الجلسة الامتحانية في الرياضيات

تتضمن شرح شامل للأفكار

Online

م. الحر بشار ابراهيم

بالاشتراك مع

فريق الأفق التعليمي

للتواصل والاستفسار:
0932919655

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ $ax^2 + bx + c = 0$ $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$

الجلسة الامتحانية في الرياضيات

النهايات والاشتقاق

تتضمن شرح شامل للأفكار

Online

م. الحر بشار ابراهيم

بالاشتراك مع

فريق الأفق التعليمي

للتواصل والاستفسار:

0932919655

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ $ax^2+bx+c=0$ $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

السؤال الأول :
أوجد نهايات كل من التوابع الآتية :

1) $f(x)=\dfrac{4-4\cos 3x}{x^2}$ عند (0)

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{4-4\cos 3x}{x^2}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

$$f(x)=\frac{4(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)}$$

$$=\frac{4\sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}=9\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{4}{1+\cos 3x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=9(1)\left(\frac{4}{2}\right)=18$$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^3-7}-3}{x-2}$ عند (2)

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

$$f(x)=\frac{(\sqrt{2x^3-7}-3)(\sqrt{2x^3-7}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x^3-7}+3)}$$

$$=\frac{2x^3-16}{(x-2)(\sqrt{2x^3-7}+3)}$$

$$=\frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(\sqrt{2x^3-7}+3)}$$

$$=\frac{2(x^2+2x+4)}{\sqrt{2x^3-7}+3}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{24}{6}=4$$

السؤال الثاني :
f هو تابع معرف على R وفق :

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x\sin x+\sin^2 x}$$

$$f(x)=\sqrt{(x+\sin x)^2}=|x+\sin x|$$

$$-1\leq \sin x\leq 1$$

$$x-1\leq x+\sin x\leq x+1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$$

$$\Leftarrow\quad \lim_{x\to+\infty}(x+\sin x)=+\infty$$

وذلك حسب مبرهنة الإحاطة

السؤال الثالث :
ليكن لدينا التابع f المعرف على R_+ وفق :

$$f(x)\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} : & x\in[0,1[\cup]1,+\infty[\\ 2 : & x=1\end{cases}$$

المطلوب هل f مستمر عند (1) علل إجابتك

حتى يكون f مستمر عند (1) يجب أن يتحقق

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}=\sqrt{x}+1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2\quad,\quad f(1)=2$$

$\Leftarrow$ f مستمر عند (1) لأن $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ محققة

السؤال الرابع:

① برهن أن المعادلة: $x^2+\sqrt{x-1}-2$ تقبل حلا وحيدا في $[1,+\infty[$

② احصر حل المعادلة في مجال طوله يساوي واحد.

الحل

$f(x)=x^2+\sqrt{x-1}-2$

f معرف ومستمر على المجال $[1,+\infty[$ ولدينا

$f'(x)=2x+\frac{2}{2\sqrt{x-1}}>0$

فالتابع مطرد تماما على $[1,+\infty[$ (متزايد تماما)

و الشرط الأول محقق.

$f(1)=-1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f(1) \cdot \lim_{x\to 1} f(x)=0$

و الشرط الثاني محقق

فالمعادلة

$x^2+\sqrt{x-1}-2=0$

تقبل حلا وحيدا على المجال $[1,+\infty[$

حسب مبرهنة القيمة الوسطى

$f(2)=4+1-2=3$

$f(1)\cdot f(2)=-3<0$

إذن حل المعادلة ينتمي إلى المجال

$]1,2[$

ثانيا:

التمرين الأول:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$$

1) اكتب عبارة $f(x)$ بصورة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2[$

2) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$، استنتج

$\lim f(f(x))$

3) ادرس استمرارية التابع عند النقطة التي فاصلتها $x=1$

الحل

$$f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$$

1) $f(x)=\begin{cases} x & x\in[0,1[\\ 1+(x+1)^2 & x\in[1,2[\end{cases}$

$x-1<E(x)\le x$ ....①

② $x-1<E(x)<1-x$

$-x \le -E(x) \le 1-x$

$-x\le -E(x) < 1-x$

$0\le x-E(x)<1$

$0\le (x-E(x))^2<1$

$E(x)\le E(x)+(x+E(x))^2<1+E(x)$

②...

$E(x)\le f(x)<1+E(x)$ نقسم على x

$\frac{E(x)}{x}\le\frac{f(x)}{x}<\frac{1+E(x)}{x}$

وبالعلاقة (1) نجد:

$\frac{x-1}{x}<\frac{E(x)}{x}\le 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

من العلاقة (2) نجد

$$E(x) < f(x) \le 1+E(x)$$

ولدينا:

$$x-1 < E(x) \le x$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1) = \lim_{x\to+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} E(x) = +\infty$$

ومنه نجد

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} (E(x)) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (1+E(x)) = +\infty\end{array}\right] \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

حسب مبرهنة الإحاطة نستنتج أنّ:

$$\lim f(f(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(t) = +\infty$$

$\lim f(x) = f(1)$ يجب تحقق الشرط

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow f(1) = 1+(1-1)^2 = 1$$

التابع مستمر عند (1)

التمرين الثاني:

1) عيّن m ليكون التابع f المعرف مستمراً على مجموعة تعريفه:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & x \le 1 \\ 2x^2-mx & x > 1 \end{cases}$$

2) عيّن a, b علماً أنّ f مستمر على R

$$f(x) = \begin{cases} 4ax-3: & x > 6 \\ b+x^2: & x < 6 \\ 0: & x = 6 \end{cases}$$

حل1

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & x \le 1 \\ 2x^2-mx & x > 1 \end{cases}$$

التابع f مستمر على المجالين $]1,+\infty[$, $]-\infty,1[$ وحتى يكون مستمراً على R يجب أن يكون مستمراً عند الواحد أي يجب تحقق الشرط

$$\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(2x^2-mx) = 2-m$$

$$f(1) = 3(1)-2 = 1$$

$$\Rightarrow 2-m = 1$$
$$\Rightarrow m = 1$$

حل2

$$f(x) = \begin{cases} 4ax-3 & x > 6 \\ b+x^2 & x < 6 \\ 0 & x = 6 \end{cases}$$

f مستمر على R فهو مستمر عند 6

$$\lim_{x\to6^-} f(x) = b+36$$

$$f(6) = 0$$

$$\lim_{x\to6^+} f(x) = 24a-3$$

f مستمر عند $x=6$ لما

$$\lim_{x\to6} f(x) = f(6)$$

$$b+36=0 \Rightarrow b=-36$$

$$-3+24a=0 \Rightarrow a=\frac{1}{8}$$

التابع هو:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x-3 & x > 6 \\ -36+x^2 & x < 6 \\ 0 & x = 6 \end{cases}$$

التمرين الثالث:

إذا كان $|f(x)+3| \leq \frac{x+\cos x}{x^2+1}$

احسب: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\cos x}{x^2+1}\right)$

واستنتج: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\cos x}{x^2+1}\right) = \frac{+\infty+\cos(+\infty)}{+\infty+1}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$x-1 \leq x+\cos x \leq x+1$$

نقسم على $x^2+1>0$

$$\frac{x-1}{x^2+1} \leq \frac{x+\cos x}{x^2+1} \leq \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = 0$$

$\Leftarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\cos x}{x^2+1}\right) = 0$$

وذلك حسب مبرهنة الإحاطة

$$|f(x)+3| \leq \frac{x+\cos x}{x^2+1}$$

$$|f(x)-\ell| \leq g(x)$$

ووجدنا أن

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\cos x}{x^2+1}\right) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (2): $\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell = -3$$

ثالثاً:

حل المسألة الآتية:

ليكن التابع $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$

1) أوجد نهاية التابع f عند $-\infty$, $+\infty$

2) a- اكتب بالصيغة القانونية $4x^2-4x+3$

b- ادرس نهاية التابع $h(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$ عند $-\infty$, $+\infty$

c- استنتج أن C يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ وآخر في جوار $-\infty$

3) ابحث أن C فوق المقاربين

الحل

1) $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

2) $4x^2-4x+3$

$4(x^2-x)+3$

$4\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+3$

$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+3$

$(2x-1)^2+2$

$f(x)=\sqrt{(2x-1)^2+2}$

$h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$ ط 3 b

$= \sqrt{(2x-1)^2+2} - \sqrt{(2x-1)^2}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim (\sqrt{(2x-1)^2+2} - \sqrt{(2x-1)^2}$

$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(2x-1)^2+2-(2x-1)^2}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}}$

$\lim \frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}} = 0$

$\sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{عند } +\infty \\ -2x+1 & \text{عند } -\infty \end{cases}$

بما أن:

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}) = 0$ ع

إذاً $y = 2x-1$ مقارب مائل
في جوار $+\infty$

$h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2} > 0$ ط3

لأن

$\sqrt{(2x-1)^2+2} > \sqrt{(2x-1)^2}$

إذاً C يقع فوق D_1 , D_2

الجلسة الامتحانية في الرياضيات

متتالية_نهاية متتالية

تتضمن شرح شامل للأفكار

Online

م. الحر بشار ابراهيم

بالاشتراك مع

فريق الأفق التعليمي

للتواصل والاستفسار:

0932919655

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ $ax^2 + bx + c = 0$ $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$

التمرين الأول: نتأمل المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق: $U_n = n(n!)$ ، المطلوب:

1- أثبت أن U_n تكتب بالشكل:

$$U_n = (n+1)! - n!$$

2- لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق:

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

أثبت أن

$$S_n = (n+1)! - 1$$

الحل:

$\boxed{1}$

$$U_n = (n+1)! - n$$
$$= (n+1)n! - n!$$
$$= n!(n+1-1)$$
$$= n(n!)$$

إذاً:

$$U_n = n(n!) = (n+1)! - n!$$

$\boxed{2}$ طريقة أولى:

$$E_n : S_n = (n+1)! - 1$$

$E(1)$ محققة لأن

$$S_1 = U_1 = 1$$
$$S_1 = 2! - 1 = 1$$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن $E(n+1)$:

من الفرض $S_n = (n+1)! - 1$

نضيف للطرفين U_{n+1}:

$$S_n + U_{n+1} = (n+1)! - 1 + U_{n+1}$$
$$S_{n+1} = (n+1)! - 1 + (n+2)! - (n+1)!$$
$$S_{n+1} = (n+2)! - 1$$

$E(n+1)$ محققة وبالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان $n \geq 1$

طريقة ثانية:

$$U_1 = 2! - 1!$$
$$U_2 = 3! - 2!$$
$$U_3 = 4! - 3!$$
$$\vdots$$
$$U_n = (n+1)! - n! \quad +$$

$$S_n = (n+1)! - 1$$

التمرين الثاني:

أثبت أن المتتاليتين المعرفتين وفق:

$$U_n = 1 - \frac{1}{n}$$

$$V_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$

متجاورتين ثم عين نهايتهما المشتركة

الحل:

التابع الممثل للمتتالية $U_n = 1 - \frac{1}{n}$

هو $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

ومتزايد تماماً لأن

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

فالمتتالية U_n متزايدة تماماً

التابع الممثل للمتتالية $V_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

هو $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

متناقص تماماً على المجال $]0,\infty[$ لأن:

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$$

فالمتتالية V_n متناقصة تماماً

$$\lim (U_n - V_n) = 1 - 1 = 0$$

فالمتتاليتين U_n و V_n

متجاورتين

ونهايتهما المشتركة 1

التمرين الثالث:

لتكن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$U_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$$

أثبت أن جميع الحدود محصورة

$$0 < U_n \leq 1$$

الحل:

أياً كان $n \geq 1$ فإن $n+1 \geq n$

$$\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0$$

$$U_n \geq 0 \quad \text{---} (1)$$

$$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 1$$

$$U_n \leq 1 \quad \text{---} (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$0 \leq U_n \leq 1$$

المتتالية من الشكل $U_n = f(x)$

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

ندرس تغيرات f على $[0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\,\sqrt{x}} < 0$$

لأن $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 $\searrow$	0

نلاحظ من جدول التغيرات أنه أياً كان x من $[0, +\infty[$ فإن $0 < f(x) \leq 1$

إذاً $0 \leq U_n \leq 1$

التمرين الرابع:

لتكن المتتاليتان $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$

$$U_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$V_n = U_n + \frac{1}{2^n}$$

1. أثبت أن (U_n) متزايدة و V_n متناقصة
2. استنتج أن المتتاليتان متجاورتان
3. أثبت أن $U_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

ثم احسب

$$\lim_{n\to+\infty} U_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n$$

الحل:

1. $U_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$$

إذاً U_n متتالية متزايدة تماماً.

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} < 0$$

عندما يكبر المقام يصغر الكسر لأن:

$$5^{n+1} > 2^{n+1}$$

$$\frac{1}{5^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}}$$

إذاً U_n متناقصة.

2. من العلاقة: $V_n = U_n + \frac{1}{2^n}$

$$V_n - U_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

لأن $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

$$-1 < \frac{1}{2} < 1$$

مما سبق نجد أن المتتاليتين متجاورتين.

3 لأن U_n هي متتالية مجموع n حدا من متتالية هندسية أساسها وحدها الأول $\frac{1}{5}$ إذا

$$U_n = \frac{1}{5}\,\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)\right] = \frac{1}{4}$$

لأن $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

$$-1 < \frac{1}{5} < 1$$

هي متقاربة من الصفر، بما أن (V_n) و (U_n) متجاورتان فإنه

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{4}$$

التمرين الخامس:

لديك المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$

$$U_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n}$$

1 أثبت بالتراجع أن $n \leq 2^n$

2 استنتج مما سبق أن 2 عنصر راجح على المتتالية

3 أثبت أن المتتالية متقاربة

الحل:

1 $n \geq 1$ $\quad E(n) : n \leq 2^n$

$E(1) : 1 \leq 2 \quad l_1 = l_2 = 2$

إذا $E(1)$ صحيحة

نفرض أن $E(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $E(n+1)$

$E(n+1) : n+1 \leq 2^{n+1}$

لدينا $E(n)$ صحيحة $n \leq 2^n$

$n \geq 1$

$$2n \leq 2^{n+1}$$

$$n+1 \leq n+n \leq 2^{n+1}$$

$$n+1 \leq 2^{n+1}$$

إذا $E(n+1)$ صحيحة ومنه $E(n)$ صحيحة

2 من 1 وجدنا $n \leq 2^n$

$$1 \leq 2^1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{2^1}{3}$$

$$2 \leq 2^2 \Rightarrow \frac{2}{3^2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$3 \leq 2^n \Rightarrow \frac{3}{3^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

مجموع المتراجحات السابقة:

$$U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

الطرف الثاني هو مجموع n حدا من متتالية هندسية أساسها وحدها الأول $\frac{2}{3}$

$$U_n \leq \frac{2}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}$$

$$U_n \leq 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$U_n \leq 2$$

إذا العدد 2 هو عنصر راجح على حدود المتتالية

3

$$U_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} > 0$$

إذا المتتالية U_n متزايدة تماما

هي محدودة من الأعلى بالعدد 2

فهي متقاربة.

التمرين السادس:

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{2U_n+1} \quad , \quad U_0 = \frac{1}{3}$$

1 أثبت أن المتتالية المعرفة بالعلاقة $V_n = \frac{1}{U_n}$ حسابية.

2 أكتب عبارة V_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

3 احسب بدلالة n المجموع:

$$S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n}$$

ثم احسب $\lim_{n \to +\infty} S_n$

الحل:

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{\frac{U_n}{2U_n+1}}$$

$$= \frac{2U_n+1}{U_n}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n+1}{U_n} - \frac{1}{U_n}$$

$$= \frac{2U_n}{U_n} = 2 \text{ Const}$$ ثابت

إذاً هي حسابية أساسها $r=2$

2

$$V_n = V_0 + nr$$

$$V_0 = \frac{1}{U_0} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

$$V_n = 3 + 2n$$

لدينا $V_n = \frac{1}{U_n} \Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n}$

$$U_n = \frac{1}{3+2n}$$

3

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

$$S_n = n\left(\frac{a+l}{2}\right)$$

عدد الحدود $n = n_0 + 1 = n+1$

$$S_n = \frac{(n+1)(3+3+2n)}{2} = \frac{(n+1)(6+2n)}{2n}$$

$$S_n = \frac{6n + 2n^2 + 6 + 2n}{2}$$

$$S_n = \frac{2n^2 + 8n + 6}{2} = n^2 + 4n + 3$$

التمرين السابع:

لتكن المتتالية العددية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي ومن $U_0=4$

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2n + 5 \quad (*)$$

1) عين تابعاً تآلفياً f بحيث تحقق المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ التي حدها العام $t_n = f(n)$ العلاقة التدريجية أي:

$$t_{n+1} = \frac{1}{2} t_n + 2n+5$$

2) نعرف المتتالية $(V_n)_{n\geq0}$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $V_n = U_n - t_n$

a) بين أن المتتالية V_n متتالية هندسية يطلب أساسها وحدها الأول.

b) اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

c) احسب المجموع:

$$S_n = U_0+U_1+\dots+U_n$$

الحل:

ليكن التابع f من الشكل

$t=f(n)$, $f(n)=an+b$

ويكون

$$t_{n+1} = f(n+1) = a(n+1)+b$$

نعوض في العلاقة التدريجية $(*)$ نجد:

$$a(n+1)+b = \frac{1}{2}(an+b)+2n+5 \Rightarrow$$

$$an+a+b-\frac{1}{2} an - \frac{1}{2} b - 2n - 5 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} a - 2\right)n + \left(a+\frac{1}{2} b - 5\right) = 0$$

وهي محققة أياً يكن n باختيار $n=0$, $n=1$

نستنتج جملة المعادلات:

$a+\frac{1}{2} b - 5 \Rightarrow 2a+b-10=0$ ... (1)

$\left(\frac{1}{2} a-2\right)+\left(a+\frac{1}{2} b-5\right)=0$ ... (2)

$\Rightarrow \frac{3}{2} a + \frac{1}{2} b - 7 = 0$

$\Rightarrow 3a+b-14=0$ ... (2)

بطرح (1) من (2) نجد:

$8+b-10=0 \Rightarrow b=2$, $a-4=0 \Rightarrow a=4$

ونتيقن أن اختيار القيم $a=4$, $b=2$ تجعل المساواة $\left(\frac{1}{2}a-2\right)n+\left(a+\frac{1}{2}b-5\right)=0$ محققة أياً تكن n ومن ثم تحقق المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ حيث $t_n=4n+2$ العلاقة التدريجية $(*)$

2)

a) لدينا

$U_{n+1}=\frac{1}{2} U_n+2n+5$, $V_n=U_n-t_n$

$$t_{n+1}=\frac{1}{2} t_n+2n+5$$

$$V_{n+1}=U_{n+1}-t_{n+1}$$

$$=\frac{1}{2} U_n+2n+5-\left(\frac{1}{2} t_n+2n+5\right)$$

$$=\frac{1}{2} U_n-\frac{1}{2} t_n=\frac{1}{2}(U_n-t_n)$$

$$V_{n+1}=\frac{1}{2} V_n$$

أي أن المتتالية $(V_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

وحدها الأول $V_0=U_0-t_0=4-2 \Rightarrow V_0=2$

وبالتالي نجد $V_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) لدينا $V_n=U_n-t_n$ ومنه $V_n=U_n-4n-2$

وبالتالي نجد $U_n=V_n+4n+2$

ومنه $U_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n+4n+2$

$$S_n=U_0+U_1+U_2+\dots+U_n$$

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$= v_0 + 4(0) + 2 + v_1 + 4(1) + 2 + v_2 + 4(2) + 2 \dots + v_n + 4(n) + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_n = v_0 + v_1 + v_1 + \dots v_n + 4(0+1+\dots) + \frac{2+2+2+\dots+2}{n+1}$

$S_n = \frac{2\times[1-(\frac{1}{2})^{n+1}]}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{(n+1)(0+n)+2(n+1)}{2}$

$= 4[1-(\frac{1}{2})^{n+1}] + 2n(n+1) + 2(n+1)$

$\Rightarrow S_n = 4[1-(\frac{1}{2})^{n+1}] + (2n+2)(n+1)$

التمرين الثامن:

ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$

المعرف على $I =]-2, +\infty[$

① أثبت أن التابع f متزايد تماماً على I

② a نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة التدريجية

$U_{n+1} = f(U_n)$

$U_0 = 0$

أثبت بالتدريج أن $U_n < U_{n+1} \leq 1$

ثم استنتج أن U_n متقاربة واحسب نهايتها

b نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة التدريجية

$v_0 = 2$, $v_{n+1} = f(v_n)$

أثبت بالتدريج أن $1 \leq v_{n+1} < v_n$

ثم استنتج أن v_n متقاربة واحسب نهايتها.

c هل المتتاليتين متجاورتين؟

علل ذلك.

① f معرف ومستمر على $]-2,+\infty[$

$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$

التابع f متزايد تماماً

② a

$U_{n+1} = f(U_n) = \frac{2U_n+1}{U_n+2}$, $U_0 = 0$

نفرض القضية $E(n): U_n < U_{n+1} \leq 1$

نثبت صحة العلاقة $E(0)$:

$U_0 = 0 < U_1 = \frac{1}{2} \leq 1$ محققة

نفرض صحة العلاقة $E(n)$:

$U_n < U_{n+1} \leq 1$

نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$:

$U_{n+1} < U_{n+2} \leq 1$

من الفرض $U_n < U_{n+1} \leq 1$

بما أن f متزايد تماماً فإن

$f(U_n) < f(U_{n+1}) \leq f(1)$

$U_{n+1} < U_{n+2} \leq 1$

محققة من أجل $n \geq 1$ أياً كان n عدد طبيعي

لدينا $U_n < U_{n+1}$ وبالتالي U_n متزايدة تماماً

لدينا $U_n \leq 1$ وبالتالي U_n محدودة من الأعلى

فهي متقاربة، نهايتها حل المعادلة $f(x)=$

التمرين التاسع:

نتأمل المتتاليتين $(X_n)_{n\geq 0}$ و $(Y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق:

$$\begin{cases} X_0 = 3 \\ X_{n+1} = \frac{1}{5}(4X_n + Y_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_0 = 5 \\ Y_{n+1} = \frac{1}{5}(X_n + 4Y_n) \end{cases}$$

1) اثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث $t_n = X_n - Y_n$ هندسية واكتب عبارة t_n بدلالة n ثم احسب نهايتها.

2) اثبت أن المتتاليتين $(X_n)_{n\geq 0}$ و $(Y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.

3) أثبت أن المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $W_n = X_n + Y_n$ ثابتة ثم استنتج أن المتتاليتين $(X_n)_{n\geq 0}$ $(Y_n)_{n\geq 0}$ متقاربتان من عدد l يطلب ايجاده.

الحل:

1) $t_{n+1} = X_{n+1} - Y_{n+1}$

$= \frac{1}{5}(4X_n + Y_n - X_n - 4Y_n)$

$= \frac{3}{5}(X_n - Y_n)$

وبالتالي: $t_{n+1} = \frac{3}{5} t_n$، إذن $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{5}$ و $t_0 = X_0 - Y_0 = -2$، وبالتالي:

$t_n = t_0 q^n = -2\left(\frac{3}{5}\right)^n$

ولأن $-1 < q = \frac{3}{5} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$

2) $X_{n+1} - X_n =$

$= \frac{4}{5}X_n + \frac{1}{5}Y_n - X_n$

$= -\frac{1}{5}X_n + \frac{1}{5}Y_n$

$= -\frac{1}{5}t_n = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n > 0$

فالمتتالية $(X_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما ...(1)

$Y_{n+1} - Y_n =$

$= \frac{1}{5}X_n + \frac{4}{5}Y_n - Y_n$

$= \frac{1}{5}X_n - \frac{1}{5}Y_n$

$= \frac{1}{5}t_n = -\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n < 0$

فالمتتالية $(Y_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماما ...(2)

وجدنا:

$\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}(X_n - Y_n)$ ...(3)

من (1) و(2) و(3) نستنتج أن المتتاليتين $(X_n)_{n\geq 0}$ و $(Y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

3) $W_{n+1} = X_{n+1} + Y_{n+1}$

$= \frac{4}{5}X_n + \frac{1}{5}Y_n + \frac{1}{5}X_n + \frac{4}{5}X_n$

$= X_n + Y_n = W_n$

فالمتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ ثابتة.

لدينا: $W_n = W_0 = X_0 + Y_0 = 3 + 5 = 8$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 8$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n + \lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = 8$

وبما أنهما متجاورتان فهما متقاربتان من عدد l وبالتالي:

$l + l = 8 \Rightarrow l = 4$

أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجيا بالعلاقة
$u_0=0$ ، $U_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}$ متزايدة تماما

الحل:

لنبرهن بالتدريج أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما كما يلي:

$E(n): U_n < U_{n+1}$ أيا كان العدد الطبيعي n

لنثبت صحة القضية $E(0)$ كما يلي:

$$U_{n+1}=\sqrt{1+U_n^2} \text{ ، } U_0=0$$

$\Rightarrow U_1 > U_0$ محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$ أي:

$$(*) \dots U_{n+1} > U_n$$

لنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي:

$U_{n+1} > U_n$ (حسب $*$)

نربع الطرفين

$$U_{n+1}^2 > U_n^2$$

نضيف 1 للطرفين:

$$U_{n+1}^2+1 > U_n^2+1$$

نجذر الطرفين:

$$\sqrt{U_{n+1}^2+1} > \sqrt{1+U_n^2}$$

فحسب البرهان بالتدريج تكون

$$U_{n+2} > U_{n+1}$$

أيا كان العدد الطبيعي n.

التمرين الحادي عشر:

لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجيا وفق

$$U_0=1$$

$$U_{n+1}=\frac{U_n}{1+U_n}$$

1) أثبت بالتدريج أن $U_n>0$ أيا كان العدد الطبيعي n.

2) أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $V_n=\frac{1}{U_n}$ متتالية حسابية واكتب عبارة V_n بدلالة n واستنتج عبارة U_n

الحل:

① إثبات أن $E(n): U_n>0$

1- نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$:

$U_0>0 \Rightarrow 1>0$ محققة

2- نفرض صحة القضية من أجل n أي:

$\boxed{U_n>0}$ $*$

3- نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$:

$$U_{n+1}>0$$

نقسم البسط على المقام:

نبرهن: $1+\frac{-1}{1+U_n}>0$

ننطلق من $*$: $U_n>0$

نضيف (1): $1+U_n>1$

نقلب $\frac{1}{1+U_n}<1$

نضرب بـ (-1):

$$\frac{-1}{1+U_n}>-1$$

نضيف (١) : $1 + \frac{1}{1+U_n} > 0$

$\Rightarrow U_{n+1} > 0$

② $$V_n = \frac{1}{U_n}$$

لاثبات ان المتتالية حسابية يجب أن يكون
عدد ثابت : $V_{n+1} - V_n$

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{\frac{U_n}{1+U_n}}$$

$$= 1 \cdot \frac{1+U_n}{U_n}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1+U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{U_n}{U_n} = 1$$

$= const$

⇐ المتتالية حسابية اساسها $r = 1$

كتابة V_n بدلالة n :

$$V_0 = \frac{1}{U_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow V_n = V_0 + (n-0)1$$

$$\Rightarrow \boxed{V_n = 1 + n}$$

استنتاج عبارة U_n :

$$V_n = \frac{1}{U_n}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{n+1}$$

الجلسة الامتحانية في الرياضيات

لوغارتمي_ أسي_تكامل

تتضمن شرح شامل للأفكار

Online

م. الحر بشار ابراهيم

بالاشتراك مع

فريق الأفق التعليمي

للتواصل والاستفسار:

0932919655

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ $ax^2 + bx + c = 0$ $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$

المسألة الأولى

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$$

① تحقق أن مجموعة تعريف f ولتكن

$D_f :]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

② أثبت أن $(4-x) \in D_f$

أيا يكن x من D_f احسب عندئذ المقدار

$f(4-x) + f(x)$

استنتج أن النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط C

③ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f

④ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

⑤ ارسم الخط البياني C في معلم متجانس

⑥ لتكن $(U_n)_{n\geq 4}$ متتالية معرفة وفق $U_n = f(n)$ نضع

$S_n = U_4 + U_5 + \cdots + U_n$

أثبت أن $S_n = L_n = \ln\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

الحل:

① $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$

مجموعة التعريف

$\frac{x-1}{x-3} > 0$

ندرس الإشارة

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x-3=0 \Rightarrow x=3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$
$\frac{x-1}{x-3}$	$+$	0 $-$	$\|$	$+$
المتراجحة	محققة	غير محققة		محققة

إذاً

$D_f :]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

②

لدينا $x \in]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$

نضرب بـ (-1)

$-x \in]-1,+\infty[\cup]-\infty,-3[$

نضيف 4

$4-x \in]+3,+\infty[\cup]-\infty,1[$

$4-x \in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

احسب المقدار

$f(4-x) + f(x) =$

$\ln\left(\frac{4-x-1}{4-x-3}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right) =$

$\ln\left(\frac{3-x}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right) =$

$\ln\left[\frac{\cancel{3-x}}{1-x} \cdot \frac{-(x-1)}{-\cancel{(3-x)}}\right] =$

$\ln(1) = 0$

$$U_n = f(n)$$

$$S_n = U_4 + U_5 + \dots + U_n$$

$$E(n): S_n = \ln \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

نبرهن صحة $E(n)$

$$S_n \overset{?}{=} \ln \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$\ln(3) \overset{?}{=} \ln \frac{(3)\cancel{(2)}}{\cancel{2}}$$

$$\ln(3) = \ln(3)$$ محققة

نفرض صحة $E(n)$

$$E(n): S_n = \ln \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

نبرهن صحة $E(n+1)$

$$\underbrace{S_{n+1}}_{L_1} \overset{?}{=} \underbrace{\ln \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)}_{L_2}$$

$$L_1 = S_{n+1} = \ln \left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = P_2$$

ومنه *

$E(n+1)$ محققة فإن $E(n)$ محققة

المسألة الثانية:

ليكن التابع f كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{4}x - \ln \frac{x-1}{x+1}$$

1- أوجد مجموعة تعريف التابع f

2- لأجل التابع f المعرف على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً لها ودل على الصفة الجبرية وبين نوعها

3. أثبت أن المستقيم $y = \frac{1}{4}x$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f وادرس الوضع النسبي للخط البياني ومقاربه

4- احسب $f(x) + f(-x)$ وماذا تستنتج؟

5. ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم الخط C البياني للتابع f

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{4}x - \ln \frac{x-1}{x+1}$$

معرف على R

نوجد القيم التي تعدم التابع

$$\frac{x-1}{x+1} > 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$
$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x+1}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		محققة		غير محققة		محققة	

$$D_f:]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x - \ln\frac{x-1}{x+1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{4}(-\infty) - \ln\frac{-\infty-1}{-\infty+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{4}(+\infty) - \ln\frac{+\infty-1}{+\infty+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{1}{4}(-1) - \ln\left(\frac{-1-1}{-1+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \ln\frac{-2}{0} = -\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +1} f(x) = \frac{1}{4}(1) - \ln\frac{1-1}{1+1}$$

$$= \frac{1}{4} - \ln\left(\frac{0}{2}\right) = +\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي بجوار $+\infty$

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \left[\frac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{4} - \left[\frac{\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)-8}{4[(x+1)(x-1)]}$$

$$= \frac{x^2-1-8}{4[(x+1)(x-1)]} = \frac{x^2-9}{4(x^2-1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3,\ x = -3$$

$$f(3) = \frac{3}{4} + \ln 2$$

$$f(-3) = \frac{-3}{4} - \ln 2$$

x	$-\infty$		-3		-1		$+1$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖		‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{-3}{4} - \ln 2$	↘	$-\infty$ ‖		‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{4} - \ln 2$	↗	$+\infty$

$$f(-3) = \frac{-3}{4} - \ln 2$$

قيمة حدية كبرى محلية

$$f(3) = \frac{3}{4} + \ln 2$$

قيمة حدية صغرى محلية

$$h(x) = f(x) - y_0$$

$$= \frac{1}{4}x - \ln\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{4}x$$

$$= -\ln\frac{x-1}{x+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$$

$\Rightarrow$ $y = \frac{1}{4}x$ مقارب مائل بجوار $-\infty, +\infty$

$$h(x) = -\ln \frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{x-1}{x+1} < 1 \Rightarrow \ln \frac{x-1}{x+1} < 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -1} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +1} h(x) = +\infty$$

$$h'(x) = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\|$	//////	$\|$	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|$	//////	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	0
		متناقصة				متناقصة	

$$f(x) + f(-x)$$

$$\frac{1}{4}x - \ln \frac{x-1}{x+1} + \left[-\frac{1}{4}x - \ln \frac{-x-1}{-x+1}\right]$$

$$\cancel{\frac{1}{4}x} - \ln \frac{x-1}{x+1} \cancel{-\frac{1}{4}x} - \ln \frac{-x-1}{-x+1}$$

$$-\ln \frac{x-1}{x+1} - \ln \frac{-x-1}{-x+1}$$

$$-\ln \frac{x-1}{x+1} - \ln \frac{-(x+1)}{-(x-1)}$$

$$-\ln \frac{x-1}{x+1} - \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$-[\ln(x-1) - \ln(x+1)] - [\ln(x+1) - \ln(x-1)]$$

$$-\ln(x-1) + \ln(x+1) - \ln(x+1) + \ln(x-1)$$

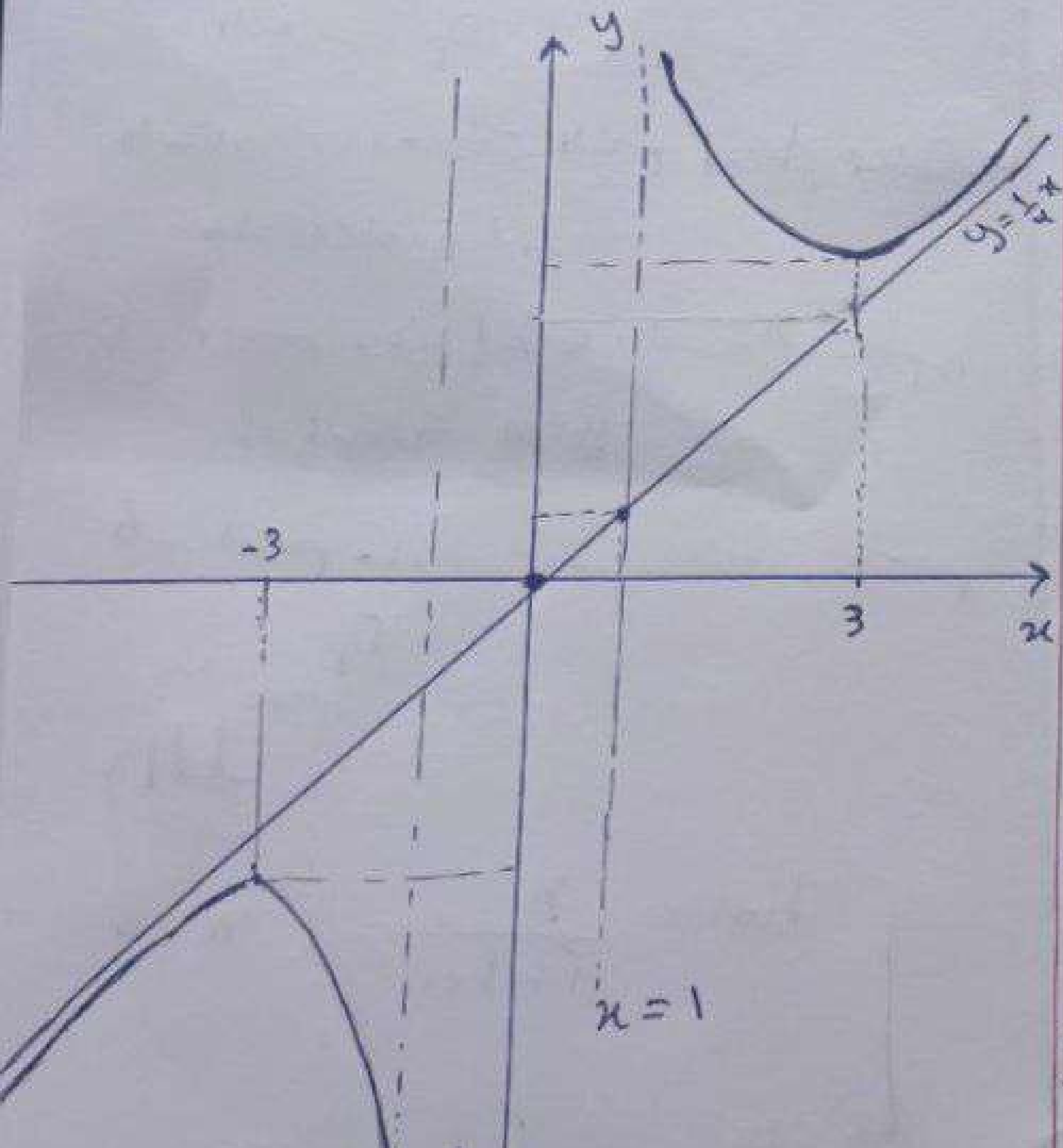
$$= 0$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 0$$

الخط البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

$y = \frac{1}{4}x$

x	0	1
y	0	$\frac{1}{4}$



النقاط المساعدة

$(0,0)$

$(1, \frac{1}{4})$

المسألة الثالثة :

ليكن الخط البياني التابع f المعرف بالعلاقة

$$f(x) = \frac{x}{1+\ln x} \qquad x \neq 0$$

$$0 \qquad x = 0$$

ضمن المجال

$D_f: [0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$

والمطلوب :

1- هل f مستمر عند الصفر؟

2- احسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

عند أطراف مجموعة التعريف D_f

3- احسب النهاية عند أطراف مجموعة التعريف D_f

4- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيمة الحدية

5- ادرس وضع الخط C بالنسبة للمستقيم Δ ذو المعادلة $y = x$

6- ارسم ما وجدت من مقاربات وارسم D_f

الحل

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+\ln x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) \overset{?}{=} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$$

f مستمر عند $x=0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(1+\ln x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\ln x} = 0.$$

ومنه f اشتقاقي عند الصفر

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

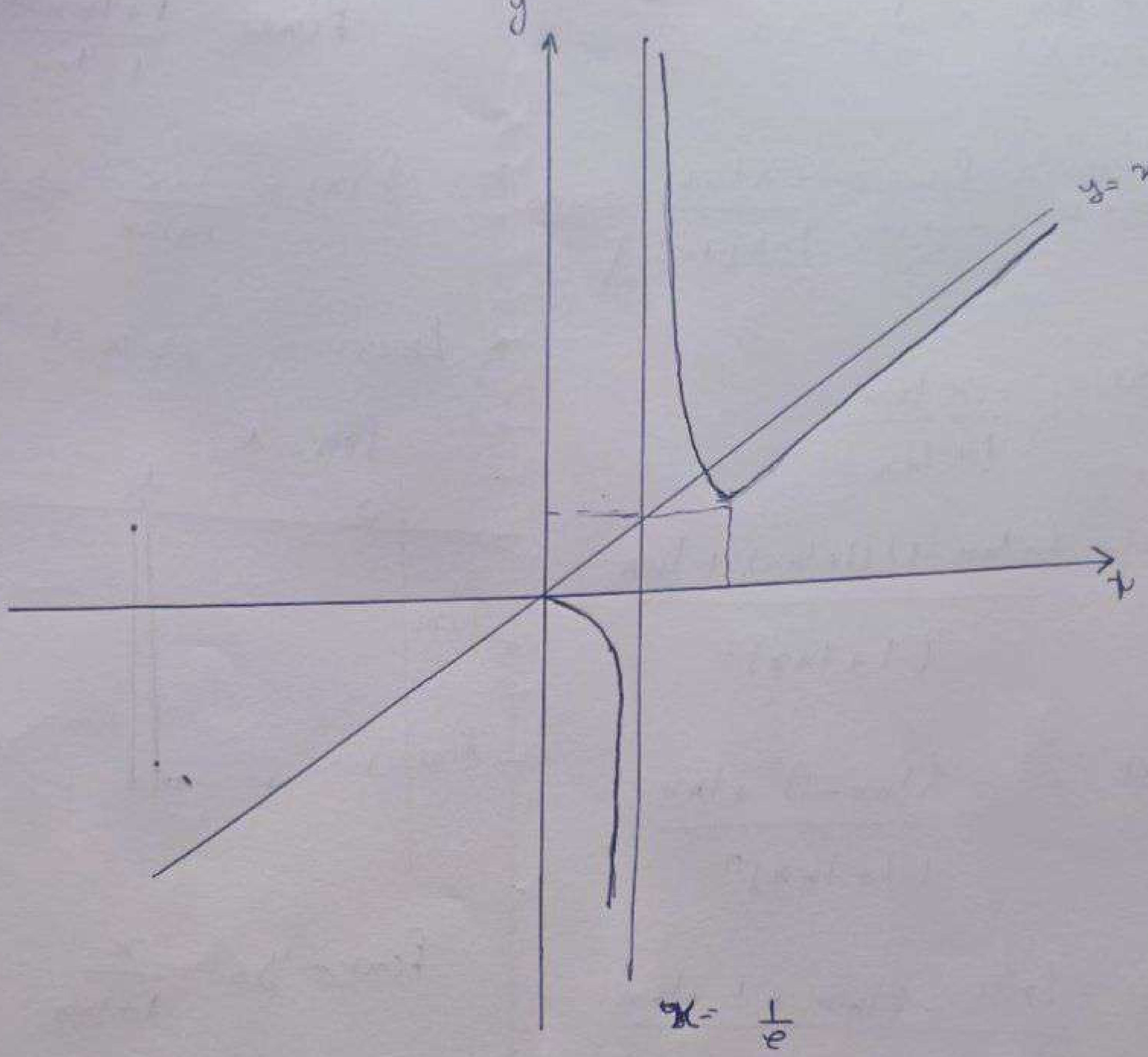
$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim f(x) = \lim \frac{x}{\ln(x)\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)} = +\infty$$

4- التابع f مستمر واشتقاقي على

$[0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$


y
$y = x$
x
$x = \frac{1}{e}$

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^+} h(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x\ln x}{\ln x\left[1+\frac{1}{\ln x}\right]} = -\infty$$

$$h(x) = \frac{-x\ln x}{1+\ln x}$$

$$h'(x) = \frac{(-\ln x - 1)(1+\ln x) + \ln x}{(1+\ln x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-(\ln x+1)^2 + \ln x}{(1+\ln x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-\ln^2 x - 2\ln x + 1 + \ln x}{(1+\ln x)^2}$$

$$= \frac{-\ln^2 x - \ln x - 1}{(1+\ln x)^2}$$

$h'(x) < 0$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$[0, \frac{1}{e}[$ C تحت Δ

$[\frac{1}{e}, 1]$ C فوق Δ

$[1, +\infty[$ C تحت Δ

$$f'(x) = \frac{1+\ln x - 1}{1+\ln x}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x}{1+\ln x} \Rightarrow f'(x) = 0$$

$\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 1$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{1+\ln x} - x$$

$$= \frac{x - x - x\ln x}{1+\ln x} = \frac{-x\ln x}{1+\ln x}$$

$f(x) - y_\Delta = h(x)$

ندرس التغيرات $h(x)$

التابع $h(x)$ مستمر واشتقاقي على

$[0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^-} h(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

المسألة الرابعة:

لتكن $\lambda \in \mathbb{R}$ ، وليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = e^{x} + e^{-x} + \lambda$$

1) عين λ ليكون للتابع f قيمة حدية صغرى قيمتها 0

2) في حالة $\lambda=-2$ برهن أن f دالة زوجية ، استنتج الصفة التناظرية للخط.

3) ادرس تغيرات f ، نظم جدولاً بها ودل على القيم الصغرى محلياً

4) ارسم الخط البياني c

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C_f والمحور xx' والمستقيمين $x=\ln 2$ ، $x=0$

الحل

نضع $\Leftarrow f'(x)=0$

$$e^{x} - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{x} = e^{-x}$$

$$x = -x \Rightarrow x=0$$

$$f(0) = 2+\lambda$$

ولكن قيمتها صغرى (0)

$$f(0)=0 \Rightarrow 2+\lambda=0$$

$$\boxed{\lambda=-2}$$

2) $f(-x) = e^{-x} + e^{x} - 2 = f(x)$

أي أن C_f تابع زوجي متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

3) f معرف ومستمر وقابل للاشتقاق على R

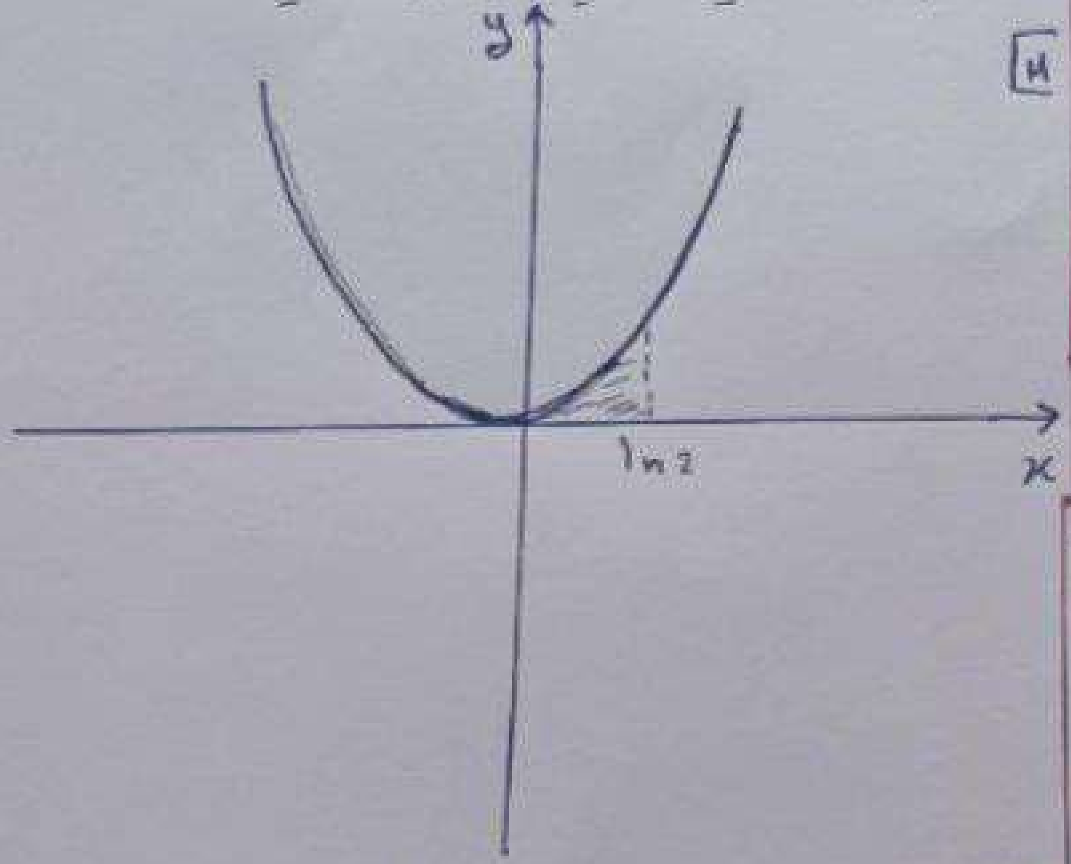
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$f(0)=0$ قيمة حدية صغرى محلية

4)



5)

$$\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx = \int_0^{\ln 2} (e^{x} + e^{-x} - 1)\,dx$$

$$= \left[e^{x} - e^{-x} - 2x\right]_0^{\ln 2} = \left(2 - \frac{1}{2} - 2\ln 2\right) - 0$$

$$= \frac{3 - 4\ln 2}{2}$$

المسألة الخامسة

ليكن c الخط البياني للتابع المعرف على R وفق

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$$

والمطلوب:

1- برهن أن التابع $f(x)$ يكتب بالصيغة

$$f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

2- برهن أن المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$

3- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

4- اكتب معادلة المماس Δ للخط البياني c في النقطة التي فاصلتها $x=0$ منه

5- ارسم كلاً من d و Δ ثم ارسم الخط c في المعلم ذاته

الحل:

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$$

1) نقوم بإخراج عامل مشترك

$$f(x) = \ln\left[e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^{x}} + \frac{1}{e^{2x}}\right)\right]$$

$$= \ln\left[e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})\right]$$

$$= \ln e^{2x} + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$= 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

2)

$$g = f(x) - y_0$$

$$= 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x$$

$$= \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ln(1 - e^{-\infty} + e^{-\infty})$$

$$= \ln(1 - 0 + 0) = 0$$

إذاً المستقيم الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

3)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln(0 - 0 + 1) = 0$$

$y=0$ مقارب في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

f معرف واشتقاقي على R

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^{x}}{(e^{2x} - e^{x} + 1)} = \frac{e^{x}(2e^{x} - 1)}{e^{2x} - e^{x} + 1}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\ln(2)$$

$$f(\ln 2) = \ln(e^{2(-\ln 2)} - e^{-\ln 2} + 1)$$

$$= \ln(e^{-\ln 4} - e^{\ln \frac{1}{2}} + 1) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1 - 2 + 4}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نجد من الجدول أنه أيا كان $x \in]0,+\infty[$

$\Rightarrow f(x) \leq 0$

$\Rightarrow \ln x - x + 1 \leq 0 \Rightarrow \ln x \leq x - 1$

المتراجحة محققة

4) $f(x) - x \Leftarrow x - \ln x = x$

$x - x - \ln x = 0 \Rightarrow -\ln x = 0$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

مقبول

ب))

$U_0 = e$

$U_{n+1} = f(U_n)$

$U_{n+1} = U_n - \ln(U_n)$

1- $n \geq 0$ المطلوب

$1 < U_{n+1} \leq U_n$

نرمز بالرمز $E(n)$ للمتراجحة

$E(n): \ 1 < U_{n+1} \leq U_n$

لنثبت صحة $E(0)$

$1 < U_1 \leq U_0$

$1 < e - 1 \leq e$

محققة

نفرض صحة $E(n)$

$1 < U_{n+1} \leq U_n$

لنثبت صحة $E(n+1)$

$1 < U_{n+2} \leq U_{n+1}$

$f(1) = +1$

نصعد الأطراف

$f(1) < f(U_{n+2}) \leq f(U_{n+1})$

$1 < U_{n+2} \leq U_{n+1}$

$E(n+1)$ محققة $\Leftarrow$ $E(n)$ محققة أي

لكل n

$\Leftarrow$ $U_{n+1} - U_n \leq 0$ المتتالية متناقصة تماما

$\Leftarrow$ $U_n \geq 1 \Leftarrow m \geq 1$

$\Leftarrow$ المتتالية محدودة من الأدنى بالعنصر القاصر $m = 1$

$\Leftarrow$ المتتالية متقاربة لأنها متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعنصر القاصر $m = 1$

نهايتها هي حل المعادلة

$f(x) = x$

$\lim_{x \to +\infty} U_n = 1$

1- الدراسة الوضع النسبي ندرس الفرق

$g(x) = f(x) - y_0$

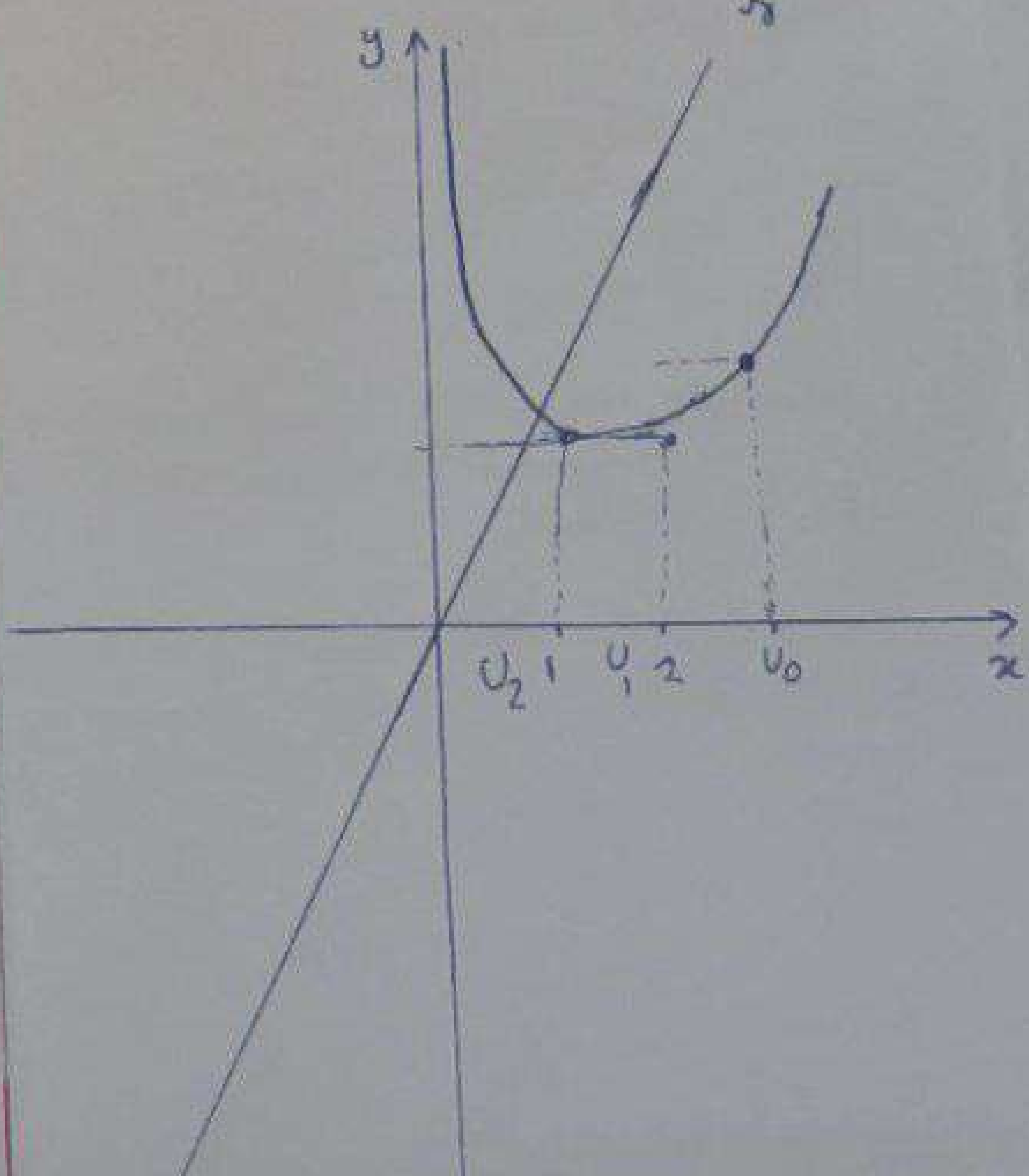
$= x - \ln x - x = -\ln(x)$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\ln(+\infty) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\ln(0^+) = +\infty$

$g'(x) = -\frac{1}{x} < 0$

التابع متناقص تماما



$A(S) = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e (x - \ln x)\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 + x - \ln x\right]_1^e$

$= \left(\frac{1}{2}e^2 + e - e\ln e\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 + 1 - \ln(1)\right)$

$= \frac{1}{2}e^2 + e - e - \frac{3}{2} = \frac{e^2 - 3}{2}$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$			$-\infty$
الوضع النسبي		C فوق D		C تحت D	

السؤال الأول:

في كل من الحالات الآتية أوجد تابعا اصليا f للتابع f على المجال I بطلب تحديده:

$$f(x) = \frac{1}{2x+1},$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}},$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

الحل:

1.

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2}{2x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+1|$$

$$I =]-\infty, \frac{-1}{2}[\cup]\frac{-1}{2}, +\infty[$$

2.

$$f(x) = -\frac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}}$$

$$= -(-\sin x)(\cos x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = -2(\cos x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = -2\sqrt{\cos x}$$

$$I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

3.

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{e^x+1}$$

$$= \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$f(x) = \ln(e^x+1) + \ln(1+e^{-x})$$

السؤال الثاني:

نريد حساب $I = \int_0^1 \frac{x^5}{1+x^3} d(x)$ احسب $J = \int_0^1 \frac{x^2}{4x^3}$ ثم $I + J$ واستنتج I.

الحل:

$$J = \int_0^1 \frac{1}{3}\frac{3x^2}{1+x^3}dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{1}{3}\frac{3x^2}{1+x^3}dx$$

$$= \frac{1}{3}[\ln(1+x^3)]_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2$$

$$I + J = \int_0^1 \frac{x^2(1+x^6)}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}[x^3]_0^1$$

$$I + J = \frac{1}{3}$$

$$J = \int_0^1 \frac{1}{4}\frac{4x^3}{1+x^4}dx$$

$$= \frac{1}{4}[\ln(1+x^4)]_0^1 = \frac{1}{4}\ln 2$$

$$I + J = \int_0^1 \frac{x^3(1+x^4)}{1+x^4}dx = \frac{1}{4}[x^4]_0^1$$

$$I + J = \frac{1}{4}$$

$$I + \frac{1}{4}\ln 2 = \frac{1}{4}$$

$$I = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln 2$$

السؤال الثالث:

نريد حساب $I = \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^x}$ احسب $J = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{1+e^x}$ ثم $I + J$ واستنتج I.

الحل:

$$J = \ln(1+2) - \ln(1+1)$$

$$= \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

ln2 ln2

2. احسب $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\ dx$

B. ليكن التابع المعرف على R وفق $f(x) = \frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+1}$ والمطلوب:

1. عيم الأعداد الحقيقية a, b, c التي تحقق $f(x) = ae^x + b +$

ce^x

$f(x) = -2\sqrt{\cos x}$

$I + J = \frac{1}{4}$

$I + \frac{1}{4}\ln 2 = \frac{1}{4}$

3.

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{e^x+1}$$
$$= \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$I = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln 2$$

السؤال الثالث:

نريد حساب $I = \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^x}$ احسب $J = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{1+e^x}$ ثم $I + J$ واستنتج I.

الحل:

$$J = \ln(1+2) - \ln(1+1)$$
$$= \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$
$$I + J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{x+1}}{e^{x+1}} dx = \int_0^{\ln 2} dx$$
$$= [x]_0^{\ln 2} = \ln 2$$
$$I + J = \ln 2$$
$$I + \ln\frac{3}{2} = \ln 2$$
$$I = \ln 2 - \ln\frac{3}{2}$$
$$I = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

السؤال الرابع

ليكن لدينا التابع f المعرف على $R[-1,1]$ وفق $f(x) = \frac{x^3+x^2+x-1}{x^2-1}$ والمطلوب:

A.

1. عين الأعداد الحقيقية a, b, c, d التي تحقق $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1}$

2. احسب $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$

B. ليكن التابع المعرف على R وفق $f(x) = \frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+1}$ والمطلوب:

1. عيم الأعداد الحقيقية a, b, c التي تحقق $f(x) = ae^x + b + \frac{ce^x}{e^x+1}$

2. احسب $I = \int_0^1 f(x)e^x\, d(x)$

الحل:

A.

1. بتوحيد المقامات:

$$f(x) = \frac{a(x)(x^2-1) + b(x^2-1) + c(x-1) + d(x+1)}{x^2-1}$$

بالإصلاح:

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + x(c+d-a) - b - c + d}{x^2-1}$$

بالمطابقة:

$$a = 1, \quad b = 1$$
$$c + d - a = 1 \Rightarrow c + d = 2$$
$$-b - c + d = -1 \Rightarrow c = d$$

بالحل المشترك :

$$c = 1, \quad d = 1$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

ومقاربه المائل والمستقيمين $x =$ $e^2, x = e$.

2. احسب مساحة السطح المحصور

$$c = 1,\quad d = 1$$

$$\frac{c}{x+1}+\frac{d}{x-1}$$

2. ومنه

$$f(x) = x+1+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$$

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x+1| + \ln|x-1|\right]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{4}\right)$$

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 1$$

.B

.1

$$f(x) = \frac{e^{2x}+2e^x+1+e^x}{e^x+1}$$

$$f(x) = \frac{(e^x+1)^2+e^x}{e^x+1}$$

$$= e^x+1+\frac{e^x}{e^x+1}$$

وعليه فإن $a = 1$,$b = 1$,$c = 1$

.2

$$\int_0^1 f(x)dx = [e^x + x + \ln(e^x+1)]_0^1$$

$$= e+1+\ln(1+e)-(1+0+\ln 2)$$

$$= e+\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

السؤال الخامس:

1. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني $f(x) = x+\frac{1}{x\ln x}$ ومقاربه المائل والمستقيمين $x = e^2, x = e$.
2. احسب مساحة السطح المحصور المحدد بين خطي التابعين $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$.
3. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1, x = 0$.

الحل:

1. المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ C_f لأن

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln x} = 0$$

$$S' = \int_e^{e^2}|f(x)-y_\Delta|dx = \int_e^{e^2}\left|\frac{1}{x\ln x}\right|dx$$

على المجال $[e,e^2]$ يكون $\frac{1}{x\ln x} > 0$

$$S' = \int_e^{e^2}\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = [\ln\ln x]_e^{e^2}$$

$$= \ln(\ln e^2)-\ln\ln(e)$$

$$= \ln(2)-0$$

$$S' = \ln 2$$

2. لإيجاد حدود التكامل نحل المعادلة

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1) = 0$$

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 1$$

على المجال $[0,1]$ نجد أن $g(x) \geq f(x)$

$= \ln(\ln e^2) - \ln\ln(e)$

$S' = \ln 2$

$= e + 1 + \ln(1 + e) - (1 + 0 + \ln 2)$

ورقة_عمل_بحث_الت...

السؤال الخامس:

1. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني $f(x) = x + \frac{1}{x\ln x}$

2. لإيجاد حدود التكامل نحل المعادلة

$f(x) = g(x)$

$x^2 = \sqrt{x}$

$\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1) = 0$

$x_1 = 0 \quad , x_2 = 1$

على المجال $[0,1]$ نجد أن $g(x) \geq f(x)$

$S' = \int_0^1 (g(x) - f(x))dx$

$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$

$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$= \frac{2}{3}(1) - \frac{1}{3}(1) - (0)$

$S' = \frac{1}{3}$

.3

$S = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{-x}} \frac{e^x}{e^x} dx$

$= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

$= [\ln(e^x + 1)]_0^1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

$S' = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

شغف التعليمي

السؤال السادس:

احسب التكاملات الآتية:

$= \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos(0)$

$= \frac{\pi}{2} - 1$

8:54 93

ورقة_عمل_بحث_الت..

السؤال السادس:

احسب التكاملات الآتية:

1. $I = \int_0^1 xe^x \, d(x)$
2. $g = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} d(x)$
3. $k = \int_1^e \ln x \, d(x)$

الحل:

1.

$u = x$	$u' = 1$
$v' = e^x$	$v = e^x$

$$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= e - 0 - [e^x]_0^1$$

$$I = e - (e-1) = 1$$

$u = x$	$u' = 1$
$v' = \cos x$	$v = \sin x$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$$

$$J = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2}(1) - 0 + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$J \quad = \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos(0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

2.

$$N = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx$$

$$N = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = A(x+2) + B(x+1)$$

بتعويض $x = -1$ نجد :

$$1 = A(1) + 0$$

$$A = 1$$

بتعويض $x = -2$ نجد :

$$1 = 0 - B$$

$$B = -1$$

$$N = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= [\ln(x+1) - \ln(x+2)]_0^1$$

$$= \ln\frac{4}{3}$$

$u = \ln x$	$u' = \frac{1}{x}$

$$B = -1$$

$$N = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= [\ln (x+1) - \ln (x+2)]_0^1$$

$$= \ln \frac{4}{3}$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$$

$$J = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2}(1) - 0 + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

.3

$u = \ln x$	$u' = \frac{1}{x}$
$v' = 1$	$v = x$

$$K = [x\ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x}{x} dx$$

$$= [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx$$

$$= [x\ln x - x]_1^e$$

$$K = e\ln e - e - (u)\ln (1) - 1)$$

$$= 0 - (-1) = 1$$

تقديم: الحر بشار ابراهيم

تنسيق: فارس ارسلي

شغف التعليمي

الجلسة الامتحانية في الرياضيات

الأشـــعة

✓ تتضمن شرح شامل للأفكار ✓

Online

م. الحر بشار ابراهيم

بالاشتراك مع

فريق الأفق التعليمي

للتواصل والاستفسار:

8932919655

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ $ax^2+bx+c=0$ $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

فالنقطة G تقع على (PQ)

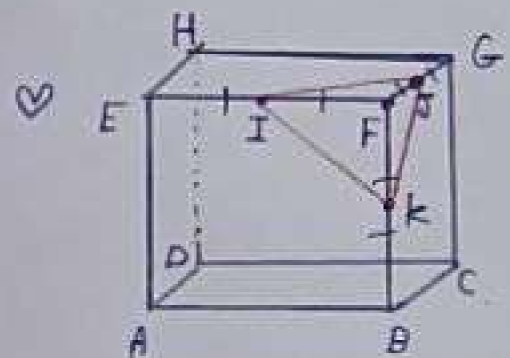
حسب الخاصة التجميعية فإن G م.أ.م لـ

$(R,2)\quad(S,4)$

فالنقطة G تقع على (RS) ومنه (RS) (PQ) يتقاطعان في G.

المسألة الأولى: ABCD EFGH مكعب طول حرفه 2 ولتكن النقاط I , J , K منتصفات الأحرف [EF] . [FG] . [FB] على الترتيب، نختار معلم متجانس $(A,\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$

1. أوجد أحداثيات رؤوس المكعب واستنتج أحداثيات I,J,K
2. أوجد معادلة المستوي (IJK)
3. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من F عمودياً على المستوي (IJK)
4. استنتج أحداثيات N المسقط القائم لـ F على المستوي (IJK)
5. احسب حجم رباعي الوجوه (FIJK)
6. اكتب معادلة الكرة التي مركزها F وتمس المستوي (IJK)
7. جد إحداثيات النقطة O مركز ثقل المثلث ADQ حيث Q منتصف [EH]
8. أين تقع النقطة M التي تحقق $3\vec{CM}=\vec{BA}+\vec{DO}$



الحل: -

$A(0,0,0)$

$B(2,0,0)$

$C(2,2,0)$

$D(0,2,0)$

$E(0,0,2)$

$F(2,0,2)$

$H(0,2,2)$

$G(2,2,2)$

$I(1,0,2)$

$J(2,1,2)$

$K(2,0,1)$

$\vec{IJ}(1,1,0)$

$\vec{IK}(1,0,-1)$

- غير مرتبطان خطياً نفترض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي المطلوب

$\vec{n}\perp\vec{IJ}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{IJ}=0$

$a+b=0 \quad \ldots (1)$

$\vec{n}\perp\vec{IK}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{IK}=0$

$a-c=0 \quad \ldots (2)$

من (2) نجد $a=c$ بفرض $c=1$

$\Leftarrow a=1 \quad \Leftarrow b=-1$

$\vec{n}(1,-1,1)$

$(IJK): x-y+z+d=0$

$K\in IJK: 2-0+1+d=0$

$\Rightarrow d=-3$

$(IJK): x-y+z-3=0$

$F(2,0,2)\quad U=\vec{n}(1,-1,1)$

$$d:\begin{cases}x=t+2\\ y=-t\\ z=t+2\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

- نعوض معادلات التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي IJK

$t+2+t+t+2-3=0\Rightarrow t=-\frac{1}{3}\Rightarrow$

$x=\frac{5}{3},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{5}{3}\Rightarrow N\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$

- $V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h$

القاعدة هي المثلث IJK المتساوي الأضلاع

$IJ=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$dist(F,IJK)=\frac{|(1)(2)+(-1)(0)+2-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}$$

- $R=dist(F,IJK)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$(x-x_F)^2+(y-y_F)^2+(z-z_F)^2=\frac{1}{3}$

$(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{1}{3}$

- $$Q\left(\frac{x_E+x_H}{2},\frac{y_E+y_H}{2},\frac{z_E+z_H}{2}\right)$$

$Q(0,1,2)$

$$O\left(\frac{x_A+x_Q+x_D}{3},\frac{y_A+y_Q+y_D}{3},\frac{z_A+z_Q+z_D}{3}\right)$$

$O\left(0,1,\frac{2}{3}\right)$

$3\vec{CM}=\vec{BA}+\vec{DO}\Rightarrow 3\vec{CM}=\vec{CD}+\vec{DO}$

$3\vec{CM}=\vec{CO}\Rightarrow\vec{CM}=\frac{1}{3}\vec{CO}$

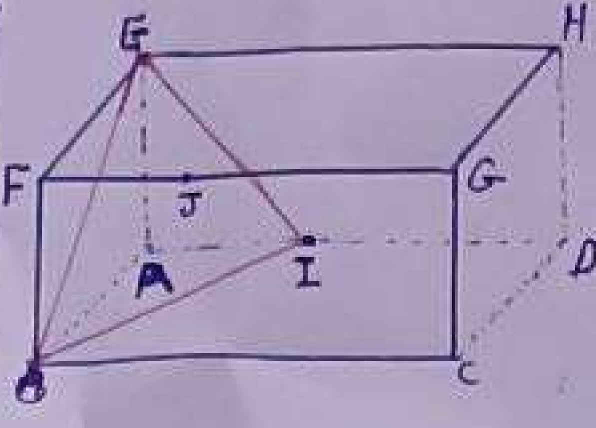
المسألة الثانية: ليكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات فيه

$AB=2$

$AD=4$

$AE=1$

ولتكن النقطة I منتصف [AD] والنقطة J تحقق العلاقة $\vec{FJ}=\frac{1}{4}\vec{FG}$



نتأمل المعلم المتجانس $(A, \frac{1}{2}\vec{AB}, \frac{1}{4}\vec{AD}, \vec{AE})$

1. جد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات والنقطتين I و J
2. أثبت أن معادلة المستوي (EIB) هي: $x+y+2z-2=0$
3. بيّن نوع المثلث EIB، ثم احسب مساحته.
4. احسب بعد G عن المستوي (EIB) واستنتج حجم الرباعي الوجوه G-EIB
5. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J عمودياً على المستوي EIB
6. استنتج أن المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة [BI].

الحل:

$A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $C(2,4,0)$ $G(2,4,1)$

$D(0,4,0)$ $E(0,0,1)$ $F(2,0,1)$ $H(0,4,1)$

$I(0,2,0)$ ⇐ I منتصف [AD]

$J(2,1,1)$ ⇐ $\vec{FJ}=\frac{1}{4}\vec{FG}$

$P: x+y+2z-2=0$

نعوض E في P: $0+0+2-2=0$ محققة

إذاً E تنتمي للمستوي P

نعوض I في P: $0+2+0-2=0$ محققة

إذاً I تنتمي للمستوي P

نعوض B في P: $2+0+0-2=0$ محققة

إذاً B تنتمي للمستوي P

إذاً P هي معادلة المستوي (EIB)

$\vec{EI}(0,2,-1) \Rightarrow EI=\sqrt{5}$

$\vec{EB}(2,0,-1) \Rightarrow EB=\sqrt{5}$

$\vec{BI}(2,-2,0) \Rightarrow BI=2\sqrt{2}$

المثلث متساوي الساقين رأسه E ارتفاعه EE'

$E'(1,1,0)$ حيث E' منتصف [BI]

$\vec{EE'}(1,1,-1) \Rightarrow EE'=\sqrt{3}$

$S_{EIB}=\frac{1}{2}BI\times EE'=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

$dist(G,EIB)=\frac{|2+4+2-2|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}=\frac{6}{3}=2$ $\quad h=dist(G,EIB)$

$J(2,1,1)$ $\quad \vec{u}=\vec{n}_{EIB}(1,1,2)$

$$d:\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=1+2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

J' مسقط J على (EIB)، و J' نتقاطع d و (EIB)

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في المستوي (EIB)

$(2+t)+1+t+2(1+2t)-2=0$

$3+6t=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$

نعوض في d

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=0 \end{array}\right\} J'(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0)$$

نكتب معادلة القطعة المستقيمة [BI]

$B(2,0,0)$ $\quad \vec{u}=\vec{n}(-2,2,0)$

$$\vec{BI}\begin{cases} x=2-2t \\ y=2t \\ z=0 \end{cases} \quad t\in[0,1]$$

نقارن إحداثيات J' مع المعادلات الوسيطية للقطعة [BI]

$2-2t=\frac{3}{2} \Rightarrow t=\frac{1}{4}$

$2t=\frac{1}{4} \Rightarrow t=\frac{1}{4}$

$0=0$ محققة

$t=\frac{1}{4}\in[0,1]$ محققة

إذاً J' تقع على القطعة المستقيمة [BI]

#Bac-24

HariZon Team

اختبار أشعة شامل

التمرين الأول: حل الجمل الخطية الموافقة وبيّن إذا كانت المستويات تشترك في نقطة أو لا تشترك بأي نقطة

$P_1: x-y-z=0$

$P_2: 3x-y-2z=1$

$P_3: x-y+z=1$

الحل:

$\vec{n}_1(1,-1,-1)$

$\vec{n}_2(3,-1,-2)$

$\vec{n}_3(1,-1,1)$

$\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ غير مرتبطان خطياً فالمستويات P_1 و P_3 متقاطعين

نحل معادلتيهما حل مشترك

$x-y-z=0 \quad \ldots(1)$

$x-y+z=1 \quad \ldots(2)$

نطرح (2) من (1): $-2z=-1$

$\Rightarrow z=\frac{1}{2}$

نعوض في (1): $x-y-\frac{1}{2}=0$

$\Rightarrow x=y+\frac{1}{2}$

بفرض $y=t$ فيكون التمثيل الوسيطي d لفصلهما المشترك

$$d:\begin{cases} x=t+\frac{1}{2} \\ y=t \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

نعوض في معادلة P_2:

$3\left(t+\frac{1}{2}\right)-t-1=1$

$3t+\frac{3}{2}-t-1=1$

$\Rightarrow t=\frac{1}{4}$

فالمستويات الثلاث تتقاطع في نقطة إحداثياتها $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

التمرين الثاني: في الفضاء المنسوب لمعلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن لدينا المستقيم d المعرف بالتمثيل الوسيطي

$$d:\begin{cases} x=-t-1 \\ y=2t+1 \\ z=2t-3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

والنقطة $C(1,0,-1)$

[1] اكتب معادلة المستوي المار من C ويعامد d.

[2] احسب البعد بين النقطة C و المستقيم d.

الحل:

$\vec{n}_P=\vec{U}_d(-1,2,2)$; $C(1,0,-1)$

$P: ax+by+cz+d=0$

$P: -x+2y+2z+d=0$

$; C\in P: -1+0-2+d=0 \Rightarrow d=3$

$\Rightarrow P: -x+2y+2z+3=0$

- ليكن C' المسقط القائم لـ C على المستقيم d فهي تحقق تمثيله الوسيطي أي $C'(-t-1,\ 2t+1,\ 2t-3)$

$\vec{CC'}(-t-2,\ 2t+1,\ 2t-2)$ $\quad \vec{U}_d(-1,2,2)$

نعلم أنّ $\vec{CC'}\cdot\vec{U}_d=0$

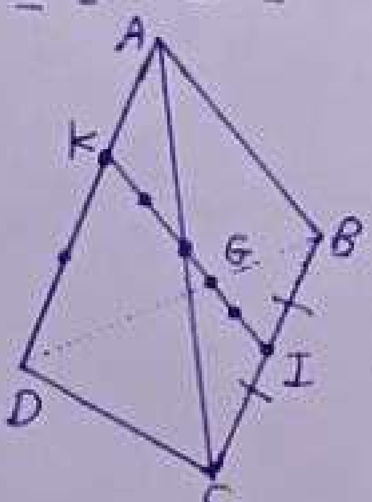
$\Rightarrow -1(-t-2)+2(2t+1)+2(2t-2)=0$

$t+2+4t+2+4t-4=0 \Rightarrow t=0$

ومنه $\vec{CC'}(-2,1,-2)$

يكون بعد النقطة C عن المستقيم d: $\|\vec{CC'}\|=\sqrt{4+1+4}=3$

التمرين الثالث: بالاستفادة من المعلومات المبينة بالشكل عيّن الأعداد الأربعة a,b,c,d ليتحقق ما يأتي



[1] K م.أ.م للنقطتين (A,a) (D,d)

[2] I م.أ.م للنقطتين (C,c) (B,b)

[3] G م.أ.م للنقاط (B,b) (A,a) (D,d) (C,c)

الحل:

من الشكل لدينا $\vec{AK}=\frac{1}{3}\vec{AD}$

ومنه K هو م.أ.م للنقاط $(A,2)\ (D,1)$

ومنه $d=1$ $\quad a=2$

بما أن I [BC] فهي م.أ.م $(C,x)\ (B,x)$

من الشكل لدينا $\vec{KG}=\frac{3}{2}\vec{KI}$

ومنه G هو م.أ.م للنقاط $(K,2)\ (I,3)$

نضرب المثقلات بالعدد $\frac{3}{2}$

G هو م.أ.م للنقاط $(K,3)\ (I,\frac{9}{2})$

حسب الخاصة التجميعية فإن G هو م.أ.م للنقاط

$(D,1)\ (A,2)\ (C,x)\ (B,x)$

$d=1\ ,\ c=\frac{9}{4}\ ,\ b=\frac{9}{4}\ ,\ a=2$

حيث ومنه $2x=\frac{9}{2} \Rightarrow x=\frac{9}{4}$

التمرين الرابع: في معلم متجانس لتكن النقاط

$A(2,1,3)\quad B(1,0,-1)\quad C(4,0,0)\quad D(0,4,0)\quad E(1,-1,1)$

1. أوجد $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ و $\vec{CE}$
2. أثبت أن النقاط C و D و E لا تقع على استقامة واحدة
3. أثبت أن $(CDE)\perp(AB)$
4. اكتب معادلة المستوي CDE
5. احسب بعد B عن CED
6. اكتب معادلة الكرة S التي مركزها B وتمس المستوي CDE

الحل:

$\vec{AB}(-1,-1,-4)$

$\vec{CD}(-4,4,0)$

$\vec{CE}(-3,-1,1)$

$\frac{-4}{-3}\neq\frac{4}{-1}$ إذاً الشعاعات $\vec{CD}$ و $\vec{CE}$ غير مرتبطان خطياً

فالنقاط E و C و D لا تقع على استقامة واحدة في نفس المستوي

$\vec{AB}\cdot\vec{CB}=4-4+0=0 \qquad \vec{AB}\perp\vec{CB}$

$\vec{AB}\cdot\vec{CE}=3+1-4=0 \qquad \vec{AB}\perp\vec{CE}$

بما أن $\vec{AB}\perp CDE$

فإن $\vec{AB}$ يصلح ناظماً للمستوي

$(CDE):\ -x-y-4z+d=0$

$C\in(CDE):\ -4+d=0 \Rightarrow d=4$

$CDE:\ -x-y-4z+4=0$

$$dist(B,CDE)=\frac{|-1+4+4|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{7}{\sqrt{18}}$$

بما أن الكرة S تمس المستوي CDE إذاً نصف قطرها

$R=dist(B,CDE)=\frac{7}{\sqrt{18}}$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=\frac{49}{18}$

التمرين الخامس: ① اكتب معادلة المخروط الدوراني الناتج عن دوران القطعة [OF] حول (OB) دورة كاملة

② اكتب معادلة الاسطوانة الدورانية التي مركزي قاعدتها C و G تمر من B.

الحل: رأس المخروط O ونصف قطر قاعدته $R=[FB]=1$

ارتفاعه $[OB]=1$ و محوره (OB)

$$\begin{cases}-x^2+y^2+z^2=0\\ 0<x\leq 1\end{cases}$$ علماً أن

محورها $(OO')\ //$

$$\begin{cases}C(0,1,0)\\ G(0,1,1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+(y-1)^2=2\\ 0\leq z\leq 1\end{cases}$$

التمرين السادس: لتكن ABCD رباعي وجوه ما ولنعرف النقاط

$\vec{DS}=\frac{1}{4}\vec{DC} \qquad \vec{BR}=\frac{1}{5}\vec{BA}$

$\vec{AQ}=\frac{3}{4}\vec{AD} \qquad \vec{BP}=\frac{1}{5}\vec{BC}$

أثبت تلاقي المستقيمين (PQ) و (RS)

الحل:

لدينا $\vec{BP}=\frac{1}{5}\vec{BC}$ ومنه P م.أ.م لـ $(B,4)\ (C,1)$

لدينا $\vec{AQ}=\frac{3}{4}\vec{AD}$ ومنه Q م.أ.م لـ $(A,1)\ (D,3)$

لدينا $\vec{BR}=\frac{1}{5}\vec{BA}$ ومنه R م.أ.م لـ $(A,1)\ (B,4)$

لدينا $\vec{DS}=\frac{1}{4}\vec{DC}$ ومنه S م.أ.م لـ $(D,3)\ (C,1)$

لتكن G م.أ.م للنقاط

$(A,1)\ (B,4)\ (C,1)\ (D,3)$

حسب الخاصة التجميعية فإن G م.أ.م لـ $(P,5)\ (Q,4)$

الجلسة الامتحانية في الرياضيات

عقدية وتطبيقاتها

تتضمن شرح شامل للأفكار

Online

م. الحر بشار ابراهيم

بالاشتراك مع

فريق الأفق التعليمي

للتواصل والاستفسار:

0932919655

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ $ax^2 + bx + c = 0$ $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$

السؤال الأول:

ليكن العددان المركبان: $Z_1 = 1+i$

$Z_2 = \sqrt{3} + i$

1- اكتب كلا من Z_1 و Z_2 بالشكل الأسي.

2- اكتب بالشكل الجبري، بالشكل الأسي $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$ ثم استنتج قيمة كلا من $(Z)^{48}$ ثم أوجد $\sin\frac{\pi}{12}$ $\cos\frac{\pi}{12}$

الحل:

1

$$Z_1 = 1+i$$

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_1 = re^{i\theta} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_2 = \sqrt{3} + i$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$Z_2 = re^{i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$$

$$= \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i-i-i^2}{(\sqrt{3})^2-i^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i-i+1}{3+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$Z = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}$$

الكتابة بالشكل الأسي:

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

استنتاج النسب المثلثية:

الشكل المثلثي

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

الشكل الجبري

$$Z = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

بالمقارنة بين الشكلين نجد أن:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

استنتاج $\sin\frac{\pi}{12}$ بنفس الطريقة

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

حساب Z^{48}:

$$Z^{48} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right]^{48}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{48}\left[\cos\frac{48\pi}{12} + i\sin\frac{48\pi}{12}\right]$$

$$= \frac{2^{\frac{48}{2}}}{2^{48}}\left[\cos 4\pi + i\sin 4\pi\right] = 2^{24}\cdot 2^{-48}\,[1]$$

$$= 2^{-24} = \frac{1}{2^{24}}$$

السؤال الثاني:

لتكن الأعداد

$$Z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$Z_2 = 1 - i6$$

$$Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

1) اكتب بالشكل الأسي كل من Z_1 و Z_2 و Z_3 و $\frac{Z_1}{Z_2}$ و $Z_1 \cdot Z_2$

2) اكتب بالشكل الجبري $\frac{Z_1}{Z_2}$ و $Z_1 \cdot Z_2$ واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ ثم احسب $(Z_2)^6$ و $(Z_3)^{24}$

3) أوجد الجذرين التربيعيين لـ Z_2 بالشكل الجبري

4) حل المعادلة التالية بالمجهول Z في C:

$$Z^3 + 6Z^2 = -29Z + 2Z^2$$

1)

$$Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$Z_2 = \sqrt{2}\, e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$Z_3 = e^{i(-\frac{\pi}{6})}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

2)

$$Z_1 \cdot Z_2 = (1+\sqrt{3}) + i(-1+\sqrt{3})$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(1-\sqrt{3})}{2} + \frac{i(1+\sqrt{3})}{2}$$

استنتاج النسب المثلثية للزاوية $\frac{\pi}{12}$:

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \quad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

حساب $(Z_2)^6$, $(Z_3)^{24}$

$$(Z_2)^6 = 8i$$

$$(Z_3)^{24} = 1$$

3)

$$Z_2 = 1 - i$$

بفرض $w = x + iy$ حل للمعادلة

$$a = 1, \quad b = -1$$

1) $x^2 - y^2 = 1$

2) $x^2 + y^2 = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

3) $x \cdot y = -\frac{1}{2}$

بجمع المعادلتين ① و ② نجد أن:

$$2x^2 = 1 + \sqrt{2} \to x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$\to x_1 = +\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\to x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

نعوض x_1 في ③:

$$+\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot y_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

الجذر الأول:

$$w_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}}\, i$$

الجذر الثاني:

$$w_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}}\, i$$

2. $x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

$x^2+y^2 = \sqrt{4^2+(-2\sqrt{5})^2}$

$x^2+y^2 = \sqrt{16+4(5)}$

$= \sqrt{16+20}$

$x^2+y^2 = \sqrt{36} = 6 \ldots (2)$

3. $x . y = \frac{b}{2}$

$x . y = \frac{-2\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}$

$x . y = -\sqrt{5} \ldots (3)$

بجمع المعادلتان (1) و (2) نجد :

$2x^2 = 10$

$x^2 = 5$

$x = +\sqrt{5} \;/\; x = -\sqrt{5}$

من أجل : $x = +\sqrt{5} \ldots$

$\sqrt{5} . y = -\sqrt{5}$

$y = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -1$

$\Rightarrow Z_1 = \sqrt{5} - i$

من أجل : $x = -\sqrt{5}$

نعوض في المعادلة (3) :

$-\sqrt{5}\, y = -\sqrt{5}$

$y = \frac{-\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = 1$

$\Rightarrow Z_2 = -\sqrt{5} + i$

(4)

$Z^3 + 6Z^2 = -29Z + 2Z^2$

$\Rightarrow Z(Z^2 + 4Z + 29) = 0$

$Z^3 + 4Z^2 + 29Z = 0$

إما $Z = 0$

أو $Z^2 + 4Z + 29 = 0$

$a = 1 \;,\; b = 4 \;,\; c = 29$

$\Delta = b^2 - 4a = 4^2 - 4(1)(29)$

$= 16 - 116 = -100 = 100i^2$

$\sqrt{\Delta} = 10i$

$Z_1 = \frac{-4+10i}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{10i}{2} = -2+5i$

$Z_2 = \frac{-4-10i}{2} = \frac{-4}{2} - \frac{10i}{2} = -2-5i$

السؤال الثالث :

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب :

$Z = 4 - 2\sqrt{5}\, i$

الحل :

لإيجاد الجذرين التربيعين لعدد مركب

لدينا ثلاث قوانين

1) نفرض .. $W = x + iy$ .. جذر تربيعي للعدد Z

1. $x^2 - y^2 = a$

2. $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

3. $x . y = \frac{b}{2}$

$\Rightarrow a = 4 \;,\; b = -2\sqrt{5}$

نستوجد قيمة x , y ونعوض بـ W

1. $x^2 - y^2 = a$

$x^2 - y^2 = 4 \ldots (1)$

السؤال الرابع:

تحقق أن $Z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ جذر للمعادلة $Z^2 + Z + 1 = 0$، ثم أوجد الجذر الآخر.

الحل:

نعوض Z_1 في المعادلة فيصبح لدينا:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + 1$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + 1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} i + \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + 1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1$$

$$= -\frac{2}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

تحققت المعادلة ومنه Z_1 جذر لهذه المعادلة

$$Z_2 = \overline{Z_1}$$

$$Z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

لإيجاد المرافق نعكس إشارة القسم التخيلي ومنه:

$$Z_2 = \overline{Z_1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

ملاحظة: في حال لم تكن الأمثال في المعادلة أمثال حقيقية نتذكر قانون

$$Z_1 + Z_2 = \frac{-b}{a}$$

$$Z_1 - Z_2 = \frac{c}{a}$$

وهذه الطريقة تنفع إذا كانت الأمثال عقدية أو حقيقية.

السؤال الخامس:

ليكن a عدد حقيقي من المجال $[0, \pi]$ و Z عدد عقدي و $f(Z)$ كثير حدود معرف بـ:

$$f(Z) = Z^3 - (1 - 2\sin a) Z^2 + (1 - 2\sin a) Z - 1$$

والمطلوب:

1. تحقق أن العدد 1 جذر لكثير الحدود $f(Z)$
2. عيّن العددين العقديين a, b بحيث

$$f(Z) = (Z - 1)(Z^2 + aZ + b)$$

3. حل في C المعادلة $f(Z) = 0$

الحل:

(1) نعوض في كثير الحدود $Z = 1$.

$$f(1) = (1)^3 - (1 - 2\sin a)(1)^2 + (1 - 2\sin a)(1) - 1$$

$$= 1 - 1 + 2\sin a + 1 - 2\sin a - 1 = 0$$

ومنه العدد (1) جذر لكثير الحدود.

(2) لكي نعين قيمة a, b ننشر المعادلة ونطابق مع المعادلة الأصلية (التي في السؤال)

$$f(Z) = (Z - 1)(Z^2 + aZ + b)$$

$$f(Z) = Z^3 + aZ^2 + bZ - Z^2 - aZ - b$$

$$= Z^3 + (a - 1)Z^2 + (b - a)Z - b$$

بالمطابقة مع المعادلة نجد:

$a - 1 = -1 + 2\sin a$ --- (1)

$b - a = 1 - 2\sin a$ --- (2)

$-b = -1$ --- (3)

من (1) نجد: $a = 2\sin a$

من (3) نجد: $b = 1$

للتأكد نعوض في المعادلة (2)

[3] [نحل في المعادلة التي في الطلب الثاني المسطورة]

$$f(z) = (z-1)(z^2 + az + b) = 0$$

إذا $z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$

إذا $z^2 + az + b = 0$

بكن $b = 1$ ، $a = 2\sin a$ كما وجدنا سابقاً

$$z^2 + 2\sin a\, z + 1$$

حل المعادلة باستخدام Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (2\sin a)^2 - 4(1)(1)$$

$$= 4\sin^2 a - 4$$

$$= 4(\sin^2 a - 1)$$

$$\Delta = -4\cot a = 4i^2\cos^2 a$$

$$\sqrt{\Delta} = 2i\cos a$$

للمعادلة حلان:

$$z_1 = \frac{-2\sin a + 2i\cos a}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = -\sin a + i\cos a$$

$$z_2 = \bar{z} = -\sin a - i\cos a$$

السؤال السادس:

ليكن $P(z)$ كثير حدود معرف بالصيغة:

$$P(z) = z^3 - 2(a + i\sqrt{3})z^2 - 4(a - i\sqrt{3})z + 8$$

حيث $a \in R$ ، المطلوب:

1. احسب العدد a لكي يكون $z = 2$ حلاً للمعادلة $P(z) = 0$

2. بفرض أن $a = 1$ جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ تحقق: $P(z) = (z-2)Q(z)$ ثم استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$

3. لتكن A, B, C نقاط تمثل الأعداد المركبة بالترتيب: $a = 2$ ، $b = 1 + i\sqrt{3}$ ، $c = -1 + i\sqrt{3}$

ⓐ أثبت أن $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ، واستنتج طبيعة المثلث ABC.

ⓑ ليكن $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل، عين a' ، b' ، c' التي تمثلها نقاط المستوي A' ، B' ، C'.

الحل:

[1] نعوض في المعادلة $z = 2$ ونجعلها تساوي الصفر ونحسب قيمة a.

$$P(z) = (2)^3 - 2(a + i\sqrt{3})(2)^2 - 4(a + i\sqrt{3})(2) + 8$$

$$= 8 - 2(a + i\sqrt{3})(4) - 4(a - i\sqrt{3})(2) + 8$$

$$= 8 - 8(a + i\sqrt{3}) - 8(a - i\sqrt{3}) + 8$$

$$= 8 - 8a - 8i\sqrt{3} - 8a + 8i\sqrt{3} + 8$$

$$= 16 - 16a = 0$$

$$\Rightarrow 16 = 16a$$

$$\Rightarrow a = 1$$

2 أولاً نعوض في $P(z)$ $a=1$ فتصبح $P(z)$ بالشكل:

$$P(z) = z^3 - 2(1+i\sqrt{3})\, z^2 - 4(1-i\sqrt{3})z + 8$$

$$P(z) = z^3 + (-2-2\sqrt{3}i) z^2 + (-4-4\sqrt{3}i) z + 8$$

نقسم على $z-2$

$$\frac{z^3 + (-2-2\sqrt{3}i)z^2 + (-4+4\sqrt{3}i)z + 8}{z-2}$$

$$= z^2 - 2\sqrt{3}i\, z - 4$$

$$\Rightarrow P(z) = (z-2)(z^2 - 2\sqrt{3}i\, z - 4)$$

نستنتج حلول المعادلة $P(z)=0$

$$(z-2)(z^2 - 2\sqrt{3}i\, z - 4) = 0$$

إما $z+2=0 \Rightarrow z=-2$

أو $z^2 - 2\sqrt{3}i\, z - 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2\sqrt{3}i)^2 - 4(1)(-4)$$

$$-12+16 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$$

للمعادلة حلان:

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3}i + 2}{2} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = \frac{2\sqrt{3}i - 2}{2} = \sqrt{3}i - 1$$

3 a

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{2-1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1-i\sqrt{3}}{-2} = \frac{1}{-2} + \frac{i\sqrt{3}}{-2}$$

تكتب بالشكل الأسي:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه أن $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$ [لأن cos سالب]

ومنه يكتب بالشكل $1\, e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ومنه:

$$\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

لاستنتاج طبيعة المثلث ABC نأخذ طويلة الطرفين:

$$\frac{|a-b|}{|c-b|} = \left|e^{\frac{2\pi}{3}i}\right|$$

$$\frac{AB}{BC} = 1$$

نضرب الطرفين بالوسطين:

$$AB = BC$$

فالمثلث متساوي الساقين

ويكون $\theta = \frac{2\pi}{3}$ فيه $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

ومنه المثلث ABC متساوي الساقين ومنه زاوية منفرجة

b) A' صورة A وفق تناظر محوره محور الفواصل منه

$a' = \bar{a}$ [مرافق الأصل = الصورة]

$\Rightarrow a' = 2$

B' صورة B وفق تناظر محوره محور الفواصل:

$b' = \bar{b}$ / $b' = 1 - i\sqrt{3}$

C' صورة C وفق تناظر محوره محور الفواصل:

$c' = \bar{c}$ / $c' = -1 - i\sqrt{3}$

السؤال السابع:

أوجد عددين عقديين p , q كي تقبل المعادلة:

$$z^2 + pz + q = 0$$

العددين $1+2i$ و $3-5i$ جذرين لها.

الحل:

نعلم أن:

$$z_1 + z_2 = -p$$

$$z_1 \cdot z_2 = q$$

ومنه:

$$-p = 4-3i$$

$$\Rightarrow p = -4+3i$$

$$q = (1+2i)(3-5i)$$

$$= 13+i$$

السؤال الثامن:

لدينا في مجموعة الأعداد العقدية كثير الحدود $P(z)$ المعرف وفق:

$$P(z) = 2z^4 - i2z^3 - z^2 - i2z + 2$$

المطلوب:

① بين أنه إذا كان α جذراً لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{\alpha}$ جذر له أيضاً.

② تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ واستنتج جذراً آخر له ثم اكتب هذا الجذر بالشكل الجبري.

③ اكتب الجذرين السابقين بالشكل الأسي.

④ لتكن الأعداد العقدية الآتية:

$a = 1+i$, $b = -1+i$, $c = -\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$, $d = \frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$ ، ولتكن النقاط الممثلة لها في معلم متجانس A, B, C, D ، عين m عدد حقيقي حتى يكون $ABCD$ رباعي ...

① بما أن α جذر للمعادلة فإنه يحقق $P(\alpha)=0$ أي أن:

$$P(\alpha) = 2\alpha^4 - i2\alpha^3 - \alpha^2 - i2\alpha + 2 = 0$$

لنتحقق أن $\frac{1}{\alpha}$ هو جذر للمعادلة أيضاً:

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 - i2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 2$$

$$= \frac{2}{\alpha^4} - \frac{2i}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha} + 2$$

نضرب جميع الحدود بـ α^4 ونختصر:

$$= 2 - i2\alpha - \alpha^2 - i2\alpha^3 + 2\alpha^4$$

نلاحظ أن الشكل الذي ظهر لدينا هو نفسه $P(\alpha)$ إذاً هي تساوي 0

ومنه فإن $\frac{1}{\alpha}$ جذر للمعادلة

② نعوض $1+i$ في كثير الحدود:

$$P(1+i) = 2(1+i)^4 - i2(1+i)^3 - (1+i)^2 - i2(1+i) + 2$$

$$= 2(1+2i-1)^2 - (i2)(1+i)(1+2i-1) - (1+2i-1) - (i2)(1+i) + 2$$

$$= 2(2i)^2 - (2i)(1+i)(2i) - (2i) - (2i)(1+i) + 2$$

$$= -8 + 4 + 4i - 2i - 2i + 2 + 2 = 0$$

ومنه $z = 1+i$ جذر للمعادلة

من الطلب السابق وجدنا أن α و $\frac{1}{\alpha}$ هما جذرا المعادلة فنستنتج أن $z = 1+i$ و $z_2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+i}$ هو الجذر الآخر للمعادلة

كتابته بالشكل الجبري تكون:

$$Z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$$

(3)

$$Z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_1 = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(4) نعلم أن قطرا المربع متناصفان أي

تحقق العلاقة:

$$\frac{b+d}{2} = \frac{a+c}{2} \Rightarrow b+d = a+c$$

$$-1 + i + \frac{m}{2} - \frac{m}{2} i = 1 + i - \frac{m}{2} - \frac{m}{2} i$$

$$\Rightarrow -2 + \frac{2m}{2} = 0 \Rightarrow m = 2$$

السؤال التاسع:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A، B، C التي تمثلها الأعداد العقدية: $a=1-i$

$c=\sqrt{3}(1+i)$ ، $b=-1+i$

بالترتيب، والمطلوب:

1- اكتب c, b, a بالشكل الأسي.

2- احسب arg وطويلة العدد العقدي $\frac{b-a}{c-a}$ ثم بين نوع المثلث ABC

3- احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D بحيث يكون الرباعي ABCD معين

4- احسب العدد العقدي e الممثل للنقطة E صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

الحل:

1

$$a=1-i$$

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

منه $\theta=-\frac{\pi}{4}$ [لأن sin سالب نأخذ $-\theta$]

$$a=re^{i\theta}\Rightarrow a=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$b=-1+i$$

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

منه $\theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ [لأن cos سالب نأخذ $\pi-\theta$]

$$b=re^{i\theta}\Rightarrow b=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$c=\sqrt{3}+\sqrt{3}i$$

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

منه $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$C=re^{i\theta}\Rightarrow c=\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{-1+i-1+i}{\sqrt{3}+\sqrt{3}i-1+i}$$

$$=\frac{-2+2i}{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i}$$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$\frac{(-2+2i)[(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)i]}{[(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i][(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)i]}$$

$$=\frac{-2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}i+2i+2\sqrt{3}i-2i+2\sqrt{3}+2}{3-2\sqrt{3}+1-(-3-2\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{2+2+2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i}{3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{4+4\sqrt{3}i}{3+3+1+1}=\frac{4+4\sqrt{3}i}{8}$$

$$=\frac{4}{8}+\frac{4\sqrt{3}}{8}i=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

حساب $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$

$$\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arg\frac{b-a}{c-a}=\frac{\pi}{3}+2\pi K$$

حساب طويلة العدد العقدي:

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$$

من الطلب السابق: طويلة العدد تساوي الواحد نستنتج

$$\frac{AB}{AC}=1$$

$$\Rightarrow AC=AB$$

فالمثلث متساوي الساقين ويكون الزاوية بين الساقين $\frac{\pi}{3}$ فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.

(3)

الحسب حتى يتحقق أن الشكل معين يجب أن يتحقق أحد خواصه:

قطرا المعين متناصفان أي:

$$\frac{a+c}{2}=\frac{d+b}{2}$$

نضرب ب 2 للتخلص من المقام:

$$a+c=d+b$$

نريد d نستعزلها بالطرف الآخر:

$$d=a+c-b$$

نعوض قيمة a, b, c.

$$d=(1-i)+(\sqrt{3}(1+i)-(-1+i))$$

$$d=1-i+\sqrt{3}+\sqrt{3}i+1-i$$

$$d=2+\sqrt{3}-2i+\sqrt{3}i$$

$$d=(2+\sqrt{3})+i(-2+\sqrt{3})$$

(4)

$$\text{الصورة}-\text{المركز}=e^{i\theta}(\text{الأصل}-\text{المركز})$$

$$\Rightarrow e-0=e^{i\frac{\pi}{2}}(\sqrt{3}+i\sqrt{3}-0)$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=i$$

$$e=i(\sqrt{3}+i\sqrt{3})$$

$$=\sqrt{3}i+\sqrt{3}i^2$$

حيث $i^2=-1$:

$$e=\sqrt{3}i-\sqrt{3}$$

السؤال العاشر :

نتأمل النقاط A , B , C , D الممثلة للأعداد العقدية $a=-1$, $b=2+i\sqrt{3}$, $c=2-i\sqrt{3}$, $d=3$ بالترتيب والمطلوب :

① ارسم النقاط A , B , C , D ثم احسب AB , BC , AC واستنتج طبيعة المثلث ABC .

② عين $\arg \frac{a-c}{d-c}$ ثم استنتج طبيعة المثلث DAC

③ أثبت أن D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$, $(B,2)$, $(C,2)$

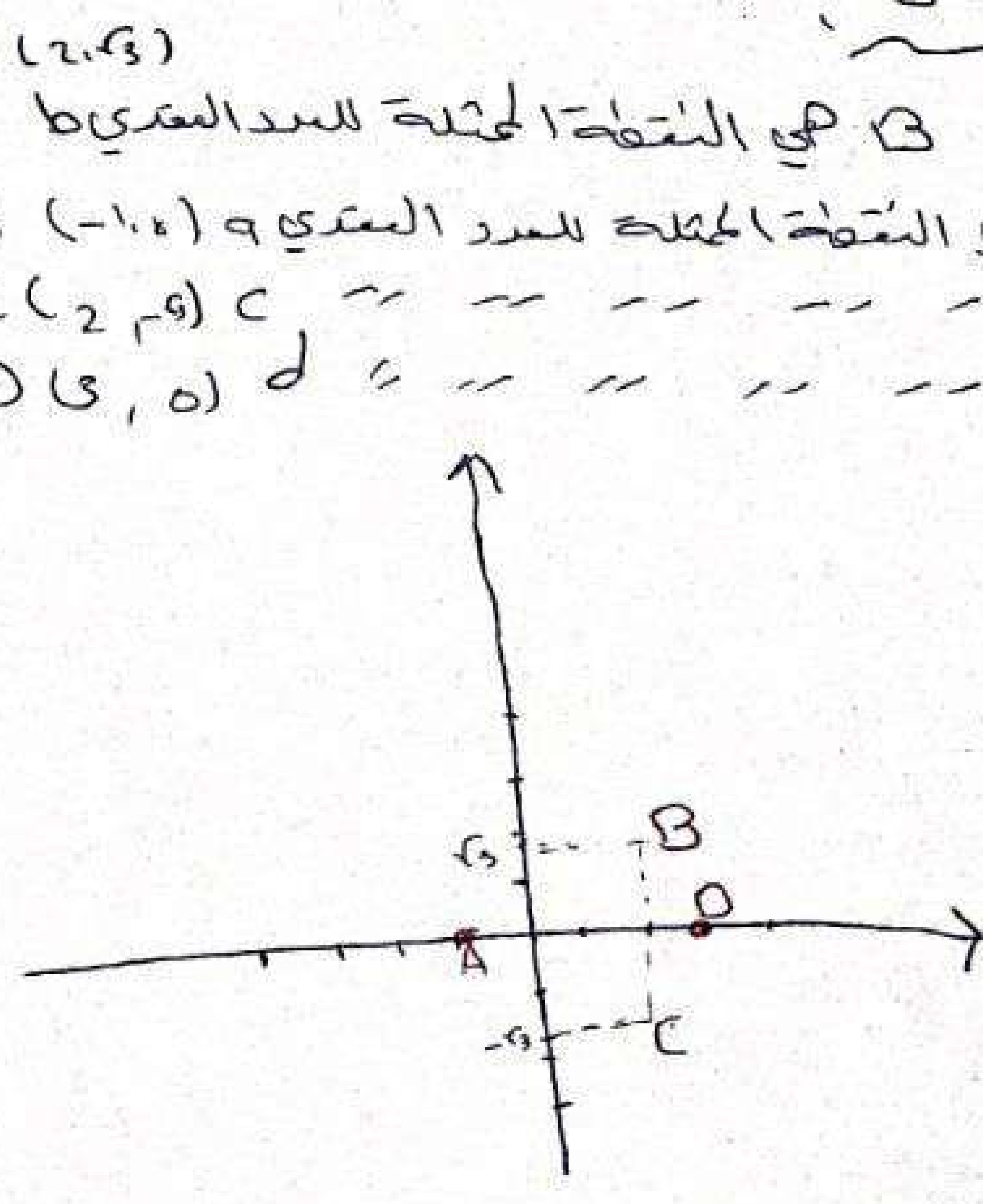
الحل :

① B هي النقطة الممثلة للعدد العقدي b — $B(2,\sqrt{3})$

A هي النقطة الممثلة للعدد العقدي a — $A(-1,0)$

C 〃 〃 〃 〃 〃 c — $C(2,-\sqrt{3})$

D 〃 〃 〃 〃 〃 d — $D(3,0)$



$$AB=|b-a|=|2+i\sqrt{3}-(-1)|$$
$$=|2+i\sqrt{3}+1|=|3+i\sqrt{3}|$$
$$AB=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$AC=|c-a|=|2-i\sqrt{3}+1|=|3-i\sqrt{3}|$$
$$AC=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$BC=|c-b|=|2-i\sqrt{3}-2-i\sqrt{3}|=|-2i\sqrt{3}|$$
$$BC=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

ومنه المثلث ABC متساوي الأضلاع

②

$$\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)=\arg\left(\frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}}\right)$$
$$=\arg\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)$$
$$=\arg\left(\frac{(-3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}\right)$$
$$=\arg\left(\frac{-3+3i\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i^2 3}{(1)^2-(i\sqrt{3})^2}\right)$$
$$=\arg\left(\frac{4i\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$=\arg(i\sqrt{3})$$

بما أن العدد تخيلي بحت فإن الزاوية $\frac{\pi}{2}$

بما أن $\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)=\frac{\pi}{2}$ فإن الزاوية بين $\vec{AC}$ و $\vec{DC}$ هي زاوية قائمة ومنه المثلث ADC قائم في C .

③

نفرض أن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$, $(B,2)$, $(C,2)$ فإن :

$$Z_G=\frac{(-1)(Z_A)+(2)(Z_B)+(2)(Z_C)}{-1+2+2}$$
$$=\frac{(-1)(-1)+(2)(2+i\sqrt{3})+(2)(2-i\sqrt{3})}{3}$$
$$=\frac{1+4+2i\sqrt{3}+4-2i\sqrt{3}}{3}=3$$

ومنه D مركز أبعاد متناسبة للنقاط A , B , C .

السؤال الحادي عشر:

فيما يأتي يرتبط العددان المركبان a ، b الممثلان للنقطتين A و B بالعلاقة المعطاة عين طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A في كل مما يأتي:

1. $b = a - 1 + 3i$
2. $b = 2a$
3. $b - 1 = -(a - 1)$
4. $b + 1 - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(a + 1 - i)$

الحل:

① نلاحظ أن:

$b = a - 1 + 3i = a + (-1 + 3i)$

من الشكل $z' = z + w$

فالنقطة B هي صورة النقطة A وفق الانسحاب شعاعه $\vec{w} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

② إن: $b = 2a$ يعني أن النقطة B هي صورة النقطة A وفق تحاك مركزه O ونسبته $k = 2$

③ نلاحظ أن:

$b - 1 = -(a - 1) \Rightarrow b = 1 - (a - 1)$

من الشكل:

$z' = w - (z - w)$

هذا يعني أن النقطة B هي صورة النقطة A وفق تناظر مركزي مركزه النقطة $w(1,0)$

④

$b + 1 - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(a + 1 - i) \Rightarrow$

$\Rightarrow b = (-1 + i) + e^{i\frac{\pi}{4}}(a - (-1 + i))$

من الشكل $z' = w + e^{i\theta}(z - w)$

هذا يعني أن النقطة B هي صورة النقطة A وفق دوران مركزه $\Omega(-1+i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{4}$

السؤال الثاني عشر:

لتكن M النقطة التي يمثلها العدد المركب $z = 1 + i$

جد العدد المركب z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق التحويل الموصوف في كل مما يأتي:

① T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$

② H التحاكي الذي مركزه O ونسبته 3.

③ S التناظر الذي مركزه $A(1 - 3i)$.

④ R الدوران الذي مركزه $A(2 - i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

الحل:

① انطلاقاً من الصيغة المركبة للانسحاب $z' = z + w$

$z' = 1 + i - 2 + 3i = -1 + 4i$

② انطلاقاً من الصيغة المركبة للتحاكي

$z' = w + k(z - w)$ يكون:

$z' = 0 + 3(1 + i - 0) = 3 + 3i$

③ حسب الصيغة المركبة للتناظر الذي مركزه $\Omega(w)$ يكون لدينا $z' = -z + 2w$ يكون:

$z' = -1 - i + 2(1 - 3i) = 1 - 7i$

④ حسب الصيغة المركبة للدوران الذي مركزه $\Omega(w)$ يكون لدينا $z' - w = e^{i\theta}(z - w)$ حيث:

$z' - (2 - i) = e^{i\frac{2\pi}{3}}(1 + i - 2 + i)$

$z' = 2 - i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1 + 2i)$

$= 2 - i + \frac{1}{2} - i - \frac{\sqrt{3}}{1}i - \sqrt{3}$

$z' = \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\right) - \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

الجلسة الامتحانية في الرياضيات

تحليل توافقي_احتمالات

تتضمن شرح شامل للأفكار

Online

م. الحر بشار ابراهيم

بالاشتراك مع

فريق الأفق التعليمي

للتواصل والاستفسار:

0932919655

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ $ax^2+bx+c=0$ $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

الموضوع : التاريخ : / /

احتمالات :

السؤال الأول :

ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية

الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي لـ X

K	0	1	2	3	4
$P(X=K)$					$\frac{16}{81}$

1- ما عدد الاختبارات في التجربة ؟

2- أكمل الجدول المجاور

3- احسب التوقع الرياضي وتباين المتحول العشوائي X .

الحل :

1- عدد النجاحات في هذه التجربة البرنولية هي : 4 نجاحات

2- $n=4$

$$P(X=4)=\binom{4}{4}p^4\cdot q^{4-4}$$

$$P(X=4)=p^4 \Rightarrow p^4=\frac{16}{81}=\frac{(2)^4}{(3)^4} \Rightarrow p=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow q=\frac{1}{3}$$

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=4\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{27}=\frac{8}{81}$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=6\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{24}{81}$$

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)=4\times\frac{8}{81}=\frac{32}{81}$$

الموضوع : .... التاريخ : / /

K	0	1	2	3	4
$p(X=K)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

3- $E(X) = np = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ $\quad V(X) = npq = 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$

السؤال الثاني:

يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء.
عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء.
1- نسحب عشوائياً كرة. ما احتمال أن تكون حمراء اللون؟
2- نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة.
ونعرّف X المتحول العشوائي الذي يدل على ~~التتالي مع الإعادة~~ عدد الكرات الحمراء
المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث.
ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X.

الحل:

- نفرض عدد الكرات البيضاء : a
- نفرض عدد الكرات الحمراء : $3a$

عدد الكرات الكلي $= 3a + a = 4a$

1- نفرض الحدث A هو احتمال أن تكون الكرة حمراء اللون:

$$P(A) = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$$

2- نسحب 3 كرات $\Leftarrow$ على التتالي مع "إعادة".
X يدل على عدد الكرات الحمراء.

$I = \{0, 1, 2, 3\}$

الموضوع : .... التاريخ : / /

نفرض الحدث B هو احتمال أن تكون الكرة بيضاء اللون ⇐ وذلك لنحسب احتمالها.

$$P(B) = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$$

1- $P(X=0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

$P(X=1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 3 = \frac{9}{64}$

$P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times 3 = \frac{27}{64}$

$P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$

x_i	0	1	2	3
$P(x=x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

الموضوع : السؤال الثالث :
التاريخ : / /

يحتوي صندوق على أربع كرات حمراء، وثلاث كرات خضراء وواحدة بيضاء.
نسحب عشوائياً معاً ثلاث كرات من الصندوق.
ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة
1. ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟
2. احسب كلاً من $p(x=1)$ و $p(x=3)$ ثم استنتج قيمة $p(x=2)$
3. احسب توقع X وانحرافه المعياري.

الحل:

1. $X = [1, 2, 3]$

2. $p(x=1) = \dfrac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{4+1}{56} = \dfrac{5}{56}$

$p(x=3) = \dfrac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{12}{56}$

$p(x=2) = 1 - [p(x=1) + p(x=3)]$

$= 1 - \left[\dfrac{5}{56} + \dfrac{12}{56}\right]$

$= 1 - \dfrac{17}{56} = \dfrac{56}{56} - \dfrac{17}{56} = \dfrac{39}{56}$

X	1	2	3
$p(x=k)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

3-

$$E(x) = \Sigma\, p_i \cdot x_i$$

$$= 1\left(\frac{5}{56}\right) + 2\left(\frac{39}{56}\right) + 3\left(\frac{12}{56}\right)$$

$$= \frac{5 + 156 + 108}{56} = \frac{119}{56} = \frac{17}{8}$$

$$V(x) = \Sigma\, x^2 px \cdot E(x)^2$$

$$= \frac{5 + 156 + 108}{56} - \left(\frac{17}{8}\right)^2 \Rightarrow \frac{269}{56} - \frac{289}{64}$$

السؤال الرابع

يشتري محل للأدوات الكهربائية 400 مصباح من المصنع A و 200 مصباح من المصنع B ، نعلم أن نسبة المصابيح المعطوبة في إنتاج A هي 40% وفي إنتاج B هي 10% . نسحب عشوائياً مصباحاً.

1- ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

2- إذا علمت أن المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من المصنع B .

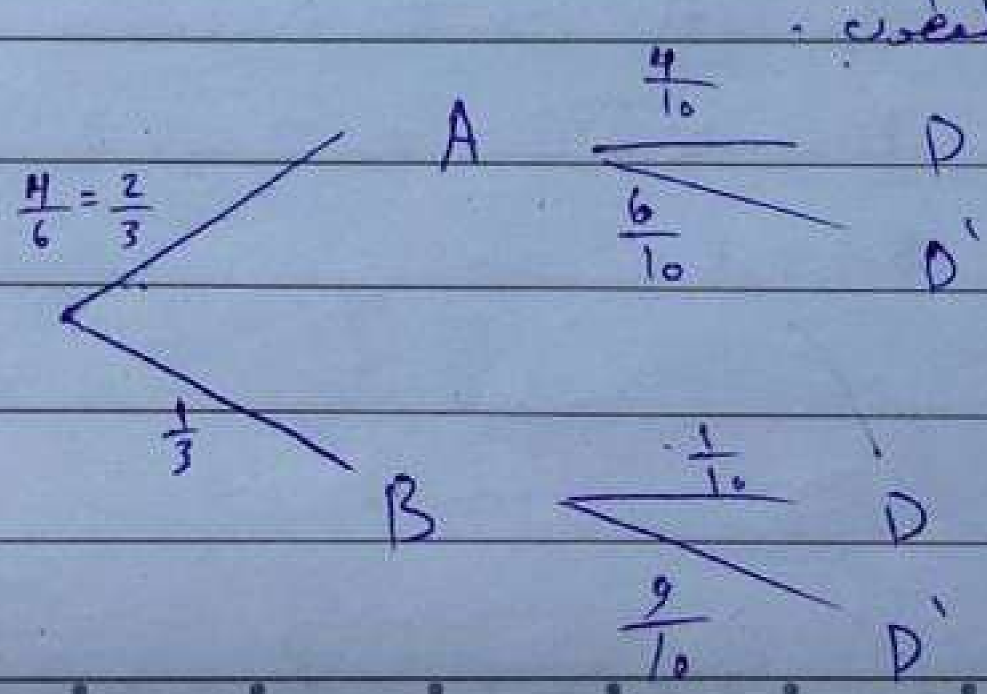
الحل:

A ← ينتج 400 مصباح ، 40% معطوب

B ← ينتج 200 مصباح ، 10% معطوب

عدد المصابيح الكلي = 200 + 400 = 600 مصباح

• نرمز بالرمز D إلى المصباح المعطوب.



$$P(D) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{8+1}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{30} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{9}$$

تحليل توافقي :

السؤال الأول

يلتقي عشرة أصدقاء في حفل يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط

1- كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل؟ عمم النتيجة السابقة في حالة n صديقاً

2- كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل إذا علمت أن في الحفل أربعة أشخاص متخاصمين فيما بينهم لا يصافح أي منهم الآخر.

الحل :

عدد المصافحات $= \binom{10}{2} = 45$

في حالة n صديقاً

عدد المصافحات $= \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

عدد المصافحات $= 45 - (15 + 6)$

$= 45 - (21) = 24$

الموضوع :

التاريخ :   /   /

السؤال الثاني

في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط A ، B ، C ، D ، E ، F

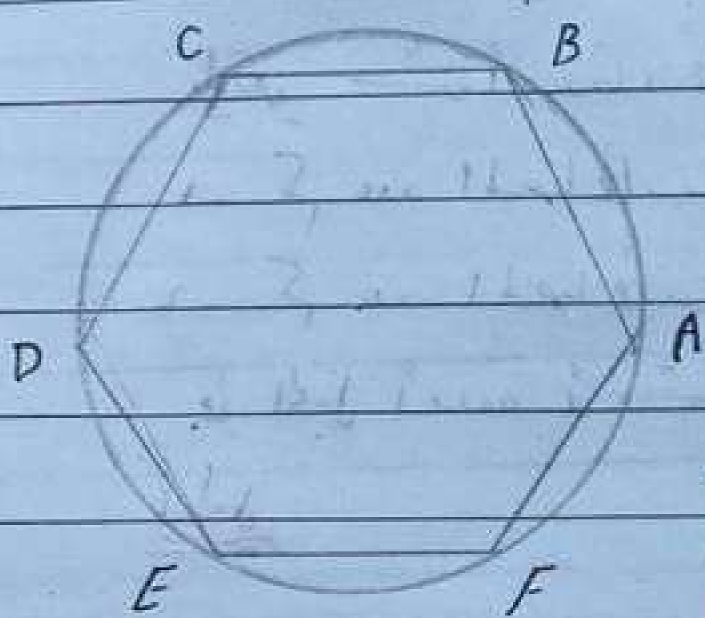
موزعة على دائرة بحيث تشكل رؤوساً سداسي منتظم.

نجري التجربة التالية:

نصل بين كل ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلث

1- ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

2- ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب القائمة



الحل

1-

عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها $= \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ مثلث

2-

عدد المثلثات القائمة =

لإيجاد عدد المثلثات القائمة:

لدينا ثلاثة أقطار وكل قطر يقابل أربع زوايا قائمة

$\Rightarrow$ عدد المثلثات القائمة $= 3 \times 4 = 12$ مثلث قائم

الموضوع :   التاريخ :   /   /

السؤال الثالث :

لتكن المجموعة $S = \{1, 2, 5, 8, 9\}$

1. كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S .
2. كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S ؟
3. كم عدداً زوجياً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S ؟

الحل :

1) يمكن اختيار المنزلة الأولى بطرق عددها : 5

يمكن اختيار المنزلة الثانية بطرق عددها : 5

عدد $5 \times 5 = 25$. حسب المبدأ الأساسي

2) يمكن اختيار المنزلة الأولى بطرق عددها : 5 طرق

يمكن اختيار المنزلة الثانية بطرق عددها : 4 طرق

عدد $5 \times 4 = 20$ حسب المبدأ الأساسي

3) يمكن اختيار المنزلة الأولى بطرق عددها : 2 طرق

يمكن اختيار المنزلة الثانية بطرق عددها : 5 طرق

عدد $2 \times 5 = 10$: حسب المبدأ الأساسي للعد

الموضوع : تحليل توافقي التاريخ : / /

السؤال الأول :

عين n في كل من الحالات الآتية :

1- $P^{4}_{n+1} = 14\ P^{3}_{n}$

حتى تكون المعادلة قابلة للحل يجب تحقق الشرط

$x \geq 3 \qquad n+2 \geq 4 \rightarrow n \geq 2$

شرط الحل :

$n \geq 3$

$$P^{4}_{n+2} = 14\ P^{3}_{n}$$

$$(n+2)(n+1)\cancel{(n)}\cancel{(n-1)} = 14\cancel{(n)}\cancel{(n-1)}(n-2)$$

$$(n+2)(n+1) = 14(n-2)$$

$$(n+2)(n+1) = 14n - 28$$

$$n^2 + n + 2n + 2 - 14n + 28 = 0$$

$$n^2 - 11n + 30 = 0$$

تحليل مباشر :

$$(n-6)(n-5) = 0$$

حل المعادلة على طريقة إما أو :

إما $\quad n-6=0 \rightarrow n=6 \rightarrow$ مقبول

أو $\quad n-5=0 \rightarrow n=5 \rightarrow$ مقبول

2- $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

شرط الحل : $n \geq 2\ ,\ n \geq 4$

تقاطع الحلول $n \geq 4$

$$3\ \frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 14\ \frac{n(n-1)}{2!}$$

$$3\ \frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1} = 14\ \frac{n(n-1)}{2\times1}$$

الموضوع : .... التاريخ : / /

$$\frac{(n-2)(n-3)}{8} = 7$$

طرفين في وسطين :

$$n^2 - 3n - 2n + 6 = 56$$

$$n^2 - 5n + 6 - 56 = 0$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$

تحليل مباشر :

$$(n-10)(n+5) = 0$$

حل المعادلة على طريقة إما أو :

إما $n - 10 = 0 \Rightarrow n = 10$ مقبول

أو $n + 5 = 0 \Rightarrow n = -5$ مرفوض .

3. $\frac{1}{6} P^{2}_{n+1} = \binom{n+2}{4}$

شرط الحل :

$$n+1 \geq 2 \longrightarrow n \geq 1$$

$$n+2 \geq 4 \longrightarrow n \geq 2$$

تقاطع الحل :

$$n \geq 2$$

$$\frac{1}{6}(n+1)(n) = \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)}{4!}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{(n+2)(n-1)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$1 = \frac{(n+2)(n-1)}{4}$$

طرفين في وسطين :

الموضوع : .... التاريخ : / /

$4 = (n+2)(n-1)$

$4 = n^2 - n + 2n - 2$

$4 = n^2 + n - 2$

$0 = n^2 + n - 2 - 4$

$0 = n^2 + n - 6$

تحليل مباشر :

$(n+3)(n-2) = 0$

إما $n+3=0 \Rightarrow n=-3$ مرفوض

أو $n-2=0 \rightarrow n=2$ مقبول .

السؤال الثاني :

احسب قيمة r إن علمت :

$$\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$$

شرط الحل : $r \le 4$, $r \le 5$, $r \le 6$

تقاطع الحلول : $r \le 4$

$$\frac{1}{\frac{4!}{r!(4-r)!}} = \frac{1}{\frac{5!}{r!(5-r)!}} + \frac{1}{\frac{6!}{r!(6-r)!}}$$

$$\frac{r!(4-r)!}{4!} = \frac{r!(5-r)!}{5!} + \frac{r!(6-r)!}{6!}$$

* $(5-r)! = (5-r)(4-r)!$

* $(6-r)! = (6-r)(5-r)(4-r)!$

$$\rightarrow \frac{r!(4-r)!}{4!} = \frac{r!(5-r)(4-r)!}{5\times 4!} + \frac{r!(6-r)(5-r)(4-r)!}{6\times 5\times 4!}$$