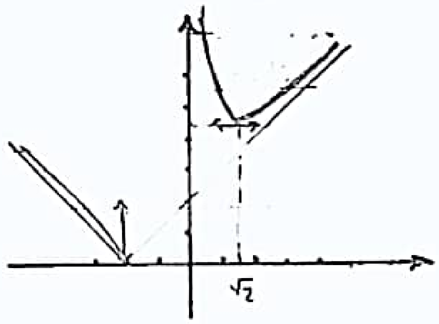
المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

النموذج الامتحاني الحادي عشر

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: (لكل سؤال 45 درجة)

السؤال الأوّل:



ليكن C الخط البياني للتابع f الموضح جانباً ، المطلوب:

1- أوجد D_f ، وأوجد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه المفتوحة ، واستنتج معادلة المقارب الشاقولي للخط .

2- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3- اكتب معادلة المقارب المائل لخطه في جوار $+\infty$.

4- أوجد $f(-2)$ ، وهل f اشتقاقي عند (-2) ؟ علل ذلك

5- احسب $f'(\sqrt{2})$ ، واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$.

السؤال الثاني:

اكتب معادلة للمخروط الذي رأسه $A(7,0,0)$ ومحوره $(O,\vec{i})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $B(4,0,0)$ ونصف قطرها 3 .

السؤال الثالث:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $Z^2 + (1+4i)Z - 5 - i = 0$.

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: (لكل سؤال 45 درجة)

السؤال الأول:

يحتوي صندوق 6 بطاقات متماثلة كتب عليها الأرقام 1,1,1,2,2,3 نسحب من الصندوق بطاقتين على التتالي دون إعادة .

1- احسب احتمال أن تكون البطاقة الأولى تحمل الرقم (1) إذا كان مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين (4) .

2- إذا كان X متغير عشوائي يدل على جداء رقمي البطاقتين المسحوبتين . أوجد مجموعة قيم X وجدول توقعه الاحتمالي .

السؤال الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$ ، ادرس قابلية اشتقاق f عند (0) واكتب معادلة نصف المماس في $(0,0)$.

المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

السؤال الثالث:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $A(1,1,1), B(0,-1,-1)$ ، أعط معادلة للمجموعة ξ المكونة من النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة $MA=\sqrt{2}MB$ وما طبيعة ξ .

<u>ثالثاً: حل التمارين الثلاثة التالية:</u> **(80 للأول – 70 للثاني – 70 للثالث)**

التمرين الأول:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها: $u_8=9u_{10}\ ,u_0=e^2$ ، المطلوب:

1- عيّن أساس هذه المتتالية واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2- احسب بدلالة n الحد ذي الدليل n .

3- المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالشكل $v_n=\ln(u_n)$:

a) برهن أن v_n حسابية واكتب v_n بدلالة n .

b) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$.

c) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}$.

التمرين الثاني:

في الفضاء المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، ليكن $A(3,-1,2)\ ,B(1,1,-2)\ ,G(4,-2,4)$
والمستوي P معادلته $P: x-2y+3z+7=0$

1- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ، ثم عيّن إحداثيات L نقطة تقاطع (AB) و P .

2- بيّن أن $G\in(AB)$ وأنها مركز أبعاد متناسبة لـ A,B وعيّن α,β .

3- عيّن طبيعة ξ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

$$\left\|-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$$

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x$ ، المطلوب:

1- قارن بين كل من $f(-x)$, $f(x+2\pi)$ و $f(x)$ ، ثم استنتج أنه تكفي دراسة f على المجال $[0,\pi]$.

2- أثبت أن $f'(x)=6\cos x\cdot\sin x\,(1-2\cos x)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$.

3- ادرس تغيرات التابع f على $[0,\pi]$ وارسم C على $[-\pi,\pi]$

ربعاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x) = \frac{x}{\ln x} - e$ ، المطلوب:

1- أوجد مجموعة تعريف التابع f وأوجد معادلة كل مقارب لـ C .

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الحدية مبيّناً نوعها واستنتج حلول المتراجحة $x > e \cdot \ln x$.

3- ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C واستنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $h(x)$ المعرف وفق: $h(x) = \frac{x}{\ln(-x)} + e$

المسألة الثانية:

في مستوٍ مركب منسوب لمعلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، ليكن لدينا :

$$Z_A = \sqrt{3} + i \,, Z_B = \overline{Z_A} \,, Z_C = -\sqrt{3} - i$$

1- عين Z_D العدد العقدي للنقطة D التي تجعل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثم اكتب الشكل الأسي للأعداد المركبة للنقاط A, B, C .

2- عيّن قيم n كي يكون العدد $\left(\frac{Z_A}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{Z_B}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{Z_C}{2}\right)^n$ تخيلي بحت سالب .

3- ليكن S التحويل النقطي الذي يرفق كل نقطة عددها العقدي Z بالنقطة Z' التي تحقق: $\acute{Z} = iZ+1+i$ ، عين طبيعة S واذكر عناصره .

4- بيّن أن المجموعة Γ للنقط M التي عددها العقدي Z والتي تحقق العلاقة : $(Z - Z_A)\overline{(Z - Z_A)} = Z_C \cdot \overline{Z_C}$ هي دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

5- أثبت أن Z_A, Z_B هما جذرا المعادلة $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$.

انتهت الأسئلة

حل النموذج الحادي عشر

السؤال الأول:

$D_f =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f(-2) = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي.

1) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ = ميل المقارب المائل

المقارب المائل يمر بالنقطتين $(-2,0)\ (-3,1)$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1-0}{-3+2} = -1$

3) المماس يوازي $+\infty$ يمر بالنقطتين

$(-2,0)\quad (0,2)$

$m = \frac{2-0}{0+2} = 1$

معادلة المقارب المائل

$y - 0 = 1(x+2) \Rightarrow y = x+2$

4) $f(x) = 0$

f غير اشتقاقية عند (-2) لأن

$\lim_{x\to -2} f'(x) = +\infty$ لأن المماس فيها شاقولي.

5) $f'(\sqrt2) = 0$ لأن المماس فيها أفقي

$f'(\sqrt2) \geq 0$

$[\sqrt2, +\infty[$

السؤال الثاني:

$y^2+z^2 = \frac{R^2}{h^2} x^2 \qquad 4 \leq x \leq 7$

$h = 7-4 = 3$

$y^2+z^2 = \frac{9}{9} x^2 \qquad 4 \leq x \leq 7$

السؤال الثالث:

$a = 1 \qquad b = 1+4i \qquad c = -5-i$

$\Delta = b^2-4ac$

$= (1+4i)^2 - 4(1)(-5-i)$

$= 1+8i-16+20+4i$

$= 5+12i$

بفرض $\sqrt\Delta = x+iy$

$x^2 - y^2 = 5$ ①

$x^2 + y^2 = \sqrt{25+144} = 13$ ②

$2x \cdot y = 12$ ③

من ① و ②: $2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9$

$x = \mp 3 \xrightarrow{③} y = \mp 2$

من ③ الإشارات متماثلة.

$\sqrt\Delta = 3+2i$

$\sqrt\Delta = -3-2i$

$z_1 = \frac{-b-\sqrt\Delta}{2a} = \frac{-1-4i-3-2i}{2}$

$= \frac{-4-6i}{2} = -2-3i$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt\Delta}{2a} = \frac{-1-4i+3+2i}{2}$

$= 1-i$

رابعاً:

$\boxed{1\,1\,1\,2\,2\,3}$ دون إعادة.

أ: A: البطاقة الأولى تحمل الرقم (1)

B: مجموع البطاقتين $= 4$

$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(A\cap B) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{30}$

$P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} \times 2 + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{8}{30}$

$P(A|B) = \dfrac{\frac{3}{30}}{\frac{8}{30}} = \dfrac{3}{8}$

ثانياً)

$\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{2}\ \frac{2}{3}$

$\{2, 3, 4, 5$

$P(X=2) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

$P(X=3) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$

$P(X=4) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} \times 2 + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+3 = 2x^2+2y^2+2z^2+4y+4z+4$

ومنه

$x^2+y^2+z^2+2x+6y+4z+1=0$

معادلة كرة

$\Omega(-1,-3,-2)$

$R^2 = 1+9+4-1 = 14$

ثالثاً : التمرين الأول

$u_8 = u_6 \cdot q^8$

$u_{10} = u_6 \cdot q^{10}$

$u_8 = 9u_{10}$

$u_6 \cdot q^8 = 9u_6 \cdot q^{10}$

$\frac{1}{9} = q^2 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \qquad -1 < q = \frac{1}{3} < 1$

$u_n = u_6 \cdot q^n = e^2 \cdot (\frac{1}{3})^n$

السؤال الثاني : $0 < x \qquad |x| = x$

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x\sqrt{x^2+1}}\right) = 1 \qquad x > 0$

$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-x}{x\sqrt{x^2+1}}\right) = -1 \qquad x < 0$

غير قابل للاشتقاق عند الصفر لأن

$\lim_{x\to0^+} t(x) \neq \lim_{x\to0^-} t(x)$

$* \quad 0 < x \qquad m = 1$

$T: y = x$

$* \quad 0 > x \qquad m = -1$

$T: y = -x$

ب)

$u_{n+1} - u_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$

$= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{e^2(\frac{1}{3})^{n+1}}{e^2(\frac{1}{3})^n}\right)$

$= \ln(\frac{1}{3}) = -\ln 3$

متتالية حسابية أساسها

$r = -\ln 3$

كذلك $u_0 = \ln(u_6) = 2$

$u_n = u_0 + nr = 2 - n\ln 3$

$S_n = (n+1)\dfrac{2 - 2 + n\ln 3}{2}$

$= \frac{\ln 3}{2}(n^2+n)$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln 3}{2} \cdot \frac{n^2+n}{n^2}\right) = \frac{\ln 3}{2}$

السؤال الثالث : نفرض $M(x, y, z)$

$MA = \sqrt{2}MB \Rightarrow MA^2 = 2MB^2$

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 2[x^2+(y+1)^2+(z+1)^2]$

المدرس: محمد رسول صباغ

التمرين الثاني :

$\vec{AB}(-2, 2, -4)$

$x = 3 - 2t$
$y = -1 + 2t \quad t \in \mathbb{R}$
$z = 2 - 4t$

نعوض المعادلات الوسيطة في معادلة المستوي

$3 - 2t + 2 - 4t + 6 - 12t + 7 = 0$

$-18t = -18 \Rightarrow t = 1$

نعوض في المعادلات الوسيطة

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{array}\right\} L(1, 1, -2)$

نعوض G في المعادلات الوسيطة

$\left.\begin{array}{l} 4 = 3 - 2t \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \\ -2 = -1 + 2t \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \\ 4 = 2 - 4t \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$

ومنه $(AB) \ni G$

$\left.\begin{array}{l} \vec{AG}(1, -1, 2) \\ \vec{BG}(3, -3, 6) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$3\vec{AG} = \vec{BG} \Rightarrow -3\vec{AG} + \vec{BG} = 0$

ومنه G مركز ثقل $(A, -3)(B, 1)$

٣) G مركز ثقل $(A, -3)(B, 1)$

M نقطة ما من الفراغ

$-3\vec{MA} + \vec{MB} = -2\vec{MG}$ ... ①

$\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$ ... ②

نعوض

$\|-2\vec{MG}\| = BA$

$\|\vec{MG}\| = \frac{1}{2} BA$

مجموعة سطح كرة مركزها G

$R = \frac{1}{2} BA$

التمرين الثالث :

$f(-x) = f(x)$

ومنه f تابع زوجي. ونلاحظ البيان متناظر بالنسبة لـ $y'y$.

$f(x + 2\pi) = 2\sin^2(x + 2\pi) + 4\cos^3(x + 2\pi)$

$= 2\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$

ومنه f تابع دوري دوره $T = 2\pi$

بما أنه زوجي ودوري دوره $T = 2\pi$

لذلك نكتفي بدراسته على المجال

$[0, \frac{T}{2}] = [0, \pi]$

$f'(x) = 6\sin x \cos x + 12\cos^2 x(-\sin x)$

$= 6\sin x \cos x(1 - 2\cos x)$

٣) $f(0) = 4 \qquad f(\pi) = -4$

$f' = 6\sin x \cdot \cos x(1 - 2\cos x)$

$f' = 0 \Rightarrow$ إما $\sin x = 0$

$x = \pi K$

$K = 0 \quad x = 0 \quad f(0) = 4$

$K = 1 \quad x = \pi \quad f(\pi) = -1$

أو $\cos x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi K$

$K = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} \quad f(\frac{\pi}{2}) = 3$

أو $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

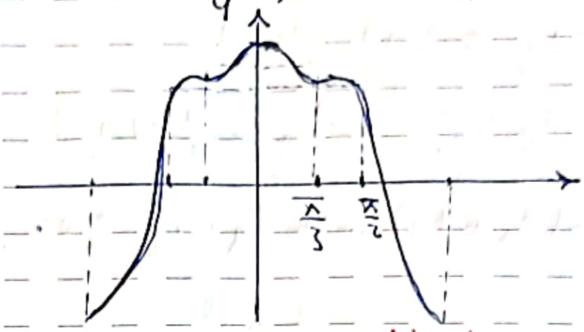
إما $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi K$

$K = 0 \quad x = \frac{\pi}{3} \quad f(\frac{\pi}{3}) = \frac{11}{4}$

أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi K$

مرفوض

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
f'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
f	4	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4



المسألة الأولى:

$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{-\infty} - e = -e$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

٢)

$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ $\quad f' = 0$

$\ln x = 1 \quad x = e \quad f(e) = 0$

x	0		1		e		$+\infty$
f'	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-e$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(e) = 0$ قيمة حدية صغرى.

* $x > e\cdot\ln x \Rightarrow \frac{x}{\ln x} > e$

نقسم على $\ln x$ ، $x \in]1,\infty[$

$\frac{x}{\ln x} - e > 0 \iff f(x) > 0$

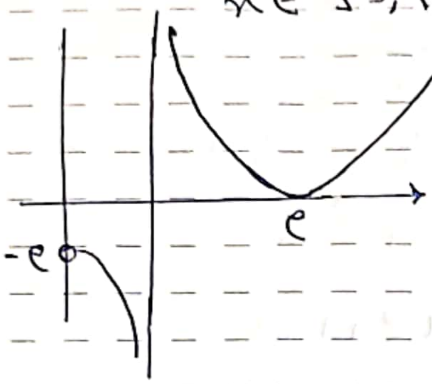
$f(x) > 0 \Rightarrow x \in]1,e[\cup]e,\infty[$

$x > e\cdot\ln x \Rightarrow \frac{x}{\ln x} < e$

نقسم على $\ln x$ ، $0 > \ln x$ ، $x \in]0,1[$

$\frac{x}{\ln x} - e < 0 \iff f(x) < 0$

$x \in]0,1[$



$h(x) = \frac{x}{\ln(-x)} + e = -f(-x)$

C_h نظير C_f بالنسبة للمبدأ.

$(x,y) \to (-x,-y)$

المسألة الثانية:

$D \quad C$
$A \quad B$

لكي يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع يجب أن يكون

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff b - a = c - d$

$\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i = -\sqrt{3} - i - d$

$\boxed{d = -\sqrt{3} + i}$

$z_A = \sqrt{3} + i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$

$z_B = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

$z_C = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}$

$\left(\frac{z_A}{2}\right)^n \left(\frac{z_B}{2}\right)^n \left(\frac{z_C}{2}\right)^n = e^{\frac{n\pi}{6}i}\cdot e^{-\frac{n\pi}{6}i}\cdot e^{\frac{7n\pi}{6}i}$

$= e^{\frac{7n\pi}{6}i}$

وبالتوحيد نحصل على: نحققه

$e^{n\frac{7\pi}{6}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i}$ ⟸

$n\frac{7\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi K$

$n = \dfrac{\frac{3\pi}{2}}{\frac{7\pi}{6}} + \dfrac{2\pi}{\frac{7\pi}{6}} K \qquad K \in \mathbb{Z}$

$n = \frac{9}{7} + \frac{12}{7} K$

٣)

$z' = iz + 1 + i$

$z' - i = iz + 1$

$z' - i = iz - i^2$

$z' - i = i(z - i)$

S: دوران مركزه $w = i$

وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

٤)

$(z - z_A)\overline{(z - z_A)} = z_C \overline{z_C}$

$z - z_A = x + iy - \sqrt{3} - i$

$= (x - \sqrt{3}) + i(y - 1)$

$(z - z_A)\overline{(z - z_A)} = (x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2$

$z_C \overline{z_C} = 3 + 1 = 4$

$(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 4$ ومنه

معادلة دائرة مركزها $\Omega(\sqrt{3}, 1)$

$R = 2$

ق) $z_A + z_B = 2\sqrt{3}$ ، $z_A \cdot z_B = 3 + 1 = 4$ } ⟸

المعادلة التي جذراها z_A ، z_B هي

$z^2 - (z_A + z_B) z + z_A \cdot z_B = 0$

$z^2 - 2\sqrt{3}\, z + 4 = 0$

انتهى النموذج ١١