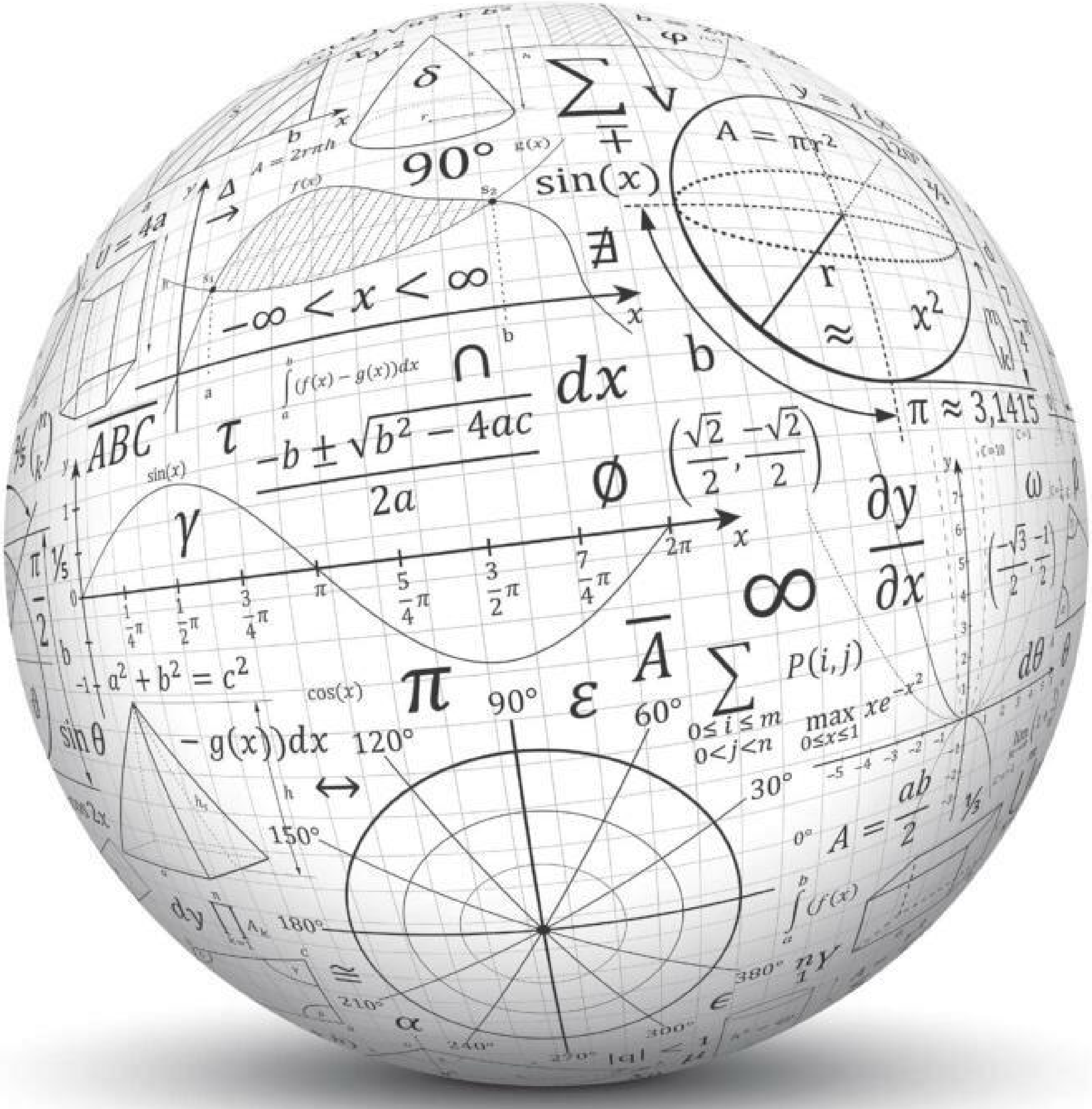
MINISTRY OF EDUCATION AND TECHNICAL EDUCATION
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني



مفاهيم الرياضيات البحتة

تفاضل وتكامل

الصف الثالث الثانوى

الإشتقاق وتطبيقاته

اشتقاق الدوال المثلثية :

الدالة	المشتقة
جا س	جتا س
جتا س	– جا س
ظا س	$قا^{٢}$ س
ظتا س	– $قتا^{٢}$ س
قا س	قا س ظا س
قتا س	– قتا س ظتا س

الاشتقاق الضمنى :

اشتقاق العلاقة الضمنية: د (س ، ص) = صفر يتطلب اشتقاق كل من طرفى العلاقة بالنسبة لأحد المتغيرين س أو ص وفقًا لقاعدة السلسلة لنحصل على $\frac{ءص}{ءس}$ أو $\frac{ءس}{ءص}$ على الترتيب.

الاشتقاق البارامترى :

إذا كانت : ص = د (ن) ، س = ر (ن) يكون : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس}$

المشتقات العليا للدالة :

إذا كانت : ص = د (س) حيث د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فتسمى المشتقات بدءًا من المشتقة الثانية (إن وُجدت) بالمشتقات العليا ونرمز لها بالرمز $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ أو ص″ والمشتقة الثالثة بالرمز $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ أو ص‴ و المشتقة النونية بالرمز $ص^{(ن)}$ أ، $\frac{ء^{ن}ص}{ءس^{ن}}$ أ، $د^{(ن)}(س)$

معادلتا المماس والعمودى لمنحنى :

إذا كان : م هو ميل المماس لمنحنى ص = د (س) عند النقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) الواقعة عليه فإن :

معادلة المماس للمنحنى هى : ص – $ص_{١}$ = م (س – $س_{١}$)

معادلة العمودى للمنحنى هى : ص – $ص_{١}$ = – $\frac{١}{م}$ (س – $س_{١}$)

المعدلات الزمنية المرتبطة :

إذا كانت : ص = د (س) ، س تتغير تبعًا لتغير الزمن ن ، فإن : ص تتغير أيضًا تبعًا لتغير الزمن ن

أى أن : ص دالة الدالة فى الزمن ن و يكون : $\frac{دص}{دن} = \frac{دص}{دس} \times \frac{دس}{دن}$ وتربط هذه العلاقة المعدل الزمنى لتغير س بالمعدل الزمنى لتغير ص

- ❖ يكون المعدل موجبًا إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن.
- ❖ يكون المعدل سالبًا إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن.

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

العدد هـ :

$\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} = هـ$ ، $\lim_{س \to 0} (1 + س)^{\frac{1}{س}} = هـ$

$\lim_{س \to صفر} \frac{أ^{س} - 1}{س} = لو_{هـ} أ$ ، أ > ٠ ، $\lim_{س \to صفر} \frac{لو_{أ}(1+س)}{س} = لو_{أ} هـ$ ، أ > ٠

$\lim_{س \to صفر} \frac{لو_{هـ}(1+س)}{س} = 1$

الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى : دالة أسية أساسها هـ حيث د (س) = $هـ^{س}$ ، س ∈ ح

دالة اللوغاريتم الطبيعى : دالة لوغاريتمية أساسها هـ حيث د (س) = $لو_{هـ}$ س ، س ∈ $ح^{+}$

التفاضل اللوغاريتمي: العلاقة بين المتغيرات يمكن ان تمثل بالصيغة اللوغريتمية وذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة وباستخدام خواص اللوغاريتمات يتم تبسيط العلاقة قبل اجراء عمليات التفاضل.

بعض خواص اللوغاريتم الطبيعي:

إذا كان س ∈ $ح^{+}$ ، ص ∈ ح ، أ ∈ $ح^{+}$ - {١} فإن :

(١) الصيغة ص = $لو_{هـ}$ س تكافئ الصيغة س = $هـ^{ص}$

(٢) س = $هـ^{لو_{هـ} س}$ (٣) $لو_{هـ} هـ = 1$ (٤) $لو_{هـ} 1$ = صفر (٥) $لو_{أ} س = \frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} أ}$

إذا كان س ∈ $ح^+$ ، ص ∈ $ح^+$ ، ن ∈ ح فإن :

(٦) $\text{لو}_{هـ}$ س ص = $\text{لو}_{هـ}$ س + $\text{لو}_{هـ}$ ص   (٧) $\text{لو}_{هـ} \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = $\text{لو}_{هـ}$ س - $\text{لو}_{هـ}$ ص

(٨) $\text{لو}_{هـ}$ $\text{س}^{\text{ن}}$ = ن $\text{لو}_{هـ}$ س   (٩) $\text{لو}_{م}$ س × $\text{لو}_{س}$ م = ١

			تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية		
الدالة	**المشتقة**	**الشرط**	**الدالة**	**التكامل**	**الشرط**
$هـ^{س}$	$هـ^{س}$	س ∈ ح	$هـ^{س}$	$هـ^{س}$ + ث	س ∈ ح
$هـ^{د(س)}$	$هـ^{د(س)}$ · د/(س)	د قابلة للاشتقاق	$هـ^{ك س}$	$\frac{١}{ك}$ $هـ^{ك س}$ + ث	ك ≠ ٠
$م^{س}$	$م^{س}$ $\text{لو}_{هـ}$ م	م > ٠ ، م ≠ ١	$هـ^{د(س)}$ · د/(س)	$هـ^{د(س)}$ + ث	د قابلة للاشتقاق
$\text{لو}_{هـ}$|س|	$\frac{١}{س}$	س ≠ ٠	$\frac{١}{س}$	$\text{لو}_{هـ}$|س| + ث	س ≠ ٠
$\text{لو}_{هـ}$|د(س)|	$\frac{١}{د(س)}$ · د/(س)	د قابلة للاشتقاق ، د(س) ≠ ٠	$\frac{١}{د(س)}$ · د/(س)	$\text{لو}_{هـ}$|د(س)| + ث	د قابلة للاشتقاق ، د(س) ≠ ٠

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

☎ اختبار المشتقة الأولى لاضطراد الدوال :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة] ا ، ب [،

- ❖ **وكان د/ (س) > ٠ لجميع قيم س ∈] ا ، ب [فإن : د متزايدة على] ا ، ب [**
- ❖ **وكان د/ (س) < ٠ لجميع قيم س ∈] ا ، ب [فإن : د متناقصة على] ا ، ب [**

☎ النقطة الحرجة :

للدالة د المتصلة على] ا ، ب [نقطة حرجة (حـ ، د(حـ))

إذا كانت : حـ ∈] ا ، ب [، د/ (حـ) = ٠ أو د/ (حـ) غير موجودة

☎ القيم العظمى والقيم الصغرى المطلقة :

إذا كانت د دالة معرفة على [ا ، ب] ، وكانت حـ ∈ [ا ، ب]

➔ د (حـ) هى قيمة صغرى مطلقة للدالة على [ا ، ب] عندما يكون د (حـ) ≤ د (س) لكل س ∋ [ا ، ب]

➔ د (حـ) هى قيمة عظمى مطلقة للدالة على [ا ، ب] عندما يكون د (حـ) ≥ د (س) لكل س ∋ [ا ، ب]

☎ اختبار المشتقة الاولى للقيم القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية :

إذا كانت (حـ ، د(حـ)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند حـ ، ووجدت فترة مفتوحة حول حـ بحيث :

- ❖ د/ (س) > ٠ عندما س < حـ ، د/ (س) < ٠ عندما س > حـ فإن : د (حـ) قيمة عظمى محلية
- ❖ د/ (س) < ٠ عندما س < حـ ، د/ (س) > ٠ عندما س > حـ فإن : د (حـ) قيمة صغرى محلية

☎ نظرية:

إذا كانت د قابلة للاشتقاق علي] ا ، ب [و كان للدالة د قيمة عظمى محلية أو قيمة صغري محلية عند حـ ∋] ا ، ب [فإن د/ (حـ) = صفر أو د/ (حـ) غير معرفة .

☎ اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى والصغرى المحلية :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة] ا ، ب [، وكانت حـ ∋] ا ، ب [حيث د/ (حـ) = ٠

- ➢ إذا كانت : د//(حـ) <٠ فإن : د (حـ) قيمة عظمى محلية
- ➢ إذا كانت : د//(حـ) >٠ فإن : د (حـ) قيمة صغرى محلية

☎ تحدب المنحنيات :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة] ا ، ب [،

- يكون منحنى الدالة د محدبًا لأسفل إذا كانت : د/ متزايدة على هذه الفترة.
- يكون منحنى الدالة د محدبًا لأعلى إذا كانت : د/ متناقصة على هذه الفترة.

☎ اختبار المشتقة الثانية لتحدب المنحنيات :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة] ا ، ب [فإنه :

- د//(س) >٠ لجميع قيم س ∋] ا ، ب [فإن منحنى الدالة د يكون محدبًا لأسفل على] ا ، ب [
- د//(س) <٠ لجميع قيم س ∋] ا ، ب [فإن منحنى الدالة د يكون محدبًا لأعلى على] ا ، ب [

نقطة الانقلاب

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة] ا ، ب [وكانت حـ ∋] ا ، ب [وكان لمنحني الدالة مماس عند النقطة (حـ ، د(حـ)) فان هذه النقطة تسمي نقطة انقلاب لمنحني الدالة د إذا تغير تحدب منحني الدالة عند هذه النقطة من محدب لاسفل الي محدب لاعلي او من محدب لاعلي الي محدب لاسفل

التكامل المحدد وتطبيقاته

تفاضلى الدالة :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى س فإن :

- ✓ تفاضلى ص (ويرمز له بالرمز ءص) = $د^{/}$(س) ءس
- ✓ تفاضلى س (ويرمز له بالرمز ءس)

التكامل بالتعويض :

إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين

فإذا كانت : ع = ر(س) دالة قابلة للاشتقاق فإن : $\int$ د (ر(س)) $ر^{/}$(س) ءس = $\int$ د (ع) ءع

التكامل بالتجزئ :

إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين والتى ليست احداهما مشتقة للأخرى.

فإذا كانت ص ، ع دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ف

فإن : $\int$ ص ءع = ص ع − $\int$ ع ءص

قواعد التكاملات الأساسية :

- ← $\int$ $س^{ن}$ ءس = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + ث حيث ن ≠ −١
- ← $\int$ قاس ظاس ءس = قاس + ث ، س ≠ $\frac{2ن+1}{2}\pi$ ، ن ∈ ص
- ← $\int$ جاس ءس = − جتاس + ث
- ← $\int$ قتاس ظتاس ءس = − قتاس + ث ، س ≠ نπ ، ن ∈ ص
- ← $\int$ جتاس ءس = جاس + ث
- ← $\int$ $هـ^{س}$ ءس = $هـ^{س}$ + ث
- ← $\int$ $قا^{2}$س ءس = ظاس + ث ، س ≠ $\frac{2ن+1}{2}\pi$ ، ن ∈ ص ،
- ← $\int$ $\frac{1}{س}$ ءس = $لو_{هـ}$ |س| + ث ، س ≠ صفر
- ← $\int$ $قتا^{2}$س ءس = − ظتاس + ث ، س ≠ π ن ، ن ∈ ص ،

التكامل المحدد :

إذا كانت الدالة د متصلة على [ا ، ب] وكانت (ت) أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة

فإن : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ت}(\text{ب}) - \text{ت}(\text{أ})$

خواص التكامل المحدد :

- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$
- $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{صفر}$
- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{حـ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{\text{حـ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ **حيث :** $\text{حـ} \in [\text{ا} ، \text{ب}]$
- $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{صفر}$ **حيث : د دالة فردية**
- $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = 2\int_{0}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ **حيث : د دالة زوجية**

المساحات :

- **مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة المتصلة د على الفترة [ا ، ب] والمستقيمين :**

  $\text{س} = \text{أ}$ ، $\text{س} = \text{ب}$ **حيث :** $\text{د}(\text{س}) \geq 0$ **هى :** $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{د}(\text{س})|\,\text{ءس}$

- **مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالتين د ، ر المتصلتين على الفترة [ا ، ب] والمستقيمين :**

  $\text{س} = \text{أ}$ ، $\text{س} = \text{ب}$ **حيث :** $\text{د}(\text{س}) \geq \text{ر}(\text{س})$ **هى :** $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{د}(\text{س}) - \text{ر}(\text{س})|\,\text{ءس}$

الحجوم الدورانية :

ينشأ المجسم الدورانى من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول خط مستقيم يسمى محور الدوران.

- **حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د المتصلة على [ا ، ب] ومحور السينات والمستقيمين :** $\text{س} = \text{أ}$ ، $\text{س} = \text{ب}$ **دورة كاملة حول محور السينات حيث :** $\text{د}(\text{س}) \geq 0$

  $$\text{ع} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د}(\text{س})]^2\,\text{ءس}$$

- **حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د ، ر المتصلتين على [ا ، ب]**

والمستقيمين : س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات حيث : د (س) ≤ ر(س)

$$ع = \pi \int_{أ}^{ب} | (د (س))^2 - (ر (س))^2 | \, ءس$$