مفاهيم الرياضيات البحتة

الجبر والهندسة التحليلية الفراغية

الصف الثالث الثانوى

أولا : الجبـــــــــر

الوحدة الاولي : التباديل و التوافيق ونظرية ذات الحدين

(١) $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢) \ldots\ldots (ن-ر+١)$ لكل $ر \leqslant ن$ ، ر ، $ن \in ص_{+}$

(٢) $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-ر}}$

(٣) $|\underline{١} = |\underline{٠} = ١$

(٤) $^{ن}ق_{ر} = \dfrac{^{ن}ل_{ر}}{|\underline{ر}} = \dfrac{|\underline{ن}}{|\underline{ر}\ |\underline{ن-ر}}$

(٥) $^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$

(٦) $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

(٧) إذا كان $^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن س = ص أ، س + ص = ن

(٨) $\dfrac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \dfrac{ن-ر+١}{ر}$

(٩) $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

(١٠) $(س+أ)^{ن} = س^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\, س^{ن-١}\, أ + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{ن-٢}\, أ^{٢} + \ldots\ldots\ldots + أ^{ن}$

$(س-أ)^{ن} = س^{ن} - {}^{ن}ق_{١}\, س^{ن-١}\, أ + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{ن-٢}\, أ^{٢} - \ldots\ldots\ldots + (-أ)^{ن}$

(١١) $(س+أ)^{ن} + (س-أ)^{ن} = ٢$ [مجموع الحدود الفردية الرتبة من حدود $(س+أ)^{ن}$]

(١٢) $(س+أ)^{ن} - (س-أ)^{ن} = ٢$ [مجموع الحدود الزوجية الرتبة من حدود $(س+أ)^{ن}$]

(١٣) $(١ \pm س)^{ن} = ١ \pm {}^{ن}ق_{١}\, س + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{٢} \pm {}^{ن}ق_{٣}\, س^{٣} + \ldots\ldots + (\pm س)^{ن}$

(١٤) الحد العام في مفكوك $(س+أ)^{ن}$ هو $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ن-ر}\, أ^{ر}$

الحد الأوسط في مفكوك $(س+أ)^{ن}$

- إذا كانت ن فردية يوجد حدان أوسطان رتبتاهما : $\dfrac{ن+١}{٢}$ ، $\dfrac{ن+٣}{٢}$
- إذا كانت ن زوجيه يوجد حد أوسط وحيد رتبته : $\dfrac{ن+٢}{٢}$

(١٥) النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(س + أ)^{ن}$ = $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{أ}{س}$

(١٦) النسبة بين معاملي حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(س + أ)^{ن}$

$$= \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{معامل الثاني}}{\text{معامل الاول}}$$

الوحدة الثانية : الأعداد المركبة

<u>العدد المركب</u> : لكل س ، ص $\in$ ح فإن العدد ع = س + ص ت يسمي عدداً مركباً الجزء الحقيقي له هو س ، و الجزء التخيلي له هو ص حيث $ت^{٢} = -١$

<u>مرافق العدد المركب</u> : إذا كان ع = س + ص ت عدداً مركباً فإن مرافقه هو $\overline{ع}$ = س − ص ت

و يكون ع + $\overline{ع}$ = عدداً حقيقيا ، ع $\overline{ع}$ = عدداً حقيقيا

<u>خواص المرافق</u> : (١) $\overline{(ع_{١} + ع_{٢})} = \overline{ع_{١}} + \overline{ع_{٢}}$

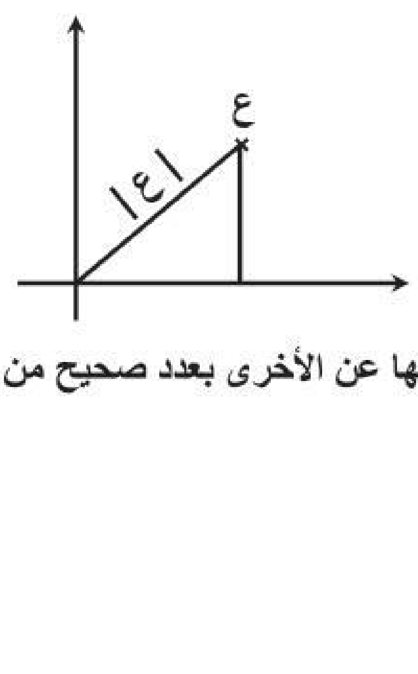
(٢) $\overline{(ع_{١}\, ع_{٢})} = (\overline{ع_{١}})(\overline{ع_{٢}})$

(٣) $\overline{\left(\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}\right)} = \left(\frac{\overline{ع_{١}}}{\overline{ع_{٢}}}\right)$

<u>التمثيل الهندسي للعدد المركب</u> : العدد المركب ع = س + ص ت تمثله النقطة (س ، ص) في المستوي الاحداثي لأرجاند

<u>المقياس و السعة للعدد المركب</u> : إذا كانت النقطة (س ، ص) تمثل العدد المركب ع على مستوي أرجاند فإن $|ع| = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ ، سعة ع تتعين من العلاقتين جتا $\theta = \frac{س}{ل}$ ، جا $\theta = \frac{ص}{ل}$

<u>خواص المقياس و السعة للعدد المركب</u> :



(١) $|ع| = |\overline{ع}|$ (٢) $ع\,\overline{ع} = |ع|^{٢} = |\overline{ع}|^{٢}$

(٣) $|ع_{١}\, ع_{٢}| = |ع_{١}|\,|ع_{٢}|$

(٤) $\left|\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}\right| = \frac{|ع_{١}|}{|ع_{٢}|}$

(٥) $|ع_{١} + ع_{٢}| \leqslant |ع_{١}| + |ع_{٢}|$

(٦) سعة العدد المركب يمكن أن تأخذ عددا غير منته من القيم التي تختلف كل منها عن الأخرى بعدد صحيح من مضاعفات ٢ π

(٧) السعة التي تنتمي للفترة $]-\pi , \pi]$ تسمى السعة الأساسية للعدد المركب

(٨) سعة $\overline{ع}$ = − سعة ع

(٩) سعة (− ع) = − π + سعة ع

(١٠) سعة $\frac{١}{ع}$ = − سعة ع

<u>الصورة المثلثية للعدد المركب</u> : ع = ل (جتا θ + ت جا θ) حيث ع = | ل | ، θ السعة الأساسية

<u>ضرب و قسمة الاعداد المركبة بالصورة المثلثية</u> :

إذا كان : $ع_١ = ل_١$ (جتا $\theta_١$ + ت جا $\theta_١$) ، $ع_٢ = ل_٢$ (جتا $\theta_٢$ + ت جا $\theta_٢$)

فإن : $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢$ (جتا ($\theta_١ + \theta_٢$) + ت جا ($\theta_١ + \theta_٢$))

، $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢}$ (جتا ($\theta_١ - \theta_٢$) + ت جا ($\theta_١ - \theta_٢$))

<u>الصورة الاسية للعدد المركب</u> : (صورة أويلر) إذا كان ع عددا مركبا مقياسه ل ، و سعته الأساسية θ فإن :

ع = ل $هـ^{\theta ت}$ حيث θ بالتقدير الدائري

$هـ^{\theta ت}$ = جتا θ + ت جا θ ، $هـ^{-\theta ت}$ = جتا θ − ت جا θ = جتا($-\theta$) + ت جا ($-\theta$)

<u>نظرية ديموافر</u> : إذا كان ن عدداً صحيحا فإن :

(١) (جتا θ + ت جا θ)^ن = (جتا ن θ + ت جا ن θ)

(٢) إذا كان ك عددا موجبا فإن (جتا θ + ت جا θ)$^{\frac{١}{ك}}$ = (جتا $\frac{\theta + ٢ ر \pi}{ك}$ + ت جا $\frac{\theta + ٢ ر \pi}{ك}$)

أي أن مقدار (جتا θ + ت جا θ)$^{\frac{١}{ك}}$ يأخذ قيما متعددة تبعا لقيم ر و يكون عدد هذه القيم المختلفة يساوي ك

من القيم التي نحصل عليها بوضع ر = ... ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ..... التي تجعل السعة $\frac{\theta + ٢ ر \pi}{ك}$

محصورة بين $-\pi$ ، π

<u>الجذور التكعيبية للواحد الصحيح</u> : إذا كان $ع^٣ = ١$ فإن ع $\in$ $\left\{ ١ ، -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت ، -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت \right\}$

و يرمز لهذه الجذور بالرموز ١ ، ω ، $\omega^٢$

حيث $\omega = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\omega^٢ = -\frac{١}{٢} \mp \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

<u>خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح</u> :

(١) $\omega^٣ = ١$ (٢) $١ + \omega + \omega^٢$ = صفر (٣) $\omega^٢ - \omega = \pm \sqrt{٣}$ ت

الجذور النونية للواحد الصحيح : إذا كان $ع^{ن} = ١$

فإن $ع = (جتا ٠ ^{\circ} + ت \, جا ٠ ^{\circ})^{\frac{١}{ن}} = جتا \frac{٢ \pi ك}{ن} + ت \, جا \frac{٢ \pi ك}{ن}$ حيث $ك \in ص$ ، $\frac{٢ \pi ك}{ن} \in]-\pi ، \pi]$

و تمثل الجذور النونية للواحد الصحيح على المستوي أرجاند برؤوس مضلع عدد رؤوسه ن ، و تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها ١

الوحدة الثالثة : المحددات و المصفوفات

المحدد : المحدد من الرتبة $ر$ يتكون من $ر$ من الصفوف ، $ر$ من الأعمدة و ينشأ من حذف ($ر - ١$) من المتغيرات في $ر$ من المعادلات الخطية .

خواص المحددات :

- لا تتغير قيمة المحدد إذا تبدلت الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها
- قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أي صف (عمود)
- إذا وجد عامل مشترك في جميع عناصر صف (عمود) في محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد
- قيمة المحدد تساوي صفر في الحالات الآتية :
  - إذا كانت جميع عناصر أي صف أو (أي عمود) في محدد تساوي صفر فإن قيمة المحدد = صفر
  - إذا تساوت العناصر المتناظرة في أي صفين (أو عمودين) في محدد فإن قيمة المحدد = صفر
- إذا بدلنا موضعي صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج = $- ١ \times$ قيمة المحدد الأصلي
- إذا كتبت جميع عناصر أي صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلي على صورة مجموع محددين
- إذا أضفنا لعناصر أي صف (عمود) العناصر المناظرة لها من صف (عمود) أخر مضروبة في عدد مثل م فإن قيمة المحدد لا تتغير
- قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي
- في أي محدد إذا ضربنا عناصر أي صف (عمود) في العوامل المرافقة للعناصر المناظرة في أي صف (عمود) أخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساوياً صفرا

لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة : من النظم ٣×٣ باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة نتبع الخطوات التالية :

- نوجد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة أن $| أ | \neq$ صفر
- نكون مصفوفة العوامل المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة أ
- نوجد المصفوفة الملحقة $أ^{مل}$ لمصفوفة العوامل المرافقة
- نوجد المعكوس الضربي للمصفوفة أ من العلاقة : $أ^{-١} = \frac{١}{| أ |} \times أ^{مل}$

حل أنظمة المعادلات الخطية :

باعتبار أن أ هي مصفوفة المعاملات ، $س$ هي مصفوفة المتغيرات

ب هي مصفوفة الثوابت . فإن :

- المعادلة المصفوفية تكتب بالصورة : $أ \, س = ب$
- وحل هذه المعادلة هو : $س = أ^{-١} \times ب$

مرتبة المصفوفة :

مرتبة المصفوفة غير الصفرية هي أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوي الصفر ، فإذا كانت المصفوفة أ غير الصفرية على النظم م × ن فإن مرتبة المصفوفة (أ) نرمز لها بالرمز ر (أ) حيث :

١ ⩽ ر (أ) ⩽ أصغر (م ، ن)

المصفوفة الموسعة : هي مصفوفة ممتدة للنظام الخطي و يرمز لها بالرمز أ * حيث :

أ * = (أ | ب) و هي على النظم م × (ن + ١)

المعادلات غير المتجانسة :

تسمى مجموعة المعادلات التي على صورة معادلة المصفوفة : أ س = ب غير متجانسة حيث ب ≠ $\boxed{}$

- يكون للمجموعة المكونة من ن معادلة غير متجانسة في ن مجهولا حل وحيد إذا كانت
 ر (أ) = ر (أ *) = ن (عدد المجاهيل) حيث | أ | ≠ صفر
- يكون لمجموعة المعادلات عدد غير محدود من الحلول " عدد لا نهائي "
 إذا كان ر (أ) = ر (أ *) = ك حيث ك < ن
- و لا يكون لها حل على الاطلاق إذا كان ر (أ) ≠ ر (أ *)

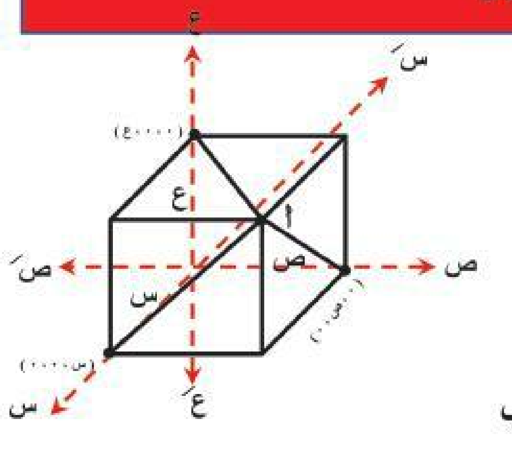
المعادلات المتجانسة :

تسمي مجموعة المعادلات التي على الصورة : أ س = $\boxed{}$ بالمعادلات المتجانسة فإذا كان :

- ر (أ) = ر (أ *) = ن (عدد المجاهيل) يكون للنظام حل وحيد هو الحل الصفري (و يسمى بالحل البديهي لكونه شديد الوضوح)
- ر (أ) < ن (حيث ن عدد المجاهيل) ، | أ | = صفر فإنه يوجد حل للمجموعة عدد لانهائي من الحلول بخلاف الحل الصفري

ثانيا : الهندسة الفراغية

الوحدة الاولي : الهندسة و القياس في ثلاثة أبعاد



النظام الاحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد :

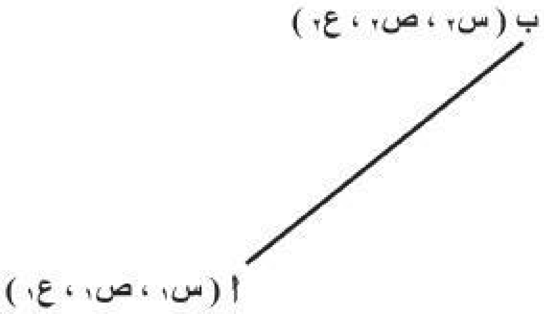
تتعين إحداثيات النقطة أ في الفراغ بمعرفة مسقطها على كل محور من محاور الإحداثيات

قاعدة اليد اليمنى :

و فيها تشير الأصابع المنحنية من الاتجاه الموجب لمحور س إلي الاتجاه الموجب لمحور ص و يشير اتجاه الإبهام إلي الاتجاه الموجب لمحور ع

مستويات الاحداثيات :

- المستوي س ص و معادلته ع = صفر
- المستوي س ع و معادلته ص = صفر
- المستوي ص ع و معادلته س = صفر



البعد بين نقطتين فى الفراغ :

إذا كانت أ (س١ ، ص١ ، ع١) ، ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢)

نقطتين في الفراغ فإن طول القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ يعطى بالعلاقة :

$$أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$$

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة :

إذا كانت أ (س١ ، ص١ ، ع١) ، ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢)

نقطتين في الفراغ ، جـ نقطة منتصف $\overline{أب}$ فإن احداثيات النقطة جـ هي :

$$\text{فإن} \quad جـ \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢} \right)$$

معادلة الكرة فى الفراغ :

- معادلة الكرة التي مركزها (ل ، ك ، ن) ، و طول نصف قطرها نق تكون :

$$(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢ = نق^٢$$

- معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل ، و طول نصف قطرها نق تكون : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = نق^٢$
- معادلة الكرة : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ٢ ن ع + ء = ٠$
حيث مركزها (– ل ، – ك ، – ن) ، و طول نصف قطرها (نق) $= \sqrt{ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ء}$
حيث $ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ > ء$

متجه الموضع فى الفراغ :

إذا كانت أ ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$) نقطة في الفراغ فإن متجه الموضع

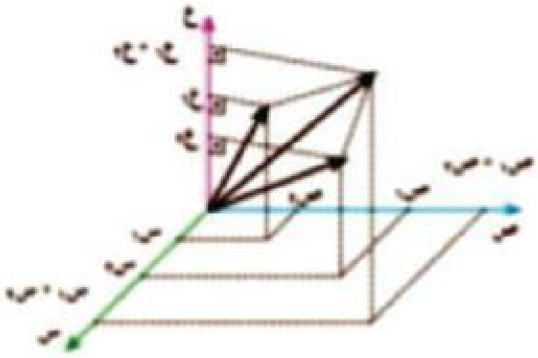
للنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل يكون $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$

- $أ_س$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور س
- $أ_ص$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور ص
- $أ_ع$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور ع

معيار المتجه :

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ فإن $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{أ_س^٢ + أ_ص^٢ + أ_ع^٢}$

جمع و طرح المتجهات فى الفراغ :



إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ فإن :

- $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (أ_س + ب_س ، أ_ص + ب_ص ، أ_ع + ب_ع)$
- $\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (أ_س - ب_س ، أ_ص - ب_ص ، أ_ع - ب_ع)$

خواص عملية الجمع :

(١) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} \in ح^3$ خاصية الانغلاق (٢) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ}$ خاصية الابدال

(٣) $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) + \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} + (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ})$ خاصية التجميع

(٤) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} = \overrightarrow{و} + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ}$ العنصر المحايد الجمعي

(٥) $\overrightarrow{أ} + (-\overrightarrow{أ}) = (-\overrightarrow{أ}) + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ المعكوس الجمعي

ضرب المتجه في عدد حقيقي :

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، ك $\in$ ح فإن ك $\overrightarrow{أ} = (ك أ_س ، ك أ_ص ، ك أ_ع)$

تساوى المتجهات فى الفراغ :

إذا كان $(أ_س ، أ_ص ، أ_ع) = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

فإن : $أ_س = ب_س$ ، $أ_ص = ب_ص$ ، $أ_ع = ب_ع$

متجه الوحدة :

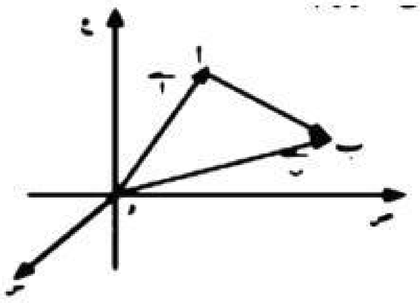
هو متجه معياره يساوى وحدة الأطوال

متجهات الوحدة الاساسية :

- $\overrightarrow{س} = (١ ، ٠ ، ٠)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور س
- $\overrightarrow{ص} = (٠ ، ١ ، ٠)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور ص
- $\overrightarrow{ع} = (٠ ، ٠ ، ١)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور ع

التعبير عن متجه بدلالة متجهات الوحدة الاساسية :

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ فإنه يمكن كتابة المتجه $\overrightarrow{أ}$ على الصورة : $\overrightarrow{أ} = أ_س \overrightarrow{س} + أ_ص \overrightarrow{ص} + أ_ع \overrightarrow{ع}$



التعبير عن قطعة مستقيمة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها :

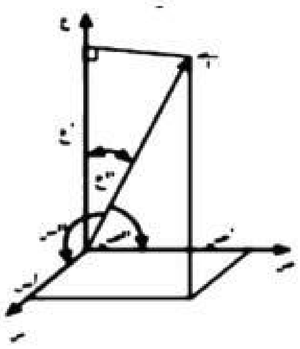
إذا كان أ ، ب نقطتين في الفراغ متجه موضعهما $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

على الترتيب فإن $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

متجه الوحدة فى اتجاه معلوم :

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ فإن متجه $\overrightarrow{ى_أ}$ يسمى متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{أ}$ و يعطى بالعلاقة :

$$\overrightarrow{ى_أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$$



زوايا الاتجاه و جيوب تمام الاتجاه المتجه فى الفراغ :

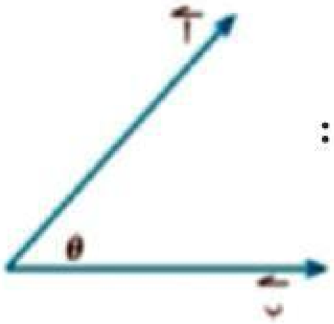
إذا كانت $(\theta_س ، \theta_ص ، \theta_ع)$ قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$

مع الاتجاهات الموجبة لمحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن :

- أ$_{س}$ = || $\overleftarrow{\text{أ}}$ || جتاθ $_{س}$ ، أ$_{ص}$ = || $\overleftarrow{\text{أ}}$ || جتاθ $_{ص}$ ، أ$_{ع}$ = || $\overleftarrow{\text{أ}}$ || جتاθ $_{ع}$

($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) تسمي بزوايا الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$

- جتاθ $_{س}$ ، جتاθ $_{ص}$ ، جتاθ $_{ع}$ تسمي جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$
- جتاθ $_{س}$ $\overleftarrow{\text{س}}$ + جتاθ $_{ص}$ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + جتاθ $_{ع}$ $\overleftarrow{\text{ع}}$ تمثل متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$
- و يكون : جتا^{٢} $\theta_{س}$ + جتا^{٢} $\theta_{ص}$ + جتا^{٢} $\theta_{ع}$ = ١



الضرب القياسى لمتجهين :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين في ع^3 قياس الزاوية بينهما θ حيث ٠ $\leqslant \theta \leqslant$ ١٨٠° فإن :

$\overleftarrow{\text{أ}}$. $\overleftarrow{\text{ب}}$ = || $\overleftarrow{\text{أ}}$ || || $\overleftarrow{\text{ب}}$ || جتا θ

خواص الضرب القياسى لمتجهين :

(١) $\overleftarrow{\text{أ}}$. $\overleftarrow{\text{ب}}$ = $\overleftarrow{\text{ب}}$. $\overleftarrow{\text{أ}}$ خاصية الابدال

(٢) $\overleftarrow{\text{أ}}$. ($\overleftarrow{\text{ب}}$ + $\overleftarrow{\text{جـ}}$) = $\overleftarrow{\text{أ}}$. $\overleftarrow{\text{ب}}$ + $\overleftarrow{\text{أ}}$. $\overleftarrow{\text{جـ}}$ خاصية التوزيع

(٣) إذا كان ك عدد حقيقي فإن (ك $\overleftarrow{\text{أ}}$) . $\overleftarrow{\text{ب}}$ = $\overleftarrow{\text{أ}}$. (ك $\overleftarrow{\text{ب}}$) = ك ($\overleftarrow{\text{أ}}$. $\overleftarrow{\text{ب}}$)

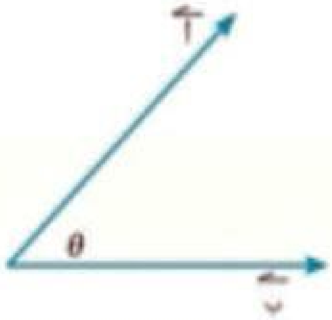
(٤) $\overleftarrow{\text{أ}}$. $\overleftarrow{\text{أ}}$ = || $\overleftarrow{\text{أ}}$ ||^{٢}

(٥) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$. $\overleftarrow{\text{ب}}$ = صفر فإن $\overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{ب}}$ حيث $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين

الضرب القياسى لمتجهين فى نظام احداثى متعامد :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (أ$_{س}$ ، أ$_{ص}$ ، أ$_{ع}$) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (ب$_{س}$ ، ب$_{ص}$ ، ب$_{ع}$)

فإن : $\overleftarrow{\text{أ}}$. $\overleftarrow{\text{ب}}$ = أ$_{س}$ ب$_{س}$ + أ$_{ص}$ ب$_{ص}$ + أ$_{ع}$ ب$_{ع}$

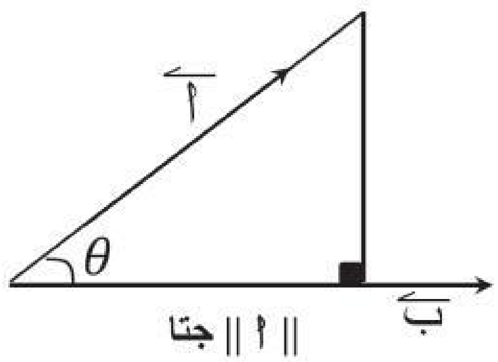


الزاوية بين متجهين :

$\therefore$ جتا θ = $\dfrac{\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}}{||\overleftarrow{\text{أ}}||\ ||\overleftarrow{\text{ب}}||}$ ، صفر° $\leq \theta \leq$ ١٨٠°

- إذا كانت جتا θ = ١ فإن $\overleftarrow{\text{أ}}$ // $\overleftarrow{\text{ب}}$ و نفس الاتجاه
- إذا كانت جتا θ = −١ فإن $\overleftarrow{\text{أ}}$ // $\overleftarrow{\text{ب}}$ و في عكس الاتجاه
- إذا كانت جتا θ = صفر فإن $\overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{ب}}$

مركبة متجه فى اتجاه متجه أخر :



$\therefore$ مركبة المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ في اتجاه $\overleftarrow{\text{ب}}$

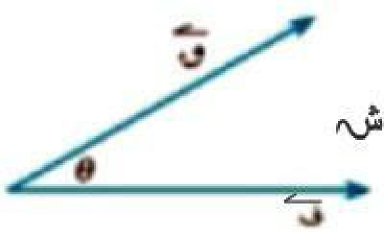
$\overleftarrow{\text{أ}}_{ب}$ = || $\overleftarrow{\text{أ}}$ || جتا θ

$\overleftarrow{\text{أ}}_{ب}$ = $\dfrac{\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}}{||\overleftarrow{\text{ب}}||}$

المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$:

$$= \left(\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{2}} \right) \overrightarrow{\text{ب}}$$

الشغل المبذول من قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ لإحداث إزاحة $\overrightarrow{\text{ف}}$:



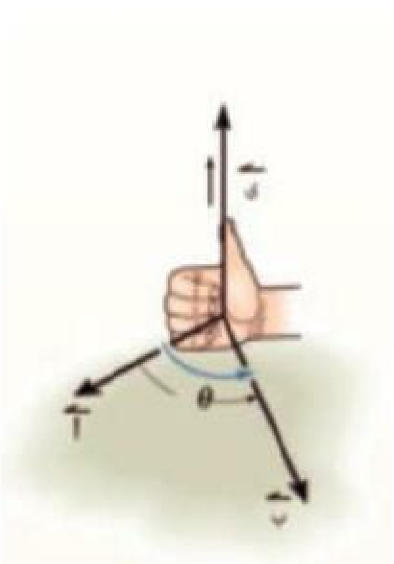
إذا أثرت قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ على جسم ما فحركته إزاحة $\overrightarrow{\text{ف}}$ فإننا نقول أن القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ قد بذلت شغلا ش

$$\text{الشغل} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ف}}$$

$$= \|\overrightarrow{\text{ق}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ف}}\| \text{ جتا } \theta$$

- إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ في نفس اتجاه الازاحة (θ = صفر°) $\text{ش} = \|\overrightarrow{\text{ق}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ف}}\|$
- إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ في عكس اتجاه الازاحة (θ = ١٨٠°) $\text{ش} = -\|\overrightarrow{\text{ق}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ف}}\|$
- إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ عمودية على اتجاه الازاحة (θ = ٩٠°) ش = صفر

الضرب الاتجاهى لمتجهين:



إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين في ع^{3} ، قياس الزاوية بينهما يساوي θ

فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\| \text{ جا } \theta)\, \overrightarrow{\text{ى}}$ حيث $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودي على مستوى $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، ويتحدد اتجاه متجه الوحدة $\overrightarrow{\text{ى}}$ (لأعلى أم لأسفل) طبقا لقاعدة اليد اليمنى حيث يشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلي اتجاه الدوران من $\overrightarrow{\text{أ}}$ إلي المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ فيشير الابهام إلي المتجه $\overrightarrow{\text{ى}}$

خواص الضرب الاتجاهى لمتجهين :

(١) $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$

(٢) $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$

(٣) $\overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}) = \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}$ خاصية التوزيع

(٤) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ فإما $\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$ أو أحد المتجهين أو كليهما يساوي $\overrightarrow{\text{و}}$

(٥) $\hat{\text{س}} \times \hat{\text{ص}} = \hat{\text{ع}}$ ، $\hat{\text{ص}} \times \hat{\text{ع}} = \hat{\text{س}}$ ، $\hat{\text{ع}} \times \hat{\text{س}} = \hat{\text{ص}}$

$\hat{\text{س}} \times \hat{\text{ع}} = -\hat{\text{ص}}$ ، $\hat{\text{ع}} \times \hat{\text{ص}} = -\hat{\text{س}}$ ، $\hat{\text{ص}} \times \hat{\text{س}} = -\hat{\text{ع}}$

الضرب الاتجاهى لمتجهين فى نظام احداثى متعامد :

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$

فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$

حالة خاصة : الضرب الاتجاهى فى مستوى الاحداثيات س ص :

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}})$

فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} \end{vmatrix} \overrightarrow{\text{ع}} = (\text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}} - \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}}) \overrightarrow{\text{ع}}$

متجه الوحدة العمودي على مستوى المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$:

$$\overrightarrow{\text{ى}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}}{\| \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} \|}$$

توازى متجهين :

المتجهان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$ يكونان متوازيين إذا تحقق أحد الشروط الاتية :

(١) $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

(٢) $\frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\text{ب}_{\text{ص}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\text{ب}_{\text{ع}}}$

(٣) $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}\, \overrightarrow{\text{ب}}$ إذا كانت ك > ٠ فإن المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيان و في نفس الاتجاه

، إذا كانت ك < ٠ فإن المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيان و في عكس الاتجاه

المعنى الهندسي للضرب الاتجاهي :

$\| \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} \|$ = مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ضلعان متجاوران

= ضعف مساحة المثلث الذي فيه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ضلعان متجاوران

الضرب الثلاثى القياسى :

$\overrightarrow{\text{أ}} . \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \\ \text{جـ}_{\text{س}} & \text{جـ}_{\text{ص}} & \text{جـ}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$

المعنى الهندسى للضرب الثلاثى القياسى :

حجم متوازي السطوح الذي فيه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ثلاثة متجهات تمثل أحرف غير متوازية

يساوي القيمة المطلقة للمقدار : $\overrightarrow{\text{أ}} . \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}$

الوحدة الثانية : الخطوط المستقيمة و المستويات في الفراغ

متجه الاتجاه :

- إذا كانت ل ، م ، ن هي جيوب تمام الاتجاه لمستقيم فإن المتجه $\overleftarrow{ى}$ = ك (ل ، م ، ن) يمثل متجه اتجاه للمستقيم و يرمز له بالرمز $\overleftarrow{ى}$ = (أ ، ب ، جـ) و تسمى الأعداد أ ، ب ، جـ بنسب الاتجاه للمستقيم
- متجه الاتجاه للمستقيم يأخذ عدة صور متكافئة فمثلا :

$\overleftarrow{ى}$ = ٢ (ل ، م ، ن) = ٣ (ل ، م ، ن) = ـ ٤ (ل ، م ، ن) =..............

معادلة الخط المستقيم :

- معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) و المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (أ ، ب ، جـ) متجه اتجاه له هي
الصورة المتجهة : $\overleftarrow{ر}$ = (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) + ك (أ ، ب ، جـ)
- المعادلات البارمترية : س = س$_1$ + ك أ ، ص = ص$_1$ + ك ب ، ع = ع$_1$ + ك جـ
- المعادلة الاحداثية : $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$

الزاوية بين مستقيمين :

إذا كان $\overleftarrow{ى}_1$ ، $\overleftarrow{ى}_2$ متجهي اتجاه مستقيمين فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين يعطي بالعلاقة :

$$\text{جتا}\theta = \frac{|\overleftarrow{ى}_1 . \overleftarrow{ى}_2|}{\|\overleftarrow{ى}_1\|\|\overleftarrow{ى}_2\|}$$

و إذا كان (ل$_1$ ، م$_1$ ، ن$_1$) ، (ل$_2$ ، م$_2$ ، ن$_2$) هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن :

$$\text{جتا}\theta = |\text{ل}_1\text{ل}_2 + \text{م}_1\text{م}_2 + \text{ن}_1\text{ن}_2|$$

شرط توازى و شرط تعامد مستقيمين :

إذا كان $\overleftarrow{ى}_1$ = (أ$_1$ ، ب$_1$ ، جـ$_1$) ، $\overleftarrow{ى}_2$ = (أ$_2$ ، ب$_2$ ، جـ$_2$) متجهي اتجاه مستقيمين فإن :

- المستقيمين متوازيان إذا كان :

$\overleftarrow{ى}_1$ = ك $\overleftarrow{ى}_2$ أ، $\overleftarrow{ى}_1 \times \overleftarrow{ى}_2 = \overleftarrow{و}$ أ، $\frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{\text{جـ}_1}{\text{جـ}_2}$

- المستقيمين متعامدان إذا كان :

أ$_1$ أ$_2$ + ب$_1$ ب$_2$ + جـ$_1$ جـ$_2$ = صفر

معادلة المستوى :

معادلة المستوي المار بالنقطة (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) و المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (أ ، ب ، جـ) عموديا على المستوي هي :

- الصورة المتجهة : $\overleftarrow{ن}$. $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ن}$. (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$)
- الصورة القياسية : أ (س ـ س$_1$) + ب (ص ـ ص$_1$) + جـ (ع ـ ع$_1$) = صفر
- الصورة العامة : أ س + ب ص + جـ ع + ء = صفر ، حيث ء = -أ س$_1$ - ب ص$_1$ - جـ ع$_1$

الزاوية بين مستويين :

إذا كان $\overleftarrow{ن_١} = (أ_١ ، ب_١ ، جـ_١)$ ، $\overleftarrow{ن_٢} = (أ_٢ ، ب_٢ ، جـ_٢)$ متجهي العمودين على المستويين فإن قياس

الزاوية بين المستويين تعطي بالعلاقة :

$$جتا\theta = \frac{| \overleftarrow{ن_١} . \overleftarrow{ن_٢} |}{\| \overleftarrow{ن_١} \| \| \overleftarrow{ن_٢} \|} \qquad حيث \quad ٠^\circ \leqslant \theta \leqslant ٩٠^\circ$$

المستويان المتوازيان و المستويان المتعامدان :

إذا كان $\overleftarrow{ن_١}$ ، $\overleftarrow{ن_٢}$ هما المتجهان العموديان على المستويين فإن :

- شرط توازي المستويين هو : $\overleftarrow{ن_١} // \overleftarrow{ن_٢}$ أ، $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$
- شرط تعامد المستويين هو : $\overleftarrow{ن_١} . \overleftarrow{ن_٢} = ٠$ أ، $أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + جـ_١ جـ_٢ = صفر$

طول العمود المرسوم من نقطة على المستوى :

طول العمود المرسوم من النقطة أ $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ على المستوي المار بالنقطة ب $(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$

و المتجه $\overleftarrow{ن} = (أ ، ب ، جـ)$ عمودي على المستوي هو ل حيث:

$$ل = \frac{| \overleftarrow{ب أ} . \overleftarrow{ن} |}{\| \overleftarrow{ن} \|}$$

طول العمود المرسوم من النقطة أ $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ على المستوي الذي معادلته:

أ س + ب ص + جـ ع + ء = صفر هو ل حيث:

$$ل = \frac{| أس_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + ء |}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$$

معادلة المستوي باستخدام الأجزاء المقطوعة من محاور الاحداثيات :

إذا قطع المستوي محاور الاحداثيات في النقط : $(س_١ ، ٠ ، ٠)$ ، $(٠ ، ص_١ ، ٠)$ ، $(٠ ، ٠ ، ع_١)$

فإن معادلة المستوي تكون على الصورة :

$$\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$$