{3} = \frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} = 20$$

الطلب الثالث:

كل قطر يقابل أربعة مثلثات قائمة ولدينا ثلاثة أقطار إذاً:

$$\begin{pmatrix}\text{عدد}\\\text{المثلثات القائمة}\end{pmatrix} = 4 \times 3 = 12$$

الطلب الرابع:

$$\begin{pmatrix}\text{عدد}\\\text{عدد المستقيمة}\end{pmatrix} = \binom{6}{2} = 15$$

ثانياً:

التمرين الأول:

الطلب الأول:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$$
$$= \frac{1}{(x+2)(x+1)}$$
$$= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$
$$= \frac{a(x+2)+b(x+1)}{x^2+3x+2}$$

بالمطابقة نجد:

$$1 = a(x+2) + b(x+1)$$

بفرض $x = -2$ نجد أنّ:

$$1 = -b \to b = -1$$

بفرض $x = -1$ نجد:

$$1 = a \to a = 1$$

ومنهُ:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

الطلب الثاني:

$$\int_0^1 f(x)dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$= [\ln|x+1| - \ln|x+2|]_0^1$$
$$= (\ln 2 - \ln 3) - (0 - \ln 2)$$
$$= \ln 2 - \ln 3 + \ln 2$$
$$= 2\ln 2 - \ln 3$$
$$= \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$$

الطلب الثالث:

$$S_n = f(0) + f(1) + \cdots + f(n)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2}$$
$$= \frac{n+2-1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$$
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$$

التمرين الثاني:

الطلب الأول:

إثبات أن التابع f متزايد تماماً على $]2, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$$
$$= \frac{x^2-4}{2x^2}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{x^2-4}{2x^2} = 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$

إما $x = 2 \rightarrow$ مقبول

أو $x = -2 \rightarrow$ مرفوض

ننظم جدول الاطراد وفق:

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$

إذاً التابع f متزايد تماماً على المجال $]2, +\infty[$

استنتاج أنّ العدد (2) حد قاصر على u_n :

نثبت صحة الخاصة: $u_n \geq 2$ باستخدام الإثبات بالتدريج وفق:

نرمز الخاصة:

$$E(n): u_n \geq 2$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$u_0 = 4 \geq 2 \rightarrow$ محققة

نفرض صحة الخاصة:

$$E(n): u_n \geq 2 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$

أيّ يجب إثبات:

$$u_{n+1} \geq 2$$

الإثبات..

لدينا من العلاقة الفرض $(*)$:

$$u_n \geq 2$$

بالاستفادة من تزايد التابع f نصور الأطراف.

$$f(u_n) \geq f(2)$$
$$u_{n+1} \geq 2$$

محققة ومنهُ العدد (2) قاصر على المتتالية u_n

الطلب الثاني:

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} - u_n$$
$$= \frac{u_n^2 + 4 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{4 - u_n^2}{2u_n}$$
$$= \frac{(2-u_n)(2+u_n)}{2u_n}$$

مناقشة:

لدينا من الطلب السابق: $u_n \geq 2$ فإنّ:

- $2 - u_n \leq 0$
- $2 + u_n > 0$
- $2u_n > 0$
- $u_{n+1} - u_n < 0$

إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

الطلب الثالث:

بما أنّ المتتالية u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

حساب النهاية:

ليكن لدينا التابع المعرف على $]2, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

لإيجاد النهاية نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$
$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x$$
$$\frac{x^2+4}{2x} = x$$
$$x^2 + 4 = 2x^2$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$

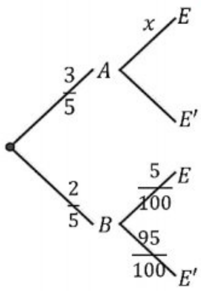
إما $x = 2 \rightarrow$ مقبول

أو $x = -2 \rightarrow$ مرفوض

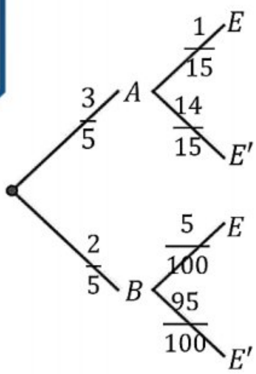
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

التمرين الثالث:

الحل:



$$P(E) = \frac{6}{100}$$
$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E)$$
$$\frac{6}{100} = \frac{3}{5}x + \frac{2}{100}$$
$$\frac{3}{5}x = \frac{4}{100}$$
$$\frac{3}{5}x = \frac{1}{25}$$
$$x = \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{3}$$
$$x = \frac{1}{15}$$



الطلب الأول:

$$P(A \cap E) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{1}{25}$$

الطلب الثاني:

$$P(E) = \frac{6}{100}$$

الطلب الثالث:

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{6}{100}}$$
$$= \frac{1}{25} \cdot \frac{100}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

التمرين الرابع:

الطلب الأول:

إثبات أنّ $q = \frac{1+i}{2}c$:

لدينا المثلث ACQ قائم في Q ومتساوي الساقين فيه النقطة C صورة النقطة A وفق دوران مركزه Q وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنهُ الصيغة العقدية للدوران:

$$c - q = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - q)$$
$$c - q = i(-q)$$
$$q - iq = c$$
$$(1-i)q = c$$
$$q = \frac{c}{1-i}$$
$$q = \frac{(1)(1+i)}{(1-i)(1+i)}c$$
$$q = \frac{1+i}{2}c$$

إثبات أنّ $r = \frac{1-i}{2}b$:

لدينا المثلث ARB قائم في R ومتساوي الساقين فيه النقطة A صورة النقطة B وفق دوران مركزه R وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنهُ الصيغة العقدية للدوران:

$$a - r = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - r)$$
$$-r = i(b - r)$$
$$r - ir = -ib$$
$$(1-i)r = -ib$$

$$r=\frac{-i}{1-i}b$$
$$r=\frac{(-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}b$$
$$r=\frac{1-i}{2}b$$

الطلب الثاني:

كتابة p بدلالة c و b :

بما أنّ النقطة P منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ فإنّ:

$$p=\frac{b+c}{2}$$

الطلب الثالث:

حساب $\frac{p-r}{p-q}$:

$$\frac{p-r}{p-q}=\frac{\frac{b+c}{2}-\frac{1-i}{2}b}{\frac{b+c}{2}-\frac{1+i}{2}c}$$
$$=\frac{b+c-(1-i)b}{b+c-(1+i)c}$$
$$=\frac{b+c-b+ib}{b+c-c-ic}=\frac{c+ib}{b-ic}$$
$$=\frac{i(-ic+b)}{b-ic}=i$$

الطلب الرابع:

استنتاج طبيعة المثلث PQR :

لدينا من الطلب السابق:

$$\frac{p-r}{p-q}=i\rightarrow\frac{Z_{\overrightarrow{RP}}}{Z_{\overrightarrow{QP}}}=i$$

حساب الطويلة:

$$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{RP}}}{Z_{\overrightarrow{QP}}}\right|=i$$
$$\frac{RP}{QP}=1\rightarrow RP=QP$$

حساب الزاوية:

$$\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{RP}}}{Z_{\overrightarrow{QP}}}\right)=i$$
$$(\overrightarrow{QP},\overrightarrow{RP})=\frac{\pi}{2}$$

ومنه المثلث PQR متساوي الساقين وقائم في P

ثالثاً:

المسألة الأولى:

الطلب الأول:

النقطة: $B(3,2,0)$

الناظم: $\overrightarrow{AB}(2,1,-1)$

المعادلة:

$$P:2(x-3)+1(y-2)-1(z-0)=0$$
$$2x-6+y-2-z=0$$
$$2x+y-z-8=0$$

الطلب الثاني:

المركز: $A(1,1,1)$

نصف القطر:

$$r=AB=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

المعادلة:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$$

الطلب الثالث:

يجب إثبات أنّ:

$$\underbrace{dist(A,Q)}_{l_1}=\underbrace{R}_{l_2}$$
$$l_1=dist(A,Q)=\frac{|1-1+2+4|}{\sqrt{1+1+4}}$$
$$=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}=R=l_2$$

ومنهُ المستوي Q مماس للكرة S .

الطلب الرابع:

معادلة المستوي Q :

$$Q:x-y+2z+4=0$$

التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ المار من A والعمودي على المستوي Q :

النقطة: $A(1,1,1)$

شعاع التوجيه: $\vec{u}_{\Delta}=\vec{n}_Q(1,-1,2)$

التمثيل الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases}x=t+1\\y=-t+1\,;t\in\mathbb{R}\\z=2t+1\end{cases}$$

المسقط القائم لـ A على المستوي Q هو النقطة A' نقطة تقاطع المستوي Q مع المستقيم Δ :

$$\begin{cases}x-y+2z+4=0\ldots(1)\\x=t+1\ldots(2)\\y=-t+1\ldots(3)\\z=2t+1\ldots(4)\end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) :

$$t+1+t-1+4t+2+4=0$$
$$6t+6=0$$
$$6t=-6\rightarrow t=-1$$

نعوض في (2) و (3) و (4) :

- $x=-1+1=0$
- $y=1+1=2$
- $z=-2+1=-1$

$$\rightarrow A'(0,2,-1)$$

ومنهُ: $C=A'$

إذاً النقطة C هي مسقط النقطة A على المستوي Q .

الطلب الخامس:

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي P وفق:

$$2(t)+12-5t-(4-3t)-8=0$$
$$2t+12-5t-4+3t-8=0$$
$$5t-5t+12-12=0$$
$$0=0$$

محققة.

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي Q وفق:

$$t-(12-5t)+2(4-3t)+4=0$$
$$t-12+5t+8-6t+4=0$$
$$6t-6t-12+12=0$$
$$0=0$$

محققة.

ومنهُ المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q .

الطلب السادس:

معادلة المستوي R المتسوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$:

تحديد النقطة:

I منتصف القطعة $[BC]$:

$$I\left(\frac{3+0}{2},\frac{2+2}{2},\frac{0-1}{2}\right)$$
$$I\left(\frac{3}{2},2,-\frac{1}{2}\right)$$

الناظم:

$$\vec{n}_R=\overrightarrow{BC}(-3,0,-1)$$

المعادلة:

$$R:-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+0(y-2)-1\left(z+\frac{1}{2}\right)=0$$
$$R:-3x+\frac{9}{2}-z-\frac{1}{2}=0$$
$$R:-3x-z+4=0$$

حتى يكون d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$ يجب أن يحقق معادلتهُ "أيّ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في R" :

$$-3(t)-(4-3t)+4=0$$
$$-3t-4+3t+4=0$$
$$0=0$$

محققة.

ومنهُ المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

المسألة الثانية:

الطلب الأول: لدينا:

$$x\in]0,2[$$
$$-x\in]0,-2[$$
$$2-x\in]0,2[$$

وهو المطلوب.

الطلب الثاني:

$$f(2-x)+f(x)$$
$$=\ln\left(-1+\frac{2}{2-x}\right)+\ln\left(-1+\frac{2}{x}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{-2+x+2}{2-x}\right)+\ln\left(\frac{-x+2}{x}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)+\ln\left(\frac{-x+2}{x}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{x}{2-x}\cdot\frac{-x+2}{x}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{x-2}{x-2}\right)=\ln(1)=0$$

الطلب الثالث:

مما سبق نجد أنّ:

أياً كان $x \in D_f$ فإنّ $2 - x \in D_f$

و: $f(2-x) + f(x) = 0$

إذا النقطة $A(1,0)$ مركز تناظر للخط البياني C_f.

الطلب الرابع:

التابع f معرف على $]0,2[$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \ln(0) = -\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]0,2[$:

ولدينا:

$$f'(x) = \frac{\left(-1+\frac{2}{x}\right)'}{\left(-1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{-2}{x^2}}{\frac{-x+2}{x}} = \frac{-2}{-x^2+2x}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-2}{-x^2+2x} = 0$$

$$-2 \neq 0$$

مستحيلة الحل $f'(x)$ لا ينعدم.

x	0		2
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

الطلب الخامس:

النقطة: $A(1,0)$

الميل:

$$m = f'(1) = -2$$

المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = -2(x-1) + 0$$

$$T: y = -2x + 2$$

دراسة الوضع النسبي بين C_f و T :

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= \ln\left(-1+\frac{2}{x}\right) - (-2x+2)$$

$$= \ln\left(-1+\frac{2}{x}\right) + 2x - 2$$

$$h(x) = 0$$

سنعود بعد قليل..

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $]0,2[$ وفق:

$$g(x) = \ln\left(-1+\frac{2}{x}\right) + 2x - 2$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = \frac{-2}{-x^2+2x} + 2$$

$$g'(x) = \frac{-2-2x^2+4x}{-x^2+2x}$$

$$g'(x) = 0$$

$$-2(x^2-2x+1) = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1 \in D_g \to g(1) = 0$$

x	0		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ أنه يوجد للمعادلة حل هو $x =$ 1 إذاً

$h(x)$ ينعدم عند $x = 1$

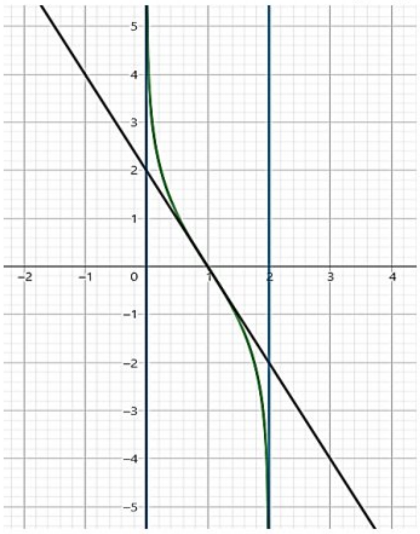
عدنا..

ننظم جدول الوضع النسبي

x	0	1	2
$h(x)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	C فوق T	0	C تحت T

الطلب السادس:

الرسم:



الطلب السابع:

$$g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{e.x}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}.\frac{2-x}{x}\right)$$

$$= \ln\frac{1}{e} + \ln\left(\frac{2-x}{x}\right)$$

$$= -1 + \ln\left(\frac{2-x}{x}\right)$$

$$= -1 + \ln\left(-1+\frac{2}{x}\right)$$

$$= f(x) - 1$$

C_gينتج عن C_f

بانسحابه على محور التراتيب نحو الأسفل بمقدار واحد.

أن يتوج مسعانا بالوصول.. آمين 🙁 ♡

أولاً: أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: "40 درجة لكل سؤال":

السؤال الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المستمر على المجال $[0,+\infty[$, جدول تغيراته هو الآتي:

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	$3\|\|-1$	$-$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-3

1. هل للخط C مقاربات مائلة؟ علل إجابتك.
2. دل على القيم الحدية محلياً مبيناً نوعها.
3. اكتب معادلة لنصف المماس من اليسار للخط C في النقطة $A(1,5)$
4. عيّن $f([0,+\infty[)$

السؤال الثاني: ليكن العدد $A_n=\left(1+\sqrt{5}\right)^n+\left(1-\sqrt{5}\right)^n$ والمطلوب:

1. احسب A_0 و A_1 و A_2
2. أثبت أنّ $A_n\in\mathbb{N}$ أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 0$

السؤال الثالث: في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ ليكن لدينا العددان $b=-1+\sqrt{3}i$ و $c=-1-\sqrt{3}i$ والمطلوب:

1. اكتب العدد b بالشكل الأسي واستنتج الشكل الأسي للعدد c
2. في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن لدينا النقاط A و B و C حيث: $Z_A=a$ و $Z_B=b$ و $Z_C=c$ حيث $a\in\mathbb{R}^+$, عيّن a ليكون المثلث ABC متساوي الأضلاع.

السؤال الرابع: ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $u_n=\frac{3^n-5^n}{2^n+5^n}$
جد نهاية المتتالية u_n وهل المتتالية u_n متقاربة؟

السؤال الخامس: ليكن لدينا التابع f المعرف وفق: $f(x)=(x+\lambda)e^{2x}$ والمطلوب:

1. أثبت أنّ $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'-2y=e^{2x}$
2. عيّن قيمة λ إذا علمت أنّ مماس الخط C في النقطة التي فاصلتها $x=0$ يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=1-x$
3. بفرض $\lambda=-1$ احسب $\int_1^0 f(x)\,dx$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية "60 درجة لكل تمرين":

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\sqrt{x^2+ax+b}$ والمطلوب:

1. عيّن a و b بحيث تكون $f(-3)=1$ قيمة حدية للتابع.
- بفرض $a=6$ و $b=10$:
2. أوجد العددين الحقيقيين m و p اللذان يحققان $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $p=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$
3. استنتج معادلة للمقارب المائل للخط C في جوار الـ $+\infty$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $u_n=\frac{2n-1}{n+1}$ والمطلوب:

1. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$
2. أثبت أنّ العدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$
3. احسب نهاية المتتالية عند الـ $+\infty$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n>n_0$ كان u_n في المجال $]1.9,2.1[$

التمرين الثالث: صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء اللون , نسحب من الصندوق ثلاث كرات وفي آن معاً ليكن A
≪ الحصول على كراء حمراء على الأقل≫ وليكن B ≪ الحصول على كرتين سوداء على الأقل≫ والمطلوب:

1. احسب احتمالات كل من الأحداث A و B و $(A|B)$
2. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة , اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينهُ.

التمرين الرابع: نتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان

$z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$	$z_A = 4$

وليكن I منتصف [AB] والمطلوب:

1. ارسم شكلاً مناسباً وبين طبيعة المثلث OAB
2. استنتج قياس للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$
3. احسب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.
4. استنتج كلاً من $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين "100 درجة لكل مسألة"

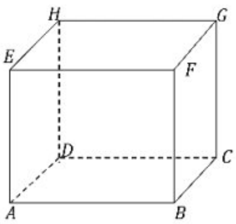
المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,2[\cup]2,+\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{3\ln x}{4-x^2}$

وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق: $g(x) = \frac{4}{x^2} - 1 + 2\ln x$

1. ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.
2. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$
3. احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.
4. أثبت من أجل كل x من I أنّ: $f'(x) = \frac{3x.g(x)}{(4-x^2)^2}$ ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f
5. اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 1$
6. في معلم متجانس ارسم T ثم ارسم C.

المسألة الثانية: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 3$ و $BC = 2$ و $AE = 1$ و J مركز ثقل المثلث BGE

1. أثبت صحة المساواة الشعاعية $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$
2. في معلم متجانس $\left(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ أوجد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات النقطة J .
3. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DF)
4. أثبت أنّ النقاط D و J و F تقع على استقامة واحدة.
5. اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها $[AE]$ ونصف قطرها $[AD]$



أولاً:

السؤال الأول:

الطلب الأول:

لا يوجد للخط C مقاربات مائلة لأنّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -3$$

الطلب الثاني:

$f(0)=3$ قيمة حدية صغرى محلياً

$f(1)=5$ قيمة حدية كبرى محلياً

الطلب الثالث:

$$y = f'(1^-)(x-1)+f(1)$$
$$y = 3(x-1)+5$$
$$y = 3x+2$$

الطلب الرابع:

$$f([0,+\infty[) =]-3,5]$$

السؤال الثاني:

الطلب الأول:

$$A_0 = 1+1 = 2$$
$$A_1 = 1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5} = 2$$
$$A_2 = \left(1+\sqrt{5}\right)^2+\left(1-\sqrt{5}\right)^2$$
$$= 1+2\sqrt{5}+5+1-2\sqrt{5}+5$$
$$= 12$$

الطلب الثاني:

الحد ذو الدليل r في منشور $\left(1+\sqrt{5}\right)^n$:

$$T_r = \binom{n}{r}\left(\sqrt{5}\right)^r$$

الحد ذو الدليل r في منشور $\left(1-\sqrt{5}\right)^n$:

$$T'_r = \binom{n}{r}\left(-\sqrt{5}\right)^r$$

$$T_r+T'_r = \binom{n}{r}5^{\frac{r}{2}}+\binom{n}{r}(-1)^r5^{\frac{r}{2}}$$
$$= \left(1+(-1)^r\right)\binom{n}{r}5^{\frac{r}{2}}$$

مناقشة:

في حالة r عدد زوجي أيّ $r=2k$:

$$T_r+T'_r = (1+1)\binom{n}{2k}5^k$$
$$= 2\binom{n}{2k}5^k \in \mathbb{N}$$

في حالة r عدد فردي أيّ $r=2k+1$

نجد أنّ: $1+(-1)^r=0$ ومنهُ:

$$T_r+T'_r = 0$$
$$0\in\mathbb{N}$$

لكن A_n يساوي مجموع جميع هذه الحدود بمعنى:

$$A_n = (T_0+T'_0)+(T_1+T'_1)+\cdots+(T_n+T'_n)$$

ولأنها أعداد طبيعية كان مجموعها طبيعياً أيضاً ومنهُ أياً كان n كان $A_n\in\mathbb{N}$

السؤال الثالث:

الطلب الأول:

كتابة b بالشكل الأسي وفق:

$$b = -1+\sqrt{3}i$$
$$x=-1\ ,\ y=\sqrt{3}$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\theta = \pi-\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$
$$\Longrightarrow b = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

استنتاج الشكل الأسي للعدد c :

$$c = \bar{b}$$
$$c = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

الطلب الثاني:

تعيين a :

حتى يكون المثلث ABC متساوي الأضلاع يكفي أن يكون $BA=BC$ حيث:

$$BC = \left|Z_{\overrightarrow{BC}}\right| = |Z_C-Z_B|$$
$$= \left|-1-\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i\right|$$
$$= \left|-2\sqrt{3}i\right| = 2\sqrt{3}$$
$$BA = \left|Z_{\overrightarrow{BA}}\right| = |Z_A-Z_B|$$
$$= \left|a+1-\sqrt{3}i\right|$$
$$= \sqrt{(a+1)^2+3}$$

نعوض في العلاقة $BA=BC$ وفق:

$$\sqrt{(a+1)^2+3} = 2\sqrt{3}$$
$$a^2+2a+1+3 = 12$$
$$a^2+2a-8 = 0$$
$$(a+4)(a-2) = 0$$

إما $a=-4 \to$ مرفوض

أو $a=2 \to$ مقبول

السؤال الرابع:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$u_n = \frac{3^n-5^n}{2^n+5^n}$$
$$= \frac{5^n\left(\frac{3^n}{5^n}-1\right)}{5^n\left(\frac{2^n}{5^n}+1\right)} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}$$

لما كان $-1<\frac{3}{5}<1$ فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

لما كان $-1<\frac{2}{5}<1$ فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

ومنهُ:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$$

التقارب:

بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$

فإنّ u_n متقاربة من الـ (-1) .

السؤال الخامس:

الطلب الأول:

$$\underbrace{y'-2y}_{l_1} = \underbrace{e^{2x}}_{l_2}$$

سنعود بعد قليل..

$$y' = f'(x) = e^{2x}+2e^{2x}(x+\lambda)$$
$$f'(x) = e^{2x}(1+2x+2\lambda)$$

عدنا..

$$l_1 = y'-2y$$
$$= f'(x)-2f(x)$$
$$= e^{2x}(1+2x+2\lambda)-2(x+\lambda)e^{2x}$$
$$= e^{2x}(1+2x+2\lambda-2x-2\lambda)$$
$$= e^{2x} = l_2$$

إذاً $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية.

الطلب الثاني:

بما أنّ الخط البياني يقبل مماساً يوازي المستقيم $y=1-x$ في النقطة التي فاصلتها $x=0$ فإنّ:

$$f'(0) = m$$

سنعود بعد قليل..

$$m = -1$$
$$f'(x) = e^{2x}(1+2x+2\lambda)$$

عدنا..

$$f'(0) = -1$$
$$1+2\lambda = -1$$
$$2\lambda = -2 \to \lambda = -1$$

الطلب الثالث:

$$\int_1^0 f(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 -f(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 -(x-1)e^{2x}\,dx$$
$$= \int_0^1 (-x+1)e^{2x}\,dx$$

نحتاج تجزئة وفق:

$$u = -x+1 \to u' = -1$$
$$v' = e^{2x} \to v = \frac{1}{2}e^{2x}$$
$$= \left[(-x+1)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$

$$= \left[(-x+1)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1$$
$$= \left[(-x+1)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + \frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{4}e^2\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{4}e^2 - -\frac{3}{4} = \frac{e^2-3}{4}$$

ثانياً:

التمرين الأول:

$$f(x) = \sqrt{x^2+ax+b}$$

الطلب الأول:

تعيين a و b :

بما أنّ التابع f يمر من النقطة $(-3,1)$ فإنّ:

$$f(-3) = 1$$
$$\sqrt{9-3a+b} = 1$$
$$9-3a+b = 1$$
$$3a-b = 8 \dots (1)$$

بما أنّ للتابع f قيمة حدية فإنّ:

$$f'(-3) = 0$$

سنعود بعد قليل:

$$f'(x) = \frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax+b}}$$

عدنا:

$$\frac{-6+a}{2\sqrt{9-3a+b}} = 0$$
$$-6+a = 0$$
$$a = 6 \dots (2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} 3a-b = 8 \dots (1) \\ a = 6 \dots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد أنّ $a = 6$

نعوض في (1) :

$$18-b = 8 \rightarrow b = 10$$

ومنه:

$$f(x) = \sqrt{x^2+6x+10}$$

الطلب الثاني:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+6x+10}}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+6x+10}}{x}$$
$$= \frac{|x|\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}}}{x}$$

لمّا كان $x \to +\infty$ فإنّ $|x| = x$

$$= \frac{x\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}}}{x} = \sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$
$$\rightarrow m = 1$$

$$p = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx)$$
$$f(x)-mx = \sqrt{x^2+6x+10} - x$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x)-mx = \sqrt{x^2+6x+10} - x$$
$$= \frac{x^2+6x+10-x^2}{\sqrt{x^2+6x+10}+x}$$
$$= \frac{6x+10}{\sqrt{x^2+6x+10}+x}$$
$$= \frac{6x+10}{|x|\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{10}{x}}+x}$$

لمّا كان $x \to +\infty$ فإنّ $|x| = x$

$$= \frac{6x+10}{x\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{10}{x}}+x}$$
$$= \frac{x\left(6+\frac{10}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{10}{x}}+1\right)}$$
$$= \frac{6+\frac{10}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{10}{x}}+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = \frac{6}{2} = 3$$
$$\rightarrow p = 3$$

الطلب الثالث:

استنتاج معادلة المقارب المائل:

المستقيم الذي معادلته: $y = mx+p$

$y = x+3$ مقارب مائل للخط البياني C

في جوار الـ $+\infty$.

التمرين الثاني:

الطلب الأول:

دراسة اطراد المتتالية u_n وفق:

$$u_{n+1} - u_n$$
$$= \frac{2(n+1)-1}{n+1+1} - \frac{2n-1}{n+1}$$
$$= \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1}$$
$$= \frac{(2n+1)(n+1)-(2n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{2n^2+3n+1-2n^2-3n+2}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{3}{(n+1)(n+2)} > 0$$

إذاً المتتالية u_n متزايدة تماماً.

الطلب الثاني:

نشكل الفرق:

$$u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2$$
$$= \frac{2n-1-2n-2}{n+1} = -\frac{3}{n+1}$$

نلاحظ أنّ: $u_n - 2 \le 0$ ومنه $u_n \le 2$

إذاً العدد (2) راجح على المتتالية (u_n) .

الطلب الثالث:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n}{n}\right) = 2$$

تعيين قيمة الـ n_0 :

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.9+2.1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1-1.9}{2} = \frac{0.2}{2} = \frac{1}{10}$$

تحقق العلاقة:

$$|u_n - c| < r$$
$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|-\frac{3}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$
$$\frac{|-3|}{|n+1|} < \frac{1}{10}$$
$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10}$$
$$\frac{n+1}{3} > 10$$
$$n+1 > 30$$
$$n > 29$$
$$\rightarrow n_0 = 29$$

التمرين الثالث:

بما أنّ السحب في آن معاً فإننا:

نستخدم قانون التوافيق.

$$n(\Omega) = \binom{7}{3} = 35$$

الطلب الأول:

$A: 1R$ و $2B$ أو $2R$ و $1B$ أو $3R$

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2} + \binom{3}{2}\binom{4}{1} + \binom{3}{3}}{n(\Omega)}$$
$$= \frac{18+12+1}{35} = \frac{31}{35}$$

$B: 2B$ و $1R$ أو $3B$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1} + \binom{4}{3}}{n(\Omega)}$$
$$= \frac{18+4}{35} = \frac{22}{35}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

سنعود بعد قليل..

$A\cap B: 2B$ و $1R$

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}}{n(\Omega)}=\frac{18}{35}$$

عدنا..

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{\frac{18}{35}}{\frac{22}{35}}=\frac{18}{22}=\frac{9}{11}$$

الطلب الثاني:

$$X=\{0,1,2,3\}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{3}}{n(\Omega)}=\frac{4}{35}$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{n(\Omega)}=\frac{18}{35}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{n(\Omega)}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{3}{3}}{n(\Omega)}=\frac{1}{35}$$

قانونه الاحتمالي:

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

التوقع الرياضي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i\,p_i$$

$$=0\left(\frac{4}{35}\right)+1\left(\frac{18}{35}\right)+2\left(\frac{12}{35}\right)+3\left(\frac{1}{35}\right)$$

$$=\frac{45}{35}=\frac{9}{7}$$

التباين:

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$

حيث:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2p_i$$

$$=0\left(\frac{4}{35}\right)+1\left(\frac{18}{35}\right)+4\left(\frac{12}{35}\right)+9\left(\frac{1}{35}\right)=\frac{15}{7}$$

ومنه:

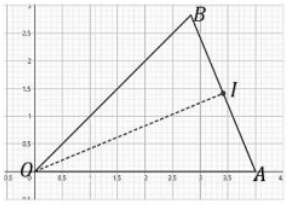
$$V(X)=\frac{15}{7}-\left(\frac{9}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$$

التمرين الرابع:

الطلب الأول:

$$z_A=4\rightarrow A(4,0)$$

$$z_B=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i\rightarrow B\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$$



توضيح طبيعة المثلث OAB وفق:

$$\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}=\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\frac{z_B}{z_A}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

نوجد الزاوية والطولية لتحديد نوع المثلث:

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right|\rightarrow\frac{OB}{OA}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{OB}{OA}=1\rightarrow OB=OA$$

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right)=\arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

نحسب زاوية العدد $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ وفق:

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad,\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$r=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنه: $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\rightarrow\arg\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{4}$$

ومنه المثلث (OAB) متساوي الساقين.

إنّ: $\widehat{AOB}=\frac{\pi}{4}$

الطلب الثاني:

بما أنّ المثلث AOB متساوي الساقين فيه (OI) متوسط متعلق بالقاعدة فهو منصف للزاوية $\widehat{AOB}$ أيّ أنّ:

$$\left(\vec{u},\overrightarrow{OI}\right)=\arg(z_I)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}$$

الطلب الثالث:

كتابة z_I بصيغته الجبرية:

$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{4+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2}$$

$$z_I=2+\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

كتابة z_I بصيغته الأسيّة:

لدينا:

$$z_I=2+\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

$$x=2+\sqrt{2}\quad,\quad y=\sqrt{2}$$

الطويلة:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{4+4\sqrt{2}+2+2}=\sqrt{8+4\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{4\left(2+\sqrt{2}\right)}=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

الزاوية:

$\theta=\arg(z_I)=\frac{\pi}{8}$ **لدينا من الطلب الثاني**

$$\rightarrow z_I=2\sqrt{2+\sqrt{2}}.\,e^{i\frac{\pi}{8}}$$

الطلب الرابع:

أسي $z_I=z_I$ **جبري**

$$2+\sqrt{2}+\sqrt{2}i=2\sqrt{2+\sqrt{2}}.\,e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

ثالثاً:

المسألة الأولى:

الطلب الأول:

التابع g معرف ومستمر على $]0,+\infty[$ وفق:

$$\lim_{x\to0}g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$g(x)=\frac{4}{x^2}-1+2\ln x$$

$$=\frac{4-x^2+2x^2\ln x}{x^2}$$

$$=\frac{4-x^2+2x.x\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to0}g(x)=\frac{4-0+0}{0^+}=+\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to0}(x\ln x)=0$$

$x=0$ **مقارب شاقولي نحو** oy^+

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0-1+\infty=+\infty$$

التابع g اشتقاقي على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g'(x)=\frac{-8x}{x^4}+\frac{2}{x}$$

$$=-\frac{8}{x^3}+\frac{2}{x}=\frac{-8+2x^2}{x^3}$$

$$g'(x) = 0$$
$$\frac{-8 + 2x^2}{x^3} = 0$$
$$-8 + 2x^2 = 0$$
$$2x^2 = 8$$
$$x^2 = 4$$

إما $x = 2 \in D_g \rightarrow g(2) = 2\ln(2)$

أو $x = -2 \notin D_g$

ننظم جدول تغيرات التابع g وفق:

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني:

نلاحظ من جدول التغيرات وتحديداً من حقل $g(x)$ أنّ:

$$g(x) \geq 2\ln 2 \rightarrow g(x) > 0$$

الطلب الثالث:

دراسة نهايات التابع f

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{-\infty}{4} = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو y^-خ

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{3\ln 2}{0^+} = +\infty$$

$x = 2$ مقارب شاقولي نحو oy^+

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{3\ln 2}{0^-} = -\infty$$

$x = 2$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{3\ln x}{4 - x^2} = \frac{3\ln x}{x\left(\frac{4}{x} - x\right)}$$
$$= \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{3}{\frac{4}{x} - x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\left(\frac{3}{\infty}\right) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

الطلب الرابع:

$$\underbrace{f'(x)}_{l_1} = \underbrace{\frac{3x.\,g(x)}{(4 - x^2)^2}}_{l_2}$$
$$l_1 = f'(x)$$
$$= \frac{(3\ln x)'(4 - x^2) - (4 - x^2)'(3\ln x)}{(4 - x^2)^2}$$
$$= \frac{\frac{3}{x}(4 - x^2) - (-2x)(3\ln x)}{(4 - x^2)^2}$$
$$= \frac{\frac{12}{x} - 3x + 6x\ln x}{(4 - x^2)^2}$$
$$= \frac{3x\left(\frac{4}{x^2} - 1 + 2\ln x\right)}{(4 - x^2)^2}$$
$$= \frac{3x.\,g(x)}{(4 - x^2)^2} = l_2$$

محققة.

نعدم:

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{3x.\,g(x)}{(4 - x^2)^2} = 0$$
$$3x.\,g(x) = 0$$
$$3x\left(\frac{4}{x^2} - 1 + 2\ln x\right) = 0$$

مختلطة لا يمكن حلها.

بالاعتماد على جدول تغيرات التابع g ننظم جدول f.

نلاحظ أن $g(x)$ لا ينعدم.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0

الطلب الخامس:

كتابة معادلة المماس:

تحديد النقطة:

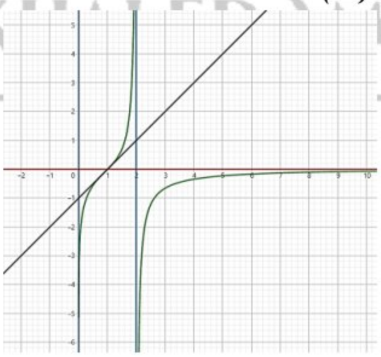
$$x = 1$$
$$y = f(1) = 0$$
$$\rightarrow A(1,0)$$

تحديد الميل:

$$m = f'(1) = \frac{3(1)\big(g(1)\big)}{9}$$
$$= \frac{3(3)}{9} = 1$$
$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$
$$y = 1(x - 1) + 0$$
$$T: y = x - 1$$

الطلب السادس:

الرسم



المسألة الثانية:

الطلب الأول:

$$\underbrace{\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{AD}}_{l_1} = \underbrace{\vec{0}}_{l_2}$$
$$l_1 = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FC} - \overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD}$$
$$= \vec{0} = l_2$$

محققة

الطلب الثاني:

إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات:

$A(0,0,0)$	$E(0,0,1)$
$B(3,0,0)$	$F(3,0,1)$
$D(0,2,0)$	$H(0,2,1)$
$C(3,2,0)$	$G(3,2,1)$

إحداثيات J مركز ثقل المثلث (BGE) :

$$x_J = \frac{x_B + x_G + x_E}{3} = \frac{3 + 3 + 0}{3} = 2$$
$$y_J = \frac{y_B + y_G + y_E}{3} = \frac{0 + 2 + 0}{3} = \frac{2}{3}$$
$$z_J = \frac{z_B + z_G + z_E}{3} = \frac{0 + 1 + 1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\rightarrow J\left(2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

الطلب الثالث:

التمثيل الوسيط للمستقيم (DF)

تحديد النقطة: $D(0,2,0)$

تحديد شعاع التوجيه:

$$\vec{u} = \overrightarrow{DF}(3,-2,1)$$

التمثيل الوسيطي:

$$(DF): \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t + 2\,; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

الطلب الرابع:

لدينا:

$$\overrightarrow{DJ}\left(2, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{DF}(3,-2,1)$$

نلاحظ أنّ المركبات متناسبة ويتحقق:

$$\overrightarrow{DJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$$

إذاً الشعاعين $\overrightarrow{DJ}$ و $\overrightarrow{DF}$ مرتبطين خطياً ومنه النقاط D و F و J تقع على استقامة واحدة.

الطلب الخامس:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$0 \leq z \leq 1$$