اللَّهُمَّ صَلِّ على الرَّحمةِ المُهداةِ والنِّعمةِ المُسداةِ سيِّدِنا وحبيبِنا مُحمَّدٍ وعَلى آلِهِ وصَحبِهِ وسَلِّم

الخط البياني

نقاط مميزة

نقاط التقاطع مع محور الفواصل $f(x) = y = 0$ والتراتيب $x = 0$

لإثبات أنّ $f(x) = 0$ لها حل وحيد على المجال $[a,b]$ نتأكد مما يلي:

- التابع مستمر ومطرد تماماً على هذا المجال
- $f(a), f(b)$ من إشارتين مختلفتين، أو 0 ينتمي لصورة المجال

تكون صورة المجال في حال تابع متزايد تماماً

$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

وفي حال متناقص تماماً

$f([a,b]) = [f(b), f(a)]$

إذا كان أحد أطراف المجال مفتوح نأخذ lim

صورة المجال هي المستقر الفعلي

جدول التغيرات والرسم

معادلة نقاط التقاطع للخطين

الوضع النسبي لخطين بيانيين

ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$

$f(x) - g(x)$ موجب فإن الخط البياني لـ $f(x)$ فوق $g(x)$

$f(x) - g(x)$ سالب فإن الخط البياني لـ $f(x)$ تحت $g(x)$

التابع العكسي

$y = f(x)$ لها حل وحيد و $x = f^{-1}(y)$ لها حل وحيد

يكون للتابع المستمر تابع عكسي إذا كان متزايد أو متناقص تماماً على مجموعة تعريفه ومستقره هو المستقر الفعلي، ويكون بذلك تقابلاً

معادلة مماس

$y = mx + p$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

ميل المماس m عند نقطة x_0

$m = f'(x_0)$

ميل المماس m لمستقيم علم منه نقطتان أو الزاوية التي يصنعها مع المحور xx'

$m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$m = \tan\theta$

المماس أفقي $f'(x_0) = m = 0$

المماس شاقولي $m = \pm\infty$ معادلته $x = a$

مستقيمان طبوقان (لهما نفس الميل ونقطة مشتركة)

مماس مشترك لـ $f(x)$ و $g(x)$ عند نقطة x_0

$g(x_0) = f(x_0)$

$g'(x_0) = f'(x_0)$

$m_1 = m_2$

$m_1 = m_2$ مستقيمان متوازيان

$m_1 . m_2 = -1$ مستقيمان متعامدان

التناظر

$g(x) = f(-x)$

$g(x)$ نظير $f(x)$ بالنسبة للمحور yy'

$g(x) = -f(x)$

$g(x)$ نظير $f(x)$ بالنسبة للمحور xx'

$g(x) = -f(-x)$

$g(x)$ نظير $f(x)$ بالنسبة للمبدأ O

$g(x) = f(x) + b$

$g(x)$ ناتج عن $f(x)$ بالسحاب شعاعه $b\vec{j}$

$g(x) = f(x + a)$

$g(x)$ ناتج عن $f(x)$ بالسحاب شعاعه $-a\vec{i}$

$g(x) = |f(x)|$

التراتيب السالبة فقط تصبح موجبة (الخط البياني الواقع تحت المحور xx' يؤخذ نظيره بالنسبة للمحور)

إثبات أنّ نقطة (a,b) مركز تناظر

$\forall a + x \in D_f \Rightarrow a - x \in D_f$

$f(a + x) + f(a - x) = 2b$

إثبات أنّ المستقيم $x = a$ محور تناظر

$\forall a + x \in D_f \Rightarrow a - x \in D_f$

$f(a + x) = f(a - x)$

berlantcommunication@gmail.com +963941114148 +963943608577

اللهم أغننا بالافتقار إليك ولا تفقرنا بالاستغناء عنك

المتتاليات

حدود متتالية وفق قاعدة معينة

إما تعطى القاعدة ونستنتج الأعداد
أو تعطى الأعداد ونحاول استنتاج القاعدة

$(u_n)_{n \geq n_0}$

تعريف

صريح

$u_n = f(n)$

الحسابية

$u_n = u_0 + nr$

$u_m = u_p + (m-p)r$

الهندسية

$u_n = u_0 q^n$

$u_m = u_p . q^{m-p}$

- حساب حد انطلاقاً من حد محدد
- إيجاد الأساس من حدين محددين

a,b,c ثلاثة حدود متتالية

$2b = a + c$

$b^2 = a.c$

بالتدريج

$u_n = f(u_n)$

الحسابية

$u_{n+1} - u_n = r$

$u_{n+1} = u_n + r$

كل حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد r (يسمى الأساس)

$$S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)$$

مجموع n حد متتالي، حيث a الحد الأول منهم و ℓ الحد الأخير، و n عدد الحدود

الهندسية

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

$u_{n+1} = q\, u_n$

كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد q (يسمى الأساس)

$$S_n = a.\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

مجموع n حد متتالي، حيث a الحد الأول منهم و n عدد الحدود

$$n \text{ عدد الحدود} = (\text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول}) + 1$$

في حال كان الانتقال بين الحدود وفق خطوة k يصبح مجموع الهندسية

$$n \text{ عدد الحدود} = \frac{(\text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول})}{k \text{ الخطوة}} + 1$$

$$S_n = a.\frac{1 - q^{kn}}{1 - q^k}$$

المجاميع الجزئية S_n

في حال كان الحد العام للمتتالية معطى ككسر (والمقام جداءات)

تفريق كسور

$$\frac{\text{بسط}}{(n-\alpha)(n-\beta)} = \frac{A}{(n-\alpha)} + \frac{B}{(n-\beta)}$$

نوجد A,B من خلال توحيد المقامات ثم مطابقة البسط الناتج مع البسط الأصلي

الإثبات بالتدريج

لإثبات أي علاقة تابعة للمتحول الطبيعي n

1. نتحقق من صحتها من أجل قيمة ابتدائية n_0
2. نفرض صحتها من أجل n
3. نبرهن صحتها من أجل $n + 1$

نستفيد من الخطوة الثانية لبرهان الخطوة الثالثة

+963941114148 · +963943608577

اللهم اقسم لنا من خشيتك ما تحول به بيننا وبين معاصيك ومن طاعتك ما تبلغنا به جنتك ومن اليقين ما تهون به علينا مصائب الدنيا

المتتاليات $(u_n)_{n\ge n_0}$

اطراد متتالية

متتالية ثابتة

$u_{n+1}-u_n=0$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$

متزايدة تماما | متناقصة تماما

متزايدة تماما	متناقصة تماما
$u_{n+1}-u_n>0$	$u_{n+1}-u_n<0$
$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$	$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

يمكن استخدام الإثبات بالتدريج

أو يمكن تعريف المتتالية كتابع ودراسة إشارة المشتق

نهاية متتالية

معرفة بشكل صريح

تحسب النهاية مباشرة

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ عدد

معرفة بالتدريج

$u_{n+1}=f(u_n)$

نحل المعادلة $f(x)=x$

متتالية متقاربة

- متزايدة ومحدودة من الأعلى
- متناقصة ومحدودة من الأدنى

متتالية محدودة

- من الأعلى $u_n\le M$ (M حد راجح)
- من الأدنى $u_n\ge m$ (m حد قاصر)

متتالية u_n محدودة: $m\le u_n\le M$

إثبات الاطراد(يمكن التنبؤ بحساب بعض الحدود) ثم حساب النهاية

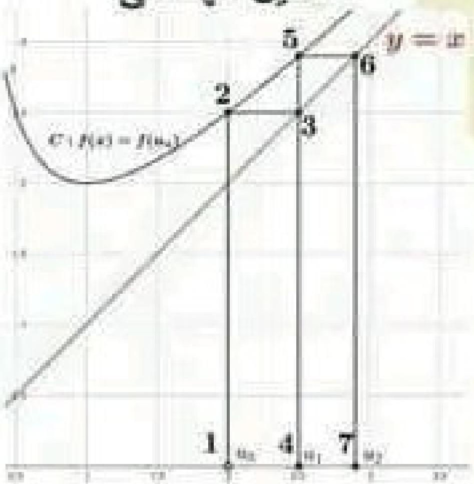
أو

ندرس تغيرات التابع $f(x)$ الممثل للمتتالية u_n

صريح $n_0\le n\le +\infty$ | بالتدريج $m\le x\le M$

مطرد تماماً على مجال التعريف ← تأخذ صورة مجال التعريف

التمثيل الهندسي



متتاليتان متجاورتان

إذا تحقق الشرطان:

- إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة
- $\lim\limits_{n\to+\infty}[u_n-v_n]=0$

وتكونان متقاربتين ولهما نفس النهاية

نهاية متتالية هندسية

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0, & -1<q<1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty, & 1<q \\ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \text{ليس لها نهاية}, & q<-1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1, & q=1 \text{ متتالية ثابتة} \end{cases}$$

+963941114148 +963943608577

الحمد لله عدد ما خلق

$\boxed{\frac{0}{0}}, \boxed{\frac{\infty}{\infty}}, \boxed{\infty-\infty}, \boxed{0.\infty}, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

النهايات وحالات عدم التعيين

يوجد كثيرات حدود فقط

$\frac{0}{0}$ } نحلل (متطابقات، Δ، قسمة اقليدية،...) ثم **نختصر**

$\frac{\infty}{\infty}$ } $\Leftarrow$ $\frac{\text{المسيطر}}{\text{المسيطر}}$

$\infty-\infty$ } **نهاية الحد المسيطر**

كسر $\pm$ كسر $\Leftarrow$ توحيد مقامات

$0.\infty$ يمكن ردها إلى $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$
(بالضرب والقسمة بعامل مناسب)

يوجد جذر

$\frac{0}{0}$ } ضرب بالمرافق

$\frac{\infty}{\infty}$ } $\Leftarrow$ عامل مشترك (أكبر حد داخل الجذر)

$\infty-\infty$ } **ضرب بالمرافق إذا كان**
$(\sqrt{ax^n-b}\pm\sqrt{ax^n})$
وغير ذلك إخراج عامل مشترك

انتبه إلى أن

$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}+x\,, x\in[0,+\infty[\\ -x, x\in]-\infty,0]\end{cases}$

$|f(x)-\lambda|\le g(x)\ \&\ \lim_{x\to\infty} g(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\lambda$

$\underbrace{g(x)}_{\downarrow\atop +\infty}\le \underbrace{f(x)}_{\downarrow\atop +\infty} \Longrightarrow$ $\qquad$ $\underbrace{g(x)}_{\downarrow\atop -\infty}\ge \underbrace{f(x)}_{\downarrow\atop -\infty} \Longrightarrow$

انتبه (للمجال) لوجود نهاية بمين ويسار
(بقيم أكبر وقيم أصغر) عند $\frac{\text{عدد}}{0}$

$\frac{\text{عدد}}{0^+}=+\infty\ \&\ \frac{\text{عدد}}{0^-}=-\infty\ \&\ \frac{\text{عدد}}{\infty}=0$

يوجد تابع مثلثي

$\lim_{☺\to 0}\frac{\sin ☺}{☺}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin ax}=1$

قوانين مثلثية

إحاطة

$\underbrace{g(x)}_{\downarrow\atop \lambda}\le \underbrace{f(x)}_{\downarrow\atop \lambda}\le \underbrace{h(x)}_{\downarrow\atop \lambda}$ $\quad \lambda \Longrightarrow \lambda \Longleftarrow \lambda$

$-1\le \begin{matrix}\sin x\\ \cos x\end{matrix}\le 1$

حسب تعريف العدد المشتق

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

يوجد تابع أسي

$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} x.e^x=0$

$\lim_{x\to-\infty} x^n.e^x=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

ليست محل الدراسة $\infty^0, 0^0$, 1^{∞}

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$

يوجد تابع لوغاريتمي

$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$

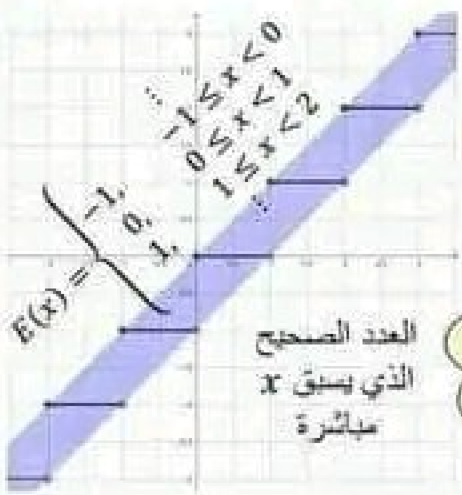
$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$

$\lim_{x\to 0} x.\ln x=0^-$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

انتبه تستخدم أيضاً من أجل تابع الجزء الصحيح
$x-1\le E(x)<x$



berlincommunication@gmail.com +963941114148 +963943608577

اللهم صلِّ على قدوتنا وشفيعنا محمد وعلى آله وصحبه وسلم

معادلات شهيرة

مستقيم

المعادلة الديكارتية

لتعيين مستقيم في المستوي نحتاج نقطة $A(x_0,y_0)$ وناظم $\vec{n}(a,b)$ أو شعاع توجيه $\vec{u}(-b,a)$

$$d: ax + by + c = 0$$

المعادلة الوسيطية

لتعيين مستقيم في الفراغ باستخدام المعادلات الوسيطية له نحتاج نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وشعاع توجيه $\vec{u}(a,b,c)$:

$$d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \, , t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$t \in R$ مستقيم

$t \in [0,\infty)$ نصف مستقيم

$t \in [0,1]$ قطعة مستقيمة

معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$

نوجد منتصف القطعة المستقيمة (وهي نقطة من المستوي)، والشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو ناظم المستوي

$M(x,y,z)$ نقطة من المستوي، فإنّ $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$

مستوي

لتعيين المستوي نحتاج إلى نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وناظم $\vec{n}(a,b,c)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

مستويان متوازيان يمكن أخذ $\vec{n} = \vec{n_2}$

يعامد مستويين
$\vec{n}.\vec{n}_1 = 0$
$\vec{n}.\vec{n}_2 = 0$

نقطتين معلومتين A,B ويعامد مستوي
$\vec{n}.\vec{n}_1 = 0$
$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$

ثلاثة نقاط معلومة (شعاعي توجيه (حيث يكون الناظم $\vec{n}$ عمودي عليهم)).

كرة

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

المسافة بين أي نقطة على سطح الكرة والمركز (x_0,y_0,z_0) تساوي R

أسطوانة

محورها $(o,\vec{i})$ نصف قطرها r مركزي قاعدتيها $(a,0,0),(b,0,0)$

$$y^2 + z^2 = r^2, \quad a \le x \le b$$

محورها $(o,\vec{j})$ نصف قطرها r مركزي قاعدتيها $(0,a,0),(0,b,0)$

$$x^2 + z^2 = r^2, \quad a \le y \le b$$

محورها $(o,\vec{k})$ نصف قطرها r مركزي قاعدتيها $(0,0,a),(0,0,b)$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad a \le z \le b$$

$\underbrace{(\quad)^2}_{\text{مربع كامل}}$

$\boxed{1}$ $x^2 + bx + c = 0$

$\rightarrow x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$

$\rightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$

$\boxed{2}$ $ax^2 + bx + c = 0$

$a \underbrace{\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)}_{\text{نتمم إلى مربع كامل كما في } \boxed{1}} + c = 0$

مخروط

رأسه O ومحوره $(o,\vec{i})$ ومركز قاعدته $(h,0,0)$ ونصف قطر القاعدة r

$$y^2 + z^2 - \frac{r^2}{h^2}x^2 = 0, \quad 0 \le x \le h$$

رأسه O ومحوره $(o,\vec{j})$ ومركز قاعدته $(0,h,0)$ ونصف قطر القاعدة r

$$x^2 + z^2 - \frac{r^2}{h^2}y^2 = 0, \quad 0 \le y \le h$$

رأسه O ومحوره $(o,\vec{k})$ ومركز قاعدته $(0,0,h)$ ونصف قطر القاعدة r

$$x^2 + y^2 - \frac{r^2}{h^2}z^2 = 0, \quad 0 \le z \le h$$

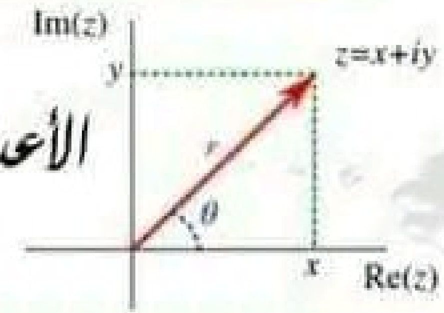
+963941114148
+963943608577

اللَّهُمَّ اشْرَحْ لِي صَدْرِي وَيَسِّرْ لِي أَمْرِي وَاحْلُلْ عُقْدَةً مِنْ لِسَانِي يَفْقَهُوا قَوْلِي

الأعداد العقدية

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$



r تعبر عن طويلة (مسافة) فهي موجبة دوما

الشكل الجبري

$z = x + iy$

x جزء حقيقي $+ i$ y جزء تخيلي

عند جمع عددين نجمع القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

بالضرب نضرب ونشر حسب القواعد المعروفة

المرافق: $\bar{z} = x - iy$

الطويلة: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z.\bar{z} = |z|^2$

z حقيقي إذا انعدم الجزء التخيلي: $z = \bar{z}$

z تخيلي بحت إذا انعدم الجزء الحقيقي: $z = -\bar{z}$

الشكل المثلثي

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\theta = \arg z\,, \qquad r = |z|$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta \begin{cases} \cos\theta = x/r \\ \sin\theta = y/r \end{cases}$

$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta$

الشكل الأسي

$z = re^{i\theta}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i\pi} = -1$

$\bar{z} = re^{-i\theta}$

علاقة أويلر

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

دستور دوموافر

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

ضرب/قسمة عددين عقديين

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$z_1 z_2 = r_1 \times r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$

$z_1 z_2 = r_1 \times r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

لإيجاد جذور من المرتبة n $(w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n})$ لأعداد عقدية بالشكل الأسي

$$w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, k = 0,1,\ldots,n-1$$

ملاحظات

$(\bar{z})^n = \overline{z^n}$

z_1/z_2 نضرب البسط والمقام بالمرافق $\overline{z_2}$

يتساوى عددان عقديان إذا تساوى القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

تطبيقات

النقطة A تقابل العدد العقدي $z_A = x_A + y_A i$

والنقطة B تقابل العدد العقدي $z_B = x_B + y_B i$

العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i$

I منتصف قطعة مستقيمة $[AB]$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

$$z_G = \frac{\alpha\, z_A + \beta\, z_B + \gamma\, z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

الزاوية بين شعاعين

لدينا أربع نقاط A,B,C,D

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

لدينا ثلاثة نقاط A,B,C

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

إذا كان العدد العقدي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

- حقيقي: مرتبطان خطياً، تقع النقاط على استقامة واحدة
- تخيلي بحت: الشعاعان متعامدان

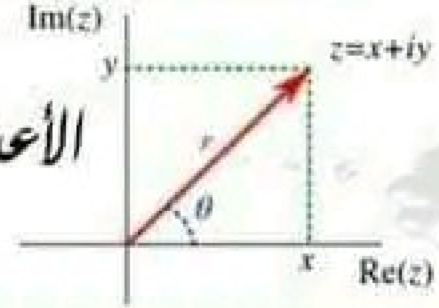
+963941114148   +963943608577

اللَّهُمَّ اشرح لِي صَدري وَيَسِّر لِي أمري وَاحلُل عُقدَةً مِن لِساني يَفقَهُوا قَولي

الأعداد العقدية

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$



r تعبر عن طولية (مسافة) فهي موجبة دوما

الشكل الجبري

$z = x + iy$

$\underbrace{x}_{\text{جزء حقيقي}} + i \underbrace{y}_{\text{جزء تخيلي}}$

عند جمع عددين نجمع القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

بالضرب نضرب ونشر حسب القواعد المعروفة

المرافق: $\bar{z} = x - iy$

الطويلة: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z.\bar{z} = |z|^2$

z حقيقي ← إذا انعدم الجزء التخيلي ← $z = \bar{z}$

z تخيلي بحت ← إذا انعدم الجزء الحقيقي ← $z = -\bar{z}$

ملاحظات

$(\bar{z})^n = \overline{z^n}$

z_1/z_2 نضرب البسط والمقام بالمرافق $\bar{z_2}$

يتساوى عددان عقديان إذا تساوى القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

الشكل المثلثي

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\theta = \arg z, \quad r = |z|$

$r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta \begin{cases} \cos\theta = x/r \\ \sin\theta = y/r \end{cases}$

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$

الشكل الأسي

$z = re^{i\theta}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i\pi} = -1$

$\bar{z} = re^{-i\theta}$

علاقة أويلر

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$

دستور دوموافر

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

ضرب/قسمة عددين عقديين

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$z_1 z_2 = r_1 \times r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$

$z_1 z_2 = r_1 \times r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

لإيجاد جذور من المرتبة n $(w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n})$ لأعداد عقدية بالشكل الأسي

$w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}, k = 0,1,\dots,n-1$

تطبيقات

النقطة A تقابل العدد العقدي $z_A = x_A + y_A i$

والنقطة B تقابل العدد العقدي $z_B = x_B + y_B i$

العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i$

I منتصف قطعة مستقيمة $[AB]$

$z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

$z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

الزاوية بين شعاعين

لدينا أربع نقاط A,B,C,D

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

لدينا ثلاثة نقاط A,B,C

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

إذا كان العدد العقدي $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

حقيقي ← مرتبطان خطياً ← تقع النقاط على استقامة واحدة

تخيلي بحت ← الشعاعان متعامدان

+963941114148   +963943608577

اللهمَّ اهدنا لأحسنِ الأخلاقِ لا يهدي لأحسنِها إلا أنت

متطابقات شهيرة

درجة ثانية

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

درجة ثالثة

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

درجة n

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})}$$

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n$$

$$= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{r}a^{n-r}b^r}_{T_r}, \qquad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

عندما يطلب التعامل مع حد معين نكتب صيغة الحد T_r بأبسط صورة ثم نعين r

الحد المستقل عن x (الحد الذي لا يحوي x) أي عندما يكون x^0

فائدة

إذا كان للمعادلة $ax^n + bx^{n-1} + \cdots + d = 0$ جذراً من الشكل $x_1 = \frac{p}{q}$ فإنّ p يقسم d و q يقسم a، ونقسم المعادلة على $(qx - p)$

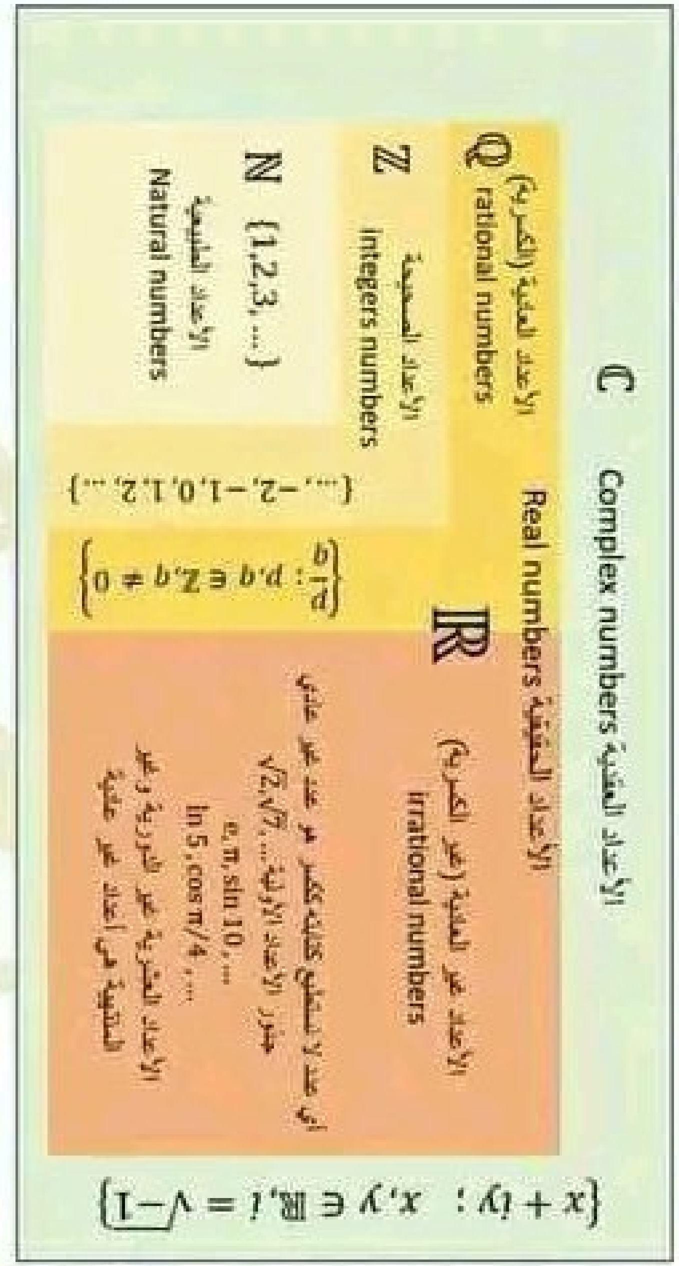
دراسة إشارة

- ❖ بعد إيجاد الجذور الحقيقية وتحليل كثير الحدود نشكل الجدول
- ☐ كثيرة حدود من الدرجة الأولى إشارتها (ما قبل الجذر يخالف إشارة x وما بعد يوافق)
- ☐ كثيرة حدود من الدرجة الثانية إشارتها (ما بين الجذرين يخالف إشارة x^2 وما عدا يوافق)
- ☐ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة إشارتها (تكتب كجداء لكثيرة حدود درجة ثانية مع كثيرة حدود درجة أولى وتدرس إشارة كل منهما على حدا ثم تضرب)
- ☐ تابع كسري (ادرس إشارة البسط لوحده وإشارة المقام ثم قسم)
- ☐ تابع دوري (تدرس الإشارة على دورة واحدة ثم تعمم النتيجة)
- ☐ تابع يحوي جذر (هل ما داخل الجذر أكبر/أصغر من مربع الحدود الباقية $x - \sqrt{x^2+1}$ أو استنتج بطرق أخرى)

$$x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow x - \sqrt{x^2+1} < 0$$

- ☐ الجذر لوحده موجب
- ☐ التابع الأسي لوحده موجب
- ☐ التابع اللوغاريتمي لوحده موجب تماما إذا كان ما داخله بين $]1, +\infty[$ وسالب تماماً إذا كان بين $]0,1[$

لَا إِلَٰهَ إِلَّا أَنتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنتُ مِنَ الظَّالِمِينَ



خواص

القوى

$$a^n.a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n.m}$$

$$a^n.b^n = (a.b)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$$

انتبه $\sqrt[n]{a} \mp \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a \mp b}$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

العدد النيبري $e \approx 2.71828$

اللوغاريتم

إذا كانت $a,b > 0$

$$\ln a.b = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^b = b \ln a$$

$$a = \ln e^a \qquad a = e^{\ln a}$$

$$\ln e = 1 \qquad \ln 1 = 0$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$\log_e x = \ln x \qquad \log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad a \neq 1$$

متراجحات ومعادلات

$$a \leq b \Rightarrow \ln a \leq \ln b$$

$$a \leq b \Rightarrow e^a \leq e^b$$

$$\ln x \leq x \leq e^x$$

$$\ln a = \ln b \overset{e}{\Rightarrow} a = b$$

$$e^a = e^b \overset{\ln}{\Rightarrow} a = b$$

معادلة تفاضلية

حلها من الشكل: $y' = ay$

$$y = k.e^{ax}$$

ثابت نوجده من المعطيات

حلها من الشكل: $y' = ay + b$

$$y = k.e^{ax} - \frac{b}{a}$$

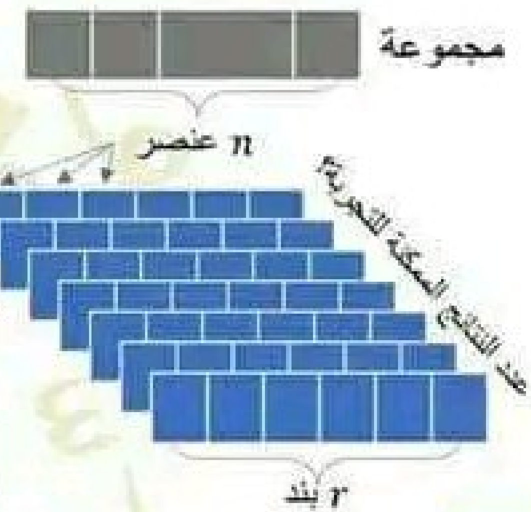
لحل معادلة أو متراجحة نوجد مجموعة التعريف ونقبل من الحلول ما ينتمي إلى مجموعة التعريف

+963941114148   +963943608577

اللَّهُمَّ أعنّي على حُسنِ الظنِّ بك وصِدقِ التوكّلِ عليك

التحليل التوافقي والاحتمالات

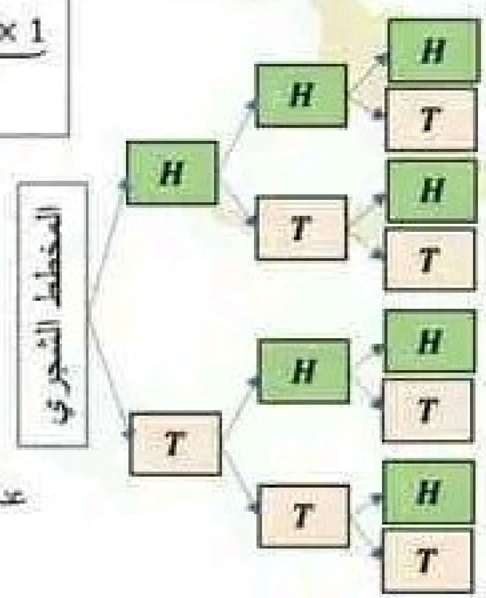
العد



مثال: إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية

H	H	H
H	H	T
H	T	H
H	T	T
T	H	H
T	H	T
T	T	H
T	T	T

$2^3 = 8$



التكرار مسموح

يمكن ملئ كل بند بـ n طريقة

عدد القوائم $= \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{r \text{ مرة}} = n^r$

التكرار غير مسموح والترتيب مهم

يمكن ملئ أول بند بـ n طريقة والثاني بـ $(n-1)$ طريقة ...

تبديل $r = n$

عدد القوائم

$$\underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times 1}_{= n!}$$

ترتيب $1 \le r \le n$

عدد القوائم P_n^r

$$= \underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}_{= \frac{n!}{(n-r)!}}$$

عليك بفهم المسألة جيداً قبل الحل (يوجد تكرار أو لا، الترتيب مهم أو لا)، قد يكون في بعض الطلبات الترتيب مهم في جزء وغير مهم في جزء

مثال كم رمز من 4 خانات يمكن أن ننشئ من المجموعة $\{1,5,9,9\}$ حيث التكرار غير مسموح والترتيب مهم

لاحظ أنّ الـ 9 هنا مكررة فالترتيب بين (التبديل بين) 9,9 غير مهم

عدد طرق إدخال $\{1,5\}$ لأربع خانات × عدد طرق إدخال $\{9,9\}$ للخانتين المتبقيتين

$$= \binom{2}{2} \times P_4^2 = 1 \times 4 \times 3 = 12$$

1	5	9	9	9	9	1	5
1	9	5	9	9	1	9	5
1	9	9	5	9	1	5	9
5	1	9	9	9	9	5	1
5	9	1	9	9	5	9	1
5	9	9	1	9	5	1	9

التوافيق

التكرار غير مسموح والترتيب غير مهم

اختيار مجموعة جزئية من مجموعة أوسع

السحب معاً

$1 \le r \le n$

عدد المجموعات الممكنة

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

خواص

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad 0 \le r \le n$$

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

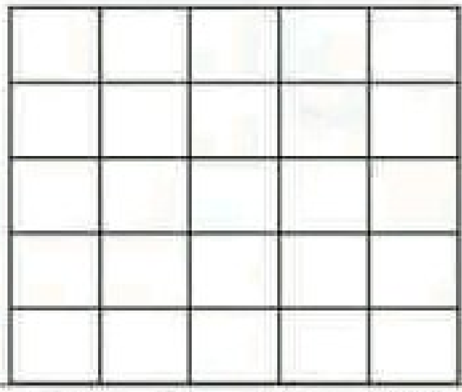
$1 \le r \le n$

عدد المجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من n عنصر $= 2^n$

+963941114148
+963943608577

اللهم إني أستغفرك لكل ذنب يرد عني دعاءك ويقطع منك رجائي ويطيل في سخطك عنائي ويقصر بي عنك أملي

كم مستطيل في هذا المربع؟

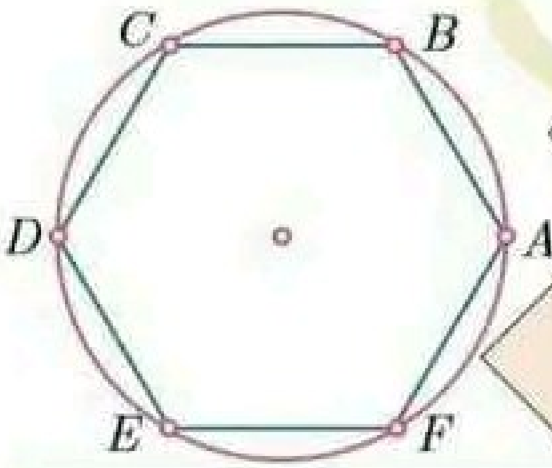


يتتج المستطيل من تقاطع مستقيمين شاقولين مع مستقيمين أفقيين (الترتيب غير مهم)

عدد طرق اختيار مستقيمين شاقولين × عدد طرق اختيار مستقيمين أفقيين

$$= \binom{6}{2}.\binom{6}{2} = 15 \times 15 = 225$$

التحليل التوافقي والاحتمالات



عدد المثلثات (المثلث ثلاثة نقاط ليست على استقامة واحدة (الترتيب غير مهم))

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$$

عدد المثلثات القائمة (إذا كان أحد أضلاعها قطر في الدائرة المارة من الرؤوس)

$$\underbrace{3}_{\text{عدد الأقطار}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{اختيار الرأس المتبقي}} = 12$$

عدد المثلثات المنفرجة الزاوية (إذا كان أحد رؤوسها رأس في المسدس)= 6

الاستقلال الاحتمالي

لمتحول

حالات لاستقلال احتمالي تعرف بدون ذكره (حيث النتيجة لا تتأثر بغيرها)

- إلقاء حجر نرد أو قطعة نقود عدداً من المرات أو إلقاء عدة قطع أو أحجار.
- السحب من صناديق مختلفة أو السحب من الصندوق نفسه مع الإعادة

لمتحولين

ليكن X و Y متحولين عشوائيين معرفين على Ω

قانون الزوج (X,Y) هو إعطاء الاحتمال $p_{i,j}$ لكل حدث، حيث:

$$p_{i,j} = P\big((X = x_i) \cap (Y = y_i)\big)$$

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين X و Y

الاستقلال الاحتمالي للحدثين $(X = x_i)$ و $(Y = y_i)$

$$p_{i,j} = P(X = x_i).P(Y = y_i)$$

X \ Y	$y = y_0$	$y = y_1$	$\cdots$	$y = y_m$	$P(X = x_i)$
$x = x_0$	$P\big((X = x_0) \cap (Y = y_0)\big)$	$+ \cdots + \cdots + \cdots$			$P(X = x_0)$
$x = x_1$	$+$				
$\vdots$	$+$		$P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$		$P(X = x_i)$
$x = x_n$	$+$				
$P(Y = y_j)$	$P(Y = y_0)$ $\parallel$		$P(Y = y_j)$		

herlantcommunication@gmail.com +963941114148 +963943608577

اللهم لك الحمد أن هديتنا ووفقتنا وأعنتنا وأتممت لنا إنك أهل الثناء والحمد

التحليل التوافقي والاحتمالات

الاحتمال

$0 \le P(A) \le 1$

فضاء العينة

Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ما

الحدث

مجموعة جزئية من فضاء العينة Ω

$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

الحدث الأكيد	Ω	$P(\Omega) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_n)$ ، $P(\Omega) = 1$
الحدث المستحيل	$\phi = \{\}$	$P(\phi) = 0$
الحدث البسيط	مجموعة جزئية مكونة من عنصر واحد من فضاء العينة	$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$
الحدث المعاكس	A' الذي يقع عندما لا يقع A	$P(A') = 1 - P(A)$

$A \cup A' = \Omega, \quad A \cap A' = \phi$

$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$

$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$

الحدث A و B	$A \cap B$	يقع الحدثان معاً
الحدث A أو B	$A \cup B$	يقع أحد الحدثين على الأقل

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

حدثان متنافيان (منفصلان)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad P(A \cap B) = 0$

الاحتمال الشرطي

احتمال الحدث A شرط وقوع B (علما أن B قد وقع)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$

حدثان مستقلان

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

القانون الحداني (اختبار بيرنولي)

عندما نهتم بوقوع حدث محدد بعينه A

$P(A) = p, \quad P(A') = q = 1 - p$

X متحول عشوائي يأخذ قيمه من $\{0,1,2,\dots,n\}$ وأياً كان $0 \le k \le n$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$= B(n,p)$

المتحول العشوائي

كل تابع معرف على Ω ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}$ $(x_i \in \mathbb{R})$

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_m
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_m

$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$

التوقع الرياضي

$E(X) = x_1.p_1 + x_2.p_2 + \dots + x_m.p_m$

$E(X) = n.p$

التباين

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$V(X) = n.p.q$

الانحراف المعياري

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

التمثيل الشجري

$P(C_1)$ ، $P(B_1)$ ، $P(A_1)$

C_1 ، B_1 ، A_1

$P(A_2|C_1)$ ، $P(A_2|B_1)$ ، $P(A_2|A_1)$

$C_2 \quad B_2 \quad A_2 \quad C_2 \quad B_2 \quad A_2 \quad C_2 \quad B_2 \quad A_2$

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1).P(A_1)$

$\times \dots \times \dots$

$+ \dots + \dots + \dots = 1$

berlantcommunication@gmail.com +963941114148 +963943608577

اللهم لك الحمد حتى ترضى ولك الحمد إذا رضيت ولك الحمد بعد الرضا

عدد النتائج

نسحب عشوائياً ثلاثة كرات

عدد النتائج الكلية الممكنة التجربة

السحب مع الإعادة

$(10)^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

السحب بدون الإعادة (ترتيب)

$P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

السحب معاً (الترتيب غير مهم) (توافيق)

$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$

عدد النتائج التي تشمل على ثلاثة كرات من لون واحد

$\times$ و $+$

- السحب مع الإعادة: إما ثلاثة زرقاء أو ثلاثة صفراء أو ثلاثة بيضاء
  $(6)^3 + (3)^3 + (1)^3 = 244$
- السحب بدون الإعادة: إما ثلاثة زرقاء أو ثلاثة صفراء
  $P_6^3 + P_3^3 = 6 \times 5 \times 4 + 3 \times 2 = 126$
- السحب معاً: إما ثلاثة زرقاء أو ثلاثة صفراء
  $\binom{6}{3} + \binom{3}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} + 1 = 21$

عدد النتائج التي تشمل على كرتين فقط من لون واحد

$+$ و

مثال

- السحب مع الإعادة: إما اثنتان زرقاء وواحدة غير زرقاء أو اثنتان صفراء وواحدة غير صفراء أو اثنتان بيضاء وواحدة غير بيضاء
  $3 \times \left((6)^2(4)^1 + (3)^2(7)^1 + (1)^2(9)^1\right) = 648$
  الترتيب هنا مهم لذا ضربنا بـ 3
- السحب بدون الإعادة: إما اثنتان زرقاء وواحدة غير زرقاء أو اثنتان صفراء وواحدة غير صفراء
  $3 \times (P_6^2 \times P_4^1 + P_3^2 \times P_7^1) = 3(6 \times 5 \times 4 + 3 \times 2 \times 7) = 486$
- السحب معاً: إما اثنتان زرقاء وواحدة غير زرقاء أو اثنتان صفراء وواحدة غير صفراء
  $\binom{6}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{7}{1} = 60 + 21 = 81$

عدد النتائج التي تشمل على ثلاثة كرات مختلفة الألوان

- السحب مع الإعادة: واحدة زرقاء وواحدة صفراء وواحدة بيضاء
  $(6 \times 3 \times 1) \times 3! = 108$
  الترتيب هنا مهم لذا ضربنا بـ !3
- السحب بدون الإعادة: واحدة زرقاء وواحدة صفراء وواحدة بيضاء
  $(P_6^1 \times P_3^1 \times P_1^1) \times 3! = 108$
- السحب معاً: واحدة زرقاء وواحدة صفراء وواحدة بيضاء
  $\binom{6}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1} = 18$

عدد النتائج التي تشمل على ثلاثة كرات ليست من لون واحد

- السحب مع الإعادة: (الحالات الكلية) − (من لون واحد)
  $1000 - 244 = 756$
- السحب بدون الإعادة: (الحالات الكلية) − (من لون واحد)
  $720 - 126 = 594$
- السحب معاً: (الحالات الكلية) − (من لون واحد)
  $120 - 21 = 99$

عدد النتائج التي تشمل على كرة زرقاء على الأقل

- السحب مع الإعادة: (الحالات الكلية) − (غير زرقاء)
  $1000 - (4)^3 = 936$
- السحب بدون الإعادة: (الحالات الكلية) − (غير زرقاء)
  $720 - P_4^3 = 696$
- السحب معاً: (الحالات الكلية) − (غير زرقاء)
  $120 - \binom{4}{3} = 116$

عدد النتائج التي تشمل على كرة بيضاء على الأقل

- السحب مع الإعادة: (الحالات الكلية) − (غير بيضاء)
  $1000 - (9)^3 = 271$
- السحب بدون الإعادة: (الحالات الكلية) − (غير بيضاء)
  $720 - P_9^3 = 216$
- السحب معاً: (الحالات الكلية) − (غير بيضاء)
  $120 - \binom{9}{3} = 36$

عدد النتائج التي تشمل على الكرة الأولى زرقاء والثانية صفراء والثالثة بيضاء

- السحب مع الإعادة: $6 \times 3 \times 1 = 18$
  الترتيب معطى
- السحب بدون الإعادة: $6 \times 3 \times 1 = 18$
- السحب معاً: لا يوجد ترتيب في السحب معاً

berlantcommunication@gmail.com +963941114148 +963943608577

لا إله إلا أنت وحدك لا شريك لك أستغفرك وأتوب إليك

احتمالات

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq 1$$

نسحب عشوائياً ثلاثة كرات

عدد النتائج الكلية الممكنة التجربة

	السحب مع الإعادة	السحب بدون الإعادة (ترتيب)	السحب معاً (الترتيب غير مهم) (توافق)
	$(10)^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$	$P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$	$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$
احتمال الحصول على ثلاثة كرات من لون واحد	$\frac{244}{1000} = 0.244$	$\frac{126}{720} = 0.175$	$\frac{21}{120} = 0.175$
احتمال الحصول على كرتين فقط من لون واحد	$\frac{648}{1000} = 0.648$	$\frac{486}{720} = 0.675$	$\frac{81}{120} = 0.675$
احتمال الحصول على ثلاثة كرات مختلفة الألوان	$\frac{108}{1000} = 0.108$	$\frac{108}{720} = 0.15$	$\frac{18}{120} = 0.15$
احتمال الحصول على ثلاثة كرات ليست من لون واحد	$\frac{756}{1000} = 0.756$	$\frac{594}{720} = 0.825$	$\frac{99}{120} = 0.825$
احتمال الحصول على كرة زرقاء على الأقل	$\frac{936}{1000} = 0.936$	$\frac{696}{720} = 0.9666$	$\frac{116}{120} = 0.9666$
احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل	$\frac{271}{1000} = 0.271$	$\frac{216}{720} = 0.3$	$\frac{36}{120} = 0.3$
احتمال أن تكون الكرة الأولى زرقاء والثانية صفراء والثالثة بيضاء	$\frac{18}{1000} = 0.018$	$\frac{18}{720} = 0.025$	لا يوجد ترتيب في السحب معاً

الترتيب معطى

bedantcommunication@gmail.com +963941114148 +963943608577