2024 / 2 / 28

بحث النواسات

قانون هوك : $F'_s = k \cdot x$

النواس المرن

التعريف : جسم صلب معلق بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة يهتز حركة اهتزازية حول مركز الاهتزاز

تعريف : الحركة الاهتزازية
حركة جسم يهتز إلى جانبي نقطة ثابتة تسمى مركز الاهتزاز

برهن أن محصلة القوى المؤثرة في مركز عطالة الجسم الصلب في النواس المرن هي قوة إرجاع تعطى بالعلاقة : $\bar{F} = -k \cdot \bar{x}$

- في حالة السكون :

القوى الخارجية المؤثرة
ثقل الجسم $\vec{w}$
قوة توتر النابض $\vec{F}_{s_0}$
بما أن الجسم ساكن :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{w} + \vec{F}_{s_0} = 0$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل :

$$w - F_{s_0} = 0$$

$$w = F_{s_0}$$

لكن : $w = m \cdot g$

نابض يخضع لقوة شد :

$$F'_{s_0} = F_{s_0} = k x_0$$

نعوض :

$$w = k x_0$$

$$m \cdot g = k x_0$$

- في حالة الحركة :

القوى الخارجية المؤثرة :
$\vec{w}$ ثقل الجسم
$\vec{F}_s$ قوة شد النابض للجسم
نطبق قانون نيوتن الثاني :

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{F}_s = m \cdot \vec{a}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل :

$$w - F_s = m \cdot a \quad \bigstar$$

نابض يخضع لقوة شد :

$$F'_s = F_s = k(x_0 + x)$$

لكن : من حالة السكون وجدنا :

$$w = k x_0$$

نعوض في $\bigstar$:

$$k x_0 - k(x_0 + x) = m \cdot a$$

$$\cancel{k x_0} - \cancel{k x_0} - k x = m \cdot a$$

$$\bar{F} = -k \cdot \bar{x}$$

ملاحظة :

- قوة الإرجاع تتناسب طرداً مع المطال وتعاكسه بالإشارة
- بالمسائل إذا طلب شدة قوة الإرجاع نضع نفس القانون بالقيمة المطلقة : $\bar{F} = |-k \cdot x|$

• قانون الاستطالة السكونية :

$$x_0 = \frac{m.g}{k}$$

• استنتج عبارة الطاقة الميكانيكية للنواس المرن غير المتخامد وبيّن متى تكون E_K و E_p عظمى و معدومة.

$$E_{tot} = E_p + E_k$$

• $E_p = \frac{1}{2} k . x^2$

$x = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$E_p = \frac{1}{2} k . \left[X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)\right]^2$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)} \quad \bullet$$

★ $E_K = \frac{1}{2} m . v^2$

$v = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$E_K = \frac{1}{2} m \left[-\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)\right]^2$

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} \underbrace{m . \omega_0^2}_{k} X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)} \quad ★$$

نعوض • و ★ في ♡ :

$E_{tot} = \underbrace{\frac{1}{2} k X_{max}^2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \underbrace{\frac{1}{2} k X_{max}^2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \underbrace{\left(\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\right)}_{1}$

$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 = \overset{\text{ثابت}}{const}$

E_K
- عظمى ← عند وضع التوازن $x = 0$
- معدومة ← في المطالين الأعظميين $X = \pm X_{max}$

• سؤال دورة 2020

ما شكل الطاقة عند وضع التوازن ؟

طاقة حركية E_K

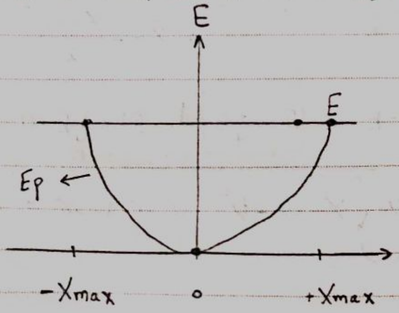
E_p
- عظمى ← في المطالين الأعظميين $X = \pm X_{max}$
- معدومة ← في وضع التوازن $x = 0$

• سؤال دورة 2006

ما شكل الطاقة عند الوضعين الطرفيين ؟

طاقة كامنة E_p

• ارسم تغيرات الطاقة الكامنة بدلالة المطال



$$E_K = E - E_P$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k X_{max}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$\times (2) \Rightarrow$ $$m v^2 = k\left[X_{max}^2 - x^2\right]$$

$\div m \Rightarrow$ $$v^2 = \frac{k}{m}\left[X_{max}^2 - x^2\right]$$

بالجذر $\Rightarrow$ $$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$$

$$v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2}$$

س: إن محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز ثقالة الجسم في كل لحظة هي قوة إرجاع؟
لأنها تعيد الجسم إلى مركز الاهتزاز دوماً وهي تتناسب طرداً مع المطال x وتعاكسه بالإشارة

• انطلاقاً من العلاقة

$$(\bar{x})''_t = -\frac{k}{m}\cdot \bar{x} \quad \text{①}$$

برهن أن حركة النواس المرن جيبية انسحابية توافقية بسيطة

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

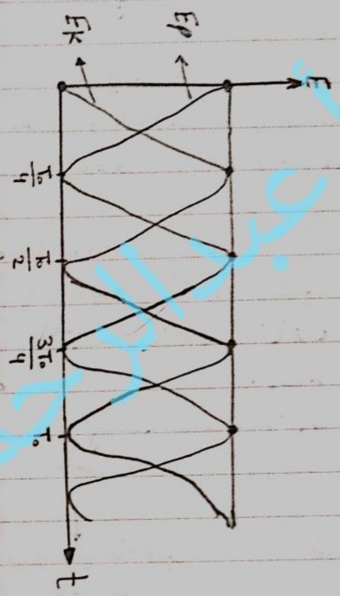
نشتق التابع مرتين بالنسبة للزمن:

$$(x)'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(x)''_t = -\omega_0^2 \underbrace{X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{x}$$

$$\Rightarrow (x)''_t = -\omega_0^2 \cdot x \quad \text{②}$$

• ارسم تغيرات الطاقة خلال دور...



مثال: تتساوى الطاقة الكامنة و الطاقة الحركية
في النواس المرن عندما:

a. $\bar{x} = \mp X_{max}$ b. $\boxed{\bar{x} = \mp \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}}$ c. $\bar{x}$

مثال: تكون الطاقة الحركية للجسم عند المطال $\bar{x} = -\frac{X_{max}}{2}$:

a. $E_K = \frac{1}{4}E$ b. $\boxed{E_K = \frac{3}{4}E}$ c. $E_K = E$

• برهن أن $v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

بالمقارنة بين ① و ② نجد :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

لأن k و m موجبان

حركة النواس المرن جيبية انسحابية توافقية بسيطة

ثم استنتج الدور الخاص للنواس المرن

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

الدور الخاص للنواس المرن : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

طرداً مع $\sqrt{m}$ ، عكساً مع $\sqrt{k}$ ، ليس له علاقة بـ X_{max}

- $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$
- زمن الهزات / عدد الهزات $= T_0$

الشكل العام لتابع المطال

$$X = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- X : مطال (m)
- X_{max} : السعة القصوى (m)
- ω_0 : النبض الخاص $(Rad.s^{-1})$
- φ : الطور الابتدائي في لحظة بدء (Rad)
- $\omega_0 t + \varphi$: طور الحركة في لحظة (Rad)

مثال : نواس مرن تابعه

$$X = 0.1 \cos(\pi t + \pi)$$

1. حدد ثوابت الحركة.

بالمقارنة مع الشكل العام لتابع المطال :

$$X = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$X_{max} = 0.1\ m$

$\omega_0 = \pi\ rad.s^{-1}$

$\varphi = \pi\ rad$

2. دور الحركة.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ s$$

3. حدد موضع الجسم لحظة البدء $t = 0$ ، $x = ?$

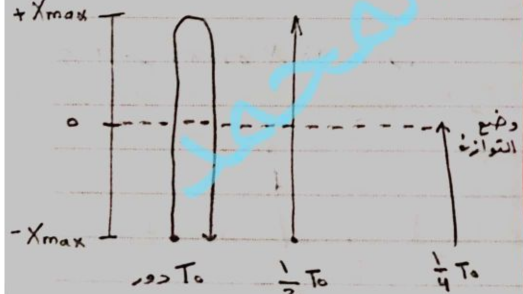
$$t = 0 \Rightarrow x = 0.1 \cos(\pi(0) + \pi)$$

$$x = 0.1 \cos(\pi)$$

$$x = 0.1(-1)$$

$$x = -0.1\ m$$

الدور : هو زمن هزة واحدة



مثال : 2020

نواس مرن يبدأ حركته من المطال الأعظمي الموجب فيستغرق زمناً قدره 1 s حتى يصل إلى المطال الأعظمي السالب فإن دوره :

1 - $\frac{1}{2}$ - $\boxed{2}$ - 4

$$1\ s = \frac{1}{2} T_0$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\ s$$

Nehad S A B B A G H

مثال :

نواس مرن يبدأ حركته من المطال الأعظمي الموجب فيستغرق زمناً مقداره 2s حتى يصل إلى المطال الأعظمي السالب فإن دوره :

1 - 2 - $\boxed{4}$ - 5

$\frac{1}{2}T_0 = 2\,s$

$\Rightarrow T_0 = 4\,s$

توابع النواس المرن :

تابع المطال

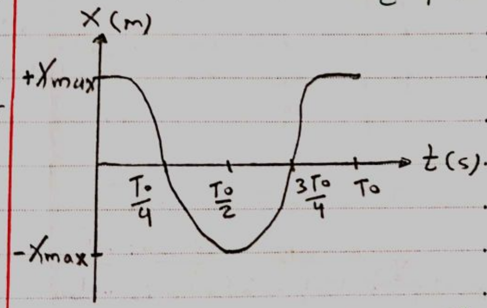
1. انطلاقاً من العلاقة

$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

حدد متى يكون :

- أعظمي : في المطالين الأعظميين $x = \pm X_{max}$
- معدوم : في وضع التوازن $x = 0$

2. ارسم تابع المطال خلال دور.



3. أكمل الجدول

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$

نعوّض في التابع :

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$x = X_{max}\cos(\frac{2\pi}{T_0}t)$

$t = \frac{T_0}{4} \Rightarrow x = X_{max}\cos(\frac{2\pi}{T_0}\times\frac{T_0}{4})$ (2)

$x = X_{max}\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$t = \frac{3T_0}{2}$ حدد قيمة المطال في اللحظة ...

الحل : نعوّض في التابع :

$x = X_{max}\cos(\frac{2\pi}{T_0}t)$

$x = X_{max}\cos(\frac{2\pi}{T_0}\times\frac{3T_0}{2})$

$x = X_{max}\cos(3\pi)$

$x = X_{max}(-1) = -X_{max}$

تابع السرعة

انطلاقاً من العلاقة

$x = X_{max}\cos(\omega_0 t)$

استنتج تابع السرعة

تابع السرعة: المشتق الأول لتابع المطال بالنسبة للزمن $v = (x)'_t$

$v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t)$

• السرعة

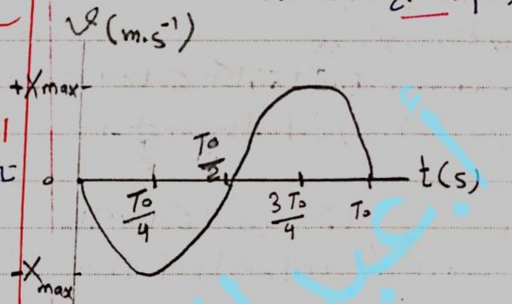
عظمى : في وضع التوازن $x = 0$

معدومة : في المطالين الأعظميين $x = \mp X_{max}$

السرعة عظمى طويلة $v_{max} = |\pm\omega_0 X_{max}|$

تابع السرعة

• ارسم التابع خلال دور



• أكمل الجدول :

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
v	0	$-\omega_0 X_{max}$	0	$+\omega_0 X_{max}$	0

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

نعوض في تابع السرعة :

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$t = \frac{T_0}{2} \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{T_0}{2}\right)$$

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin(\pi) = 0$$

$$t = \frac{T_0}{4} \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4}\right)$$

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$v = -\omega_0 X_{max}$$

• حدد قيمة السرعة وجهة الحركة في اللحظة

$$t = \frac{5T_0}{4}$$

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{5T_0}{4}\right)$$

$$v = -\omega_0 X_{max} \underbrace{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}_{+1}$$

$$v = -\omega_0 X_{max}$$

مع جهة الحركة في الاتجاه السالب

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

تابع التسارع

انطلاقاً من العلاقة :

$$x = X_{max} \cos(\omega_0 t)$$

1. استنتج تابع التسارع.

تابع التسارع هو المشتق الثاني لتابع المطال بالنسبة للزمن

$$a = (x)''_t$$

$$(x)'_t = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t)$$

$$(x)''_t = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t)$$

$$\Downarrow$$

$$a = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t)$$

→ التابع الزمني للتسارع

x

تابع التسارع $a = -\omega_0^2 \cdot x$

التسارع

أعظمي "طويلة"	معدوم
عندما $x = \mp X_{max}$	عندما $x = 0$
في المطالين الأعظميين	في وضع التوازن
	$a = 0$

• التسارع أعظمي طويلة

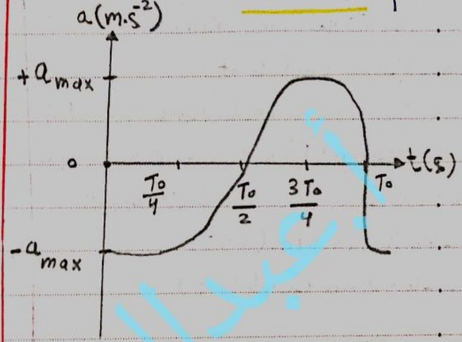
$$a_{max} = |\mp \omega_0^2 \cdot X_{max}|$$

• هل التسارع ثابت أم متغير ؟

$$a = -\omega_0^2 \cdot x$$

التسارع متغير يتغير بتغير المطال .

• ارسم تابع التسارع خلال دور واحد



• أكمل الجدول.

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
0	$-\omega_0^2 X_{max}$	0	$+\omega_0^2 \cdot X_{max}$	0	$-\omega_0^2 \cdot X_{max}$

قوانين النواس المرن.

1.. قوة الإرجاع (N)

$F = -K \cdot x$

2.. شدة الإرجاع (N)

$F = |-K \cdot x|$

3.. النبض الخاص $(rad.s^{-1})$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \;/\; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

4.. الدور الخاص (s)

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

5.. تابع المطال (m)

$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

6. تابع السرعة $(m.s^{-1})$

$v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$

7. تابع التسارع $(m.s^{-2})$

$a = -\omega_0^2 \cdot x$

8. السرعة العظمى "طويلة" $(m.s^{-1})$

$v_{max} = \omega_0 \cdot X_{max}$

9. الطاقة الكامنة (J)

$E_p = \frac{1}{2}K \cdot x^2 \;/\; E = E_p + E_k \Rightarrow E_p = E - E_k$

10. الطاقة الحركية (J)

$E_k = \frac{1}{2}m \cdot v^2 \;/\; E = E_p + E_k \Rightarrow E_k = E - E_p$

11. الطاقة الكلية (الميكانيكية) (J)

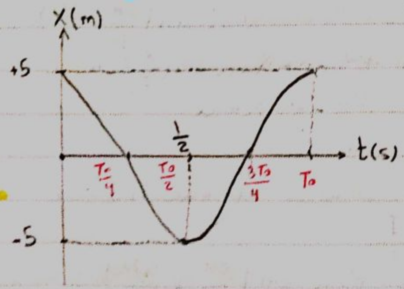
$E_{tot} = E_p + E_k \;/\; E_{tot} = \frac{1}{2}K X_{max}^2$

قراءة الخطوط البيانيّة في النواس المرن

لقراءة الخط البياني لتابع في النواس المرن نحتاج

- اسم المحور
- السعة العظمى
- الدور
- لحظة البدء

أمثلة عن قراءة الخط البياني



الحل بالتفصيل:

- اسم المحور: x
- السعة العظمى: $X_{max} = +5\ m$
- الدور الخاص:

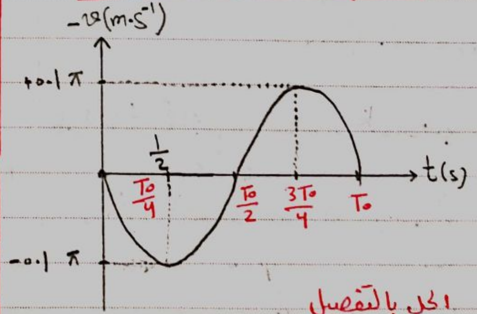
$$\frac{T_0}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2T_0 = 2 \Rightarrow T_0 = 1\ s$$

- النبض الخاص: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$
- الـ φ تابع المطال (x)

الرسم من فوق: $\varphi = 0$ — الرسم من تحت: $\varphi = \pi$

- في هذه الحالة الرسم من فوق $\Leftarrow \varphi = 0$

$$X = 5\cos(2\pi t + 0)\ m$$



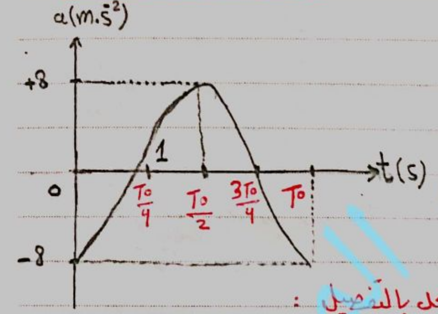
الحل بالتفصيل

يجب أن نعلم أن تابع السرعة مرتبط بـ $-\sin$

- اسم المحور: $-v$
- السعة العظمى: -0.1π
- الدور الخاص: $\frac{T_0}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_0 = 2\ s$
- النبض الخاص: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad.s^{-1}$
- الـ φ تابع السرعة ($-v$)

دائماً صفر

$$v = -0.1\pi \sin(\pi t)$$



الحل بالتفصيل:

- اسم المحور: a
- السعة العظمى: -8
- الدور الخاص: $\frac{T_0}{4} = 1 \Rightarrow T_0 = 4\ s$
- النبض الخاص: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ rad.s^{-1}$
- الـ φ تابع التسارع (a)

الرسم من فوق: $\varphi = \pi$ — الرسم من تحت: $\varphi = 0$

- في هذه الحالة الرسم من تحت $\Leftarrow \varphi = 0$

$$a = -8\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

مثال هام :

يتألف نواس مرن من جسم صلب كتلته m معلق بنابض مرن مهمل الكتلة ثابت صلابته k، النبض الخاص لحركته ω_0 نستبدل بالجسم جسماً آخر كتلته $m' = 2m$ وبالنابض نابضاً آخر صلابته $k' = \frac{1}{2}k$ فيصبح النبض الخاص الجديد ω_0' :

النبض القديم $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

النبض الجديد $\omega_0' = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}k}{2 \times 2m}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}k}{m}}$

$$\omega_0' = \frac{1}{2}\omega_0 \Rightarrow \omega_0' = \frac{\omega_0}{2}$$

مثال :

نواس مرن دوره الخاص $T_0 = 2\,s$، إذا ضاعفنا سعة الاهتزاز يصبح دوره الخاص الجديد T_0'

لا علاقة للدور بسعة الاهتزاز X_{max}

$$\Rightarrow T_0' = 2\,s$$

ملاحظات هامة للمسائل

1. إذا رسم النواس المرن في أثناء حركة قطعة مستقيمة طولها d فإن $X_{max} = \frac{d}{2}$
2. الزمن من المطال الأعظمي إلى المطال المناظر له يساوي $\frac{T_0}{2}$
3. المسافة من المطال الأعظمي إلى المطال المناظر له $2X_{max}$
4. إذا عوضنا $k=0$ لحساب لحظة المرور الأول للجسم في مركز الاهتزاز ونتج زمن سالب فإننا نرفضه ونعوض

لحظة المرور الأول بتعويض $k=1$

5. عندما يُترك الجسم من أحد المطالين الأعظميين $\mp X_{max}$ ويُطلب تعيين لحظة المرور فإننا نطبق أزمنة المرور مباشرة

$t_1 = \frac{T_0}{4}$

$t_2 = \frac{3T_0}{4}$

$t_3 = \frac{5T_0}{4}$

6. عندما لا يُترك الجسم من المطالين الأعظميين $\mp X_{max}$

نعدم x ثم نعدم $\cos$

ونعوض قيم k

المرور الأول : $k=0$

〃 الثاني : $k=1$

〃 الثالث : $k=2$

7. قانون حساب شدة محصلة القوى العظمى

دورة 2021

$$F_{max} = m \cdot a_{max}$$

$$a_{max} = \omega_0^2 \cdot X_{max}$$

8. إذا تُرك الجسم من المطال الأعظمي السالب

$\Leftarrow \varphi = \pi$

إذا تُرك الجسم من المطال الأعظمي الموجب

$\Leftarrow \varphi = 0$

انتهى بتاريخ 2024/3/1

3:17 PM

عبد الرحمن المحمد

Dr. Rawan shareef

• العلاقة بين الحركة الدائرية المنتظمة والحركة التوافقية البسيطة.

عندما تتحرك نقطة P بحركة دائرية منتظمة فإن مسقطها يتحرك حركة توافقية بسيطة

• استنتج تابع المطال انطلاقاً من الحركة الدائرية المنتظمة.

نصف قطر الدائرة $r = X_{max}$

$$\cos\theta = \frac{x}{X_{max}}$$

$$x = X_{max}\cos(\theta)$$

لكن : $\theta = \omega_0 t + \varphi$

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

تابع المطال $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

النواس الفتل

التعريف:

جسم معلق من مركزه إلى سلك فتل شاقولي

ادرس تحريكياً النواس الفتل ثم برهن أن حركة النواس جيبية دورانية. 2020

القوى الخارجية المؤثرة:

$\vec{w}$ ثقل الجسم

$\vec{T}$ توتر السلك

عندما نُدير الساق بزاوية θ تنشأ في السلك مزدوجة فتل $\vec{\gamma}$

مجموع العزوم ، عزم العطالة ، التسارع الزاوي

$$\sum\Gamma = I_\Delta \cdot \alpha$$

$$\Gamma_{\vec{w}} + \Gamma_{\vec{T}} + \Gamma_{\vec{\gamma}} = I_\Delta \cdot \alpha$$

$\Gamma_{\vec{w}} = 0$

$\Gamma_{\vec{T}} = 0$

لأن حامل كل منهما منطبقان على محور الدوران

$$\Gamma_{\vec{\gamma}} = -k \cdot \theta$$

$$0 + 0 - k\cdot\theta = I_\Delta \cdot \alpha$$

$$\alpha = -\frac{k}{I_\Delta}\cdot\theta$$

$\Downarrow$

$$(\theta)''_t = -\frac{k}{I_\Delta}\cdot\theta \quad ①$$

نشتق مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\theta)'_t = -\omega_0\,\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \cdot \underbrace{\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{\theta}$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \cdot \theta \quad ②$$

بالمطابقة بين ① و ② :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} > 0$$

لأن k و I_Δ موجبان

حركة نواس الفتل جيبية دورانية.

ثم استنتج الدور الخاص

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

يتناسب طرداً مع $\sqrt{I_\Delta}$ وعكساً مع $\sqrt{k}$ ولا يتعلق بسعة الاهتزاز X_{max}

Nehad

● انطلاقاً من مصونية الطاقة الميكانيكية برهن أنّ حركة النواس الفتل حركة جيبيّة دورانيّة.

$$E = E_p + E_k$$

$$E = \frac{1}{2}k\cdot\theta^2 + \frac{1}{2}I_\Delta\cdot w^2$$

بالإشتقاق:

$$0 = \frac{1}{2}k\,2\theta.(\theta)'_t + \frac{1}{2}I_\Delta\,2w.(w)'_t$$

$$0 = \frac{1}{2}k\,2\theta.(w) + \frac{1}{2}I_\Delta\,2w(\alpha)$$

$$0 = k\,\theta\,w + I_\Delta\,w\,\alpha$$

$$0 = k\theta + I_\Delta.\alpha \Leftarrow (\div w)$$

$$-k.\theta = I_\Delta.\alpha$$

$$\alpha = -\frac{k}{I_\Delta}.\theta$$

$$\Downarrow$$

$$(\theta)''_t = \frac{-k}{I_\Delta}.\theta \quad \ldots (1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\theta = \theta_{max}\cos(w_0t+\varphi)$$

نشتق مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\theta)'_t = -w_0\,\theta_{max}\sin(w_0t+\varphi)$$

$$(\theta)''_t = -w_0^2.\underbrace{\theta_{max}\cos(w_0t+\varphi)}_{\theta}$$

$$\Rightarrow (\theta)''_t = -w_0^2.\theta \quad \ldots (2)$$

بالمطابقة بين (1) و(2):

$$w_0^2 = \frac{k}{I_\Delta} \Rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} > 0$$

لأن k و I_Δ موجبان

حركة نواس الفتل جيبية دورانيّة

قوانين نواس الفتل

النواس المرن: $x \quad v \quad a \quad F \quad m$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

النواس الفتل: $\theta \quad w \quad \alpha \quad \Gamma \quad I_\Delta$

1. عزم الإرجاع: $\Gamma = -k.\theta$
2. النبض الخاص: $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ / $w_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}$
3. الدور الخاص: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$
4. تابع المطال الزاوي:
$\theta = \theta_{max}\cos(w_0t+\varphi)$
5. تابع السرعة الزاوية:
$w = -w_0\,\theta_{max}\sin(w_0t+\varphi)$
6. السرعة القصوى طويلة:
$W_{max} = w_0\,\theta_{max}$
7. تابع التسارع الزاوي:
$\alpha = -w_0^2.\theta$
8. الطاقة الكامنة المرونية: $E_p = \frac{1}{2}k.\theta^2$
9. الطاقة الحركية: $E_k = \frac{1}{2}I_\Delta.w^2$
10. الطاقة الكلّية:
$E = E_p + E_k$ / $E = \frac{1}{2}k.\theta^2_{max}$

انتهى بتاريخ 2024/3/2
12:29 AM
عبدالرحمن الحمد

Dr.Rawan Shareef

النواس الثقلي

النواس الثقلي البسيط

1. عرّف النواس البسيط نظرياً وعملياً ثم انطلاقاً من علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي المركب استنتج الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط.

• نظرياً: نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها على بعد ثابت l من محور أفقي ثابت

• عملياً: كرة صغيرة كتلتها m كثافتها النسبية كبيرة معلقة بخيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله l كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة.

• $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}}$

$d = l$

$I_\Delta = m \cdot r^2 = m \cdot l^2$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{m} \cdot l^{\cancel{2}}}{\cancel{m} \cdot g \cdot \cancel{l}}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط

2. انطلاقاً من العلاقة:

$$(\theta)''_t = \frac{-g}{l} \cdot \theta$$

برهن أن حركة النواس الثقلي البسيط جيبية دورانية.

$(\theta)''_t = \frac{-g}{l} \cdot \theta$ ...(1)

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

نشتق مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\theta)'_t = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \cdot \underbrace{\theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)}_{\theta}$$

$$\Rightarrow (\theta)''_t = -\omega_0^2 \cdot \theta \quad ...(2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2):

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \xRightarrow{\text{بالجذر}} \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$$

طبيعة حركة النواس الثقلي البسيط جيبية دورانية بشرط أن g و l موجبان.

■ ثم استنتج الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

يتناسب الدور الخاص طرداً مع الجذر التربيعي لـ l وعكساً مع الجذر التربيعي لـ g ..

3. استنتج علاقة سرعة كرة النواس الثقلي البسيط عندما يصنع الخيط مع الشاقول ($\theta_2 = 0$) زاوية θ علماً أنه ترك دون سرعة ابتدائية ($E_{K1} = 0$) بعد إزاحة بزاوية θ_{max}؟

القوى الخارجية المؤثرة: $\vec{W}$ ثقل الجسم، $\vec{T}$ توتر الخيط

• نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$

الثاني: $\theta_2 = 0$

$\Delta E_K = \sum W_{\vec F(1\to 2)}$

$E_{K_2} - \cancel{E_{K_1}} = \cancel{W_{\vec T}} + W_{\vec W}$

0 لأنه ترك دون سرعة ابتدائية

0 لأن T عامد الانتقال في كل لحظة

$\frac{1}{2} m v^2 = m g h$

نعوض الفرق بـ (2):

$v^2 = 2gh \xRightarrow{\text{نجذر}} v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl[\cos\theta_2 - \cos\theta_1]}$

$h = l[\cos\theta_2 - \cos\theta_1]$

لكن: عند المرور بالشاقول:

$\theta_2 = 0$ ، $\theta_1 = \theta_{max}$

$\theta_2 = 0 \Rightarrow \cos\theta_2 = 1$

$v = \sqrt{2gl[1 - \cos\theta_{max}]}$

4- استنتاج علاقة توتر الخيط في النواس الثقلي البسيط عندما يصنع الخيط الشاقول بزاوية θ.

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الإنسحابي:

القوى الخارجية المؤثرة:

$\vec W$ ثقل الجسم

$\vec T$ توتر الخيط

$\sum \vec F = m \vec a$

$\vec W + \vec T = m \vec a$

بالإسقاط على الناظم:

$T - W\cos\theta = m a_c$

تسارع ناظمي $a_c = \frac{v^2}{l}$

$T = W\cos\theta + m\frac{v^2}{l}$

$T = m g\cos\theta + \frac{m}{l}\left(2gl[\cos\theta - \cos\theta_{max}]\right)$

$T = mg\cos\theta + 2mg(\cos\theta - \cos\theta_{max})$

$T = 1mg\cos\theta + 2mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max}$

$T = 3mg\cos - 2mg\cos\theta_{max}$

$T = 1mg[3\cos\theta - 2\cos\theta_{max}]$

عند المرور بالشاقول: $\theta = 0$

$T = mg[3 - 2\cos\theta_{max}]$

ملاحظات وقوانين النواس البسيط

1 نزيح بزاوية θ_{max} استنتج السرعة الخطية v عند المرور بالشاقول.

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$

الثاني: $\theta_2 = 0$

$\Delta E_K = \sum W_{\vec F(1\to 2)}$

$E_{K_2} - \cancel{E_{K_1}} = \cancel{W_{\vec T}} + W_{\vec W}$

0 لأنه ترك دون سرعة ابتدائية

0 لأن T تعامد الانتقال في كل لحظة

نعوض بـ (2)

$\frac{1}{2} \cancel{m} v^2 = \cancel{m} g h \Rightarrow$

$h = l[1 - \cos\theta_{max}]$

$v^2 = 2gh$

$v = \sqrt{2gl[1 - \cos\theta_{max}]}$

قوة

2 استنتج بالرموز علاقة توتر الخيط $\vec T$ عند المرور بالشاقول

جملة المقارنة خارجية

الجملة المدروسة: كرة النواس

القوى الخارجية المؤثرة: $\vec{W}$ ثقل الجسم

$\vec{T}$ توتر الخيط

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي:

$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$

$\vec{T} + \vec{W} = m.\vec{a}$

بالإسقاط على الناظم:

$T - W = m.a_c$

$T = W + m.a_c$

$T = m.g + m.\frac{v^2}{r}$; $r = l$

نيوتن $\Leftarrow$ $T = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right)$

3 استنتج التسارع المماسي a_t عندما θ؟

$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$

$\vec{T} + \vec{W} = m.\vec{a}$

1. سم مماسي!

يعني $\Leftarrow$ بالإسقاط على المماس:

$0 + W\sin\theta = m.a_t$

$m.g\sin\theta = m.a_t$

$m.s^{-2} \Leftarrow a_t = g.\sin\theta$

القوانين:

1 الدور الخاص: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ s

2 قانون h:

$h = l(1 - \cos\theta_{max})$

يستخدم لحساب θ عند المرور بالشاقول

وهي نقطة θ_{max}

3 التسارع الزاوي:

$\alpha = \frac{a_t}{l}$ $rad.s^{-2}$

4 أحسب طول النواس الثقلي البسيط المواقت:

T_0 مركب $= 2$ ∴ T_0 بسيط $= T_0$ مركب

$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2$

$\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{l}{\cancel{10}}} = \cancel{2} \Rightarrow \sqrt{l} = 1 \Rightarrow l = 1$

النواس الثقلي المركب

1 انطلاقاً من العلاقة $(\theta)''_t = \frac{-m.g.d}{I_\Delta}.\theta$

برهن أن حركة النواس الثقلي المركب حركة جيبية دورانية.

$(\theta)''_t = \frac{-mgd}{I_\Delta}.\theta$ ---(1)

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

نشتق مرتين بالنسبة للزمن:

$(\theta)'_t = -\omega_0\,\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$

$(\theta)''_t = -\omega_0^2\,\underbrace{\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{\theta}$

$\Rightarrow (\theta)''_t = -\omega_0^2.\theta$ ---(2)

بالمطابقة بين (1) و (2):

$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta} \xRightarrow{\text{نجذر}} \omega_0 = \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}} > 0$

طبيعة حركة النواس الثقلي جيبية دورانية.

2 استنتج الدور الخاص.

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}}$

$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}$

Nehad

ملاحظات وقوانين النواس المركّب

- السعات الصغيرة :

$\theta \leq 14^\circ$ أو $\theta \leq 0.24\,rad$

- السعات الكبيرة :

$\theta > 14^\circ$ أو $\theta > 0.24\,rad$

$\theta = 30, 45, 60, 90$ ؛ زوايا شهيرة سعات كبيرة

- الدور في حال السعات الصغيرة :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}}$$

- الدور في حال السعات الكبيرة :

$$\underset{\text{سعة كبيرة}}{T_0'} = \underset{\text{سعة صغيرة}}{T_0}\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$$

- التابع الزمني للمطال الزاوي :

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- تابع السرعة الزاوية :

$$\bar{\omega} = -\omega_0\,\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

- السرعة العظمى طويلة :

$$\omega_{max} = \omega_0 \cdot \theta_{max}$$

- ساق مهملة الكتلة :

$I_{\Delta/c\,\text{ساق}} = 0$ $\quad m_{\text{ساق}} = 0$

- قرص مهمل الكتلة :

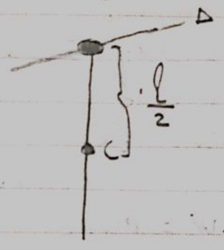
$I_{\Delta/c\,\text{قرص}} = 0$ $\quad m_{\text{قرص}} = 0$

- حساب d

$d = \underset{\text{بُعد}}{O}\,\underset{\text{مركز عطالة الجملة}}{C}$

النقطة التي تمر منها محور الدوران

1 من الرسم مباشرةً :



$$d = \frac{l}{2}$$

$$d = r$$

2 بوجود كتل نقطيّة :

قانون :

$$d = \frac{\sum m_i \cdot r_i}{\sum m_i}$$

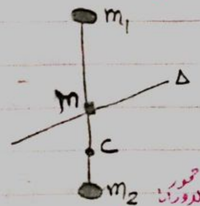
m_i : مجموع الكتلة المكوّنة للنواس

i : عدد الكتل النقطيّة

r_i : (بُعد m عن O)

- $(+)$ إذا كانت الكتلة تحت محور الدوران

- $(-)$ إذا كانت الكتلة فوق محور الدوران



$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{m_{\text{ساق}} \cdot r - m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_2}{m_{\text{ساق}} + m_1 + m_2}$$

فوق محور الدوران

تحت محور الدوران

• حساب I_Δ

$\boxed{1}$ عندما محور Δ لا يمر من c

نطبق هايغنز

هايغنز $I_\Delta = I_{\Delta/جسم} + m \cdot d^2$

جسم

$$\begin{cases} \text{ساق: } I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} m \ell^2 \\ \text{قرص: } I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} m r^2 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ يمر من c بوجود كتل نقطية

$$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/جسم} + \underbrace{I_{\Delta/m_1}}_{نقطية} + \underbrace{I_{\Delta/m_2}}_{نقطية}$$

I_Δ الجسم

- هايغنز
- $I_\Delta =$ معطى (ساق/قرص)
- مهملة $I_\Delta = 0$

نزيح (نحرف) النواس (الجملة) عن وضع توازنها الشاقولي θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائية.

$\boxed{1}$ استنتج السرعة الزاوية/الخطية لحظة المرور بالشاقول θ_{max}.

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$

$\theta_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}(1 \to 2)}$$

$$E_{K_2} - \cancel{E_{K_1}} = W_{\vec{w}} + \cancel{W_{\vec{R}}}$$

0 تركت دون سرعة ابتدائية

0 لأن نقطة تأثير R لا تنتقل،

$$\frac{1}{2} I_\Delta \cdot \omega^2 = m \cdot g \cdot h$$

$\theta_{max} =$ معطى ، $\omega = ?$

$$\omega^2 = \frac{m \cdot g \cdot h}{\frac{1}{2} I_\Delta} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2m \cdot g \cdot d[1 - \cos\theta]}{I_\Delta}}$$

I_Δ و d و m من طلب الدور

$\boxed{2}$ استنتج قيمة θ_{max}

$\omega =$ معطى ، $v =$ معطى ، $\theta_{max} = ?$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}(1 \to 2)}$$

$$E_{K_2} - \cancel{E_{K_1}} = \cancel{W_{\vec{R}}} + W_{\vec{w}}$$

0 تركت دون سرعة ابتدائية

0 لأن نقطة تأثير R لا تنتقل

$$\frac{1}{2} I_\Delta \cdot \omega^2 = m \cdot g \cdot h$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \cdot \omega^2 = m \cdot g \cdot d [1 - \cos\theta_{max}]$$

$$1 - \cos\theta_{max} = \frac{\frac{1}{2} I_\Delta \cdot \omega^2}{m \cdot g \cdot d}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{\frac{1}{2} I_\Delta \cdot \omega^2}{m \cdot g \cdot d}$$

1. نواس ثقلي مركب

• يطلب سرعة خطية

- للكتلة النقطية: $v = \omega . r$
- لمركز عطالة الساق: $v = \omega . d$

r بعد الكتلة عن المحور

2. نواس ثقلي بسيط

- طاقة حركية
- سرعة خطية
- سعة زاوية θ_{max}

نطبق نظرية الطاقة الحركية

3. الاسقاط على الناظم

- $T \rightarrow T$
- $W \rightarrow -m.g\cos\theta$
- $a \rightarrow a_c = \frac{v^2}{l}$

4. الاسقاط على المماس:

- $T \rightarrow$ صفر 0
- $W \rightarrow -m.g\sin\theta$
- $a \rightarrow a_t = \alpha . l$

5.

- سعات زاوية صغيرة ← حركة جيبية دورانية
- سعات زاوية كبيرة ← حركة اهتزازية غير توافقية

6. الميقاتية

جبل (مكان مرتفع)

بحر (منخفض)

ارتفاع

انخفاض

(ميقاتية تؤخر)

$g' < g \Rightarrow T_0' > T_0$

جديد قديم جديد قديم

(ميقاتية تقدم)

$g' > g \Rightarrow T_0' < T_0$

7. النواس الثقلي

بسيط

- خيط / سلك
- يطلب سرعة خطية v
- القوى المؤثرة $\vec{T}$ و $\vec{W}$

مركب

- ساق / قرص
- يطلب سرعة زاوية ω
- القوى المؤثرة $\vec{W}$ و $\vec{R}$

#فريق_معجزة_التعليمي

Dr. Rawan Shareef

أ. عبدالرحمن محمد المحمد

انتهى بتاريخ

2024/5/22