

$$f(x) = \frac{2[\cos x - 1] \cdot [\cos x + 1]}{[\sqrt{4x^2 + 2} - \sqrt{2}] \cdot [\cos x + 1]}$$

$$= \frac{-2[\sin^2 x] \cdot [\sqrt{4x^2 + 2} + \sqrt{2}]}{[\sqrt{4x^2 + 2} - \sqrt{2}] \cdot [\sqrt{4x^2 + 2} + \sqrt{2}] \cdot [\cos x + 1]}$$

$$= \frac{-2 \sin^2 x \cdot [\sqrt{4x^2 + 2} + \sqrt{2}]}{(4x^2 + 2 - 2) \cdot [\cos x + 1]}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sin x}{x} \right]^2 \cdot \frac{[\sqrt{4x^2 + 2} + \sqrt{2}]}{[\cos x + 1]}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2} (1) \cdot \frac{[\sqrt{2} + \sqrt{2}]}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{x \sin x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \quad (0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) ; \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \frac{x \sin x \cdot [\sqrt{x^2 + 1} + 1]}{[\sqrt{x^2 + 1} - 1] \cdot [\sqrt{x^2 + 1} + 1]}$$

$$f(x) = \frac{x \sin x}{x^2} \cdot [\sqrt{x^2 + 1} + 1]$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot [\sqrt{x^2 + 1} + 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (1) \cdot [1 + 1] = 2$$

أولاً: الوحدة الأولى

نهايات ← احاطة ← مقاربات ← استمرار
نهاية تابع مركب ← تابع الجزء الصحيح
نهاية حسب التعريف ← حالات مقارب مائل

السؤال الأول: (النهايات)

احسب نهاية كل من التوابع التالية عند القيمة (a) المرفقة:

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{2 \cos x - 2}{\sqrt{4x^2 + 2} - \sqrt{2}} \quad (0)$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{x \sin x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \quad (0)$$

$$\textcircled{3} f(x) = \frac{\sin(x - \pi)}{5x^2 - 5\pi^2} \quad (\pi)$$

$$\textcircled{4} f(x) = \frac{7x - 7}{\sqrt{3x + 1} - 2} \quad (1)$$

$$\textcircled{5} f(x) = \frac{\sqrt{2x + 10} - 4}{9 - x^2} \quad (3)$$

$$\textcircled{6} f(x) = \frac{2x - \sin 3x}{x + \sin 5x} \quad (0)$$

$$\textcircled{7} f(x) = \sqrt{9x^2 - x} - 3x + 1 \quad (+\infty)$$

$$\textcircled{8} f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (+\infty)(1)$$

الحل:

حالة عدم تعيين

الإزالة:

الحل:

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{2 \cos x - 2}{\sqrt{4x^2 + 2} - \sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) ; \frac{2 - 2}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

الإزالة:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{7}{3}(4) = \frac{28}{3}$$

$$\textcircled{5} f(x) = \frac{\sqrt{2x+10}-4}{9-x^2} \quad (3)$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x); \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

الإزالة:

$$f(x) = \frac{[\sqrt{2x+10}-4] \cdot [\sqrt{2x+10}+4]}{(3-x)(3+x) \cdot [\sqrt{2x+10}-4]}$$

$$f(x) = \frac{2x-6}{(3-x)(3+x) \cdot [\sqrt{2x+10}-4]}$$

$$f(x) = \frac{2(x-3)}{(3-x)(3+x) \cdot [\sqrt{2x+10}-4]}$$

$$f(x) = \frac{-2}{(3+x) \cdot [\sqrt{2x+10}-4]}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{-2}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6+10}+4}$$

$$\frac{-1}{3} \left(\frac{1}{8} \right) = \left(\frac{-1}{24} \right)$$

$$\textcircled{6} f(x) = \frac{2x - \sin 3x}{x + \sin 5x} \quad (0)$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x); \frac{0-0}{0+0} = \frac{0}{0}$$

$$\textcircled{3} f(x) = \frac{\sin(x-\pi)}{5x^2-5\pi^2} \quad (\pi)$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x); \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

الإزالة:

$$f(x) = \frac{\sin(x-\pi)}{5(x-\pi)(x+\pi)}$$

$$f(x) = \frac{1}{5(x+\pi)} \cdot \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$$

$$x \rightarrow \pi \quad (x-\pi) \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \frac{1}{10\pi} \cdot (1) = \frac{1}{10\pi}$$

$$\textcircled{4} f(x) = \frac{7x-7}{\sqrt{3x+1}-2} \quad (1)$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x); \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

الإزالة:

$$f(x) = \frac{7(x-1) \cdot [\sqrt{3x+1}+2]}{[\sqrt{3x+1}-2] \cdot [\sqrt{3x+1}+2]}$$

$$f(x) = \frac{7(x-1) \cdot [\sqrt{3x+1}+2]}{3x-3}$$

$$f(x) = \frac{7(x-1) \cdot [\sqrt{3x+1}+2]}{3(x-1)}$$

حالة عدم تعيين

الإزالة:

$$g(x) = \frac{2E(x) + 1}{x^2}$$

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$2x - 2 < 2E(x) \leq 2x$$

$$2x - 1 < 2E(x) + 1 \leq 2x + 1$$

$$\frac{2x - 1}{x^2} < \frac{2E(x) + 1}{x^2} \leq \frac{2x + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x - 1}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x + 1}{x^2} \right] = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

وبالتالي حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$$

ليكن f تابع معطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{x^2 + 2}$$

احسب نهاية f في جوار $-\infty$

الحل:

نستخدم مبرهنة الإحاطة:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\boxed{x \rightarrow -\infty} \quad \boxed{x < 0} \quad \text{نضرب بـ } x \text{ حيث}$$

$$-x \geq x \cdot \sin x \geq x$$

$$\boxed{x^2 + 2 > 0} \quad \text{نقسم على}$$

$$-\frac{x}{x^2 + 2} \geq \frac{x \cdot \sin x}{x^2 + 2} \geq \frac{x}{x^2 + 2}$$

$$f(x) = \frac{3x \cdot \frac{2x - \sin 3x}{3x}}{5x \cdot \frac{x + \sin 5x}{5x}}$$

$$f(x) = \frac{3 \cdot \frac{2}{3} - \frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{1}{5} + \frac{\sin 5x}{5x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3 \cdot \frac{2}{3} - 1}{\frac{1}{5} + 1} = \frac{3 \cdot \frac{-1}{6}}{\frac{6}{5}}$$

$$= \frac{3}{5} \times -\frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$

السؤال الثاني: (مبرهنة الإحاطة)

1) ليكن f تابع يحقق:

$$|f(x) + 3| \leq \frac{2E(x) + 1}{x^2}$$

احسب نهاية التابع f عند $+\infty$

الحل:

ملاحظة: نحو الحل: تابع الجزء الصحيح لحساب

نهيته نستخدم الإحاطة $x - 1 < E(x) \leq x$

$$1) |f(x) - L| \leq g(x)$$

قانون:

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

إذا حسب مبرهنة الإحاطة: (من 1 و 2) نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

أ. معترف شهادة

0935948741

قاعدة:

$$|x - c| < r \Leftrightarrow c - r < x < c + r$$

$$\Leftrightarrow I =]c - r, c + r[$$

السؤال الرابع:

ليكن لدينا التابع f معطى بالعلاقة

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

معرفة على المجال: $I =]-\infty, 1[$

1 أوجد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم أوجد عدد A يحقق:

$$f(x) \in]1.99, 2.01[\quad \forall x < A$$

2 احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x))$

3 أوجد $f'(x)$ واستنتج مشتق التابع g حيث:

$$g(x) = f(\sqrt{x})$$

4 أوجد قيمة تقريبية لـ $f(0.1)$

الحل:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$y = 2$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$f(x) \in]1.99, 2.01[$$

❖ ملاحظة: المجال $I =]a, b[$

$$c = \frac{a+b}{2} \quad \text{مركز المجال}$$

$$r = \frac{b-a}{2} \quad \text{نصف قطر المجال}$$

$$f(x) \in]c - r, c + r[\Rightarrow |f(x) - c| < r$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{x}{x^2 + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{x^2 + 2} \right] = 0$$

إذا احسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

السؤال الثالث: (نهاية حسب التعريف)

ليكن لدينا التابع بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{16}{(x - 2)^2}$$

□ احسب نهاية f عند (2)

□ أوجد مجالاً I مركزه (2) ويحقق:

$$\forall x \in I \setminus \{2\} \rightarrow f(x) > 10^6$$

الحل:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{+16}{0^+} = +\infty$$

② نعلم أن: $f(x) > 10^6$

$$\frac{+16}{(x - 2)^2} > 10^6 \Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{16} < \frac{1}{10^6}$$

$$(x - 2)^2 < \frac{16}{10^6} \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2} < \sqrt{\frac{16}{10^6}}$$

$$|x - 2| < \frac{4}{10^3}$$

$$|x - 2| < 0.004$$

$$-0.004 < x - 2 < 0.004$$

$$+1.996 < x < 2.004$$

$$I =]+1.996, 2.004[$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot -\frac{3}{[\sqrt{x-1}]^2}$$

$$g'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x-1})^2}$$

قانون التقريب التالفي:

$$x = \underset{\substack{\text{جزء صحيح} \\ \text{ب}}}{a} + \underset{\substack{\text{جزء عشري} \\ \text{ب}}}{h}$$

$$f(a+h) = f'(a) \cdot h + f(a)$$

$$x = 0.1 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ h = 0.1 \end{cases}$$

$$f(0.1) = f'(0) \cdot (0.1) + f(0)$$

$$f(0.1) = \left[\frac{-3}{(0-1)^2} \right] (0.1) + \left[\frac{2(0)+1}{0-1} \right]$$

$$f(0.1) = -3(0.1) - 1$$

$$f(0.1) = -0.3 - 1 = -1.3$$

السؤال الخامس:

ليكن f معرف على: $]-5, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$$

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f[f(x)]$

2 أوجد عدداً حقيقياً A يحقق:

$$\forall x > A \Rightarrow f(x) \in]1.99, 2.01[$$

3 أوجد $f'(x)$ ثم استنتج $g'(x)$ حيث أن

$$g(x) = \frac{2 \sin(x) + 1}{\sin(x) + 5}$$

$$c = \frac{2.01+1.99}{2} = 2 \quad \text{نحسب}$$

$$r = \frac{2.01 - 1.99}{2} = \frac{0.02}{2} = 0.01$$

نطبق القانون: $|f(x) - c| < r$

$$|f(x) - 2| < 0.01$$

$$\left| \frac{2x+1}{x-1} - 2 \right| < 0.01$$

$$\left| \frac{2x+1-2x+2}{x-1} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{+3}{x-1} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{+3}{|x-1|} < \frac{1}{100}$$

$$\frac{3}{-x+1} < \frac{1}{100}$$

$$\frac{-x+1}{3} > 100 \Rightarrow -x+1 > 300$$

$$-x > 299 \Rightarrow x < -299$$

$$A = -299$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$|x-1| = -x+1$$

$$\text{لأن } x-1 < 0$$

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{5}{1} = 5 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = 5$$

$$\textcircled{3} f'(x) = \frac{2(x-1) - (1)(2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$g(x) = f(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow g'(x) = (\sqrt{x})' \cdot f'(\sqrt{x})$$

الحل:

$$g(x) = \frac{9 \cos x}{(\sin x + 5)^2}$$

المقارب المائل}

السؤال السادس:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 7x + 11}{x^2 - 4}$$

1 اكتب التابع f بالشكل:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2 - 4}$$

وعين قيمة a, b, c 2 أثبت أن الخط C_f يمثل مقارباً مائلاً Δ في جوار $+\infty$ و $-\infty$ 3 ادرس الوضع النسبي للخط C_f مع مقاربه Δ

الحل:

1 نستخدم القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r} 2x - 3 \\ x^2 - 4 \overline{) 2x^3 - 3x^2 - 7x + 11} \\ \underline{\mp 2x^3 \pm 8x} \\ -3x^2 + x + 11 \\ \underline{\pm 3x^2 \mp 12} \\ x - 1 \end{array}$$

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{x - 1}{x^2 - 4}$$

2 نتوقع أن $\Delta: y = 2x - 3$ مقارب مائل للخط C_f نثبت ذلك نحسب $f(x) - y_\Delta$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y_\Delta = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_\Delta = 0 \end{array} \right\} \Delta: y = 2x - 3$$

مقارب مائل للخط C_f في جوار $\pm\infty$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f[f(x)] = \frac{5}{7}$$

$$\textcircled{2} \forall x > A \rightarrow f(x) \in]1.99, 2.01[$$

$$|f(x) - c| < r \Rightarrow |f(x) - 2| < 0.01$$

$$\left| \frac{2x+1}{x+5} - 2 \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left| \frac{-9}{x+5} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{-9}{|x+5|} < \frac{1}{100}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$|x+5| = x+5$$

$$\text{لأن } x+5 > 0$$

$$\frac{x+5}{9} > 100 \Rightarrow x+5 > 900$$

$$\boxed{x > 895} \Rightarrow A = 895$$

$$\textcircled{3} g(x) = f(\sin(x))$$

 f اشتقاقى على المجال $]-5, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{+9}{(x+5)^2}$$

$$g'(x) = [\sin x]' \cdot f'(\sin(x))$$

$$= \cos x \cdot \frac{9}{(\sin x + 5)^2}$$

③ دراسة الوضع النسبي

$$f(x) - y_{\Delta} = \frac{x-1}{x^2-4} \text{ نحسب}$$

$$f(x) - y_{\Delta} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	-2	1	$+2$	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x) - y_{\Delta}$	$-$	\neq	0	$-$	$+$
الوضع النسبي	Δ تحت C	Δ وق C	Δ تحت C	Δ فوق C	Δ فوق C

والنقطة $A(1, -1)$ مشتركة بين C_f والمقارب Δ **السؤال الثامن:**ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 7}$$

① اكتب $x^2 + 4x + 7$ كثير حدود بالشكل القانوي② استنتج معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$ ثم ادرس وضع الخط C مع مقاربه**الحل:**

① $x^2 + 4x + 7$

$x^2 + 4x + 4 - 4 + 7$

$(x + 2)^2 + 3$

$$f(x) = \sqrt{(x + 2)^2 + 3}$$

نتوقع وجود مقارب مائل معادلته $\Delta: y = x + 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_{\Delta} = \sqrt{(x + 2)^2 + 3} - (x + 2)$$

$$f(x) - y_{\Delta} = \frac{(x + 2)^2 + 3 - (x + 2)^2}{\sqrt{(x + 2)^2 + 3} + (x + 2)}$$

$$= \frac{+3}{\sqrt{(x + 2)^2 + 3} + (x + 2)}$$

السؤال السابع:ليكن لدينا التابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{+1\}$ وفق:

$$f(x) = x - \frac{2}{x-1} + 1$$

① احسب نهاية f عند أطراف المجالات وحدد ما للخط C_f من مقاربات شاقولية وأفقية:

② أثبت وجود مقارب مائل

الحل:

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - 0 + 1 = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 0 + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 - \frac{2}{0^-} + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - \frac{2}{0^+} + 1 = -\infty$$

② $x = 1$ مقارب شاقولي للخط C نتوقع وجود $\Delta: y = x - 1$ مقارب مائلنحسب $f(x) - y_{\Delta}$

$$= x + \frac{+4}{1 + \cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$= x + \frac{4}{1 + \cos x} \cdot \left[\frac{\sin^2 x}{x^2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{4}{1+1} (1) = 2$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \text{ علماً أن}$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{x^3}{x^2} + \frac{4-4 \cos x}{x^2}$$

$$f(x) = x + \frac{4-4 \cos x}{x^2}$$

نتوقع وجود مقارب مائل معادلته $y = x$ مقارب مائل

الإثبات:

$$f(x) - y_{\Delta} = \frac{4-4 \cos x}{x^2}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_{\Delta}] \rightarrow \cos \infty$ نستخدم الإحاطة لوجود

$$-1 \leq \cos x \leq +1$$

$$+4 \geq 4 \cos x \geq -4$$

$$8 \geq 4 - 4 \cos x \geq 0$$

$$x^2 > 0 \Rightarrow \frac{8}{x^2} \geq \frac{4-4 \cos x}{x^2} \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x^2} = 0$$

إذا حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_{\Delta}] = 0$$

$\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_{\Delta} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

$\Delta: y = x + 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

دراسة وضع نسبي

$$\sqrt{(x+2)^2 + 3} > (x+3)$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + 3} - (x+3) > 0$$

$$f(x) - y_{\Delta} > 0$$

إذا C فوق Δ $\forall x \in Df$

السؤال التاسع:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4 - 4 \cos x}{x^2}$$

أوجد نهاية f عند (0^+)

أثبت أن C_f يقبل مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$

الحل:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \frac{0+4-4}{0} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2} + \frac{4[1 - \cos x]}{x^2}$$

$$= x + \frac{4[1 - \cos x][1 + \cos x]}{x^2 \cdot [1 + \cos x]}$$

$$= x + \frac{4[1 - \cos^2 x]}{x^2 \cdot [1 + \cos x]}$$

$$= x + \frac{4 \sin^2 x}{x^2 \cdot [1 + \cos x]}$$

نستخدم الإحاطة لوجود $\sin \infty$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq +1$$

نضرب بـ $x < 0$ (دراسة عند (0) من اليسار)

$$-x \geq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq +x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 = f(0)$$

الخط C يقبل نصف مماس أفقي معادلته $y = 0$

إذا f اشتقائي عند (0) من اليسار

وظيفة دورة 2019 الدورة الثانية (40 د)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \sin x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} & x \neq 0 \\ m & x = 0 \end{cases}$$

1 أوجد نهاية f عند (0)

2 عين قيمة m ليكون f مستمر عند الـ (0)

ليكن لدينا التابع $f(x) = 2x - E(x)$ المعرف على \mathbb{R} وفق:

1 اكتب التابع f بعباراة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0, 2]$

2 ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0, 2]$

3 هل f مستمر على المجال $[0, 2]$

4 احسب نهاية التابع $g(x) = \frac{2x - E(x)}{x^2 + 1}$ عند $+\infty$

(الاستمرار)

السؤال العاشر:

ليكن لدينا التابع f المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

1 ادرس استمرار عند (0)

2 ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليسار وأوجد $f'(0)$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) : \rightarrow 0 \sin \infty$$

نستخدم الإحاطة:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq +1$$

$$x^2 > 0$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ و } f(0) = 0$$

إذا

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

إذا f مستمر عند (0)

$$2) g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

أ. معترف شحادة

ثانياً: الاشتقاق

(اشتقاق تابع مركب):

السؤال الأول:

ليكن لدينا التابع f المعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

1 احسب مشتق التابع f

الحل:

التابع f اشتقائي على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

2 استنتج المشتقات

$$1 \quad g(x) = \frac{e^{2x+1}}{e^{x-1}}$$

$$g(x) = f(e^x)$$

$$g'(x) = f'(e^x) \cdot (e^x)'$$

$$g'(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x - 1}{(e^x - 1)^2} \cdot e^x$$

$$2 \quad h(x) = \frac{(\ln(x))^2 + 1}{(\ln x - 1)}$$

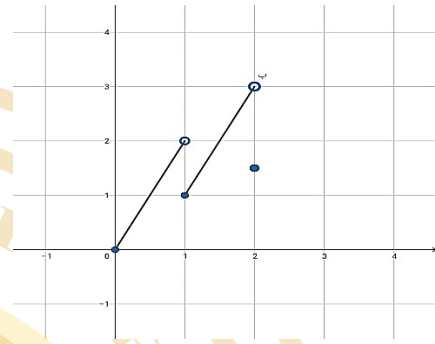
$$h(x) = f(\ln x)$$

$$h'(x) = f'(\ln x) \cdot (\ln x)'$$

$$= \frac{\ln^2 x - 2 \ln x - 1}{(\ln x - 1)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

الحل:

$$1 \quad f(x) = \begin{cases} 2x & : 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & : 1 \leq x < 2 \\ 2 & : x = 2 \end{cases}$$



2

3 نلاحظ من الرسم:

4 f غير مستمر عند (1) فهو غير مستمر على $[0, 2]$

4 لدينا:

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$-x + 1 > -E(x) \geq -x$$

$$x + 1 > 2x - E(x) \geq x$$

$$\frac{x + 1}{x^2 + 1} > \frac{2x - E(x)}{x^2 + 1} \geq \frac{x}{x^2 + 1}$$

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - E(x)}{x^2 + 1} = 0$$

$$l_1 = \sqrt{1+x^2} \cdot f'(x)$$

$$l_1 = \sqrt{1+x^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \sqrt{1+x^2} + x$$

$$= f(x) = l_2$$

من العلاقة: $\sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) = f(x)$ نشق:

$$\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot f'(x) + f''(x) \cdot \sqrt{1+x^2} = f'(x)$$

نضرب بـ $\sqrt{1+x^2}$

$$x \cdot f'(x) + (1+x^2)f''(x) = \sqrt{1+x^2} \cdot f'(x)$$

$$x \cdot f'(x) + (1+x^2)f''(x) - f(x) = 0$$

دراسة قابلية الاشتقاق

قاعدة

$$\lim_{x \rightarrow a} t(x) = m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f \text{ اشتقاقي عند } a$$

$$x \mapsto t(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ حيث}$$

هو تابع نسبة التغير حيث $x \neq a$

السؤال الثالث:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a وما التأويل الهندسي

$$1) f(x) = x^2 \sqrt{x} \quad a = 0$$

الحل:

نشكل تابع نسبة التغير

$$t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} : x \neq 0$$

نختصر

$$3) l(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$$

$$l(x) = \sqrt{f(x)}$$

$$l'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 1}{x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}}$$

$$4) k(x) = \frac{\cos^2 x + 1}{\cos x - 1}$$

$$k(x) = f(\cos x)$$

$$k'(x) = f'(\cos x) \cdot (\cos x)'$$

$$= \frac{\cos^2 x - 2 \cos x - 1}{(\cos x - 1)^2} \cdot (-\sin x)$$

السؤال الثاني:

ليكن الخط البياني C للتابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

1) تحقق أن $\sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) = f(x)$ أيًا كان

x من \mathbb{R}

2) استنتج أن $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$

أيًا كان x من \mathbb{R}

الحل:

التابع f اشتقاقي على \mathbb{R}

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1 ادرس قابلية الاشتقاق عند (0) من اليسار واكتب معادلة نصف المماس عند $x = 0$

2 ادرس قابلية الاشتقاق عند (0) من اليمين واكتب معادلة نصف المماس عند $x = 0$

3 هل f اشتقاقي عند (0)

الحل:

$$|x| = x \Rightarrow x \geq 0 \square$$

$$|x| = -x \Rightarrow x \leq 0 \square$$

1 أولاً نكتب f بشكل مستقل عن القيمة المطلقة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} & : x \geq 0 \\ \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} & : x \leq 0 \end{cases}$$

ندرس قابلية الاشتقاق من اليمين بشكل $t(x)$

$$t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} - 0}{x}$$

$$= \frac{x^2 + 2x}{x(x^2 + 1)} = \frac{x[x + 2]}{x[x^2 + 1]}$$

$$t(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} t(x) = 2 = f'(2) = 2$$

معادلة نصف المماس $A(0,0)$ $m = 2$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = 2x$$

2 دراسة قابلية الاشتقاق عند (0) من اليسار

$$= t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} - 0}{x}$$

$$\frac{x(x - 2)}{x(x^2 + 1)} = \frac{x - 2}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} t(x) = -2 = f'(0^-) = -2$$

$$t(x) = x\sqrt{x}$$

ننهى

$$\lim_{x \rightarrow 0} t(x) = 0 \in \mathbb{R}$$

ومنه f اشتقاقي عند 0 هندسياً لـ C_f مماس أفقي في النقطة $A = (0,0)$ معادلته $y = 0$

$$2 \sqrt{2x - x^2}, \quad a = 2$$

الحل:

نشكل تابع نسبة التغير

$$t(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} : 2 \neq 0$$

$$t(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2} - 0}{x - 2}$$

نختصر

$$t(x) = \frac{\sqrt{x(2-x)}}{-(2-x)} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{2-x}}{-\sqrt{2-x} \cdot \sqrt{2-x}}$$

$$t(x) = \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{2-x}}$$

ننهى

$$\lim_{x \rightarrow 2} t(x) = \frac{\sqrt{2}}{0^-} = -\infty \notin \mathbb{R}$$

إذن f غير اشتقاقي عند 2

هندسياً: لـ C_f مماس شاقولي في النقطة $A = (2,0)$ معادلته $x = 2$

السؤال الرابع:

ليكن التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2|x|}{x^2 + 1}$$

1 احسب $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

2 استنتج: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$

الحل:

① $f'(x) = -\sin x$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(المشتقات من مراتب عليا):

قاعدة

$f^{(n)}(x)$ هو المشتق من المرتبة n لـ f حيث $n \geq 1$

عدد طبيعي ويتحقق أن $(f^n(x))' = f^{(n+1)}(x)$

السؤال السابع:

ليكن التابع $f: \frac{1}{x}$ أثبت بالتدرج أن:

$$n \geq 1 \text{ أيًا يكن } f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

معادلة نصف المماس $m = -2$ $A(0,0)$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = -2x$$

3 نستنتج أن

f اشتقاقي عند الصفر (0) من اليسار

$$f'(0^-) = -2$$

f اشتقاقي عند الصفر (0) من اليمين

$$f'(0^+) = 2$$

و $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ إذا f غير اشتقاقي عند (0)

السؤال الخامس:

ليكن التابع f معرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

احسب قيمة تقريبية لـ $f(0.1)$ باستخدام التقريب التآلفي

الحل:

$$x = 0.1 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ h = 0.1 \end{cases}$$

$$f(0.1) \approx f(0) + f'(0) \cdot (0.1)$$

$$f(0.1) \approx 1 + 1(0.1) = 1.1$$

$$f(0.1) \approx 1.1$$

نهاية باستخدام تعريف التابع المشتق

السؤال السادس:

ليكن f التابع المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \cos x$$

أ. معترف شهادة

1 أوجد عددين a, b يحققان:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

الحل:

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

a : نضرب بـ $(x-1)$ ثم نجعل $x \rightarrow 1$:

$$\frac{2(1)}{1+1} = a + 0$$

ومنه $a = 1$

b : نضرب بـ $(x+1)$ ثم نجعل $x \rightarrow -1$:

$$\frac{2(-1)}{-1-1} = 0 + b$$

ومنه $b = 1$

2 استنتج عبارة $f^{(n)}(x)$ أيًا كان $n \geq 1$:

الحل:

وجدنا أن:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

أي:

$$f(x) = (x-1)^{-1} + (x+1)^{-1}$$

$$f^{(1)}(x) = (-1)(x-1)^{-2} + (-1)(x+1)^{-2}$$

$$f^{(2)}(x) = (-2)(-1)(x-1)^{-3} + (-2)(-1)(x+1)^{-3}$$

$$f^{(3)}(x) = (-3)(-2)(-1)(x-1)^{-4} + (-3)(-2)(-1)(x+1)^{-4}$$

$$= (-1)^3 \cdot 3! \frac{1}{(x-1)^4} + (-1)^3 \cdot 3! \frac{1}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(-1)^3 3!}{(x-1)^4} + \frac{(-1)^3 \cdot 3!}{(x+1)^4}$$

الحل:

$$E(n): f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} : n \geq 1$$

نتحقق من صحة $E(1)$:

$$f^{(1)}(x) = \frac{(-1)^1 1!}{x^{1+1}}$$

$$l_1 = f'(x) = -\frac{1}{x^2} = l_2$$

$E(1)$ محققة (1)

نفرض صحة $E(n)$

$$(2) \dots \dots \dots f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

نثبت صحة $E(n+1)$:

نريد اثبات أن:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}}$$

الاثبات:

ننتقل من الفرض ونشتق طرفيه:

$$(f^n(x)) = \frac{0 - (n+1)x^n (-1)^n n!}{(x^{n+1})^2}$$

$$(f^{(n+1)}(x)) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(x^{2n+2})(x)^{-n}} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}}$$

ومنه $E(n+1)$ محققة (3)

من 1 و 2 و 3 نستنتج صحة $E(n)$ أيًا كان $n \geq 1$

السؤال الثامن:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

أ. معزز شحادة

0935948741

(تعيين الثوابت)

ملاحظة:

(1) نقطة معلومة: ← نعوض في التابع

$$(x_0, y_0), f(x_0) = y_0$$

(2) مماس أفقي ← أي $f'(x_0) = 0$ نعوض في المشتقعند x_0 (3) ميل المماس معلوم عند x_0 ← نعوض في المشتق

$$f'(x) = m$$

السؤال العاشر:

سؤال الدورة 2022 الأولى (40 د)

$$f(x) = ax + \frac{b}{x+1}$$

♦ عين العددين a, b ليمر الخط C بالنقطة $(0, 3)$ ويقبل مماساً عند النقطة $(0, 3)$ وميله $m = 4$

الحل:

نشتق التابع

$$f'(x) = a - \frac{b}{(x+1)^2}$$

نعوض $(0, 3)$ في التابع

$$f(0) = 3 \rightarrow a(0) + \frac{b}{0+1} = 3 \Rightarrow b = 3$$

نعوض الميل في المشتق $f'(0) = 4$

$$\Rightarrow a - \frac{b}{(0+1)^2} = 4$$

$$\boxed{a - b = 4}$$

نعوض قيمة $b = 3$ نجد $a = 7$

$$a = 7, b = 3 \rightarrow f(x) = 7x + \frac{3}{x+1}$$

وهكذا نجد أن:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

أيما كان $n \geq 1$ عدد طبيعي

السؤال التاسع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $[1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = 2\sqrt{x+1} - x$$

① ادرس قابلية الاشتقاق التابع f عند $x = -1$ ② هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم $y = -2x$ ؟

الحل:

① لنصنع التابع المعدل للتابع f عند $x = -1$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

المعرفة على $[1, +\infty[$

$$g(x) = \frac{2\sqrt{x+1} - x - 1}{x+1}$$

ومنه $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} - 1$ ومنه

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$$

ومنه f ليس اشتقاقياً عند $x = -1$

نعوض في (1): $2 \ln e^2 + \ln y = 7$

$$6 + \ln y = 7 \Rightarrow \ln y = 1 \Rightarrow y = e$$

الحل المشترك: $(x, y) = (e^3, e)$ **السؤال الثاني:**حل المعادلة الآتية في \mathbb{R} :

$$\ln^2 x - 2 \ln x - 3 = 0$$

ثم حل المتراجحة $\ln^2 x - 2 \ln x - 3 \leq 0$ **الحل:**

$$\ln^2 x - 2 \ln x - 3 = 0$$

شرط الحل: $(x > 0)$:

$$(\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$\Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\ln x = 3$$

$$\Rightarrow x = e^3$$

$$S = \left\{ \frac{1}{e}, e^3 \right\}$$

$$\ln^2 x - 2 \ln x - 3 \leq 0$$

x	0	$\frac{1}{e}$	e^3	$+\infty$
إشارة المتراجحة	#	+	-	+
	غ	0	م	غ

$$S = \left[\frac{1}{e}, e^3 \right]$$

التابع اللوغاريتمي:**معادلات ومتراجحات****السؤال الأول:**

حل المتراجحات والمعادلات الآتية

1 أوجد مجموعة حلول المعادلة:

$$\ln(x+5) + \ln(x-1) = \ln(2x^2 - 2)$$

المجال $]1, +\infty[$.**الحل:**

$$\ln(x+5) + \ln(x-1) = \ln(2x^2 - 2)$$

$$\ln((x+5)(x-1)) = \ln(2x^2 - 2)$$

$$x^2 - x + 5x - 5 = 2x^2 - 2$$

$$x^2 + 4x - 5 - 2x^2 + 2 = 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

إما $x = 3 \in]1, +\infty[$ مقبولأو $x = 1 \notin]1, +\infty[$ مرفوض

2 أوجد الحل المشترك للمعادلتين التاليتين:

$$2 \ln x + \ln y = 7 \quad (1)$$

$$3 \ln x - 5 \ln y = 4 \quad (2)$$

معرفة بشرط $x > 0$ و $y > 0$

نضرب المعادلة (1) بـ 5 ونجمع مع المعادلة (2):

$$10 \ln x + 5 \ln y = 35$$

$$3 \ln x - 5 \ln y = 4$$

$$13 \ln x = 39$$

$$\ln x = 3$$

$$x = e^3$$

السؤال الثالث:

حل المعادلة التالية:

$$\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$$

$$x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D_2 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$\ln|x+1| + \ln|x+2| = 0$$

$$\ln(|x+1| \cdot |x+2|) = 0$$

$$\ln|(x+1) \cdot (x-2)| = 0 \quad \text{دراسة وضع نسبي}$$

$$\ln(|x^2 - 4|) = 0$$

$$\ln(|x^2 - 4|) = \ln e^0 \Rightarrow \ln(|x^2 - 4|) = \ln 1$$

$$|x^2 - 4| = 1$$

$$x^2 - 4 = -1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = +\sqrt{3} \in D \quad \text{(مقبول)}$$

$$x = -\sqrt{3} \in D \quad \text{(مقبول)}$$

$$x^2 - 4 = 1 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = +\sqrt{5} \in D \quad \text{(مقبول)}$$

$$x = -\sqrt{5} \in D \quad \text{(مقبول)}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة: $S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

السؤال الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad \text{المطلوب:}$$

اثبت أن الخط C يقبل مستقيم مقارب مائل Δ في جوار $+\infty$ وادرس وضع C بالنسبة لـ Δ

الحل:

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

نتوقع $y = x$ مقارب مائل لـ C ولنثبت ذلك

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0 \quad \text{علما أن } \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \frac{\ln \theta}{\theta} = 0$$

$$\ln x = 0$$

(المقارب المائل)

السؤال الرابع:

1) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق

$$f(x) = \ln(e^{2x} + 1) \quad \text{العلاقة:}$$

اثبت أن Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ ثم ادرس وضع C مع Δ

الحل:

$$f(x) - y_\Delta = \ln(e^{2x} + 1) - 2x$$

$$= \ln(e^{2x} \left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)) - 2x$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0 \cdot +\infty)$$

حالة عدم تعيين

$$f(x) = x^2 - x^2 \ln x$$

$$= x^2 - x \cdot x \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$f(0) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{ حيث } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0}$$

f مستمر عند $x = 0 \iff$

شرط الاستمرار

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)}$$

$$0 = m$$

السؤال الثامن:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & ; x \neq 0 \\ 2m + 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

عين قيمة m حتى يكون f مستمر عند 0 .

الحل:

يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x); \frac{\ln(0 + 1)}{0} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

الإزالة: نضرب ونقسم بـ x

$$f(x) = \frac{x}{x} \cdot \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = x \cdot \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

x	0	1	$+\infty$	
$f(x) - y_\Delta$	#	-	0	+
الوضع النسبي	#	C تحت Δ	C فوق Δ	

نقطة مشتركة $(1,1)$

السؤال السادس:

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط البياني للتابع $f(x) = x + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ في جوار $+\infty$ ثم احسب نهاية $f(x)$ عند $x = 0$

الحل:

$$f(x) - y_\Delta = x + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x - 1$$

$$= x \cdot \frac{1 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - 1$$

$$\boxed{\frac{\ln(1+t)}{t} - 1; t = \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow 0}} (f(x) - y_\Delta) = 1 - 1 = 0$$

$$\text{حيث } \boxed{\lim_{t \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}$$

إذا $y = x + 1$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

(الاستمرار)**السؤال السابع:**

ليكن التابع f المعرفة على $I = [0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1 - \ln x) & ; x > 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على I

السؤال العاشر:

(دورة 2022 الدورة الأولى) (70 د)

ليكن لدينا التابع f معرفاً على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - \ln x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

1 أثبت أن f مستمر عند 0

2 ادرس قابلية الاشتقاق عند (0)، فسر النتيجة التي حصلت عليها هندسياً

□ بين أن الخط C للتابع f يقبل مقارباً أفقياً عند $+\infty$ جد معادلته□ اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة فاصلتها $x = 1$ واستعمل التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

الحل:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0+\infty} = 0, f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \text{إذا}$$

إذا f تابع مستمر عند (0)

□ نحسب

$$t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{x - \ln x} - 0}{x}$$

$$= \frac{x}{x[x - \ln x]} = \frac{1}{x - \ln x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0$$

إذا f اشتقاقي عند 0 من اليمين $f'(0) = 0$ والنتيجة الهندسية هي نصف مماس أفقي معادلته $y = 0$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty - \infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (0)(1) = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\ln(\theta+1)}{\theta} = 1 \quad \text{علماً أن}$$

إذا

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$0 = 2m + 1$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

قابلية الاشتقاق

السؤال التاسع:

تأمل التابع f المعرف على $I = [0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1 - \ln x) & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

2 استنتج أن f اشتقاقي عند الصفر

الحل:

في حالة $x > 0$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2(1 - \ln x) - 0}{x}$$

$$g(x) = x(1 - \ln x) = x - x \ln x$$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ مبرهنة

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) = 0 - 0 = 0 \in \mathbb{R}$$

ومنه تعريف العدد المشتق يكون f اشتقاقي عند (0)و $f'(0) = 0$

السؤال الحادي عشر:

$$\ln x + \frac{x+1}{x} = 0$$

هذه معادلة مختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية
لذا نشكل التابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}$$

التابع g معرف ومستمر على $]0, +\infty[$:

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ حالة عدم تعيين $(\infty - \infty)$

$$g(x) = \frac{x \ln x + x + 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} x \ln x = 0^-$$

التابع g اشتقاقي على $]0, +\infty[$ ولدينا:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

عدم $g'(x)$:

$$g'(x) = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$g(1) = 2$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	∥	-	+
$g(x)$	∥ $+\infty$	∨	∧ $+\infty$

نلاحظ من جدول التغيرات أن $g(x) \geq 2$ ومنه المعادلة $0 \notin g(x)$

$g(x) = 0$ لا تنعدم فهي مستحيلة الحل

حالة عدم تعيين

الإزالة:

$$f(x) = \frac{x}{x \left[1 - \frac{\ln x}{x} \right]} = \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \frac{\ln \theta}{\theta} = 0$$

$y = 1$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

(4)

معادلة مماس عند $x = 1$

نوجد المشتق

$$f'(x) = \frac{1[x - \ln x] - \left[1 - \frac{1}{x} \right] x}{[x - \ln x]^2}$$

$$= \frac{x - \ln x - x + 1}{[x - \ln x]^2} = \frac{1 - \ln x}{[x - \ln x]^2}$$

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 1 = m$$

معادلة المماس

$$m = 1 \quad A(1,1)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = 1(x - 1)$$

$$\Delta: y = x$$

التقريب التآلفي:

$$x = 1.1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ h = 0.1 \end{cases}$$

$$f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a)$$

$$f(1.1) \approx f(1) + (0.1) \cdot f'(1)$$

$$\approx 1 + (0.1)(1) = 1.1$$

$$f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$$

① عين العددين الحقيقيين a, b إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته

$$y = 3x$$

② من أجل $a = 4, b = -4$ أثبت أن $\Delta: y = 4x - 4$

مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وادرس وضع الخط C مع مقاربه

③ إضافي: احسب المساحة المحصورة بين الخط C والمقارب Δ والمستقيمان $x = e$ و $x = 1$

الحل:

① أولاً نحسب المشتق $f'(x)$

$$f'(x) = a - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = a + \frac{\ln(x) - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = a - \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = a + \frac{\ln(x) - 1}{x^2}$$

نعوض النقطة $A(1,0)$ في التابع

$$f(1) = 0 \rightarrow a(1) + b - \frac{\ln 1}{1} = 0$$

$$\boxed{a + b = 0} \quad (1)$$

نعوض $f'(1) = 3$ في المشتق

$$a - \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 3 \rightarrow a - 1 = 3$$

$$\boxed{a = 4} \leftarrow \text{نعوض في (1)} \quad (2)$$

السؤال الثاني عشر:

أثبت صحة المتراجحة $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$

أيما كان $x > -1$

أثبت أن C_g, C_f حيث $g(x) = \frac{x}{1+x}$ و

$$f(x) = \ln(1+x) \text{ المعرفان على }]-1, +\infty[$$

يقبلان مماساً مشتركاً عند نقطة فاصلتها 0

الحل:

$$h(x) \geq 0 \text{ و } \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$$

$$\text{حيث } h(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

لإثبات صحة المتراجحة $h(x) \geq 0$ أيما كانت $x > -1$

ندرس اطراد التابع h على المجال $]-1, +\infty[$ ومشتقه على هذا المجال

$$h'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \text{ أي } h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

نلاحظ أن إشارته من إشارة x وينعدم عندما $x = 0$
 $f(h) = 0$

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$	#	-	+
$h(x)$	# $+\infty$	0	# $+\infty$

نلاحظ من جدول اطراد التابع h أن $h(x) \geq 0$

$$\ln(x+1) - \frac{x}{1+x} \geq 0 \text{ أيما كانت } x > -1 \text{ وهي}$$

المتراجحة المطلوبة.

(تعيين ثوابت)

السؤال الثالث عشر:

دورة 2019 الدورة الثانية (60 د)

ليكن C الخط البياني للتابع f معرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f'(x) = \frac{a - 2bx}{ax - bx^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a - 2b}{a - b} = 0 \quad (a \neq b)$$

$$\Rightarrow \boxed{a - 2b = 0} \quad (2)$$

نعوض (1) في (2)

$$b + 1 - 2b = 0$$

$$-b + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

نعوض في (1) فنجد: $\boxed{a = 2}$

السؤال الخامس عشر:

ليكن g التابع المعرفة على $I =]-1, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$$

احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$ واستنتج:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln\sqrt{2}}{x-1}$$

الحل:

حساب $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$

$$g(1) = \ln\sqrt{1+1} = \ln\sqrt{2}$$

إن معرف واشتقاقي على I

$$g'(x) = \frac{(\sqrt{x+1})'}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{2(x+1)}$$

$$g'(1) = \frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4}$$

استنتاج النهاية

$$4 + b = 0 \rightarrow \boxed{b = -4}$$

$$f(x) = 4x - 4 - \frac{\ln x}{x}$$

$$\textcircled{2} f(x) - y_{\Delta} = -\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_{\Delta} = -(0) = 0$$

إذا $y = 4x - 4$ Δ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

دراسة وضع نسبي $f(x) - y_{\Delta} = \frac{-\ln x}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	∞	+	0
x	∞	+	+
$f(x) - y_{\Delta}$	∞	+	0
الوضع النسبي		C فوق Δ	C تحت Δ

و C و Δ يشتركان في نقطة $A(1,0)$

السؤال الرابع عشر:

C الخط البياني للتابع f المعرفة على المجال $]0, 2[$ وفق:

$$f(x) = \ln(ax - bx^2)$$

عين العددين الحقيقيين a, b لكي يقبل مماساً أفقياً في النقطة $A(1, 0)$ منه

الحل:

$$A(1,0) \in C \Rightarrow f(1) = 0$$

$$\Rightarrow \ln(a - b) = 0$$

$$\Rightarrow a - b = 1$$

$$\boxed{a = b + 1} \quad (1)$$

بما أن الخط C يقبل مماساً أفقياً $A(1,0)$ فإن:

$$f'(1) = 0$$

f اشتقاقي علة المجال $]0, 2[$



$$\textcircled{2} f(x) = x^2 - 2x^2 \ln x$$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = 2x - \left(4x \ln x + \frac{1}{x} 2x^2\right) = -4x \ln x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x \ln x = 0$$

$$f(1) = 1 \text{ و } \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

أو $x = 0$ مرفوض

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‡	+	0
$f(x)$	‡	0	↘

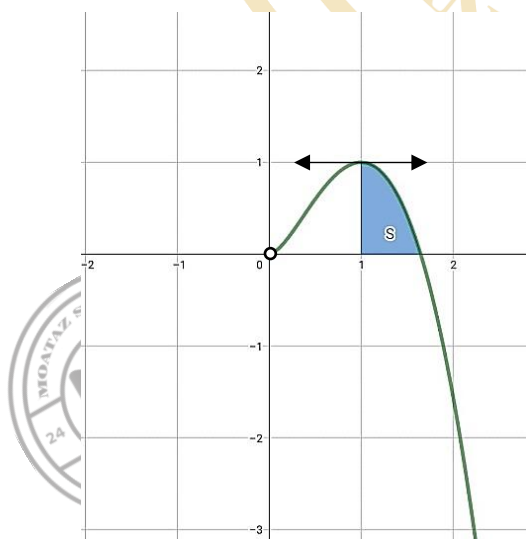
$$\textcircled{3} f(x) = 0$$

$$x^2 - 2x^2 \ln x = 0$$

$$x^2(1 - 2 \ln x) = 0$$

إما $x = 0$ مرفوض

$$1 - 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \text{ أو } (\sqrt{e}, 0)$$



$$\textcircled{4} f_1(x) = -x^2 + 2x^2 \ln(-x)$$

$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x)^2 \ln(-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sqrt{x+1} - \ln \sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1) = \frac{1}{4}$$

دراسة تغيرات

المسألة الأولى:

ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ بالعلاقة:

$$f(x) = x^2 - 2x^2 \ln x \text{ خطه البياني } C$$

1 أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

2 أثبت أن $f'(x) = -4x \ln x$ ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3 جد نقطة تقاطع C مع محور الفواصل ثم ارسم C

4 استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع f_1 المعين بالعلاقة:

$$f_1(x) = -x^2 + 2x^2 \ln(-x)$$

5 احسب S مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحور xx' والمستقيمين $x = \sqrt{e}$, $x = 1$

الحل:

$$\textcircled{1} f(x) = x^2 - 2x(x \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \infty$$

حالة عدم تعيين

$$f(x) = x^2(1 - 2 \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

المسألة الثانية:

C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x \text{ وفق: } I =]0, +\infty[$$

1 أثبت أن f اشتقاقي على I

2 احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ما من

مقاربات للخط C ؟

3 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم C_f

4 اكتب معادلة المماس T في نقطة ينعدم فيها المشتق الثاني وادرس الوضع النسبي

5 احسب مساحة المنطقة المحددة بالخط البياني C وبمحور الفواصل وبالمستقيمتين $x = 1$ و $x = e$

6 استنتج رسم الخط البياني للتابع المعين بالعلاقة:

• $g(x) = -\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

• $h(x) = \frac{1}{x} - \ln(-x)$

الحل:

1 $\ln x$ اشتقاقي على I و $\frac{1}{x}$ اشتقاقي على I وبالتالي

f مجموع تابعين اشتقاقيين على I فهو اشتقاقي على I

2 f معرف واشتقاقي على I

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), (\infty - \infty)$$

حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{1 + x \ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0}$$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط يوازي yy'

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

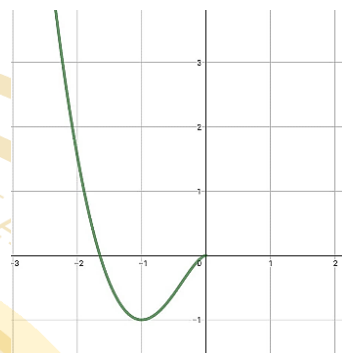
$$= x^2 - 2x^2 \ln(-x)$$

$$-f(-x) = -x^2 + 2x^2 \ln(-x) = f_1(x) \text{ ومنه}$$

$$f_1(x) = -f(-x) \text{ وبالتالي}$$

$$f_1(-x) = -f(-x) \text{ وبالتالي}$$

ومنه C_1 هو نظير C بالنسبة إلى مبدأ الاحداثيات



$$5 \quad S = \int_1^{\sqrt{e}} f(x) dx =$$

$$\int_1^{\sqrt{e}} x^2(1 - 2 \ln x) dx$$

نطبق التكامل بالتجزئة:

$u = 1 - 2 \ln x$	$v' = x^2$
$u' = -\frac{2}{x}$	$v = \frac{1}{3} x^3$

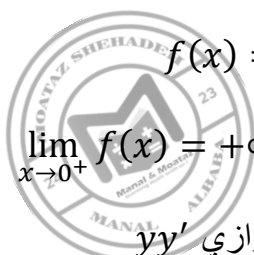
$$S = \left[\frac{1}{3} x^3 (1 - 2 \ln x) \right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} -\frac{2}{3} x^2 dx$$

$$S = \left[\frac{1}{3} x^3 (1 - 2 \ln x) \right]_1^{\sqrt{e}} - \left[-\frac{2}{9} x^3 \right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$S = \left[\frac{1}{3} x^3 (1 - 2 \ln x) + \frac{2}{9} x^3 \right]_1^{\sqrt{e}} \text{ وبالتالي}$$

$$S = \left[\frac{5}{9} x^3 - \frac{2}{3} x^3 \ln x \right]_1^{\sqrt{e}} = \left[\frac{5e\sqrt{e}}{9} - \frac{e\sqrt{e}}{3} \right] - \left[\frac{5}{9} \right]$$

$$S = \frac{2e\sqrt{e}-5}{9} \text{ ومنه}$$



$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ln 2$$

$$T: y = \frac{1}{4}x + \ln 2$$

الوضع النسبي بين C, T

$$l(x) = f(x) - y_T$$

ندرس الاطراد على $]0, +\infty[$

$$l'(x) = f'(x) - m$$

$$= \frac{-1+x}{x^2} - \frac{1}{4}$$

$$l'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$l(2) = 0$$

x	0	2	$+\infty$
$l'(x)$	‡	-	-
$l(x)$	‡	↘	↘
إشارة l'	‡	+	-
الوضع النسبي	‡	C فوق T	T تحت C

$$S = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} dx + \underbrace{\int_1^e \ln x dx}_J$$

$$S = \int_1^e \frac{1}{x} dx + J$$

$$J = \int_1^e \ln x dx$$

$u = \ln x$	$v' = 1$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = x$

$$J = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx = [x \ln x - x]_1^e$$

$$e - e + 1 = 1$$

$$\Rightarrow S = [\ln x]_1^e + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\textcircled{3} f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$$

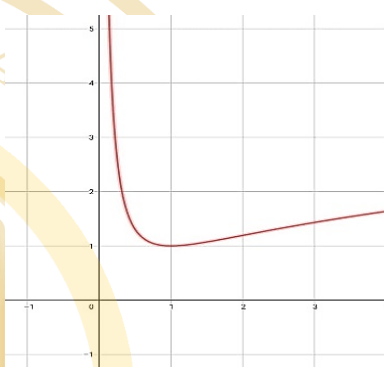
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -1 + x = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow f(1) = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‡	-	0
$f(x)$	‡	$+\infty$	↘

$f(1) = 1$ قيمة حدية صغرى $\textcircled{3}$



$$f''(x) = \frac{x^2 - 2x(-1+x)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{x^2 + 2x - 2x^2}{x^4}$$

$$= \frac{-x + 2}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow -x = -2$$

$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2$$

$$x = 2$$

ميل

$$f'(2) = \frac{1}{4}$$

نقطة

$$\left(2, \frac{1}{2} + \ln 2 \right)$$

$$T: y = \frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2} + \ln 2$$

المسألة الثالثة:

C الخط البياني للتابع f المعروف على المجال

$D =]0, e[\cup]e, +\infty[$ وفق العلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

1 أدرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

2 ارسم كل مقارب وجدته وارسم C

3 احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور

الفواصل $x = \frac{1}{e^2}$ و $x = \frac{1}{e}$

4 استنتج رسم الخط البياني للتابع $g(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$

الحل:

1 التابع اشتقاقي على D كما أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(0 \cdot \infty)$

$$f(x) = \frac{1}{x - x \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

أي أن $x = 0$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \frac{1}{e(1 - 1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = e$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

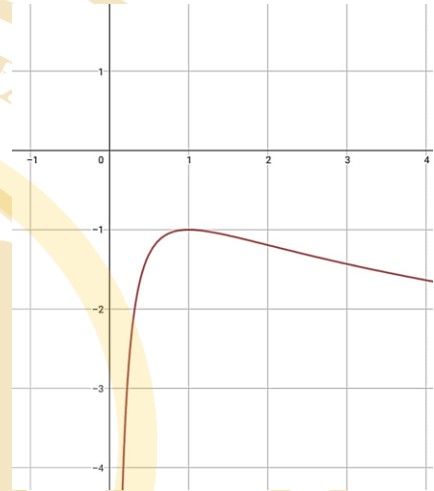
$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

6 استنتاج الخط البياني

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x} - \ln x = -f(x) \end{aligned}$$

$$(x, y) \rightarrow (x, -y)$$

ومنه C_g ينتج عن C_f بتناظر بالنسبة لـ xx'



$$\bullet f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

$$f(-x) = -\frac{1}{x} + \ln(-x)$$

$$-f(-x) = \frac{1}{x} - \ln(-x)$$

$$\Rightarrow h(x) = -f(-x)$$

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$

ومنه C_h متناظر بالنسبة للمبدأ مع C_f

(مسائل إضافية للتدريب والتمرين)**المسألة الرابعة:**

$D =]0, +\infty[$ وفق العلاقة:

$$f(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

- 1 أثبت أن $y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي لـ C مع Δ
- 2 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها
- 3 ارسم Δ ثم ارسم C

المسألة الخامسة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

- 1 تحقق أن مجموعة التعريف هي $]1, 3[$
- 2 أثبت أن $(4-x) \in D_f$ أي أن x من D_f
- 3
1. احسب عند كل x من D_f المقدار $f(4-x) + f(x)$
2. استنتج أن النقطة $A(2, 0)$ هي مركز تناظر للخط C
- 4 احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة التعريف
- 5 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها
- 6 ارسم الخط C في معلم متجانس

المسألة السادسة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على

$I =]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

- 1 أثبت أن f متزايد تماماً على I
- 2 أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً

$$f'(x) = \frac{-\left[(1 - \ln x) + \left(-\frac{1}{x}\right)x\right]}{x^2(1 - \ln x)^2}$$

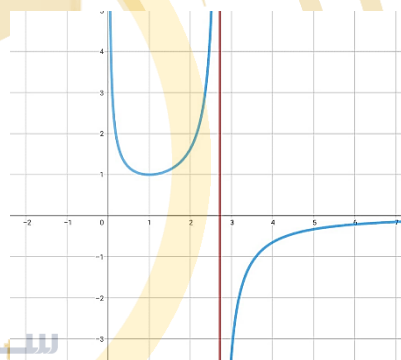
$$= \frac{-[-\ln x]}{x^2(1 - \ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$: f(1) = 1$$

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	‡	- 0 +	‡	+
$f(x)$	‡ $+\infty$		$+\infty$ ‡	0
		↘ ↗	‡ ↗	
		1	‡ $-\infty$	

ان $f(1) = 1$ قيمة صغرى محلياً



② الرسم

$$\textcircled{3} S = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x} dx = - \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{-1}{1 - \ln x} dx$$

$$= [-\ln|1 - \ln x|]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$= (-\ln(1 + 1)) - (-\ln(1 + 2)) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)} = \frac{1}{-x(\ln x - 1)} = -f(x)$$

$$(x, y) \rightarrow (x, -y)$$

C_g ينتج عن C_f بتناظر بالنسبة لـ xx'

التابع الأسّي

(حل المعادلات والمترجمات)

السؤال الأول

حل كلا من المعادلات التالية في \mathbb{R} :

1 $e^{x^2-2} = e^{4-x}$

$x^2 - 2 = 4 - x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x + 3)(x - 2) = 0$

إما $x = 2$ أو $x = -3$

$S = \{-3, 2\}$

2 $e^{x+2} = 2$

$e^{x+2} = e^{\ln 2}$

$\Rightarrow x + 2 = \ln 2 \Rightarrow x = \ln 2 - 2$

$S = \{\ln 2 - 2\}$

3 $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

$(e^x)^2 - 5(e^x) + 4 = 0$

$(e^x - 1)(e^x - 4) = 0$

إما $e^x - 1 = 0$

$\Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

أو $e^x - 4 = 0$

$\Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$

$S = \{0, \ln 4\}$

4 $e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$

$e^{2x} \cdot e^{x+1} + 4e^x \cdot e^{x+1} - 5e^{x+1} = 0$

3 أثبت أن $1 < a < \sqrt{1 + \frac{1}{e}}$

المسألة السابعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]4, +\infty[$ وفق:

$f(x) = 5 - 2x + 3 \ln \left(\frac{x+1}{x-4} \right)$

1 أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = 5 - 2x$ مقارب مائل للخط C 2 ادرس الوضع النسبي للخط C مع مقاربه3 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم خطه البياني C 4 أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α واحصره في مجال طوله يساوي 1

المسألة الثامنة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0, +\infty[$ وفق:

$f(x) = x - \ln \left(2 + \frac{1}{x} \right)$

1 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها2 أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ 3 ادرس الوضع النسبي للخط C مع مقاربه4 أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ينتمي إلى المجال $]1, 2[$ 5 ثم ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم خطه البياني C 

$$7 \quad 9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$$

$$(3^2)^x + 3 \cdot 3^x - 4 = 0$$

$$(3^x)^2 + 3(3^x) - 4 = 0$$

$$3^x + 4 = 0 \text{ إما}$$

$$\Rightarrow 3^x \neq -4$$

$$3^x - 1 = 0 \text{ أو}$$

$$\Rightarrow 3^x = 1$$

$$\Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$S = \{0\}$$

السؤال الثاني:

حل كلا من المترجمات الآتية:

$$1 \quad e^x - 4e^{-x} \leq -3$$

الحل:

شروط الحل: $D = \mathbb{R}$

نضرب الطرفين بـ e^x

$$e^{2x} - 4 \leq -3e^x$$

$$e^{2x} + 3e^x - 4 \leq 0$$

نفرض $t = e^x$

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow \underbrace{(t+4)}_{\text{موجب تماما}} (t-1) = 0$$

حل المترجمة يؤول إلى حل المترجمة

$$t - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow t \leq 1 \Rightarrow e^x \leq 1 \Rightarrow x \leq 0$$

$$S =]-\infty, 0]$$

$$e^{x+1} \cdot (e^{2x} + 4e^x - 5) = 0$$

$$e^{x+1} \neq 0 \text{ إما}$$

$$e^{2x} + 4e^x - 5 = 0 \text{ أو}$$

$$(e^x)^2 + 4(e^x) - 5 = 0$$

$$(e^x + 5)(e^x - 1) = 0$$

$$e^x \neq -5 \Leftrightarrow e^x + 5 = 0 \text{ إما}$$

$$\boxed{x = 0} \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \text{ أو}$$

$$S = \{0\}$$

$$5 \quad 3^{2x+1} = 1$$

$$3^{2x+1} = 3^0$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$6 \quad 7^{x-1} = 3^x$$

$$e^{(x-1)\ln 7} = e^{x \ln 3}$$

$$(x-1) \cdot \ln 7 = x \cdot \ln 3$$

$$x \ln 7 - \ln 7 = x \cdot \ln 3$$

$$x \ln 7 - x \ln 3 = \ln 7$$

$$x(\ln 7 - \ln 3) = \ln 7$$

$$x \ln \left(\frac{7}{3}\right) = \ln 7$$

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 7 - \ln 3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\ln 7}{\ln \left(\frac{7}{3}\right)}$$

$$(2^2)^x - 2 \cdot 2^x - 3 \leq 0$$

$$(2^x)^2 - 2 \cdot (2^x) - 3 \leq 0$$

$$(2^x - 3)(2^x + 1) \leq 0$$

ولكن: $(2^x + 1 > 0)$:

$$\Rightarrow 2^x - 3 \leq 0$$

$$2^x \leq 3 \Rightarrow e^{x \ln 2} \leq e^{\ln 3}$$

$$x \ln 2 \leq \ln 3$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

$$S = \left] -\infty, \frac{\ln 3}{\ln 2} \right]$$

السؤال الثالث:

نعرف التابع f على $[0, +\infty[$ (\mathbb{R}^+) وفق:

$$f(x) = e^{1-x} - \sqrt{x}$$

1 احسب $f(1)$, $f'(x)$, $f'(1)$ واستنتج النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{1-x} - \sqrt{x}$$

الحل:

$$f(1) = e^0 - 1 = 0$$

التابع f اشتقاقي على $]0, +\infty[$ (\mathbb{R}^{**})

$$f'(x) = -e^{1-x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

حسب تعريف العدد المشتق حيث f اشتقاقي عند

$$x = 1$$

$$2 \quad e^x + \frac{3}{e^x} \leq 4$$

نضرب المتراجحة بـ $(e^x > 0)$:

$$e^{2x} + 3 \leq 4e^x$$

$$e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$$

نجعل

$$(e^x - 1)(e^x - 3) = 0$$

$$e^x - 3 = 0 \text{ إما}$$

$$\Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$$

$$\text{أو } e^x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$\ln 3$	$+\infty$
إشارة	+	0	-	0
			+	

$$S = [0, \ln 3]$$

$$3 \quad e^x - 4e^{-x} \leq 0$$

$$e^x - \frac{4}{e^x} \leq 0$$

نضرب المتراجحة بـ $(e^x > 0)$:

$$e^{2x} - 4 \leq 0$$

$$(e^x + 2)(e^x - 2) \leq 0$$

ولكن:

$$(e^x + 2 > 0)$$

$$\Rightarrow e^x - 2 \leq 0$$

$$e^x \leq 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

$$S =]-\infty, \ln 2]$$

$$4 \quad 4^x - 2^{x+1} - 3 \leq 0$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{3}{x-1}}$$

الحل:

$$g(x) = \frac{3}{x-1} \cdot \ln(2-x)$$

$$= \frac{3}{x-1} \cdot \ln(1-x+1)$$

$$= \frac{3(1-x)}{x-1} \cdot \frac{\ln(1-x+1)}{1-x}$$

$$= \frac{-3 \ln(1-x+1)}{1-x}$$

$$= \frac{-3 \ln(t+1)}{t}; t = 1-x$$

بما أن التابع الأسّي مستمر على \mathbb{R}

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -3(1) = -3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1 \text{ حيث}$$

احسب نهاية كل من التوابع التالية:

$$1 \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x) =$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

$$f(x) = e^x - \ln x$$

$$x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 0) = +\infty$$

حيث:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - \sqrt{x}}{x-1} = f'(1) = -\frac{3}{2}$$

السؤال الرابع:

أوجد النهاية التالية:

$$1 f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{3}}; x \rightarrow +\infty$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); 1^{+\infty}$$

حالة عدم تعيين

$$f(x) = e^{\frac{x+1}{3} \cdot \ln \left(\frac{x-2}{x+1} \right)}$$

نأخذ

$$g(x) = \frac{x+1}{3} \ln \left(\frac{-3}{x+1} + 1 \right)$$

$$g(x) = \frac{x+1}{3} \cdot \frac{-3}{x+1} \cdot \frac{\ln \left(\frac{-3}{x+1} + 1 \right)}{\frac{-3}{x+1}}$$

$$= -\frac{\ln \left(\frac{-3}{x+1} + 1 \right)}{\frac{-3}{x+1}} = \frac{\ln(t+1)}{t}; t = \frac{-3}{x+1}$$

بما أن التابع الأسّي مستمر على \mathbb{R}

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1 \text{ حيث}$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1 + e^{-x}) =$$

حالة عدم تعيين $(-\infty + \infty)$

$$f(x) = 2x - 1 + e^{-x} = 2x - 1 + \frac{1}{e^x}$$

$$= x \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x \cdot e^x} \right)$$

(حل جملة معادلتين حل مشترك)

السؤال الخامس:

أوجد الحل المشترك لجملة معادلتين

$$1 \quad \begin{cases} e^{x+1} - e^y = e & (1) \\ 2e^x + e^y = 4 + e & (2) \end{cases}$$

الحل:

بجمع (1) و (2) نجد:

$$e^{x+1} + 2e^x = 4 + 2e$$

$$e \cdot e^x + 2e^x = 4 + 2e$$

$$(e + 2)e^x = 2(e + 2)$$

نقسم على $(e + 2 \neq 0)$:

$$\Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$$

نعوض في (2):

$$4 + e^y = 4 + e \Rightarrow e^y = e$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1}$$

فالحل المشترك: $S = \{(\ln 2, 1)\}$

$$2 \quad \begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{cases}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - e^x + 1) =$$

حالة عدم تعيين $(+\infty - \infty)$

$$f(x) = e^x \left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 1 + \infty) = +\infty$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} =$$

حالة عدم تعيين $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$$

$$\text{حيث: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 - x)] \cdot e^x =$$

حالة عدم تعيين $(0 \cdot \infty)$

$$f(x) = (x^2 - x) \cdot e^x = x^2 \cdot e^x - x \cdot e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

$$\text{حيث } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 \cdot e^x) = 0}$$

السؤال السابع

ليكن $g(x) = \ln x$ معرف على $I =]0, +\infty[$
احسب كلاً من $g(e)$ و $g'(x)$ و $g'(e)$ واستنتج:

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

إذا علمت أن

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x - 1}{x - e} & ; x \in]0, e[\cup]e, +\infty[\\ m + 1 & ; x = e \end{cases}$$

عين قيمة الوسيط m ليكون التابع f مستمر عند e

الحل:

$$g(e) = \ln e = 1$$

g اشتقاقي على I ومشتقه:

$$g'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g'(e) = \frac{1}{e}$$

نعرف تابع معدل التغير:

$$t(x) = \frac{g(x) - g(e)}{x - e}$$

ومنه

$$t(x) = \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} t(x) = g'(e)$$

ومنه نستنتج:

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \frac{1}{e}$$

التابع مستمر عند e إذا فقط إذا كان

$$m = \frac{1}{e} - 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow e} f(x) = f(e)$$

الاستمرار

السؤال السادس:

ليكن f تابع معرف وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x(e^x - 1)} & ; x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ; x = 0 \end{cases}$$

① ادرس نهاية التابع f عند $(x = 0)$

② هل f مستمر عند 0

الحل:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x(e^x - 1)} \times \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - 1}{x(e^x - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \frac{x}{(e^x - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$



الحل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \frac{\infty}{\infty}$$

حالة عدم تعين

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(5 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = 5$$

$$f(x) \in]4.9, 5.1[\Rightarrow$$

$$f(x) \in]5 - 0.1, 5 + 0.1[$$

$$|f(x) - 5| < 0.1 \Rightarrow \left| \frac{5e^x}{e^x - 1} - 5 \right| < 0.1$$

$$\left| \frac{5e^x - 1 - 5e^x + 5}{e^x - 1} \right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{4}{|e^x - 1|} < \frac{1}{10}$$

$|e^x - 1| > 40$ في جوار الـ $+\infty$ يكون $e^x - 1 > 0$ ومنه نجد:

$$40 < e^x - 1 \Rightarrow 41 < e^x \Rightarrow \ln 41 < x$$

إذا يمكن أن نأخذ $A = \ln 41$ أو أي عدد أكبر منه.

(قابلية الاشتقاق)

السؤال العاشر

ليكن f تابع معرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \sqrt{e^x + 1}$$

1 احسب $f'(0), f'(x), f(0)$

2 استنتج قيمة

السؤال الثامن

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{1 - e^x} & ; x \neq 0 \\ m + 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

1 احسب نهاية f عند 02 ما قيمة m التي تجعل f مستمر على \mathbb{R} ؟

الحل:

1 حالة عدم تعين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 - e^x} = \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{x}{1 - e^x}$$

$$= \frac{2 \sin 2x}{2x} \cdot \frac{x}{-(e^x - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2(1)(-1) = -2$$

حيث $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{e^\theta - 1} = 1$ علماً أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$ 2 f مستمر على $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ يكون f مستمر على \mathbb{R} إذا كان $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ أي $2 = m + 1$ وبالتالي $m = -3$

(تعريف النهاية وتحديد العدد A)

السؤال التاسع

احسب نهاية التابع المعطى بالعلاقة $f(x) = \frac{5e^x - 1}{e^x - 1}$ عند $+\infty$ ثم أعط عدد A يحقق الشرط إذا كانت $f(x) \in]4.9, 5.1[$ كان $x > A$ 

$$y = f(x) = ke^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}$$

$$= ke^{-\frac{1}{2}x} + 1 ; k \in \mathbb{R}$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow ke^{-\frac{1}{2}} + 1 = 2$$

$$ke^{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$k = \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{e}$$

نعوض في التابع المطلوب:

$$f(x) = \sqrt{e} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

2 حل المعادلة التفاضلية $2y + 3y' - 1 = 0$ التي تحقق أن ميل المماس في النقطة التي فصلتها $x = 0$ يساوي (-1)

الحل:

$$a = -\frac{2}{3} \quad b = \frac{1}{3}$$

$$y' = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$$

الحل هو مجموعة التوابع

$$y' = f'(x) = -\frac{2}{3}ke^{(-\frac{2}{3})x}$$

$$-\frac{2}{3}ke^{-\frac{2}{3}(0)} = -1 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

فالحل المطلوب هو:

$$y = f(x) = \frac{3}{2}e^{(-\frac{2}{3})x} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{2}}{x}$$

الحل:

$$\textcircled{1} \sqrt{e^0 + 1} = \sqrt{2}$$

f اشتقاقي على \mathbb{R}

$$f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}}$$

$$\frac{e^0}{2\sqrt{e^0 + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{2}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(المعادلات التفاضلية)

السؤال الحادي عشر

1 حل المعادلة التفاضلية $2y' = -y + 1$ علماً أن

$$f(1) = 2$$

الحل:

$$2y' = -y + 1$$

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

الحل هو مجموعة التوابع



(المقارب المائل)

السؤال الثاني عشر

بين أن الخط البياني C للتابع f المعروف على R يقبل مقارباً مائلاً d عينه وادرس الوضع النسبي للخط C والمقارب d في كل مما يلي:

$$① f(x) = x - 1 + e^{-2x}$$

بفرض $d: y = x - 1$ حيث $f(x) - y_d = e^{-x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y_d) = +\infty$$

d ليس مقارب مائل في جوار $(-\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_d) = 0$$

d مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي:

$$f(x) - y_d = e^{-2x} > 0$$

d فوق $C \Leftarrow$

$$② f(x) = x + 2 + x \cdot e^x$$

بفرض $d: y = x + 2$ مقارب مائل للخط C

$$f(x) - y_d = x \cdot e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y_d) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x) = 0$$

$d: y = x + 2$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_d) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^x) = +\infty$$

d ليس مقارب مائل في جوار $+\infty$

الوضع النسبي: $f(x) - y_d = 0 \Rightarrow x e^x = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y_d$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	d تحت C		d فوق C

نقطة مشتركة $(0,2)$

حل المعادلة التفاضلية $y' + 2y = 0$ ثم أوجد الحل f الذي يحقق:

ميل المماس في نقطة فاصلتها (-2) من الخط C يساوي $(\frac{1}{2})$

الحل:

$$y' + 2y = 0$$

$$\Rightarrow y' = -2y$$

$$f_k(x) = k e^{-2x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

نعلم أن:

$$m = f'(-2) = \frac{1}{2}$$

$$f'_k(x) = -2k e^{-2x}$$

$$\frac{1}{2} = -2k e^{-2(-2)}$$

وبالتالي:

$$-2e^4 \cdot k = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{\frac{1}{2}}{-2e^4} = -\frac{1}{4e^4}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4e^4} \cdot e^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot e^{-4} \cdot e^{-2x}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4} e^{-2x-4}$$

المسائل الشاملة (100 د)

المسألة الأولى

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$$

1 لماذا المستقيمان: d_1 الذي معادلته $(y = 2)$

d_2 و

الذي معادلته $(y = -3)$ مقاربان للخط C

2 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

3 اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب

4 ادرس وضع C بالنسبة إلى T

5 ارسم d_1, d_2, T وارسم C

6 احسب المساحة المحصورة بين C_f والمستقيم $y = 2$ والمستقيمان $x = 0, x = -\ln 2$

الحل:

f معرفة على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2(0) - 3}{0 + 1} = -3$$

$d_2: y = -3$ مقارب أفقي للخط C يوازي المحور xx' في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم نعين من الشكل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} = \frac{e^x \left(2 - \frac{3}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2 - \frac{3}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2$$

$d_1: y = 2$ مقارب أفقي للخط C يوازي المحور xx'

السؤال الثالث عشر

بين أن الخط C للتابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \ln(2 + e^x)$$

يقبل مقاربين أحدهما أفقي والآخر مائل يطلب تعيينها

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln(3 + 0) = \ln 3$$

$C \Leftarrow$ يقبل مقارب أفقي معادلته $y = \ln 3$ في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$C \Leftarrow$ لا يقبل مقارب أفقي في جوار $+\infty$

لدينا: $f(x) = \ln(3 + e^x)$

$$= \ln \left[e^x \cdot \left(\frac{3}{e^x} + 1 \right) \right]$$

$$= \ln e^x + \ln \left(\frac{3}{e^x} + 1 \right)$$

$$= x + \ln \left(\frac{3}{e^x} + 1 \right)$$

بفرض $d: y = x$ يكون:

$$f(x) - y_d = \ln \left(\frac{3}{e^x} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_d) = \ln 1 = 0$$

$d: y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

طلب إضافي: ادرس الوضع النسبي لـ C والمقارب المائل d

$$f(x) - y_d = \ln \left(\frac{3}{e^x} + 1 \right)$$

بما أن: $\frac{3}{e^x} + 1 > 1$ فإن $\ln \left(\frac{3}{e^x} + 1 \right) > 0$

$$\Rightarrow f(x) - y_d > 0 \Rightarrow C \text{ فوق } d$$

أ. معترف شحادة

$$= \frac{20e^x - 5(e^{2x} + 2e^x + 1)}{4(e^x + 1)^2}$$

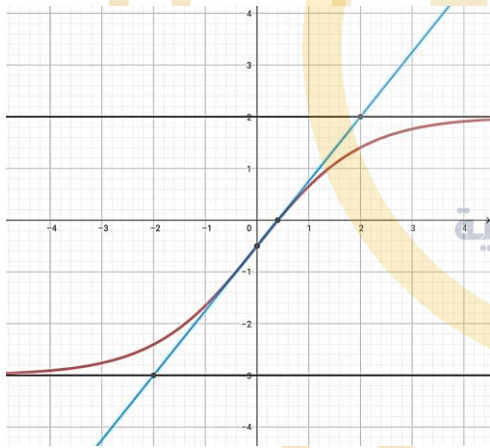
$$= \frac{20e^x - 5e^{2x} - 10e^x - 5}{4(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{-5e^{2x} + 10e^x - 5}{4(e^x + 1)^2} = \frac{-5(e^x - 1)^2}{4(e^x + 1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	\searrow	0
			\searrow
			$-\infty$

- على المجال $]-\infty, 0[$ يكون $C \Leftarrow g(x) > 0$ فوق T
- على المجال $]0, +\infty[$ يكون $C \Leftarrow g(x) < 0$ تحت T
- عند $(x = 0)$ يوجد نقطة مشتركة



⑥ من الرسم نجد أن d_2 يقع فوق C_f إذاً

$$S = \int_{-\ln 2}^0 [f(x) - y_a] \cdot dx$$

$$S = \int_{-\ln 2}^0 \left[2 - \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} \right] \cdot dx$$

$$= \int_{-\ln 2}^0 \frac{5}{e^x + 1} \cdot dx = \int_{-\ln 2}^0 \frac{5e^{-x}}{1 + e^{-x}} \cdot dx$$

$$= -5 \int_{-\ln 2}^0 \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} \cdot dx$$

في جوار $+\infty$

② f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x + 1) - e^x(2e^x - 3)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{2e^x + 2e^x - 2e^{2x} + 3e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	-3	\nearrow
		2

③ $x = 0 \Rightarrow y = \frac{2(1)-3}{1+1} = -\frac{1}{2}$

$$m = f'(0) = \frac{5}{4}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow$$

$$y - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}(x - 0) \Rightarrow T: y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$$

④ نشكل التابع:

$$g(x) = f(x) - y_T = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}\right)$$

g معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{20e^x - 5(e^x + 1)^2}{4(e^x + 1)^2}$$

عند $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \text{ أي لا يوجد مقارب أفقي}$$

معرف واشتقاق على \mathbb{R} ومنه

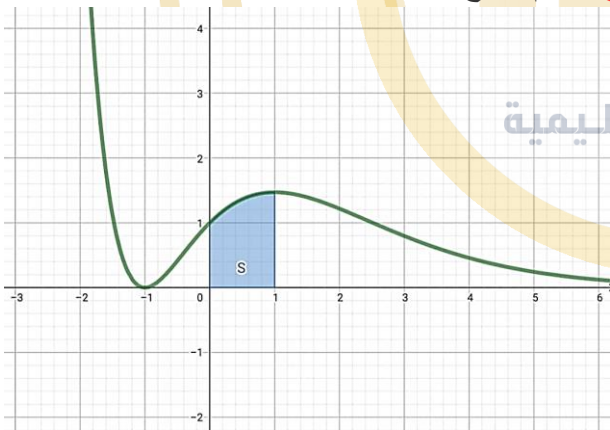
$$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} \\ = (1-x^2)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{4}{e} \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	$0 \nearrow \frac{4}{e}$	\searrow
				0

رسم التابع ومقارباته

3 للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد α لأن:

$$2 \in]-\infty, 0[= f(]-\infty, -1[)$$

و f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0.4, e^{-2}[$

$$2 \notin]0.4, e^{-2}[= f(]1, \infty[)$$

و f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]0.4, e^{-2}[$ للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد هو $\alpha \in]-\infty, -1[$

$$-5[\ln[1 + e^{-x}]]_{-\ln 2}^0$$

$$= -5[\ln(1 + 1) - \ln(1 + 2)]$$

$$-5(\ln 2 - \ln 3) = -5 \ln \frac{2}{3}$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = (x+1)^2 \cdot e^{-x}$$

1 ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها. واستنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل وضع C بالنسبة إليه.2 ارسم كل مقارب وجدته وارسم C 3 بين أن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد α 4 احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1, x = 0$

5 استنتج مجموعة تعريف التابع:

$$g(x) = \ln(f(x)) \quad x \mapsto g(x) = \ln(f(x))$$

الحل:

1 نوجد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفهعند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) = 0$$

ومنه $y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$ الوضع النسبي: C فوق Δ لأن:

$$f(x) - y_\Delta = (x+1)^2 e^{-x} - 0$$

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$f(x) - 0 = (x+1)^2 \cdot e^{-x} = 0$$

حسب جدول تغيرات f نجد: $f(x) = 0$ عندما $x = -1$

و $f(x) > 0$ عندما $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

فمجموعة تعريف g هي $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

طلب إضافي:

أثبت أن التابع f هو حل للمعادلة التفاضلية

$$y' + y = 2e^{-x}(x + 1)$$

نعرف التابع f في المعادلة:

$$l_1 = y' + y = (1 - x^2) \cdot e^{-x} + (x + 1)^2 e^{-x}$$

$$= e^{-x} \underbrace{-x^2 \cdot e^{-x}} + \underbrace{x^2 \cdot e^{-x}} + 2x \cdot e^{-x} + e^{-x}$$

$$2e^{-x} + 2x \cdot e^{-x} = 2e^{-x}(x + 1) = l_2$$

محقة

المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1 تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

2 ادرس نهاية التابع f عند $-\infty$ و $+\infty$

3 بين أن المستقيمين Δ_1 و Δ_2 الذين معادلتهم

على الترتيب $y = x + 1$, $y = x - 1$ مقاربان لـ

C عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ادرس الوضع النسبي لكل

مقارب والخط البياني

إن $\alpha \in [-2, -1]$ لأن:

$$\begin{cases} f(-2) = e^2 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) = 2 \in [0, e^2]$$

$$= f([-2, -1])$$

4 نلاحظ حسب الرسم أن C فوق محور الفواصل ومنه:

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + 1)^2 \cdot e^{-x} dx$$

نكامل بالتجزئة:

$u = (x + 1)^2$	$v' = e^{-x}$
$u' = 2(x + 1)$	$v = -e^{-x}$

$$I = [(x + 1)^2 - e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -2(x + 1) \cdot e^{-x} dx$$

$$= 1 - \frac{4}{e} + 2 \int_0^1 (x + 1)e^{-x} dx$$

نكامل بالتجزئة

$u = (x + 1)$	$v' = e^{-x}$
$u' = 1$	$v = -e^{-x}$

$$I = 1 - \frac{4}{e} + 2 \left([-(x + 1)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx \right)$$

$$= 1 - \frac{4}{e} + 2 \left([-2e^{-1} + 1] + \int_0^1 e^{-x} \right)$$

$$= 1 - \frac{4}{e} - \frac{4}{e} + 2 + 2 \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{4}{e} - \frac{4}{e} + 2 + 2(-e^{-1} + 1)$$

$$= 3 - \frac{8}{e} - \frac{2}{e} + 2$$

$$\Rightarrow I = 5 - \frac{6}{e}$$

5 إيجاد مجموعة تعريف $g(x) = \ln(f(x))$

أ. معترف شهادة

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

③

$$\Delta_1: y = x - 1$$

$$f(x) - y_{\Delta_1} = \frac{2}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_{\Delta_1} = 0$$

$y = x - 1$: مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي:

$$\frac{2}{e^x + 1} > 0 \Rightarrow f(x) - y_{\Delta_1} > 0$$

Δ_1 فوق C

$$\Delta_2: y = x + 1$$

$$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_{\Delta_2} = 0$$

$y = x + 1$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي

$$\frac{2e^x}{e^x + 1} > 0 \Rightarrow f(x) - y_{\Delta_2} > 0$$

Δ_2 فوق C

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \textcircled{4}$$

④ بين أن التابع f فردي

⑤ ارسم Δ_1 و Δ_2 والخط البياني C

⑥ احسب مساحة السطح المحدد بين المقارب Δ_2 والخط البياني C و $x = 0$, $x = \ln 2$

الحل:

$$\textcircled{1} f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f(x) = -x \left(\frac{e^x + 1 - 1 - 1}{e^x + 1} \right)$$

$$= x - \left(\frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1} \right)$$

$$= x - \left(1 - \frac{2}{e^x + 1} \right)$$

$$= x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x - \left(\frac{e^x + e^x - e^x - 1}{e^x + 1} \right)$$

$$= x - \left(\frac{2e^x - (e^x + 1)}{e^x + 1} \right)$$

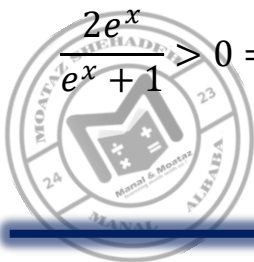
$$= x - \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x + 1}{e^x + 1} \right)$$

$$= x - \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x + 1}{e^x + 1} \right)$$

$$= x - \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} - 1 \right)$$

$$= x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

أيضاً



المسألة الرابعة:

ادرس تغيرات f المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ وفق:

$$f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$$

وارسم خطه البياني

الحل:

f معرف واشتقاقي على المجال

$$]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

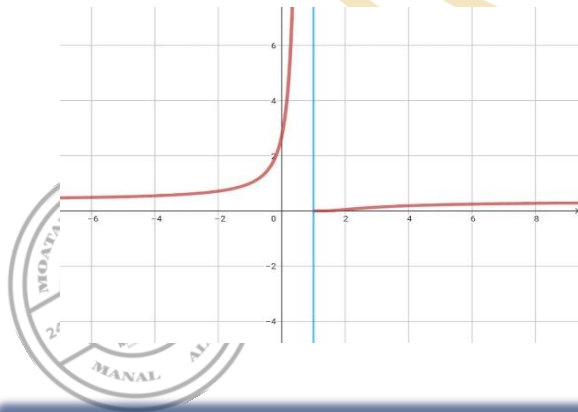
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \cdot \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\frac{2}{(1-x)^2} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\#$	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow +\infty$	$\searrow 0$
	\nearrow	$\#$	$\searrow \frac{1}{e}$



$$f(-x) = -x - \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$$

$$= -\left(x + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}\right)$$

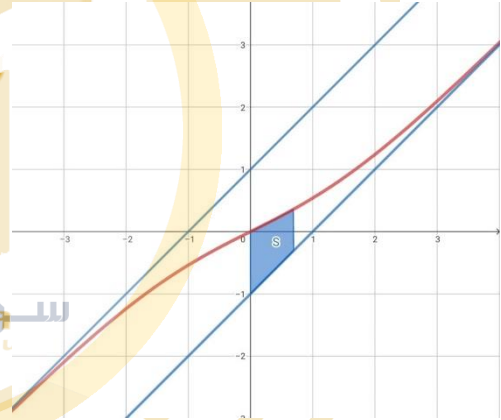
$$= -\left(x + \frac{(e^{-x} - 1)e^x}{(e^{-x} + 1)e^x}\right)$$

$$= -\left(x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x}\right)$$

$$= -\left(x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$$

$$= -f(x)$$

f تابع فردي:



⑤

$$S = \int_0^{\ln 2} (f(x) - y_{\Delta_2}) dx \quad \text{⑥}$$

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x + 1} dx$$

$$S = [2 \ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2}$$

$$= 2 \ln(2 + 1) - 2 \ln 2$$

$$= 2 \ln 3 - 2 \ln 2$$

$$= 2 \ln \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	\searrow	$1 - \frac{1}{e}$	\nearrow	$\frac{1}{e}$

نلاحظ من الجدول $g(x) \geq 1 - \frac{1}{e} > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ فإن $g(x) > 0$ موجب تماماً وبالتالي إشارة $\frac{g(x)}{x}$ من إشارة المقام

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{g(x)}{x}$		$-$	$+$

② دراسة تغيرات f : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = e^x + \ln|x| = \begin{cases} e^x + 1 \ln x ; x > 0 \\ e^x + 1 \ln(-x) ; x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ يسار المقارب } C$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ يمين المقارب } C$$

$x = 0$ مقارب شاقولي

f اشتقاقي على $]-\infty, 0[,]0, +\infty[$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + \frac{1}{x} ; x > 0 \\ e^x + \frac{1}{x} ; x < 0 \end{cases} =$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{xe^x + 1}{x} ; x > 0 \\ \frac{xe^x + 1}{x} ; x < 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

مسائل الدمج (لوغاريتمية وأسية)

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

وفق: $f(x) = e^x + \ln|x|$ وليكن g التابع المعرفة

على \mathbb{R} وفق: $g(x) = xe^x + 1$

① ادرس تغيرات g واستنتج إشارة $\frac{g(x)}{x}$ على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

② ادرس تغيرات f وارسم الخط C

③ أثبت أن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين مختلفين أي m يمكن من \mathbb{R}

④ ليكن $g(x) = e^x + \ln x$ استنتج رسم C_g من C_f ثم احسب المساحة بين C_g و xx' و $x = 2, x = 1$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad ①$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$$

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0 \text{ علماً بأن}$$

g اشتقاقي على \mathbb{R}

$$g'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow g(-1) = -\frac{1}{e} + 1$$



②

$$f(x) - y_{\Delta} = \ln(e^{2x} - e^x + 1) - \ln(e^{2x})$$

$$= \ln\left(\frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^{2x}}\right)$$

$$\ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_{\Delta}) = \ln 1 = 0$$

$\Delta: y = 2x \leftarrow$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

③ الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً لمحور الفواصل اذا تحقق:

$$f'(x) = 0$$

f اشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x - 1}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^{2x} - e^x = 0$$

$$e^x(2e^x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2e^x - 1 = 0 \quad \text{حيث } e^x > 0$$

$$2e^x = 1 \Rightarrow e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1 \ln \frac{1}{2}$$

$$= -\ln 2$$

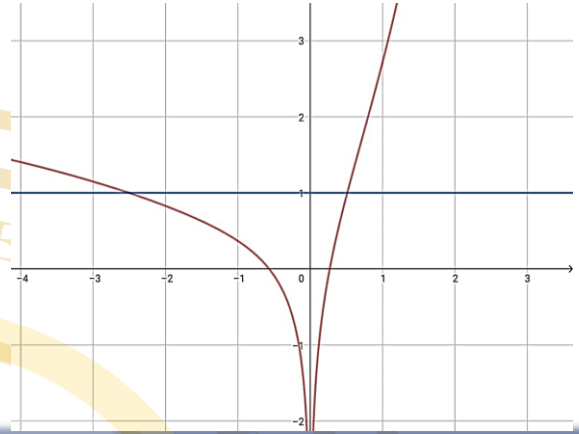
وبالتالي C يقبل مماساً وحيداً موازياً لمحور الفواصل معادلته:

$$y = f(-\ln 2) = \ln(e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1)$$

$$= \ln((2)^{-2} - (2)^{-1} + 1)$$

إذا إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $\frac{g(x)}{x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		\neq	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow -\infty$	$\nearrow +\infty$



المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف وفق:

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

① أوجد مجموعة التعريف f

② أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

③ أثبت أن الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل

④ ادرس تغيرات التابع f

⑤ اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها (0) منه

⑥ ارسم كل من T, Δ, d ثم ارسم C في المعلم ذاته

الحل:

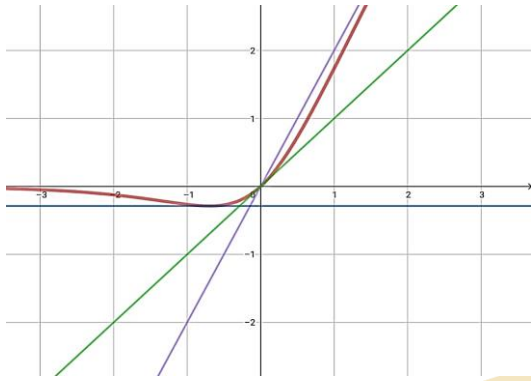
① معرف f عندما $e^{2x} - e^x + 1 > 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

أ. معترف شجادة

0935948741



⑥

المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]-\infty, 1[$ وفقاً: $f(x) = e^x + \ln(1-x)$ وليكن g التابع المعرفة على \mathbb{R} وفقاً: $g(x) = (1-x)e^x - 1$ والمطلوب:① ادرس اطراد التابع g واستنتج أن $g(x) \leq 0$ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$ ② تحقق أن $f'(x) = \frac{g(x)}{1-x}$ على المجال $]-\infty, 1[$ ثم ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.③ اكتب معادلة المستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$ ④ في معلم متجانس ارسم المستقيم T ثم ارسم C الخط البياني للتابع f .

الحل:

① $g(x) = (1-x)e^x - 1$ تابع معرفة واشتقاقها على \mathbb{R}

$$g'(x) = -e^x + (1-x)e^x$$

$$g'(x) = -e^x + e^x - xe^x$$

$$g'(x) = -xe^x$$

$$= \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\frac{3}{4}$$

ومنه معادلة المماس $y = \ln\frac{3}{4}$ ④ f معرفة واشتقاقها على المجال $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^{2x} - e^x + 1))$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(e^{2x} \left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}\right)\right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln e^{2x} + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}\right) \right]$$

$$= +\infty + \ln 1 = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x - 1}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\ln 2$$

$$f(-\ln 2) = \ln\frac{3}{4}$$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow \ln\frac{3}{4}$	$\nearrow +\infty$

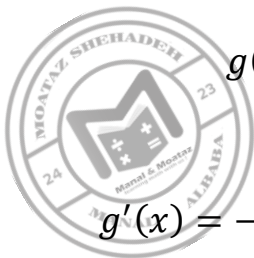
⑤ $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \dots \dots \dots *$

$$f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(0) = 1$$

نعوض في *

$$T: y = x$$



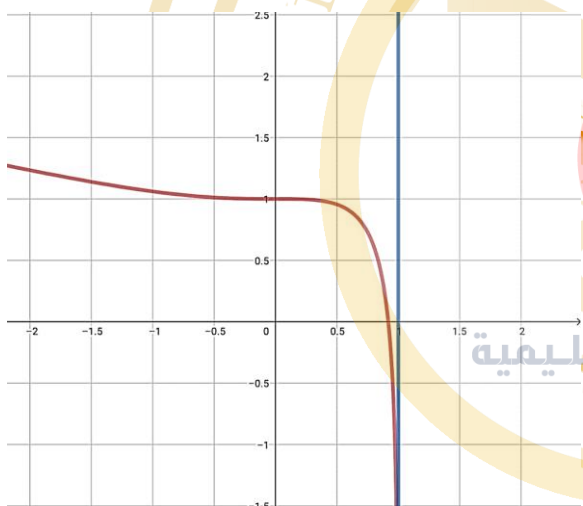
$$y_0 = f(0) = 1$$

$$m = f'(0) = 0$$

إذاً T مماس أفقي معادلته

$$T: y = 1$$

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	\searrow



④

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -xe^x = 0$$

$$e^x > 0 \rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g(0) = (1 - 0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	\nearrow	0	\searrow

إذا من الجدول نلاحظ أن

$$\forall x \in D_f \rightarrow g(x) < 0$$

$$f'(x) = e^x + \frac{-1}{1-x} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(1-x)} = \frac{g(x)}{1-x}$$

دراسة تغيرات التابع f :

f معرف واشتقاقي على $]-\infty, 1[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^{-\infty} + \ln(+\infty)$$

$$= 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = e^1 + \ln(0) = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي

$$f'(x) = \frac{g(x)}{1-x} = \frac{(1-x)e^x - 1}{(1-x)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = e^0 + \ln(1 - 0) = 1$$

③ المماس T عند $x = 0$

