النهايات

قواعد النهايات:

1] القسمة:

$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$	$\frac{0}{\text{شو ما كان}} = 0$
① $\frac{\infty}{\infty} =$ ح.ع.ت	$\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$
② $\frac{0}{0} =$ ح.ع.ت	$\frac{+\infty}{+\text{عدد}} = +\infty$

2] الجمع والطرح:

$\infty \mp \text{عدد} = \infty$

الإشارة حسب إشارة الـ∞ الأول

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

③ $+\infty - \infty =$ ح.ع.ت

3] الضرب:

$+\infty \cdot +\infty = +\infty$

$-\infty \cdot -\infty = +\infty$

تنبيه: $\boxed{+\infty \times -\infty = -\infty}$

④ $0 \cdot \infty =$ ح.ع.ت

4] القوى:

$(+\infty)^n = +\infty$

"إذا كان الأساس موجب فالناتج دائما موجب"

$(-\infty)^n =$
- n عدد فرديا: $-\infty$
- n عدد زوجيا: $+\infty$

حالات عدم التعيين:

1] $\frac{\infty}{\infty} =$ ح.ع.ت

2] $\frac{0}{0} =$ ح.ع.ت

3] $+\infty - \infty =$ ح.ع.ت

4] $0 \cdot \infty =$ ح.ع.ت

ملاحظة: نهاية العدد هو العدد نفسه

$\lim_{x\to 5} (2) = 2$

نهاية تابع كثير الحدود

النهاية عند عدد حقيقي ⇓

نعوض في التابع كل x بهذا العدد.

مثال: $f(x) = x^2+x-2$

أوجد النهاية عند $a=5$

تابع كثير الحدود

$$\lim_{x\to 5} f(x) = 25+5-2 = 28$$

مثال 3:

$$\lim_{x\to -\infty} (x^4-x^3+2-x^5)$$

$$\lim_{x\to -\infty} (-x^5) = -(-\infty)^5 = +\infty$$

النهاية عند $\mp\infty$ ⇓

نعوض بالحد المسيطر فقط

هو الحد ذو أعلى درجة من الأس

مثال 1:

$$\lim_{x\to +\infty} (x^2+x-2) =$$

$$\lim_{x\to +\infty} (x^2) = +\infty$$

مثال 2:

$$\lim_{x\to -\infty} (x^3-x^2-10) =$$

$$\lim_{x\to -\infty} (x^3) = -\infty$$

مثال 4:

$$\lim_{x\to +\infty} (x^2+x-5-\sqrt{x})$$

① ليس تابع كثير حدود لوجود الجذر

② وهو حالة عدم تعيين طريقة حله هي:

نأخذ عامل مشترك

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{5}{\sqrt{x}}-1\right)$$

نختصر ثم نعوض

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}} \Rightarrow = x^2 = x.x = \frac{\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = x.\sqrt{x}$$

نختصر

$$\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\left(x.\sqrt{x}+\sqrt{x}-\frac{5}{\sqrt{x}}-1\right)$$

نعوض

لا يوجد نهاية لأن مجموعة تعريف $\sqrt{x}$

$\Leftarrow [0,+\infty[$

$$= +\infty(+\infty+\infty-0-1) = +\infty(+\infty) = +\infty$$

ملاحظة: العدد داخل الجذر دوماً موجب. > يسار أو تحت صفر
وإذا وجد قوس للتربيع فالإجابة موجبة دائماً. > يمين أو موجب

متى نستخدم النهاية من اليمين والنهاية من اليسار؟

1. عندما نحصل بعد التعويض الذهني على $\frac{\text{عدد}}{0} \Leftarrow \frac{5}{0}$

2. عند الأعداد التي تكون طرف مجال مفتوح في مجموعة التعريف $]5, +\infty[$

ملاحظة:

عندما يطلب إيجاد النهاية عند عدد نبدأ بتحديد مجموعة التعريف.

مثال: أوجد نهاية التابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ عند الصفر.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ → $\mathbb{R}$ ، $\sqrt{x} \to [0, +\infty[\setminus \{0\}$

$\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$

مجموعة التعريف: $D_f =]0, +\infty[$

لأن الصفر يعدم المقام

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

أوجد نهاية التابع $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{2-x}}$ عند الـ 2.

عندما $\sqrt{2-x}$ ، $2-x \geq 0$

$\Rightarrow 2 \geq x \Rightarrow]-\infty, 2]$

$]-\infty, 2] \cap]-\infty, +2] \setminus \{2\}$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

① ندرس الإشارة ② نأخذ عدد قبل الـ 2 ونعوض بالمقام فقط

نهاية تابع كسري

البسط أكبر المقدار / للمقام أكبر الدرجة

النهاية عند عدد حقيقي a ، النهاية عند $\mp\infty$

$a \in D$: نعوض مكان كل x ، a.

$a \notin D$: $\frac{0}{0}$ ح.ع.ت ، $\frac{\text{عدد}}{0}$ حسب مجموعة التعريف

النهاية عند $\mp\infty$ ⇓ نختصر ثم نعوض: نعوض بالحد المسيطر بالمقام وبالبسط.

مثال: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$

$\mathbb{R} \setminus [-2, +2]$

احسب النهاية عند $a = 3$

$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{4}{5}$

مثال 1: $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-2x} = \frac{x^3}{x^2}$

$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\sqrt{x-1}\ -1$

$+\infty-1 \quad -\infty$

$-\infty \quad -\infty = (+\infty, -\infty)$

مثال 2: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x}{x^3+x^2+1} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x^{\infty}} = 0$

مثال 3: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-x+10}{3x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3x^2}$

نختصر ثم نعوض

$= \frac{2}{3}$ نهاية ...

نستنتج إن عند ∞

إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام	إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام	إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام
⇓	⇓	⇓
إما ∞+ أو - الاختصار	0	أمثال الحد الأكبر بالبسط / أمثال الحد الأكبر بالمقام

حالة عدم التعيين:

$\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$ ، $0.\infty$ ، $+\infty-\infty$

ملاحظة: $\sqrt{x^2} = |x|$

$+x$	$-x$
عندما	عندما
$x\to+\infty$	$x\to-\infty$
$x\to 0^+$	$x\to 0^-$

إزالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$:

1. إخراج عامل مشترك.
2. ضرب البسط والمقام بالمرافق.

مثال: ليكن التابع: $f(x)=\sqrt{x-1}-x$

أوجد النهاية عند $+\infty$ علماً أن $D_f=[1,+\infty[$

الحل

حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$ لإزالتها:

سنخرج عامل مشترك على مرحلتين:

1. نخرج x^2 عامل مشترك داخل الجذر:
2. نخرج x عامل مشترك من الحدين:

المرحلة 1

$f(x)=\sqrt{x^2\left(\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}-x$

$f(x)=\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-x$

$\sqrt{a.b}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$

$f(x)=\sqrt{x^2}.\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-x$

$=|x|.\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-x$

$=\underbrace{+x\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}_{\text{حد أول}}\ \underbrace{-x}_{\text{حد ثاني}}$

المرحلة 2 $\frac{-x}{x}$

عامل مشترك

$=x\left(\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\left(\sqrt{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}-1\right)$

$=+\infty\left(\sqrt{0-0}-1\right)$

$=+\infty(-1)=-\infty$

2. ضرب البسط والمقام بالمرافق

"اضرب بالمرافق ونقسم عليها"

$(\sqrt{ax^2+\dots})-(bx+\dots)$ | $\sqrt{x^2+\dots}-\sqrt{x^2+\dots}$ | $\sqrt{x^2+a}-b$

أمثال الحد المسيطر داخل الجذر هو مربع أمثال الحد الموجود خارج الجذر

عندما $a=b^2$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-1}-2x$$

4 مربع 2 تماماً نسيطر على باقي الضرب بالمرافق.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{4x^2-1}-2x)(\sqrt{4x^2-1}+2x)}{\sqrt{4x^2-1}+2x}$$

نضرب بالمرافق ونقسم عليه

مطابقة: مقدار ناقص مقدار ومقدار زائد مقدار

$\Rightarrow$ (سين - جي) (سين + جي)

$\Rightarrow$ $($سين$)^2-($جي$)^2$

نطبق العلاقة

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-1}+2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{4x^2-1}+2x}\Rightarrow \frac{\infty^2-1}{+\infty}+\frac{+\infty}{+\infty}$$

$$=\frac{-1}{+\infty}=0$$

لا تمل، الملل عدو النجاح.

متساويان

الحد المسيطر في كلا الجذرين هو نفسه

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2}\right]$$

لا ننسى علامة مربع الجذر

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2})}{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2})}$$

نتذكر سين و جي / مربع الأول - مربع الثاني

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2+2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}}=\frac{3}{\sqrt{+\infty}+\sqrt{+\infty}}=\frac{3}{+\infty+\infty}$$

$$=\frac{3}{+\infty+\infty}=\frac{3}{+\infty}=0$$

لأن: $\lim \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}=+\infty$

$a=b^2$

نوضحها في الصفحة

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

تذكرة.

$\frac{x}{x^2} = \frac{x}{x \cdot x} = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$

$\frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{x \cdot x} = \frac{\sqrt{x}}{\underbrace{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}_{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ $\qquad$ $x = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$

إزالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$

1. إخراج عامل مشترك:
2. ضرب البسط والمقام بالمرافق:

$\sqrt{x}$ أو $x \to x$

$\sqrt{x} \to x$

أكبر أس $\to x^2$

$x\sqrt{x} \to x$ أو $\sqrt{}$

مثال: ليكن التابع $f(x) = x - \sqrt{x}$

أوجد النهاية عند $+\infty$ علماً أن $D_f = [0, +\infty[$

الحل:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$

نخرج عامل مشترك

طريقة 1

$\lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x}\right)$

نختصر ونعوض

$\lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty(1-0) = +\infty$

طريقة 2

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\frac{x}{\sqrt{x}} - 1\right)$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = +\infty(+\infty - 1) = +\infty$

مثال: $\lim_{x\to+\infty} x^2 + x - \sqrt{x}$

نخرج عامل مشترك

الحل:

$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$

$= +\infty(1+0-0)$

$= +\infty$

الحالة الثالثة نضرب البسط والمقام بالمرافق:

$\sqrt{x+a} - b$

$\sqrt{x^2+a} - b$

$a = b^2$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9} - 3}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{0+9} - 3}{0} = \frac{0}{0}$ ع.ت

$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x^2+9} - 3)(\sqrt{x^2+9} + 3)}{x(\sqrt{x^2+9} + 3)} =$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+9-9}{x(\sqrt{x^2+9}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{0}{\sqrt{0+9}+3} = \frac{0}{3+3} = \frac{0}{6} = 0$

المرافق كثير عظيم بالجذور

دائماً

نفعل التمارين المثالية

مجموعة التعريف لما يكون تحت جذر x
فقط

مثال: على الحالة الثالثة، لو كان دون تربيع x

$$\sqrt{x+a} - b \Leftarrow$$

شرط يكون جذر الـ a موجب: $a = b^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)}$$

نبسط

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}+\cancel{9}-\cancel{9}}{\cancel{x}(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{0+9}+3} =$$

$$\frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

نحل التمرين ✓

مثال: لو كان العكس

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x}} = \frac{]2,+\infty]}{[0,+\infty[}$$

لا يساوي لـ $-\infty$ فإما يقترب للموجب أو للصفر

عامل مشترك

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-\frac{2}{x})}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)$$

$$= +\infty(1-0)$$

$$= +\infty$$

إزالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$:

نهاية تابع كسري تذكرة:

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim_{x\to\mp\infty} \left[\frac{\text{الحد المسيطر بالبسط}}{\text{الحد المسيطر بالمقام}}\right]$$

أمثلة:

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-3} = \lim \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 2$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+5}{x^2-2x} = 0$ فوراً صفر

درجة البسط أصغر من المقام

بالحالة الثانية $\frac{0}{0}$ ⟸ فوراً تحلل

نحلل البسط والمقام

إخراج عامل مشترك ثم نختصر

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-2} = \frac{\infty}{\infty}$$ ع.ت

$$= \frac{[0,+\infty[}{]2,+\infty]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{x(1-\frac{2}{x})}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1-\frac{2}{x})} = \frac{1}{+\infty(1-0)} = \frac{1}{\infty}$$

$$= 0$$

نأخذ الجذر ونأخذ x^2 عامل مشترك

$\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ نخرج عامل مشترك

مثال ٦ جـ: سؤال دورة قديم

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+5}}{1-3x} = \frac{\infty}{\infty}$$

المعرف على $R \setminus \{\frac{1}{3}\}$

احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

الحل:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2(4+\frac{5}{x^2})}}{1-3x}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{1-3x}$$

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{1-3x}$$

$$= \frac{x\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x(\frac{1}{x}-3)}$$

نخرج عامل مشترك

$$= \frac{\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{\frac{1}{x}-3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{4+0}}{0-3} = \frac{2}{-3}$$

مثال ٦ جـ:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x(-2+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x(-2+\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{-2+0}{-\sqrt{1+0}} = 2$$

ثالثاً: إزالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$:

* تابع كسري ⇐ نحلل البسط والمقام ثم نختصر ثم نعوض.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} \Rightarrow$$ ع.ع.ت من الشكل $\frac{0}{0}$: $\frac{2-2}{4-2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$ مطابقة

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

* "اذا كان البسط أو المقام أو كليهما يحويان جذر تربيعي عندها نضرب البسط والمقام بمرافق (الحد الذي يحوي الجذر) ثم نختصر ونعوض". مثال:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3} \Rightarrow \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0}$$ ع.ع.ت

نضرب البسط والمقام بمرافق

$$\lim \frac{(\sqrt{2x+10}-4)(\sqrt{2x+10}+4)}{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}$$

(جذر - سين)² = (جذر + سين)(جذر - سين)

$$\lim \frac{2x+10-16}{(x-3)\sqrt{2x+10}+4} =$$

$$\lim \frac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}$$

نخرج الـ 2 عامل مشترك

$$= \lim_{x \to 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}$$

$$\lim \frac{2}{4+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

رابعاً: إزالة عدم التعيين من الشكل $0.\infty$

نعيد صياغة التابع لتصبح $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

ممكن نكتب أيضاً مستعيناً بالتابع اللاغارتمي

$$\star . \heartsuit = \frac{\star}{\frac{1}{\heartsuit}}$$

أو $= \frac{\heartsuit}{\frac{1}{\star}}$

مثال: احسب نهاية التابع

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}(\sqrt{x+1})$ عند $+\infty$

درجة البسط أصغر من درجة المقام صفر

$$\Downarrow$$

$$0 \times \infty =$$

$\Rightarrow$ ع.ع.ت

الحل:

$$= \frac{x}{x^2+1} \times \frac{(\sqrt{x+1})}{1}$$

$$= \frac{x\sqrt{x+1}}{x^2+1}$$

نخرج من المقام عامل مشترك x^2

$$= \frac{x\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{x^2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \qquad \frac{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{0+0}{1} \qquad 1+0 = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{0}{1} = 0$$

$\sqrt{x^2} = |x| = \boxed{+x}$ لأن $+\infty$

$= -x \quad -\infty$

$$\lim \frac{x}{x^2+1}(\sqrt{x}+1)$$

نخرج ال $x\sqrt{x}$ عامل مشترك

$$\lim = \frac{x\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\frac{x\sqrt{x}}{x^2} = \frac{\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x}}{\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x}.\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\sqrt{\infty} \times 1+0 = +\infty$$

★ = الزاوية
المعوض هو الزاوية

ليش!!!
أساسي

النهايات المثلثية لا بد من معرفة الاشتقاق الأصلي

cos★

المعوض 0
⇓ قانون
قانون نحوله إلى sin
⇓
$$\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

المعوض ∞
⇓
إحاطة

sin★

المعوض ∞
⇓
إحاطة

المعوض 0
⇓ قانون

$$\lim_{\star\to0}\frac{\sin\star}{\star}=1$$

أو

$$\lim_{\star\to0}\frac{\star}{\sin\star}=1$$

$1 = \frac{\sin \text{الزاوية}}{\text{نفس الزاوية}}$

توضيح: $\frac{1}{0}=\infty$

$$\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}$$

هاد إحاطة

$\frac{1}{\infty}=0$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$$

هاد معوض 0

قواعد الإحاطة:

إذا كانت $x\in R$ فإن

1. $-1\leq \sin\star \leq +1$
2. $-1\leq \cos\star \leq +1$
3. $0\leq \sin^2\star \leq 1$
4. $0\leq \cos^2\star \leq 1$

مثال على sin المعوض.

لازم ال 2x تكون أيضاً بالمقام 2x

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x} \Leftarrow \frac{\sin(0)}{3(0)}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{3}(2)\frac{\sin 2x}{2x}$$

$$=\frac{1}{3}(2)(1)=\frac{2}{3}$$

لأنه $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

مثال على sin الإحاطة {إذا كانت الزاوية تسعى إلى ∞ معناها إحاطة}

احسب:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sin x}{2+x} \Rightarrow \frac{-\sin+\infty}{2+\infty}$$

إذا كانت $x\in R$ فإن

$$-1\leq \sin x \leq +1$$

نضرب (-1) ونغير الإشارة

$$+1\geq -\sin x \geq -1$$

نقسم على $(2+x)$

$$\frac{1}{2+x}\geq\frac{-\sin x}{2+x}\geq\frac{-1}{2+x}$$

نعوض بالطرفين عدد أو ∞ أو ∞-

نهاية $\frac{1}{2+x}$ و $\frac{-1}{2+x}$ إذا كانت الجواب نفسه يعني حسب قانون الإحاطة $\frac{-\sin x}{2+x}$ يسعى إلى صفر.

TAP

/ /

$\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$

فإن $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$

مثال سؤال الدورة 2013

احسب: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ ، تعويض: $\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

بما أن المعوض 0 سوف نستخدم قانون تحويل sin

$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin Q}{Q} = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-[1-2\sin^2 x]}{x}$ ، $\frac{2x}{2} = x$ هنا نوصل للمعادلة

$\lim_{x\to 0}\frac{1-1+2\sin^2 x}{x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\sin x}{x}$ → أسرة^2 = أسرة x أسرة

$= 2(1)(0) = 0$

لأن: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2+x} = 0$ محدد / على ∞

$\lim_{x\to +\infty}\frac{-1}{2+x} = 0$ محدد / على ∞

$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{-\sin x}{2+x} = 0$

مثال على ال cos الإحاطة:

أوجد نهاية $(x-1)^2\cos\frac{1}{x-1}$

عند 1.

$(1-1)^2 = 0$ ، $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$

بما أن المعوض ∞ ⇐ إحاطة

$-1 \leq \cos\frac{1}{x-1} \leq +1$

حيث $x \neq 1$

نضرب بـ $(x-1)$ الموجب (التربيعية)

$-(x-1)^2 \leq (x-1)^2\cos\frac{1}{x-1} \leq (x-1)^2$

$\lim_{x\to 1} -(x-1)^2 = -(1-1)^2 = 0\times - = 0$ سالب

$\lim_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$

$\Rightarrow \lim (x-1)^2\cos\frac{1}{x-1} = 0$

مثال على ال cos بالإحاطة:

سؤال الدورة 2021

أوجد نهاية $x^2\cos\frac{1}{x}$ عند 0

بما أن المعوض ∞ ⇐ إحاطة

$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq +1$

حيث $x \neq 1$

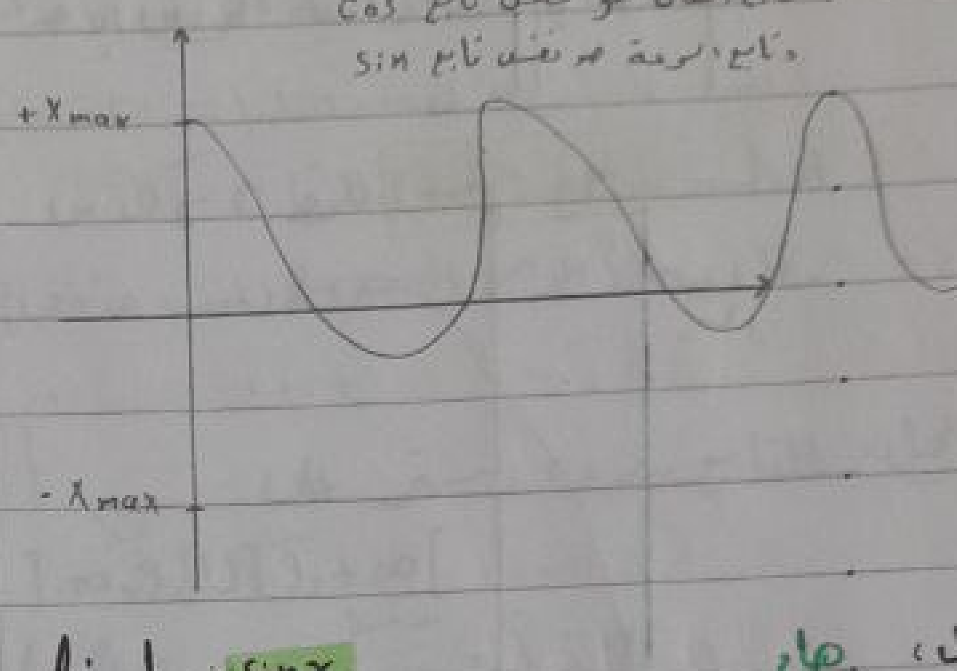
نضرب بـ (x^2) $-x^2 \leq x^2\cos\frac{1}{x} \leq +x^2$

ملاحظة هامة:

كل تابع دوري (بكرر نفسه) غير ثابت ليس له نهاية عند $\mp\infty$

مثال: $\sin x$ و $\cos x$

تابع الطال هو نفس تابع cos
وتابع الرمية هو نفس تابع sin



مثال: هام

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \sin x$

دوري غير ثابت $\mp$ محدد

ليس له نهاية

بما أن $f(x) = \sin x$ تابع دوري غير ثابت فليس له نهاية عند $+\infty$ و $\lim \frac{1}{x} = 0$ لذلك لا يوجد نهاية.

---

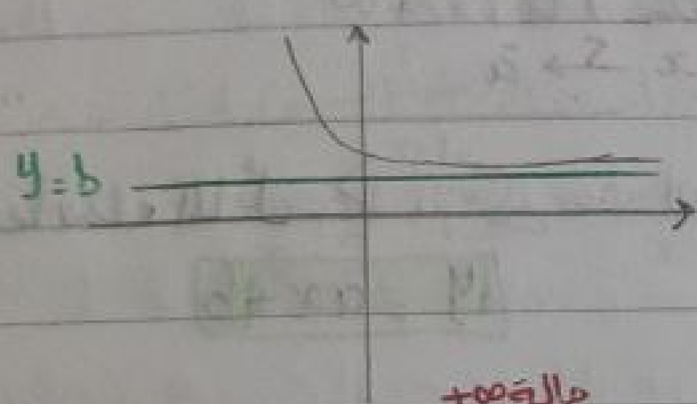
* يوجد نفس هذا التمرين صفحة 68 رقم 6

المستقيمات المقاربة

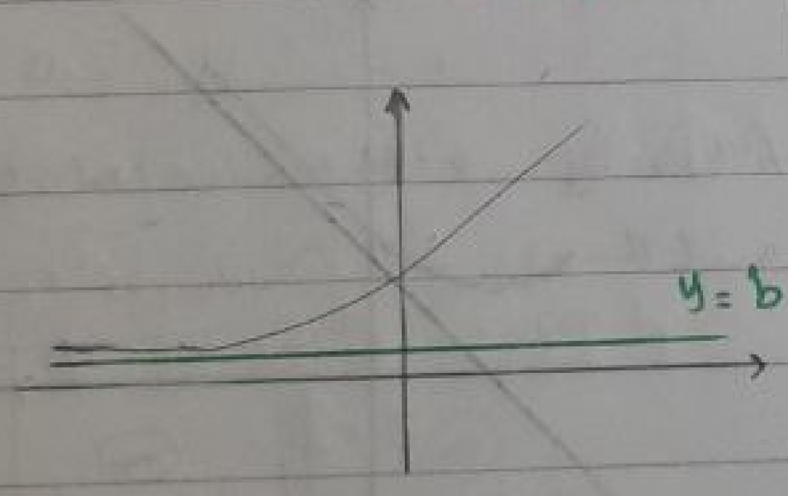
مقارب يوازي xx' (أفقي)

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = b$ عدد

$y = b$ مقارب أفقي يوازي xx' (عدد)



حالة $+\infty$



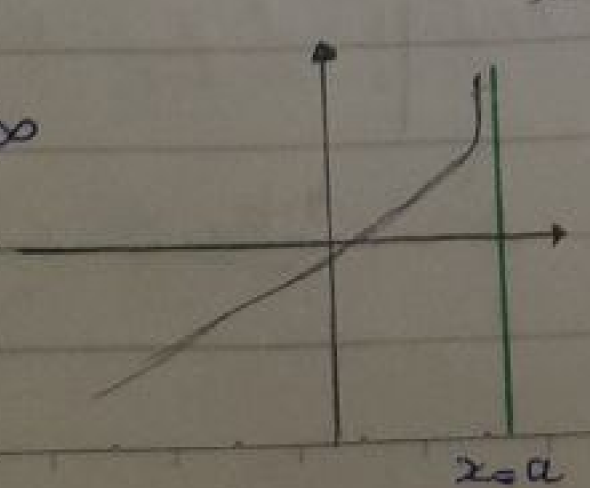
حالة $-\infty$

مقارب يوازي yy' (شاقولي)

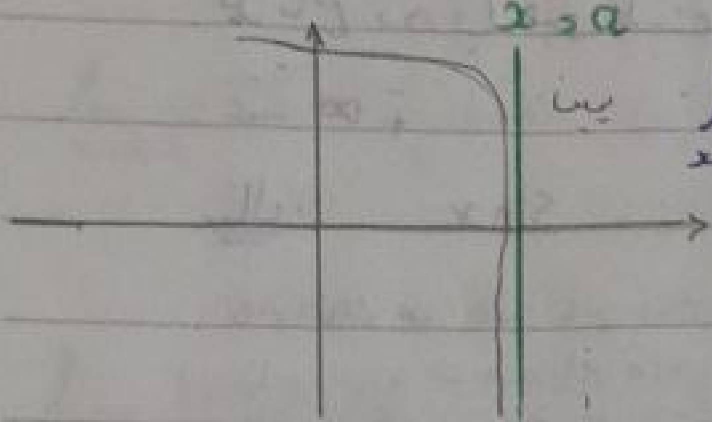
$\lim_{x\to a} f(x) = \mp\infty$

$x = a$ مقارب شاقولي يوازي yy' (عدد)

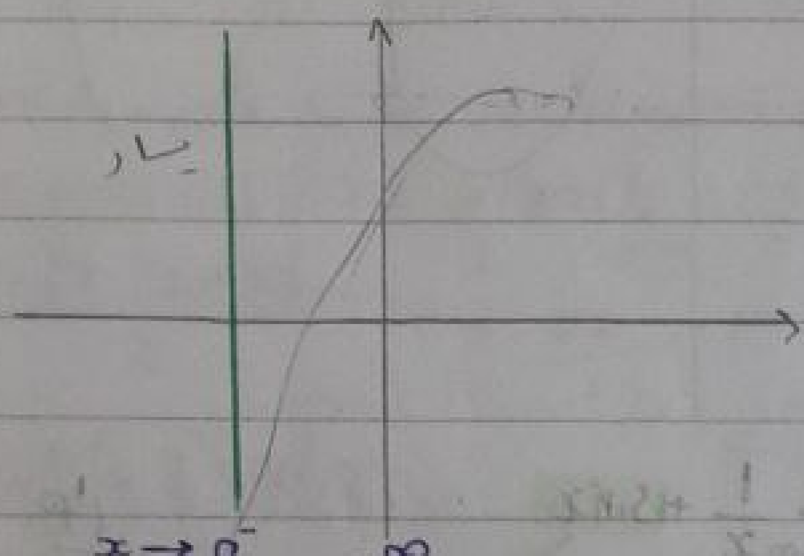
$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

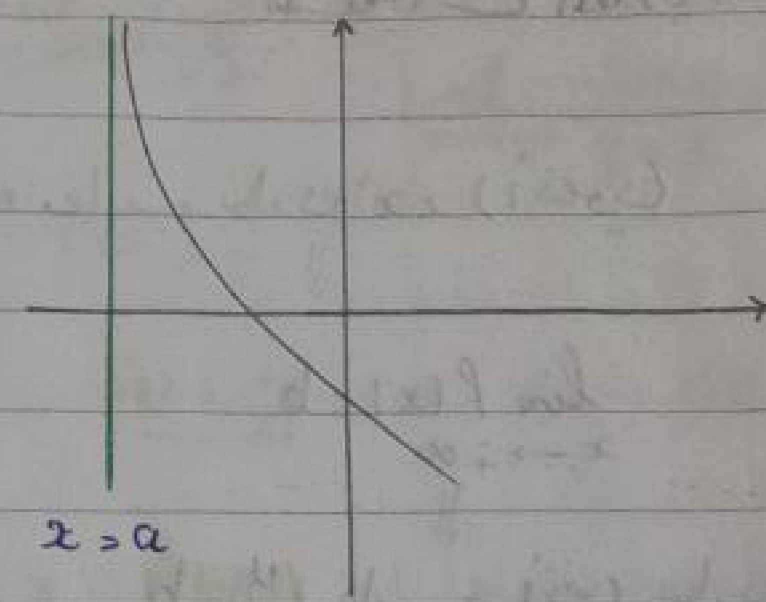


مقارب شاقولي:



$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = -\infty$

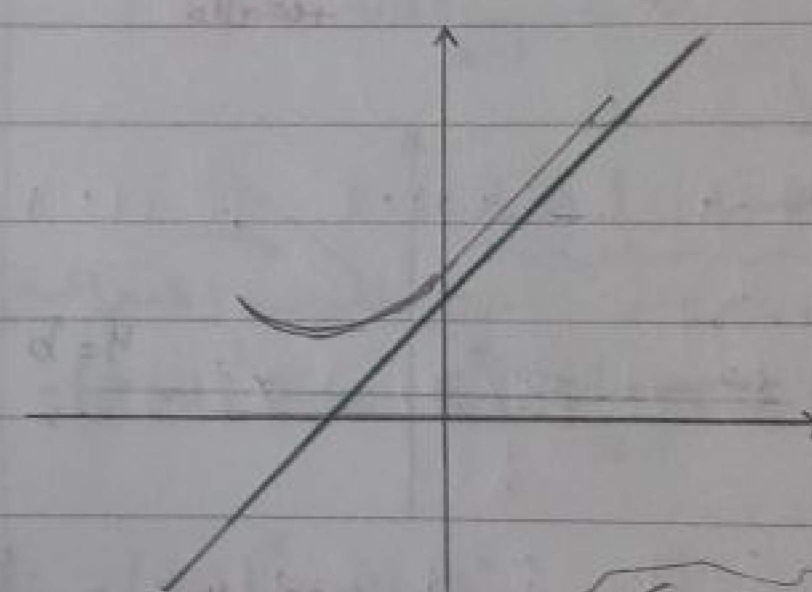




$\lim_{x \to a^{-}} f(x) = +\infty$

المقارب المائل < إيجاد / إثبات

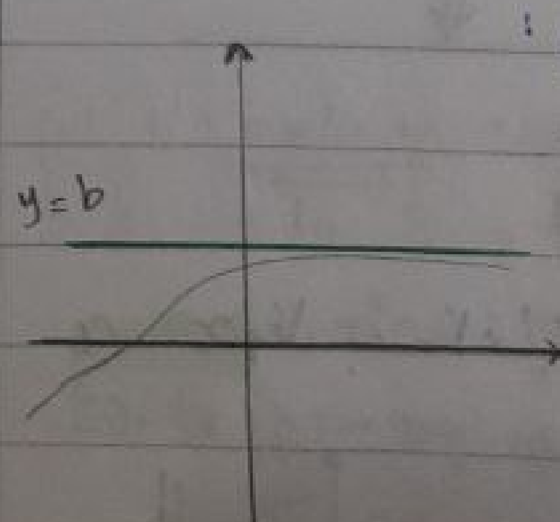
$\boxed{y = ax + b}$

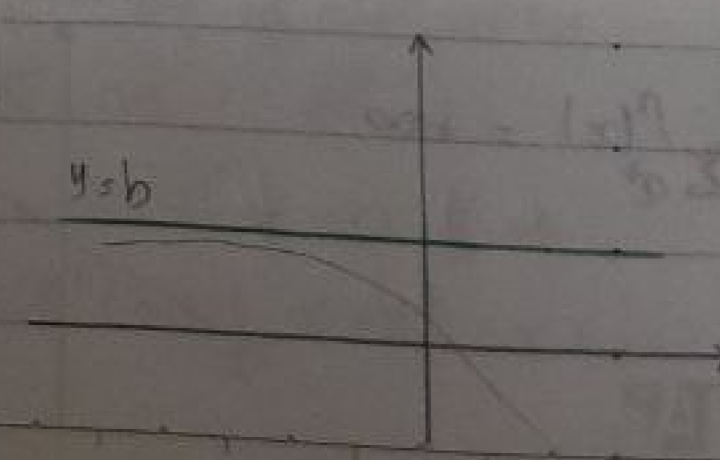


$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \mp\infty$

شرط لازم ولكن غير كافي

مقارب أفقي:





الوضع النسبي ← خط للأفقي أو المائل بس
حالتين
ثلاث حالات

تمرين هام:

مثال: ليكن C الخط البياني للتابع f: (R صحيح)

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

1. أوجد المقاربات الموازية للمحورين الإحداثيين. {يعني مقاربات الأفقية والمقاربات الشاقولية}

2. ادرس **الوضع النسبي** للخط C مع كل من مقاربيه. {الوضع النسبي للمقارب الأفقي}

الحل: التابع معرف ومستمر على

$]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$ (يسار، يمين)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\text{الأس الأكبر}}{\text{الأس الأكبر}} \Rightarrow 2$

إذا كان البسط والمقام من نفس الدرجة نأخذ أمثال الأس الأكبر.

$y=2$ مستقيم مقارب يوازي $x'x$ (أفقي) في جوار $-\infty$.

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{2(3)+1}{3-3} = \frac{7}{0} = -\infty$

لم نعرف إذا + أو −

لدراسة إشارة الصفر نأخذ عدداً أصغر من الـ 3 بنا من اليسار يلي هو 2 نعوضه بالمقام فقط.

المقارب $x=3$ مقارب يوازي $y'y$ (شاقولي) والخط C على يساره.

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{2(4)+1}{+4-3} = \frac{9}{+0} = +\infty$

$x=3$ مقارب **شاقولي** يوازي $y'y$ والخط C على يمينه.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$y=2$ مستقيم مقارب أفقي في جوار $+\infty$

الطلب 2

1] نوجد $f(x)-y_0$

2] ندرس إشارة الفرق ونميز حالتين:

$f(x)-y_0>0$ الخط C فوق Δ

$f(x)-y_0<0$ الخط C تحت المقارب

دراسة الوضع النسبي للمقارب $y=2$

$$f(x)-y_0 = f(x)-2 = \frac{2x+1}{x-3} - \frac{2}{1} = \frac{2x+1-2x+6}{x-3} = \frac{7}{x-3}$$

ندرس إشارته

إذا لم يكن الجواب واضح الإشارة نعمل جدول اسمه جدول النسبي.

	$-\infty$	3	$+\infty$
إشارة $f(x)-y_0$	− (نأخذ عدد قبل الـ 3 وهو −1)		+ (نأخذ عدد بعد الـ 3 وهو 10)
الوضع النسبي	الخط C تحت المقارب Δ		الخط فوق Δ

أي في المجال $]-\infty,3[$ (بالجدول) $f(x)-y_0<0$ فالخط C تحت المقارب.

اثبات مستقيم مقارب مائل

1. نوجد: $f(x)-y_\Delta$
2. نبرهن أن: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$

مثال: ليكن C الخط البياني للتابع f حيث:

$$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+2}$$

برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-4$ مستقيم مقارب عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة لـ Δ.

$$f(x)-y_\Delta=\underset{(1)}{\frac{x^2-2x-3}{x+2}}-\underset{(x+2)}{[x-4]}$$

$$=\frac{x^2-2x-3-(x^2+2x-4x-8)}{x+2}$$

$$=\frac{x^2-2x-3-x^2-2x+4x+8}{x+2}$$

$$=\frac{5}{x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-y_\Delta=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x+2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-y_\Delta=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x+2}=0$$

إذن $y=x-4$ مقارب مائل

دراسة الوضع النسبي

ندرس الإشارة $f(x)-y_\Delta$

>0	<0	$=0$
C فوق Δ	C تحت Δ	نقطة تقاطع

قيمة التي تعدم المقام

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
إشارة $f(x)-y_\Delta$	$-$	||	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	||	C فوق Δ

ما قبل الجذر مخالف لإشارة x

وما بعد الجذر موافق لإشارة x

أو بالأعداد

نأخذ العدد -15 مثلا ← -2 → نأخذ عدد بعد مثلا "15"

برهنة الحل الوحيد

أثبت للمعادلة $f(x)=a$ (عدد) حل وحيد في المجال.

1) التابع مستمر و متناقص تماماً ← متزايد تماماً على المجال] من الطرف الأول [

2) $a \in f$] الطرف الأول [=] الطرف الآخر [

مثال: P. 58 + دراسة التمرين يلي على الكتاب

سؤال خارجي:

برهن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد بالمجال]-1,2[

x	$-\infty$	حل	-1	حل	2		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	-2 ↗	0	4	↘	3

5 علامات

1) التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال]-1,2[

5 علامات

2) $0 \in f]-1,2[=]-2,4[$

للمعادلة حل وحيد بالمجال]-1,2[

كم عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

في $\mathbb{R}$ يعني كل المجال ؟ يعني مناقشة كافة الحالات

$0 \notin f]2,+\infty[=]3,4[$

حلان في $\mathbb{R}$

طريقة خاصة بالمعادلة $f(x)=0$

1) التابع مستمر و (متناقص تماماً ← متزايد تماماً) على المجال] من الطرف الأول [

2) المجال]a,b[

$f(a)\times f(b)<0$

سؤال: أثبت للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد بالمجال]-1,2[

الحل: 1) التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال]-1,2[

2) $f(-1)\times f(2) = -2\times 4 = -8<0$

ملاحظة: إذا كان المجال أعداد [illegible] =؟

]-∞, -[نكتب

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) \times f(-1)$

حساب a، b كتشاف مقارب المائل تحلق منا الوضع النسبي

توجيهي 2022

هام — 7 او 1 او 60 علامة

اكتشاف المقارب المائل

$y = ax + b$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \lim (f(x) - ax)$$

مثال: أوجد المقارب المائل عند $+\infty$

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x+2} \qquad y = ax + b$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{2x^2+1}{x+2}}{\frac{x}{1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+3x} = \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2+1}{x+3} - 2x\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1-2x^2-6x}{x+3}$$

$$\lim \frac{-6x+1}{x+3} = \frac{-6x}{x} = -6 = b$$

$b = -6$, $a = 2$

$y = 2x - 6$

معادلة المقارب المائل

تمرين $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

عند $+\infty$

اكتشف المقارب المائل

اكتشاف المقارب المائل؟

نرمز للمقارب المائل بـ

$y = ax + b$.

1) اكتشف a بحساب نهاية

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

2) اكتشف b بحساب نهاية

$$\lim (f(x) - ax) = b$$

بلي ندوما ناسكة
الدلم بدي ما كيبا
حكي جارح خليبا
تنتر بالدم

$(x^n)' = nx^{n-1}$

مشتق العدد ← صفر

تركيز: أحداد لمدرسة + إشارة الملتف نوحين لأ المشتق في فرق

هذه الفقرة عليها 100 علامة:

سؤال:

- ادرس تغيرات التابع.
- ادرس التابع.
- ادرس تحولات التابع.

سؤال: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$

ادرس تغيرات التابع على $\mathbb{R}$:

الحل: التابع مستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim (x^3) = (-\infty)^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x = 0$

$\Rightarrow x(3x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$ إما

أو $3x - 4 = 0$

$x = \frac{4}{3}$

نحسب $f(0)$

$f(0) = -1$

نحسب $f\left(\frac{4}{3}\right)$

$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1$

$= \frac{-59}{27}$

الخطوات: حل هذا التمرين ⟸

1] نعين مجموعة التعريف والاستمرار والاشتقاق

2] نوجد النهايات عند أطراف المجال المفتوح لـ D ونعين التابع عند الأطراف المغلقة.

3] نوجد المقاربات الأفقية والشاقولية فقط

4] نشتق التابع وندرس المشتق إن أمكن ذلك.

5] ننظم جدول التغيرات

---

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\frac{-59}{57}$	$\nearrow$	$+\infty$

x ← نضع مجموعة التعريف والقيم التي تعدم المشتق..

$f'(x)$ ← جذور القيمة التي عدمت المشتق ونضع الإشارات

$f(x)$ ← نضع النهايات + صور الأعداد يلي فوق + الأسهم

↓ $f(\frac{4}{3})$ ذوتي

ملاحظة: بعد وضع الإشارات والأسهم نقارن هل متوافقين مع بعض

توضيح:

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$= 3(10)^2 - 4(10)$

$= 300 - 40 = 260$ موجب

$f'(x) = 3(1)^2 - 4(1)$

$= 3 - 4 = -1$

$f(x)' = 3(-10)^2 - 4(10)^2$

$= +$

طلب: بالنص نالف لإشارة أمثال الـ x^2 وبالطرفين موافق

القسمة الإقليدية

كثير كثير سهلة ١

حل المعادلة: درجة ثالثة:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + \boxed{6} = 0$$

قواسم: ∓ 1، ∓ 2، ∓ 3، ∓ 6

طـ١. نأخذ العدد 1 ونعوض بدل كل $x \leftarrow 1$

$$\Rightarrow (1)^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 6$$

$$1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

العدد 1 صفر أو جذر لكثير الحدود

لذلك نقسم على

$x - 1$

عكس العدد

طـ٢. نأخذ الأعداد الموجبة لحال $1 + 6 = 7$

" السالبة لحال $-2 - 5 = -7$

$\Leftarrow$ مجموع الأمثال الموجبة = مجموع الأمثال السالبة بالقيمة المطلقة.

* عندما نرى الأمثال الموجبة = الأمثال السالبة

باشراً نقسم فوراً على $x - 1$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x - 6 \\ \hline x - 1 & x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \\ & \mp x^3 \pm x^2 \\ \hline & -x^2 - 5x + 6 \\ & \mp x^2 \pm x \\ \hline & -6x + 6 \\ & \mp 6x \pm 6 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x^2 - x - 6) = 0$$

إما $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

أو $x^2 - x - 6 = 0$ تحليل بالمشاهدة

$(x-3)(x+2) = 0$ كثيرة الحدود ناتج التحليل

إما $x - 3 = 0$ أو $x + 2 = 0$

$x = 3$ $\quad$ $x = -2$

خطوات القسمة:

١ نقسم المسيطر على المسيطر

٢ نضرب الناتج بـ $x - 1$ بالحدين

٣ نطرح بعض ← تغير الإشارة

٤ نعيد الكرة ← نقسم $\frac{-x^2}{x}$

٥ نضرب الناتج $-x$ بـ $x - 1$

٦ دائماً أول تنين بروحوا ببعض

٧ نعيد الكرة

هام جداً "مهم" ١

مركز التناظر

مثال: اثبت أن النقطة $A(-1, 2)$ مركز التناظر للخط البياني للتابع

$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow R\setminus\{-1\}$

يوجد شرطين:

1. إذا كان $a+x \in D$ فإن $a-x \in D$

حفظ كتير مهم للبكلوريا !!

2. $f(a+x) + f(a-x) = 2b$

الحل: إذا كان $-1+x \in R/\{-1\}$ فإن $-1-x \in R/\{-1\}$

محقق دوماً"

2. $f(-1+x) + f(-1-x) \overset{?}{=} 4$

نوجد: نعوض بالتابع الأصلي

$f(-1+x) = \frac{2(-1+x)-1}{(-1+x)+1}$

$= \frac{-2+2x-1}{\cancel{-1}+x\cancel{+1}}$

$= \frac{2x-3}{x}$

$f(-1-x) = \frac{2(-1-x)-1}{(-1-x)+1}$

$= \frac{-2x-3}{-x}$

$l_1 = \frac{2x-3}{\underset{(1)}{x}} + \frac{-2x-3}{\underset{(-1)}{-x}}$ توحيد

$= \frac{2x\cancel{-3}+2x\cancel{+3}}{x} = \frac{4x}{x} = 4 = l_2$

فالشرط الثاني محقق ومنه $A(-1, 2)$ مركز تناظر للخط البياني.

هام جداً" مركز التناظر

تركيب تابعين

$f \circ g(x) = f(g(x))$ ملاحظة: تركيب تابعين ليس تبديلي

يلي ال تركيب

مثال:

$f(x) = x^2 \to R$

$g(x) = \frac{1}{x} \to R\setminus\{0\}$ أو R^*

تعويض

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$

الشرط: $x \in D_g$ و $g(x) \in D_f$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{1}{x^2}$

ملاحظة:

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لإزالتها

حلل نكتب

2) $\frac{5}{0} = \infty$ حفظ الجواب

3) $\frac{\infty}{\infty} =$

LAP

٤٥ علامة

تمرين يلي بالكتاب على طول

$A = 41$ / $\frac{34}{2}$ / $\frac{42}{2}$ $A = 137$

هام جداً "جداً" مكررة!

X في غاية الكبر

تمرين 3/ 42

هذا التمرين نفس طول

$f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$

أوجد

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

أعطي عدد حقيقي A بحيث $x > A$ بأن

$f(x) \in]2.9, 3.1[$

الحل: نص القطر > |المركز - $f(x)$|

لإيجاد المركز ← ط

$\frac{2.9 + 3.1}{2} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$

نجد دعدة طرق

الطرف العلوي للمجال - المركز

$3.1 - 3 = 0.1$

$\left| \frac{3x+2}{x-1} - \frac{3}{1} \right| < 0.1$

$\left| \frac{3x+2-3x+3}{x-1} \right| < 0.1$

$\left| \frac{5}{x-1} \right| < 0.1$

موجب ← $\frac{5}{x-1} < 0.1$

بس ← نسبة

علامات

لأن x كبيرة

نقلب ونغير الجهة

$\frac{x-1}{5} > 10$

$x - 1 > 50$

$x > 51$ A

"ملاحظة هامة جداً"..

نفس السؤال يأتي بالمتتاليات ولكن n عوضاً عن x

و u_n عوضاً عن $f(x)$

بسم الله الرحمن الرحيم ♡

/ طريقة أولى

سـ يطلع ε بالمنام نأخذ عدد من مجموعة التعريف من يسار أو يمين العدد الذي نبحث المنام دور ...
من المنام ...

تعيين مجال

نهدف في هذه الفقرة إلى إيجاد مجال نسبي إليه x حيث ننطلق من مجال $f(x)$ المعطى في السؤال حتى نصل إلى x بعمليات عكسية x. (نبحث الأقرب ... على x إلى الأقرب ...)
أقرب شيء لا الأبعد ... الجذر

P.37

فكرة السؤال:
ننطلق من $f(x)$ حتى نصل إلى x

المثال: $f(x)=\sqrt{4x+1}$ عين مجال I نسبي إليه $\boxed{x}$ ويحتوي 2 ويحقق الشرط الآتي:
x من I فإن $f(x)$ من $]2.99, 3.01[$

الحل:

$$2.99 < f(x) < 3.01$$

$$2.99 < \sqrt{4x+1} < 3.01$$

تربيع الطرفين: $\Rightarrow (2.99)^2 < 4x+1 < (3.01)^2$

نطرح الواحد: $(-1) \Rightarrow (2.99)^2-1 < 4x < (3.01)^2-1$

نقسم على (4): $\Rightarrow \dfrac{(2.99)^2-1}{4} < x < \dfrac{(3.01)^2-1}{4}$

$$1.985025 < x < 2.015$$

وللتأكد الحل نأخذ الـ 2 المركز بجمع الحدود ونقسم على 2 لأنه يطلع $f(x)$

تدريب 38

1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$ $\quad a=1$

$]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim \dfrac{x}{x} = 1$

يمين: $\lim\limits_{x\to 1^{+}} f(x) = \dfrac{1-3}{1-1} = \dfrac{-2}{0^{+}} = -\infty$

اليسار: $\lim\limits_{x\to 1^{-}} f(x) = \dfrac{-2}{0^{-}} = +\infty$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$ $\quad a=2$

$D_f =]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim \dfrac{x^2}{x} = x$

اليمين: $\lim\limits_{x\to 2^{+}} f(x) = \dfrac{2^2+2}{2-2} = \dfrac{6}{0^{+}} = +\infty$

اليسار: $\lim\limits_{x\to 2^{-}} f(x) = \dfrac{2^2+2}{2-2} = \dfrac{6}{0^{-}} = -\infty$

3) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ $\quad a=-1$

$D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$

اليمين: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dfrac{-3}{0^{+}} = -\infty$

TAP

عددنا بين الواحد يعني أكبر من الواحد } لا اتحاد بين عددين يكونا مجموعة الترتيب مثل :

$]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \quad \frac{8}{0^+}$

---

2) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4} \qquad a = 2, -2$

يمين يسار

$D_f =]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim \dfrac{2x}{x^2} = 0$ لأن درجة البسط أصغر من درجة المقام

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \dfrac{-4+1}{4-4} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty$

أخذنا -3 سالب

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{4+1}{4-4} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$

أخذنا 3

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \dfrac{2x+1}{0-4} = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty$

أخذنا 0 سالبة

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$

---

3) $f(x) = x^2-2+\dfrac{1}{(1-x)^2} \qquad a = 1$

$D_f =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$

$= +\infty + 0 = +\infty$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty$

4) $f(x) = \dfrac{5x+1}{x+1} \qquad a = -1$

$D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 5$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \dfrac{5(-1)+1}{-1+1} = \dfrac{-4}{0^-}$

$= +\infty$ نأخذ عدد أصغر من -1

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \dfrac{5(-1)+1}{-1+1} = \dfrac{-4}{0^+} =$

$= -\infty$

نأخذ عدد أكبر 7

تدرب 1/42

1) $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x-1)(2-x)} \qquad a = 1, 2$

$D_f =]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$

$\lim f(x) = \lim \dfrac{2x^2}{-x^2} = -2$

نأخذ أعلى درجة في البسط والمقام

$\dfrac{2x^2}{x\cdot x} = \dfrac{2x^2}{-x^2} = -2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \quad \cancel{\dfrac{2}{0^+}} = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \cancel{\dfrac{2}{0^-}} = -\infty$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{8}{0^-} = -\infty$

بس نشوف قوس للترميز
سا ما الصفر موجب

بالملاحظة: اذا نحن تم ندرس النهايات عند التابع يا جذر
آخر المجال المسكر عند صفر يمين.
اما عند دراسة نهاية فـ عادي

التدريب 2/42

٣

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x} - 1}$$

الشروط:

$R.D\ [0,+\infty[\ ,\ [0,+\infty[\ \backslash \{1\}$

$\sqrt{x} - 1 = 0$

$\sqrt{x} = 1$

$x = 1$

مجموعة تعريف البسط تقاطع مجموعة تعريف المقام باخاد العنصر الذي يعدم المقام.

$0 \qquad 1 \qquad +\infty$

$D_f = [0, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ $\quad \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ $\quad \frac{2}{0^+} = +\infty$ $\qquad$ اتخذ بعين الاعتبار الصفر والإشارة

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ $\qquad$ حالة عدم تعيين

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1+\frac{1}{x})}{(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x})}$$

$$= \frac{1+0}{0-0} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 + \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$= +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1^2 - 2 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^2 - 2 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

٤ $\quad a = 1, 2$

$$f(x) = x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2}$$

$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad +0-0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad +0-0$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 + \frac{1}{0^-} - \frac{1}{-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 + \frac{1}{0^+} - \frac{1}{-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 + \frac{1}{1-2} - \frac{1}{\underset{0^+}{2-2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 + \frac{1}{1-2} - \frac{1}{\underset{0^-}{2-2}} = +\infty$$

$\frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

2.

$f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 1$

$D_f = [0, +\infty[$ تابع مركب بين الصحيح والجذري

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} + \lim_{x \to +\infty} (-1)$

$= +\infty + \infty - 1 = +\infty$

3.

$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

تابع مركب بين الجذري والكسري

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{+\infty} + \frac{1}{+\infty} = +\infty$

$+\infty + 0 = +\infty$

$[0, +\infty[\cap]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\Rightarrow]0, +\infty[$

صحيح لأنه يعدم المقام

4.

$f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x + 1}$ $\to [0, +\infty[$, $\to R$

$D_f = [0, +\infty[\cap]R\setminus\{-1\}]$

$D_f = [0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{0}{1} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim \frac{x(\quad 1)}{x(\quad 1)} = 1$

عدد موجب + x^2 لا ينعدم

5.

$f(x) = \frac{x^2 + x - \sqrt{x}}{x^2 + 1}$

$D_f = [0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{1} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{x^2(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{1}{1} = 1$

6.

$f(x) = \sqrt{x - 1} - \sqrt{x}$

$[1, +\infty[\cap [0, +\infty[$ نحدد

$= [1, +\infty[$

$\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ نضرب البسط والمقام بالمرافق لأنه ح.ع.ت

![TAP]

تدرب 1/46

1) $\frac{3x+\cos x}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3x+7}{x-1}$ احاطة

أيا كان $x > 1$ ، ما نهاية f عند $+\infty$ ؟

الحل: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+7}{x-1} = 3$

حساب نهاية $\frac{3x+\cos x}{x}$

عند $+\infty$

$-1 \leqslant \cos x \leqslant +1$

نضيف $3x$

$3x-1 \leqslant 3x+\cos x \leqslant 3x+1$

نقسم على x (الموجب) (لأنه $+\infty$)

$\frac{3x-1}{x} \leqslant \frac{3x+\cos x}{x} \leqslant \frac{3x+1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{x} = 3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x} = 3$ ⟹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+\cos x}{x} = 3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

2) $\frac{-1}{x+1} \leqslant \frac{\cos}{x+1} \leqslant \frac{1}{x+1}$

$x > -1$ استنتج نهاية عند $-\infty, +\infty$

الحل: $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

نقسم على $x+1$ الموجب ($+\infty$)

$\frac{-1}{x+1} \leqslant \frac{\cos x}{x+1} \leqslant \frac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ ⟹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$

نفس الطريقة عند $-\infty$ ، لأن نفس الحجة.

3) $|f(x) - 3| \leqslant \frac{1}{x+1}$

أيا كان $x \geqslant 0$ ما نهاية f عند $+\infty$ ؟

مبرهنة القيمة المطلقة أو الإحاطة

$|f(x) - l| \leqslant g(x)$

إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

الحل: بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ $\left(\frac{1}{\infty}\right)$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +3$

4) $f(x) \geqslant \frac{1}{4}x^2$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{4}x^2\right) = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

حسب مبرهنة المقارنة أو الإحاطة

$\frac{1}{4}x^2$ $f(x)$

يحق لي قلب الجهة اذا كانت
الحدود نفس الاشارة

5. $x^2-5\sin x \geq x^2-5$

حسب الإحاطة أيا كانت $x \in R$

$-1 \leq \sin \leq 1$

نضرب بـ -5.

$+5 \geq -5\sin \geq -5$

نضيف x^2.

زيادة

$x^2+5 \geq x^2-5\sin \geq x^2-5$

$\Rightarrow x^2-5\sin x \geq x^2-5$

$\lim_{x\to-\infty} x^2-5 = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}(x^2-5\sin x)$

$=+\infty$

حسب المقارنة.

الضرب

2. (1) مرافق $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$

خاصة $f(x)=(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})$

$=(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})$

$f(x)=\frac{1+x-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

مختصرة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

(2) $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(1) بالجذر $x+1 \geq x$

$\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}$

* نضيف $\sqrt{x}$

$\sqrt{x}+\sqrt{x+1} \geq 2\sqrt{x}$

شرط

نقلب ، نقلب الجهة

$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftarrow$

$f(x)$

* نضيف $\sqrt{x+1}$ لـ (1)

$2\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

نقلب

$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \to f(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(3) حسب الإحاطة

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=0$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
		$-$	$\|$	$-$	
		D تحت C	$\|$	D تحت C	

4) $f(x) = 3x + 7 - \dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$

$y_D = 3x+7$

$f(x) - y_D = 3x+7-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}} - (3x+7)$

$= \dfrac{-5}{\sqrt{|x|}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{5}{\sqrt{x}} = 0$ ← $\sqrt{x}$ دائماً موجب

⇐ $y = 3x+7$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

[$|x|$ دائماً موجب ⇐ $\dfrac{-5}{|x|} < 0$
D تحت المقارب]

5) $f(x) = \dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}$

$D: y = 2x+1$

$f(x) - y_D = \dfrac{2x^2-7x-3}{x-4} - (2x+1)$

$= \dfrac{2x^2-7x-3-(2x^2-8x+x-4)}{x-4}$

$= \dfrac{1}{x-4} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-4}\right) = 0$

⇐ $y = 2x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي

تدرب 51.

1) $f(x) = 2x+3+\dfrac{10}{x+1}$

$D: y = 2x+3$

$f(x) - y_D =$

$2x+3+\dfrac{10}{x+1} - (2x+3)$

$\dfrac{10}{x+1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{10}{x+1} = 0$ $\left(\dfrac{10}{\infty}\right)$

⇐ $y = 2x+3$ مقارب مائل في جوار $\pm\infty$.

دراسة الوضع النسبي.

ندرس إشارة $\dfrac{10}{x+1}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
الإشارة		$-$	$\|$	$+$	
الوضع		D تحت C	$\|$	D فوق C	

2) $f(x) = -x+1-\dfrac{1}{x^2}$

$D: y = -x+1$

$f(x) - y_D$

$-x+1-\dfrac{1}{x^2} - (-x+1)$

$= \dfrac{-1}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x^2} = 0$

⇐ $y = -x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
		$-$		$+$	
		D تحت C		D فوق C	

16. $f(x) = \dfrac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}$

$D: y = x-2$

$f(x) - y_D = \dfrac{x^3-3x-5}{(x+1)^2} - (x-2)$

$= \dfrac{x^3-3x-5-[(x+1)^2+(x-2)]}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{x^3-3x-5-((x^2+2x+1)(x-2))}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{-3}{(x+1)^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{(x+1)^2} = 0$

$\Longleftarrow y = x-2$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

ط: دراسة الوضع النسبي.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
		$-$		$-$	

$= \dfrac{-3}{\underbrace{(x+1)^2}_{\text{موجب}}} < 0$

D تحت C

مثال صفحة 57

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$

2) أوجد معادلة المماس T في نقطة فاصلتها a

الحل: معادلة المماس:

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$ حفظ

$f(a) = f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 1$

$= 8 - 8 - 1 = -1$

نقطة التماس $(2, -1)$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(1)' = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$(2x^2)' = 4x$

التابع اشتقاقي على R

$f'(a) = f'(2) = 3(2)^2 - 4(2) =$

$12 - 8 = 4$

نعوض بالقانون:

$y - (-1) = 4(x-2)$

$y = 4x - 8 - 1 \Rightarrow 4x - 9$ T

عين α فاصلة نقطة تقاطع T مع محور الفواصل

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الفواصل نضع $y=0$

ولإيجاد نقطة التقاطع مع محور التراتيب نضع $x=0$

الحل:

$y = 0$

$0 = 4x - 9$

$4x = 9$

$x = \dfrac{9}{4} = \alpha$

سؤال الدورة: / /

الحل بطريقة أخرى:

1. نكتب المعادلة العامة

$y = ax + b$

2. نعوض النقطة الأولى $(2,3)$

$3 = 2a + b$ (1)

3. نعوض النقطة الثانية $(1,8)$

$8 = a + b$ (2)

من (2) نجد:

$a = 8 - b$ (3)

نعوض في (1) $\Leftarrow$

$3 = 2(8-b) + b$

$3 = 16 - 2b + b \Rightarrow$

$\boxed{b = 13}$

نعوض في (3):

$a = 8 - 13$

$a = -5$

فالمعادلة هي:

$y = -5x + 13$

مهم جداً — عدد ما

لكي نثبت أنه يوجد للمعادلة $f(x) = ★$ حل وحيد في المجال $[a,b]$.

1. نبرهن f مستمر على المجال $[a,b]$
2. نبرهن f مطرد تماماً على المجال $[a,b]$
3. نبرهن أن $★ \in f[a,b]$

[illegible]

بالطرف الأيسر بالجدول ما

رقم (1) و (3) برهان وجود حل.

رقم (2) برهان وحدانية الحل.

مثال: هام

تدرب 2 صفحة 61:

علل لماذا يكون للمعادلة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$f(x) + 1 = 0 \Rightarrow f(x) = \boxed{-1}$

ثلاثة وفقط ثلاثة حلول حقيقية؟

الحل: ندرس تغيرات f:

التابع مستمر واشتقاقي على $\mathbb{R} \leftarrow]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

إما $x = 0$ أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

المشتق من الدرجة الثانية [illegible]

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -1$	1	$-1 \searrow$	-3	$-1 \nearrow$	$+\infty$

نهاية عظمى كبرى $f(0) = 1$

نهاية صغرى $f(2) = -3$

ثم نعوض بالتابع حتى يلي بالأصفر $\Longleftarrow$

ستمر كمال تعلق

نأخذ المجال الي على الطرف نفس جهة درجة

① التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty,0]$

$-1 \in f(]-\infty,0]) =]-\infty,1[$

فإن للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في المجال $]-\infty,0]$

② التابع f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $[0,2]$

$-1 \in f([0,2]) = [-3,1]$

فإن $f(x) = -1$ حل وحيد بالمجال $[0,2]$

③ التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$

$-1 \in f(]2,+\infty[) =]-3,+\infty[$

طلب إضافي:

أوجد هذه الحلول؟

نعوض بـ $f(x)$ الـ -1

لنحل المعادلة

الحلول لازم تطلع بين المجالات الموجودة على الجدول مثلاً بينا

$+\infty \downarrow 0 \downarrow 2 \downarrow +\infty$

حالة خاصة:

للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]a,b[$

ممكن طريقة أخرى للخطوة رقم ③ وهي:

$f(a) \cdot f(b) < 0$

مثال تدرب 1/61

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ علل للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

الحل: ① التابع f مستمر على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على المجال $[1,2]$

② ندرس الإطراد:

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$f'(x) = 0$ نعدم المشتق

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4 - 12 = -8 < 0$ مستحيلة الحل

$\Rightarrow f'(x) > 0$

من إشارة أمثال x^2 موجبة

$\Rightarrow$ فالتابع متزايد تماماً على المجال $[1,2]$

③ ط٢

$f(1) \cdot f(2) = (-1)(4) = -4 < 0$

فالمعادلة حل وحيد بالمجال $]1,2[$

نعوض

$x^3 - x^2 + x - 2$

$(1)^3 - (1)^2 + x - 2$

$+1 - 1 + 1 - 2$

$-1 \neq 0$

ونفس الشي نعوض 2 بالمعادلة

يطلع 4

* إذا عدنا الشف وطلب معادلة مستحيلة الحل بأن السهم له إشارة واحدة
نكتشفها بالتعويض بسيط
نمرر منحنى الدالة دوماً

تدريب 3/61

ندرس التغيرات $f(x)=x^2+1$ ، $I=[-3,2]$ فقط على هذا المجال

الحل: التابع مستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

x	-3		0		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
y	10	$\searrow$	1	$\nearrow$	5

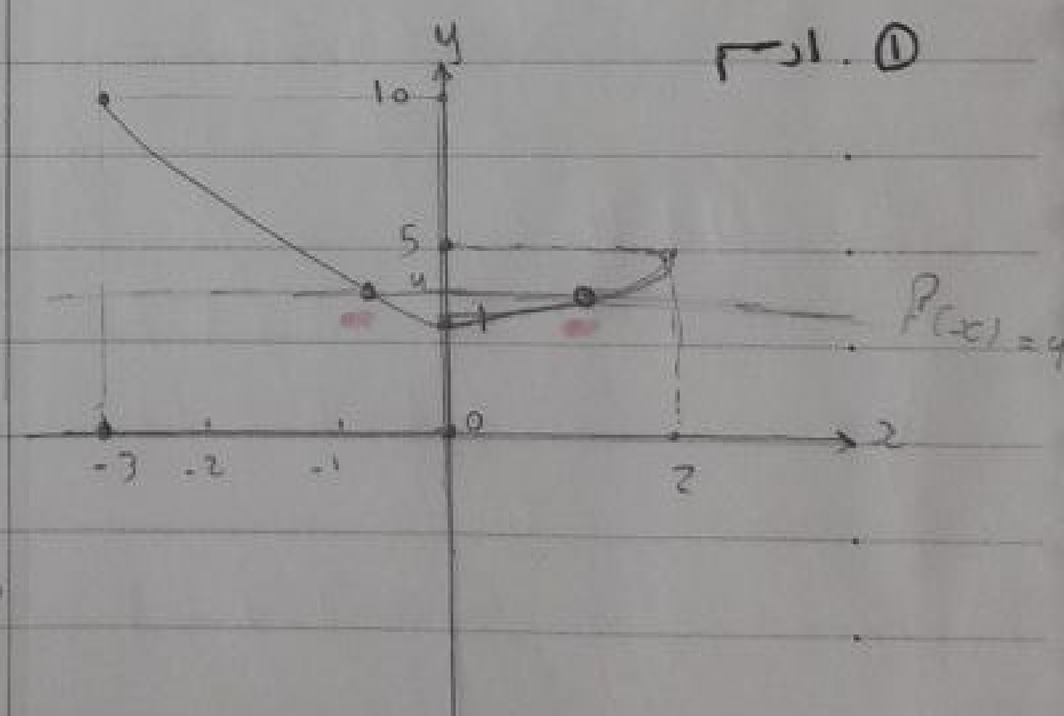
$f(-3)=10$ ، $f(2)=5$

ملاحظة: إذا المجموعة يلي عم ندرس عليها التغيرات كانت الأطراف مغلقة نأخذ الصور وليس النهايات...

$f'(x)=2x \Rightarrow f'(x)=0$

$\Rightarrow x=0$

① ارسم



② احسب $f(I)$ ننظر إلى الجدول إلى السطر الأخير
ننظر إلى أصغر قيمة هي ① وأكبر قيمة ⑩

$f(I)=f[-3,2]=[1,10]$

الـ 10 صورة -3 و -3 تنتمي فـ 10 تنتمي.

والـ 1 صورة 0 و 0 ضمن المجال ضمني.

③ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=4$ في المجال I ؟

نرسم المستقيم الأفقي $y=4$ ⇐ للمعادلة $f(x)=4$ حلان.

تدريب 5/61

$f(x)=4x^3-3x-\frac{1}{2}$ $\mathbb{R}$

$12x^2-3=0$

1) احسب:

$f(-1)=\frac{-3}{2}$ $f(1)=\frac{1}{2}$

$f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ $f(0)=\frac{-1}{2}$

2) أثبت أن $f(x)=0$ دالة تقبل ثلاثة حلول في المجال $[-1,1]$.

$]-\infty,+\infty[$ التابع f مستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

① نشتق ② نساوي الصفر ③ نحل

$f'(x)=12x^2-3 \Rightarrow$

$f'(x)=0 \Rightarrow 12x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

لما $x=\frac{1}{2} \rightarrow f(\frac{1}{2})=\frac{-3}{2}$ صورة

لما $x=\frac{-1}{2} \rightarrow f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ صورة

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$-\frac{3}{2}$ ↗ 0 ↗	$\frac{1}{2}$	↘ 0 ↘	$\frac{-3}{2}$	↗ 0 ↗ $\frac{1}{2}$	$\nearrow +\infty$

المجال الصور المجال الصور

صورة صورة

طرا بيطار

* نلاحظ من جدول التغيرات:

f مستمر ومتزايد تماماً على $[-1,\frac{-1}{2}]$ حسب السهم

$f(-1)=\frac{-3}{2}<0$
$f(\frac{-1}{2})=\frac{1}{2}>0$ } $f(-1)\times f(-\frac{1}{2})<0$

$0\in[\frac{-3}{2},\frac{1}{2}[$

تمرينات وسائل ، 1/67

إذا المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد a_1 في

المجال $[-1, \frac{-1}{2}]$.

~~لدينا الدالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]\frac{1}{2}, 1[$ والعدد 0 محصور بين صورتي هذا المجال وهي $]\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}[$ للمعادلة حل وحيد.~~

★ - f مستمرة ومتناقصة تماماً على $]\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}[$

$$\left.\begin{array}{l} f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0 \\ f(\frac{1}{2}) = \frac{-3}{2} < 0 \end{array}\right\} f(-\frac{1}{2}) \times f(\frac{1}{2}) < 0$$

وإذا المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد a_2 في

المجال $]\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}[$.

~~الدالة مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}[$ والعدد 0 ينتمي لصورة هذا المجال وهي $]\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}[$~~

★ - f مستمرة ومتزايدة تماماً على $[\frac{1}{2}, 1]$

$$\left.\begin{array}{l} f(\frac{1}{2}) = \frac{-3}{2} < 0 \\ f(1) = \frac{1}{2} > 0 \end{array}\right\} f(\frac{1}{2}) \times f(1) < 0$$

إذا المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد a_3

في المجال $[\frac{1}{2}, 1]$.

مما سبق نستنتج أن للمعادلة $f(x)=0$

ثلاثة حلول حقيقية في المجال $[-1, 1]$.