المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

النموذج الامتحاني الثامن

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: **(لكل سؤال 45 درجة)**

السؤال الأوّل:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(1,-3,-2), B(5,1,-4)$ ، أعطِ معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

السؤال الثاني:

حلة في $\mathbb{R}$ المتراجحة الآتية: $e^{x}+5e^{-x}\leq 6$.

السؤال الثالث:

نريد تشكيل عدد مكون من 3 منازل وبأرقام مختلفة من عناصر المجموعة $S=\{2,3,5,6,7,9\}$

1- كم عدد يمكن تشكيله .

2- كم عدداً يقبل القسمة على 5 .

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: **(لكل سؤال 45 درجة)**

السؤال الأول:

أوجد مجموعة تعريف التابع f المعطى بالعلاقة: $f(x)=\frac{\ln(2+x)}{x^2+x}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

السؤال الثاني:

بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2),(B,-1),(C,2)$ ، ماذا تمثل مجموعة النقاط M في الفراغ التي تحقق العلاقة: $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MG}-3\overrightarrow{MA}\|$

السؤال الثالث:

أثبت بالتدرج أن $4^{n}+5$ من مضاعفات العدد 3 أيّاً تكن $n\in\mathbb{N}$

ثالثاً: حل التمارين الثلاثة التالية: (80 للأول – 70 للثاني – 70 للثالث)

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{x+4}{|x|+2}$ ، المطلوب:

1- ادرس قابلية f للاشتقاق عند $x = 0$ من اليمين .

2- اكتب معادلة نصف المماس لـ C في النقطة $A(0,2)$.

3- أوجد $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

التمرين الثاني:

u_n , v_n متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية وفق:

$$v_n = \ln(u_n) - 2 \ , \quad \begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n-1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$$

1- أثبت أن v_n هندسية عين أساسها وحدها الأول واستنتج صيغتها بدلالة n .

2- استنتج صيغة u_n بدلالة n واحسب نهايتها .

التمرين الثالث:

ليكن $P(Z) = Z^3 - 4Z^2 + 8Z - 8$ ، المطلوب:

1- a) تحقق أن 2 هو جذر لكثير الحدود $P(Z)$.

b) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z) = 0$

2- في المستوي المركب $Z_A = 2, Z_B = 1 + i\sqrt{3}, Z_C = 1 - i\sqrt{3}$

a) اكتب كلاً من $Z_B, Z_C, \frac{Z_B}{Z_C}$ بالشكل الأسي .

b) عيّن مجموعة قيم $n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n$ حقيقياً .

3- عين النقاط A, B, C ثم بيّن طبيعة الرباعي $OBAC$.

رابعاً: حل المسألتين الآتيتين: **(100 درجة لكل مسألة)**

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على D_f وفق: $f(x)=\frac{x}{\ln x}-e$ ، المطلوب:

1- أوجد D_f ، وأوجد معادلة كل مقارب لـ C يوازي $x'x$.

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ؛ ودل على القيم الحدية مبيّناً نوعها مع التعليل .

3- ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C .

4- استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع f_1 المعطى وفق: $f_1(x)=\frac{x}{\ln(-x)}+e$.

المسألة الثانية:

لتكن H,D نقطتان من الفراغ ، ولتكن I منتصف $[HD]$ ، المطلوب:

1- بيّن أنه من أجل كل نقطة M يكون $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MH}=MI^2-ID^2$

2- استنتج أن مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MH}=0$ هي كرة .

3- لتكن $A(3,0,0), B(0,6,0), C(0,0,4), D(-5,0,1)$

a) تحقق أن A,B,C تعيّن مستوياً .

b) بيّن أن الشعاع $\vec{n}(4,2,3)$ ناظماً لـ ABC .

c) اكتب معادلة المستوي ABC .

4- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم للمستقيم Δ المار بـ D ويعامد (ABC) .

5- احسب إحداثيات H المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC) .

6- اكتب معادلة الكرة المعرفة بالعلاقة $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MH}=0$.

انتهت الأسئلة

حل النموذج الرسولي الثامن

السؤال الأول:

نفرض $M(x, y, z)$

$\overrightarrow{MA}(1-x, -3-y, -2-z)$

$\overrightarrow{MB}(5-x, 1-y, -4-z)$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ نجد

$(1-x)(5-x)+(1-y)(-3-y)+(-2-z)(-4-z)=0$

$5-x-5x+x^2+y^2-3+2y+z^2+8+6z=0$

ومنه

$x^2+y^2+z^2-6x+2y+6z+10$

وهي معادلة كرة مركزها $\Omega(3,-1,-3)$

$R^2 = 9+1+9-1 = 18 \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$

المستقيم $= \mathbb{R}$

$D_f = D$ المستقيم $\cap D$ المقام $\setminus \{-1, 0\}$

$=]-2, +\infty[\setminus \{-1, 0\}$

$f(x) = \dfrac{\ln(1+1+x)}{x(x+1)}$ نفرض $1+x = X$

$x \to -1$

$X \to 0$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{(X-1)X}$ لأن $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

ومنه $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \dfrac{1}{-2} = \dfrac{-1}{2}$

السؤال الثاني:

$e^x + 5e^{-x} \leq 6$

$e^{2x} + 5 \leq 6e^x$ نجد

$e^{2x} - 6e^x + 5 \leq 0$

$(e^x-1)(e^x-5) \leq 0$

$(e^x-1)(e^x-5) = 0$

إما $e^x = 1$ $\quad x = 0$

أو $e^x = 5$ $\quad x = \ln 5$

x	$-\infty$		0		$\ln 5$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	
		مرفوض		م		مرفوض	

$x \in [0, \ln 5]$

السؤال الثاني:

G مركز $(A,2)(B,-1)(C,2)$

$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ ... ①

نعوض في D المعادلة السابقة

$\| 3\overrightarrow{MG} \| = \| 3(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA}) \|$

$\| 3\overrightarrow{MG} \| = \| 3\overrightarrow{AG} \| \Rightarrow$

$\| \overrightarrow{MG} \| = \| \overrightarrow{AG} \|$

وهي معادلة كرة مركزها G ونصف قطرها

$R = \| \overrightarrow{AG} \|$

السؤال الثالث:

مرتب المبدأ الاستثنائي بالعد

عدد طرق اختيار الأحجار $= 6$

عدد طرق اختيار الشرائح $= 5$

عدد طرق اختيار الثياب $= 4$

$6 \times 5 \times 4 = 120$

مرتب المبدأ والساسي بالعد

عدد طرق اختيار الأحجار $= 1$

عدد طرق اختيار الشرائح $= 5$

عدد طرق اختيار الثياب $= 4$

$1 \times 5 \times 4 = 20$

السؤال الثالث:

$E(n)$: 3 يقسم العدد $4^n + 5$

من أجل $n = 0$

3 يقسم العدد $4^0 + 5 = 6$

محققة من أجل $n = 0$

الفرض: 3 يقسم العدد $4^n + 5$

الطلب: 3 يقسم العدد $4^{n+1} + 5$

الإثبات:

$4^{n+1} + 5 = 4 \cdot 4^n + 5$

$= (3+1)4^n + 5$

$= 3 \cdot 4^n + \underbrace{4^n + 5}$

من مضاعفات 3 ← من مضاعفات 3 فرضاً

ثانياً:

السؤال الأول:

شرط $=]-2, +\infty[$

والعلاقة محققة من أجل n+1 فهي قضية صحيحة.

ثالثاً:

التمرين الأول: $t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$x\to0^+$

$|x|=x$

$t(x)=\frac{\frac{x+4}{|x|+2}-2}{x}$

$=\frac{\frac{x+4}{x+2}-2}{x}=\frac{x+4-2x-4}{x(x+2)}$

$=\frac{-x}{x(x+2)}=\frac{-1}{x+2}$

ومنه $\lim_{x\to0} t(x)=\frac{-1}{2}$

اذاً f اشتقاقي عند 0 من اليمين

ع) $m=\lim_{x\to0^+}t(x)=\frac{-1}{2}$

معادلة المماس في $A(0,2)$

$y-2=-\frac{1}{2}(x-0)$

$y=-\frac{1}{2}x+2$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)=1$

التمرين الثاني:

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\ln(u_{n+1})-2}{\ln(u_n)-2}$

$=\frac{\ln(e\cdot u_n^{\frac{1}{2}})-2}{\ln(u_n)-2}$

$=\frac{\ln(e)+\ln(u_n)^{\frac{1}{2}}-2}{\ln(u_n)-2}$

$=\frac{1+\ln(u_n)^{\frac{1}{2}}-2}{\ln(u_n)-2}=\frac{\frac{1}{2}\ln(u_n)-1}{\ln u_n-2}$

ومنه $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}$

فهي متتالية هندسية

$q=\frac{1}{2}$

$v_n=v_0\cdot q^n$ حيث $v_0=\ln(u_0)-2$

$=\ln(e^3)-2$

$=3-2=1$

$v_n=(\frac{1}{2})^n$

$v_n=\ln(u_n)-2$

$v_n+2=\ln(u_n)\Rightarrow u_n=e^{v_n+2}$

$u_n=e^{(\frac{1}{2})^n+2}$

$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n=0$

$\lim_{n\to+\infty}u_n=e^{0+2}=e^2$

التمرين الثالث:

$Z^3-4Z^2+8Z-8=P(Z)$

أ) a) $8-16+16-8=0$

ومنه 2 جذر لكثير الحدود

$$
\begin{array}{r|l}
Z-2 & Z^3-4Z^2+8Z-8 \\
\hline
 & Z^2-2Z+4 \\
 & -Z^3 \pm 2Z^2 \\
 & -2Z^2+8Z \\
 & -2Z^2 \mp 4Z \\
 & 4Z-8 \\
 & -4Z-8 \\
 & 0
\end{array}
$$

$(Z-2)(Z^2-2Z+4)=0$

إما $Z-2=0\Rightarrow Z=2$

أو $Z^2-2Z+4=0$

$\Delta=4-16=-12<0$

المعادلة حلين عقديين مترافقين

$-\Delta=12$

$\sqrt{-\Delta}=2\sqrt{3}$

$x = e \qquad f(e) = 0$

x	0		1		e		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-e$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(e) = 0$ قيمة حدية صغرى .

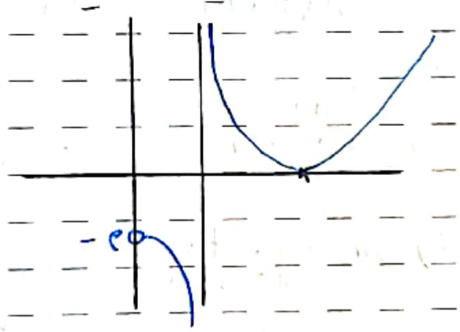
$D =]1,3[$

$D \cap D_f =]1,3[$

$\forall x \in]1,3[$

$f(x) \geq f(e)$

فإن $f(e)$ قيمة حدية صغرى .



$f_1(x) = \dfrac{x}{\ln(-x)} + e$

$= -f(-x)$

متناظران بالنسبة للمبدأ.

$Z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - 2\sqrt{3}i}{2}$

$Z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

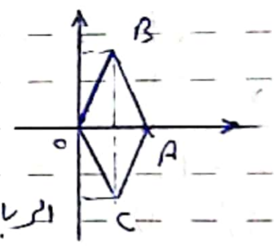
$Z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

$\dfrac{Z_B}{Z_C} = e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})i} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

حقيقياً $\left(\dfrac{Z_B}{Z_C}\right)^n = \left(e^{2\pi/3\, i}\right)^n = e^{\frac{2n\pi}{3}i}$

لكي يكون حقيقياً يجب أن تكون n من مضاعفات العدد 3 .

$A(2,0) \quad B(1,\sqrt{3}) \quad C(1,-\sqrt{3})$



$\vec{OC} = 1 - i\sqrt{3}$

$\vec{BA} = 2 - 1 - i\sqrt{3}$

$= 1 - i\sqrt{3}$

الرباعي OCAB متوازي أضلاع

ومنه $OC = OB$

فهو معين

المسألة الأولى : $f(x) = \dfrac{x}{\ln x} - e$

معرف على $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{0}{-\infty} - e = -e$

$(0,-e)$ نقطة متروكة

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي .

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

ii) $f'(x) = \dfrac{\ln x - \frac{1}{x}\cdot x}{\ln^2 x} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

$f' = 0 \Rightarrow \ln x = 1$

المسألة الثانية :

$\vec{MD}\cdot\vec{MH} = (\vec{MI}+\vec{ID})(\vec{MI}+\vec{IH})$

$= \vec{MI}^2 + \vec{MI}\cdot\vec{IH} + \vec{ID}\cdot\vec{MI} + \vec{ID}\cdot\vec{IH}$

H —— I —— D

$= MI^2 + (\vec{IH}+\vec{ID})\vec{MI} + \vec{ID}(-\vec{ID})$

$= MI^2 - ID^2$

٢) $\vec{MD}\cdot\vec{MH} = 0 \iff$

$MI^2 = ID^2$

وهي معادلة كرة مركزها I منتصف وقطرها ID

٣)

$\vec{AB}(-3, 6, 0)$
$\vec{AC}(-3, 0, 4)$

غير مرتبطين خطياً من النقاط A, B, C تعيين مستوياً

$\vec{n}\cdot\vec{AB} = -12+12+0=0$
$\vec{n}\cdot\vec{AC} = -12+0+12=0$ $\Rightarrow$

$\vec{n}(4,2,3)$ ناظم لـ ABC

$4x+2y+3z+d=0$

نعوض A نجد $d=-12$

$ABC: 4x+2y+3z-12=0$

٤) Δ يعامد ABC $\iff \vec{u}_\Delta = \vec{n}(4,2,3)$

$x = -5+4t$
$y = 2t \qquad t\in\mathbb{R}$
$z = +1+3t$

٥) نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ في معادلة المستوي.

$-20+16t+4t+3+9t-12=0$

$29t = 29 \Rightarrow t=1$

نعوض في المعادلات الوسيطية

$H(-1, 2, 4)$

٦) منتصف HD ولتكن I مركزها

$I(-3, 2, \frac{5}{2})$

$2R = HD = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$

$R = \frac{\sqrt{29}}{2}$

ومنه معادلة الكرة

$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-\frac{5}{2})^2 = \frac{29}{4}$