المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

النموذج الامتحاني العاشر

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: **(لكل سؤال 45 درجة)**

السؤال الأوّل:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(1,2,0),B(-1,0,2)$ ، أعطِ معادلةً للمجموعة ع المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA = MB$ وما طبيعة ع ؟

السؤال الثاني:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $e^{x} - 3e^{-x} = -2$

السؤال الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ، أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب لـ C .

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: **(لكل سؤال 45 درجة)**

السؤال الأول:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$ ، ادرس قابلية الاشتقاق عند (0) واكتب معادلة نصف المماس في النقطة $O(0,0)$.

السؤال الثاني:

لتكن لدينا النقاط A,B,C بحيث $Z_A = -1 + i\sqrt{3}\,, Z_B = -1 - i\sqrt{3}\,, Z_C = 2$ ، احسب $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ وبيّن نوع المثلث ABC وعين مركز الدائرة المارة بروؤسه واحسب نصف قطرها .

السؤال الثالث:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1-\sqrt{x^2+1}} & ; x \neq 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$ ، ما قيمة m التي تجعل التابع مستمر على $\mathbb{R}$.

ثالثاً: حل التمارين الثلاثة التالية: (80 للأول – 70 للثاني – 70 للثالث)

التمرين الأول:

1) a) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z^2 - \sqrt{3}Z + 1 = 0$

b) نضع $Z_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$, $Z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$. اكتب Z_1^{2020} شكل مثلثي بأبسط صورة .

2) في مستوٍ مركب $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن $Z_B = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$, $Z_A = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ ، وليكن R: الدوران الذي مركزه (O) وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، عين العدد العقدي للنقطة C صورة النقطة B بالدوران R .

3) ليكن T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{\omega}$ بحيث: $Z_{\vec{\omega}} = -\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ ، عين العدد العقدي للنقطة D صورة B وفق الانسحاب T .

4) عين طبيعة $ABCD$ ثم بيّن أن النقط A, B, C, D تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

التمرين الثاني:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق: $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

1- أثبت أن u_n متتالية هندسية ، عيّن أساسها واحسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_5$

2- لنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق: $v_n = \ln u_n$ ، أثبت أنها حسابية وعين أساسها .

التمرين الثالث:

نعتبر الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط: $A(1,1,1), B(1,-1,0), C(2,0,1)$ ، المطلوب:

1- بيّن أن A, B, C تحدد مستوٍ ، ثم جد معادلة المستوي P_1 المحدد بالنقط A, B, C .

2- ليكن: $P_2: x - 2y - 2z + 6 = 0$ ، أوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك للمستويين P_1, P_2 .

3- بيّن أن النقطة O هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1), (B,1), (C,-1)$.

4- عين F مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{3}$

رابعاً: حل المسألتين الآتيتين: **(100 درجة لكل مسألة)**

المسألة الأولى:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x) = x^2(1 - \ln x)$ ، المطلوب:

1- أوجد D_f .

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها .

3- هل يملك التابع f مقاربات أفقية أو شاقولية.

4- بين ما للتابع من قيم حدية .

5- اكتب معادلة المماس لـ C في نقطة تقاطع C مع محور الفواصل .

6- ارسم C_f واستنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع f_1 المعيَّن بالعلاقة:

$$f(x) = x^2(\ln(-x) - 1)$$

المسألة الثانية:

في فضاء متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقط:

$A(1,0,-1), B(2,2,3), C(3,1,-2), D(-4,2,1)$ ، المطلوب:

1- أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته .

2- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على (ABC) واستنتج معادلة المستوي ABC .

3- احسب بعد النقطة D عن المستوي ABC ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.

4- اكتب معادلة المخروط الذي رأسه D وقاعدته الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC ومحوره $(O,\vec{k})$.

انتهت الأسئلة

حل النموذج الرسولي العاشر

السؤال الأول:

$M(x,y,z)$

$MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2 = (x+1)^2+y^2+(z-2)^2$

$x^2+y^2+z^2-2x-4y+5 = x^2+y^2+z^2+2x-4z+5$

$-2x-4y+5 = 2x-4z+5$

$-4x+4y-4z=0$

$x+y-z=0$

وهي معادلة المستوي المحوري لـ $[AB]$.

السؤال الثاني:

$e^{x}-3e^{-x}=-2 \Rightarrow e^{2x}-3=-2e^{x}$

$e^{2x}+2e^{x}-3=0$

إما $e^{x}=1 \Rightarrow x=0$

أو $e^{x}=-3$ مستحيلة

السؤال الثالث:

$f-y_{\Delta} = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$

بفرض $\frac{1}{x}=t$ $\qquad x=\frac{1}{t}$

$x\to+\infty \Rightarrow t\to 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f-y_{\Delta}) = \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\ln(1+t)-1\right)$

$= \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right)=0$

ومنه $y=x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

ثانياً: السؤال الأول:

$t(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$

$= \frac{|x|}{x\sqrt{x^2+1}}$

* في جوار $+\infty$ $\qquad |x|=x$

$t(x) = \frac{x}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} t(x) = 1$ ومنه f اشتقاقي عند (0) من اليمين

* في جوار $-\infty$ $\qquad |x|=-x$

$t(x) = \frac{-x}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} t(x) = -1$ ومنه f اشتقاقي عند (0) من اليسار

ومنه f غير اشتقاقي عند (0) لأن

$\lim\limits_{x\to 0^+} t(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} t(x)$

* في جوار $+\infty$

$m = \lim\limits_{x\to 0^+} t(x) = 1$

$T_1 : y = x$

* في جوار $-\infty$

$m = \lim\limits_{x\to 0^-} t(x) = -1$

$T_2 : y = -x$

السؤال الثاني:

$\frac{z_B - z}{z_A - z_C} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}-2} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$

$= \frac{(-3-i\sqrt{3})^2}{9+3}$

$= \frac{9+6\sqrt{3}i-3}{12} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

والمثلث متساوي الأضلاع ومركز الدائرة المارة برؤوسه هو مركز ثقله

$\Omega = \frac{a+b+c}{3} = 0$

$R = OC = 2$

السؤال الثالث: لكي يكون f مستمر على R يجب ان يكون مستمر عند (0)

اي يجب ان يتحقق $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{1-\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x\,(1+\sqrt{x^2+1})}{-x^2}\right) = -1(2) = -2$$

$f(0) = m$

ومنه $m = 2$

ثالثاً: التمرين الأول

a) $\Delta = b^2 - 4ac = 3 - 4 = -1 < 0$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$-\Delta = 1 \qquad \sqrt{-\Delta} = 1$

$$Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt3 + 1i}{2} = \frac{\sqrt3}{2} + \frac12 i$$

$$Z_2 = \frac{\sqrt3}{2} - \frac12 i$$

$$Z_1^{2020} = \left(\frac{\sqrt3}{2} + \frac12 i\right)^{2020} = \left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^{2020}$$

$$= e^{2020\frac{\pi}{6}i} = e^{1010\frac{\pi}{3}i}$$

$$= e^{\left(\frac{1011\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)i} = e^{\left(337\pi - \frac{\pi}{3}\right)i}$$

$$= e^{\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)i} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

٢) $z' - w = e^{i\theta}(z - w)$

$$c = e^{\frac{2\pi}{3}i}\, b = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(\frac{\sqrt3 - i}{2}\right)$$

$$c = \left(-\frac12 + \frac{\sqrt3}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt3}{2} - \frac12 i\right)$$

$$= \frac{(-1 + \sqrt3 i)(\sqrt3 - i)}{4}$$

$$= \frac{-\sqrt3 + i + 3i + \sqrt3}{4} = i$$

٣) $d = b + w$

$$= \frac{\sqrt3}{2} - \frac12 i - \frac{\sqrt3}{2} - \frac12 i = -i$$

٤) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(0,-1)\\ \overrightarrow{DC}(0,-2)\end{array}\right\}\ \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$

ومنه فالشعاعان مرتبطان خطياً ولكنهما ليسا متساويان بالطول فالرباعي ABCD شبه منحرف

$OA = \sqrt{\frac34 + \frac14} = 1$

$OB = \sqrt{\frac34 + \frac14} = 1$

$OC = \sqrt{1+0} = 1$

$OD = \sqrt{1+0} = 1$

ومنه فالنقاط A, B, C, D تقع على دائرة واحدة مركزها (0) ونصف قطرها $R = 1$

التمرين الثاني:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac12\right)^{n+1}}{\left(\frac12\right)^n} = \frac12$$

متتالية هندسية أساسها $q = \frac12$

$S = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$ $\qquad a = u_1 = \frac12$

$n = 5 - 1 + 1 = 5$

$$S = \frac12\,\frac{1-\left(\frac12\right)^5}{1-\frac12} = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

٢) $v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$

$$= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac12\right) = -\ln 2$$

متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 2$

التمرين الثالث :

$\vec{AB}(0,-2,-1)$

$\vec{AC}(1,-1,0)$

نجد ان الشعاعين غير مرتبطين خطياً فالنقاط A, B, C تعين مستوياً.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow -2b-c=0$

$\vec{n}\cdot\vec{AC}=0 \Rightarrow a-b=0$

نفرض $a=1 \Rightarrow b=1,\ c=-2$

$\vec{n}(1,1,-2)$

$ABC: x+y-2z+d=0$

نعوض B

$1-1-0+d=0 \Rightarrow d=0$

$\boxed{ABC: x+y-2z=0}$

٢) $x+y-2z=0$

$\overset{-}{x}\overset{+}{-}2y\overset{+}{-}2z\overset{-}{+}6=0$

$3y-6=0 \Rightarrow y=2$

نعوض في ①

$x-2z=-2$

نفرض $z=t$

$x=-2+2t$

$y=2 \qquad t\in\mathbb{R}$

$z=t$

٣) $\vec{OA}+\vec{OB}-\vec{OC}\overset{?}{=}\vec{0}$

$(1,1,1)+(1,-1,0)+(-2,0,-1)\overset{?}{=}\vec{0}$

$(0,0,0)=(0,0,0)$

اذاً O هي مركز الابعاد المتناسبة للجملة $(A,1),(B,1),(C,-1)$

٤) $\|\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}\|=2\sqrt{3}$

$\|\vec{MO}\|=2\sqrt{3}$

وهي سطح كرة مركزها $O(0,0,0)$ ونصف قطرها $R=2\sqrt{3}$

المسألة الأولى : $f(x)=x^2(1-\ln x)$

١) $D=]0,+\infty[$

٢) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0} x(x-x\ln x)=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(1-\infty)=-\infty$

$f'=2x(1-\ln x)-\frac{1}{x}\cdot x^2$

$=x(2-2\ln x-1)=x(1-2\ln x)$

$f'=0\Rightarrow$

إما $x=0\notin D_f$

أو $1-2\ln x=0 \Rightarrow x=\sqrt{e}$

$f(\sqrt{e})=e(1-\frac{1}{2})=\frac{e}{2}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

ليس للتابع مقاربات افقية او شاقولية

٤) $f(\sqrt{e})$ قيمة حدية كبرى

٥) تقاطع (C) مع xx'

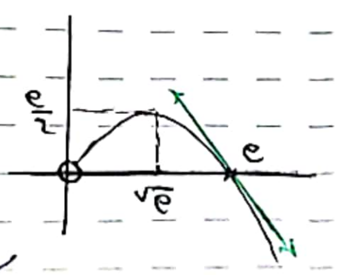
$f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow x=e$

نقطة تقاطع $(e,0)$

$m=f'(e)=-e$

ومنه معادلة المماس $T: y=-e(x-e)$



$f_1=x^2(\ln(-x)-1)$

$=-f(-x)$

ومنه C_1 نظير C بالنسبة للمبدأ.

نموذج / ١٠ /

المسألة الثالثة:

١) $BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\left\{\begin{array}{l} AB = \sqrt{21} \\ AC = \sqrt{6} \\ BC = \sqrt{27} \end{array}\right.$

ومنه فالمثلث ABC قائم في A. وذلك حسب مبرهنة عكس فيثاغورث.

مساحة القاعدة $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2}\sqrt{126}$

٢) غير مرتبطين خطياً $\left\{\begin{array}{l} \vec{AB}(1,2,4) \\ \vec{AC}(2,1,-1) \end{array}\right.$

$\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً إذن $\vec{n}$ ناظم لـ ABC $\left\{\begin{array}{l} \vec{n}\cdot\vec{AB} = 0 \\ \vec{n}\cdot\vec{AC} = 0 \end{array}\right.$

$ABC: 2x - 3y + z + d = 0$

نعوض A $d = -1$

$ABC: 2x - 3y + z - 1 = 0$

٣)

$dist(D, ABC) = \frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}} = \sqrt{14}$

$v = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{126} \times \sqrt{14}$

$= \frac{1}{2} \times 14 = 7$ واحدة مكعبة

٤) المثلث ABC مثلث قائم وتره (BC)

مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر.

$\Omega\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$BC = 2R = \sqrt{27} \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{27}$

معادلة المخروط.

$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{h^2} z^2$ $\quad z_1 \leq z \leq z_2$ سفلية علوية

$h = dist(D, ABC) = \sqrt{14}$

$x^2 + y^2 = \frac{\frac{27}{4}}{14} z^2 \qquad \frac{1}{2} \leq z \leq 1$

$x^2 + y^2 = \frac{27}{56} z^2 \qquad \frac{1}{2} \leq z \leq 1$

انتهى حل المسألة