النموذج الامتحاني السابع

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: (لكل سؤال 45 درجة)

السؤال الأوّل:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق: $f(x) = \frac{x^2-5x+1}{x+1}$ ، المطلوب:

1- جد الأعداد a, b, c التي تحقق $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

2- أثبت أن $y = ax + b$ مقارب مائل في جوار $\pm\infty$ وادرس وضعه النسبي .

السؤال الثاني: لم يرد

ليكن التابع $f(x) = \sqrt{x^3}$ ، وليكن C الخط البياني لـ f . احسب القيمة التقريبية لميل المماس لـ C في نقطة منه فاصلتها $x = 4,1$.

السؤال الثالث:

اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $Z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: (لكل سؤال 45 درجة)

السؤال الأول:

$ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC ، جد مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق: $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$.

السؤال الثاني:

عيّن قيمة n في الحالة التالية: $3\binom{n}{3} = 2P_n^2$.

السؤال الثالث:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $u_n = 4n + 1$ ، أثبت أن المتتالية حسابية عيّن أساسها ثم احسب $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{12}$ و $S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}$.

المدرّس: محمد رسول صباغ

0934131159

ثالثاً: حل التمارين الثلاثة التالية: (80 للأول – 70 للثاني – 70 للثالث)

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,3]$ وفق: $f(x) = x\sqrt{3-x}$ ، المطلوب:

1- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ، وبيّن ما له من قيم حدية .

2- أثبت أن التابع g المعطى بالعلاقة $g(x) = \frac{2}{5}(x^2 - x - 6)\sqrt{3-x}$ تابع أصلي لـ f على $]-\infty,3]$.

3- احسب مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا العددين العقديين $Z_1 = 1 + i\,, Z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ ، المطلوب:

1- اكتب Z_1, Z_2 بالشكل الأسي والجبري .

2- استنتج النسب المثلثية للزاوية $\frac{7\pi}{12}$.

3- أثبت أن $\omega_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ هو حل للمعادلة $\omega^2 = 1 - i\sqrt{3}$ ثم أوجد الجذر الآخر .

التمرين الثالث:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يأتي: $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \\ u_0 = 0 \end{cases}$ ، المطلوب:

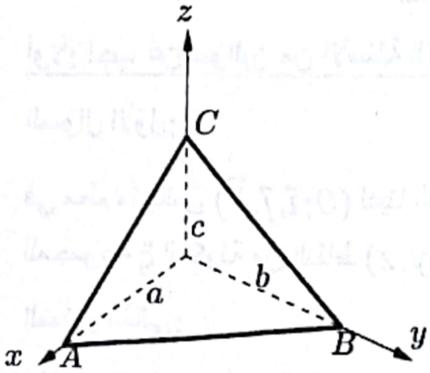
1- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$.

2- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

3- علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها .

رابعاً: حل المسألتين الآتيتين: **(100 درجة لكل مسألة)**

المسألة الأولى:



نتأمل المعلم المتجانس في الشكل المجاور حيث a, b, c أعداد موجبة تماماً ، المطلوب:

أولاً: أثبت أن معادلة المستوي تعطى بالعلاقة:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

ثانياً: بفرض $a=3\,, b=2\,, c=3$:

1- جد المعادلات الوسيطية للمستقيم OH حيث H هي مسقط O على (ABC) .

2- أوجد إحداثيات النقطة M نقطة تقاطع OH مع (ABC) .

3- أثبت أن المستقيم AB يعامد (OCH) .

المسألة الثانية:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ وفق: $f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$ وليكن C خطه البياني.

1- أثبت أن النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر له .

2- ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها .

3- أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}x$ مقارب لـ C وادرس وضعهما النسبي .

4- ارسم في معلم واحد d و C .

انتهت الأسئلة

حل النموذج الرسولي السابع ...

أولاً :

$$\begin{array}{r|l} & x - 6 \\ \hline x+1 & x^2 - 5x + 1 \\ & x^2 + x \\ & -6x + 1 \\ & -6x - 6 \\ & 7 \end{array}$$

$f(x) = x - 6 + \frac{7}{x+1}$

$a = 1 \quad b = -6 \quad c = 7$

ع) $f(x) - y_\Delta = \frac{7}{x+1}$ $\quad \lim_{x \to \pm\infty} (f - y_\Delta) = 0$

فهو مقارب $\Delta : y = x - 6$ مائل في جوار $\pm\infty$

$f(x) - y = \frac{7}{x+1}$

$x > -1$: $f - y_\Delta > 0$ ، (C) فوق Δ

$x < -1$: $f - y_\Delta < 0$ ، (C) تحت Δ

ثانياً : $\|2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$

لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,2)(B,1)(C,-1)$

$2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = 2\vec{MG}$ ... (1)

$2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} - 2\vec{MB} = 2\vec{MG} - 2\vec{MB}$

$2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = 2(\vec{MG} - \vec{MB})$

$= 2\vec{BC}$ ... (2)

نعوض (1) و (2) في رأس المسألة :

$\|2\vec{MG}\| = \|2\vec{BG}\| \quad \div 2$

$\|\vec{MG}\| = \|\vec{BG}\|$

وهي معادلة كرة مركزها G و $r = \|\vec{BG}\|$

السؤال الأول :

$f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$

$m(x) = f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

$m(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ $\quad 4{,}1 = 4 + 0{,}1$

$a = 4 \quad h = 0{,}1$

$m(4) = \frac{3}{2}\sqrt{4} = 3$

$m'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$

$m'(4) = \frac{3}{8}$

$m(4{,}1) \simeq m(4) + m'(4)\, h$

$\simeq 3 + \frac{3}{8} \times \frac{1}{10} \simeq \frac{243}{80}$

السؤال الثاني :

$3\binom{n}{3} = 2P_n^2$

$\left.\begin{array}{l} n \geq 3 \\ n \geq 2 \end{array}\right\} n \geq 3$

$\cancel{3}\frac{\cancel{n(n-1)}(n-2)}{\cancel{3} \times 2 \times 1} = \cancel{2}\frac{\cancel{n(n-1)}}{\cancel{2 \times 1}}$

$\frac{n-2}{2} = 1 \Rightarrow n - 2 = 2$

$n = 4$

السؤال الثالث :

$u_n = 4n + 1$

$u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 1 - (4n+1) = 4$

فهي متتالية حسابية أساسها $r = 4$

$S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{12}$

$S_1 = n\frac{a + l}{2}$ $\quad n = 12 - 0 + 1 = 13$

$a = u_0 = 1$

$l = u_{12} = 25$

$S_1 = 13\frac{1 + 25}{2} = 13 \times 13 = 169$

$S_2 = u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}$

$S_2 = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n$

$r = \ell_2 - \ell_1 = u_4 - u_2 = 8$

السؤال الثالث :

$Z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{7\pi}{12}) + i\sin(-\frac{7\pi}{12})\right)$

$S'_n = n\frac{a+\ell}{2}$

$a = u'_1 = u_2 = 9$

$\ell = u'_n = u_{2n} = 8n+1$

$S'_n = n\frac{9+8n+1}{2} = \frac{n}{2}(10+8n)$

$S'_n = 5n + 4n^2$

ثالثاً: التمرين الثالث :

$Z_1 = 1+i \qquad Z_2 = 1+\sqrt{3}\,i$

1)

$Z_1 = 1+i = \sqrt{2}\,e^{\pi/4\, i}$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$Z_2 = 1+\sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2e^{\pi/3\, i}$

$Z_1\cdot Z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)i}$

$= 2\sqrt{2}\,e^{7\pi/12\, i}$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$Z_1\cdot Z_2 = 2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12} + i\,2\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12}$

$Z_1\cdot Z_2 = (1+i)(1+\sqrt{3}\,i)$

$= 1+\sqrt{3}\,i + i - \sqrt{3}$

$= 1-\sqrt{3} + i(\sqrt{3}+1)$

$2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12} = 1-\sqrt{3}$

$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$2\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12} = 1+\sqrt{3}$

$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

2) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)^2 \stackrel{?}{=} 1 - i\sqrt{3}$

$\frac{3}{2} - 2\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,i - \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 1 - i\sqrt{3}$

$1 - 2\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,i \stackrel{?}{=} 1 - i\sqrt{3}$

محققة فهو جذر له.

$w_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i$ وكذلك الجذر الآخر

التمرين الأول :

$f(x) = x\sqrt{3-x}$

f معرف ومستمر على $]-\infty, 3]$ ومشتق على $]-\infty, 3[$

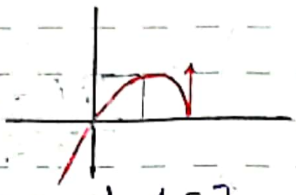
$f(3) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \sqrt{3-x} + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}\,x$

$= \frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}}$

$= \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$



$f' = 0 \Rightarrow 6-3x = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = 2$

x	$-\infty$		2		3
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$f(2) = 2$ قيمة حدية كبرى

$f(3) = 0$ قيمة حدية صغرى

$g(x) = \frac{2}{5}(x^2-x-6)\sqrt{3-x}$

$g'(x) = \frac{2}{5}\left[(2x-1)\sqrt{3-x} + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}(x^2-x-6)\right]$

$= \frac{2}{5}\left[\frac{2(2x-1)(3-x) - (x^2-x-6)}{2\sqrt{3-x}}\right]$

$= \frac{2}{5}\left[\frac{14x-4x^2-6-x^2+x+6}{2\sqrt{3-x}}\right]$

$= \frac{\cancel{2}}{5}\left[\frac{15x-5x^2}{\cancel{2}\sqrt{3-x}}\right] = \frac{3x-x^2}{\sqrt{3-x}}$

$= \frac{x(3-x)}{\sqrt{3-x}} = x\sqrt{3-x} = f(x)$

ومنه g تابع أصلي لـ f.

$S = \int_0^3 f(x) = [g(x)]_0^3$

$= \frac{2}{5}\left[(x^2-x-6)\sqrt{3-x}\right]_0^3$

$= \frac{12}{5}\sqrt{3}$ واحدة مربعة.

التمرين الثالث

$u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$, $u_0 = 0$

1) $E(n): 0 \le u_n \le 1$

مرحلة $n=0$: $0 \le u_0 = 0 \le 1$ محققة

الفرض: $0 \le u_n \le 1$

الطلب: $0 \le u_{n+1} \le 1$

الإثبات: $\boxed{\frac{2u_n+1}{u_n+2} = 2 + \frac{-3}{u_n+2}}$

لدينا فرضاً

$0 \le u_n \le 1 \Rightarrow 2 \le u_n + 2 \le 3$

$\frac{1}{2} \ge \frac{1}{u_n+2} \ge \frac{1}{3} \Rightarrow$

$-\frac{3}{2} \le \frac{-3}{u_n+2} \le -1$

$\frac{1}{2} \le 2 + \frac{-3}{u_n+2} \le 1$

$0 \le u_{n+1} \le 1$ محققة.

$E(n)$: u_n متزايدة

$u_1 = \frac{1}{2}$

$u_1 - u_0 = \frac{1}{2} > 0$ محققة.

الفرض: $u_{n+1} \ge u_n$

الطلب: $u_{n+2} \ge u_{n+1}$

الإثبات:

لدينا فرضاً.

$u_{n+1} \ge u_n \Rightarrow 2 + u_{n+1} \ge 2 + u_n$

$\frac{1}{2+u_{n+1}} \le \frac{1}{2+u_n} \Rightarrow$

$\frac{-3}{2+u_{n+1}} \ge \frac{-3}{2+u_n}$

$2 + \frac{-3}{2+u_{n+1}} \ge 2 + \frac{-3}{2+u_n}$

$u_{n+2} \ge u_{n+1}$ محققة.

المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$f(x) = x$ لإيجاد نهايتها نحل المعادلة

$\frac{2x+1}{x+2} = x \Rightarrow 2x + 1 = x^2 + 2x$

$x^2 = 1$

$x = \mp 1$

ومنه $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

رابعاً: المسألة الثالثة:

$A(a,0,0)$ $B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$

نعوض النقاط A و B و C ويجب أن تحقق المعادلة.

$A: \frac{a}{a} \stackrel{?}{=} 1$ A تحقق.

$B: \frac{b}{b} \stackrel{?}{=} 1$ B تحقق

$C: \frac{c}{c} \stackrel{?}{=} 1$ C تحقق

ومنه معادلة المستوي $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

ثانياً: $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1$

$2x + 3y + 2z = 6$

$\vec{n}(2,3,2)$ وهو شعاع توجيه للمستقيم Δ المار بالنقطة (0) والعمودي على ABC

ومنه $x = 2t$

$y = 3t$ $t \in \mathbb{R}$

$z = 2t$

نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي.

$4t + 9t + 4t = 6$

$17t = 6 \Rightarrow t = \frac{6}{17}$

$M\left(\frac{12}{17}, \frac{18}{17}, \frac{12}{17}\right) = H$

$\vec{OC}(0,0,3)$

$\vec{OH}\left(\frac{12}{17}, \frac{18}{17}, \frac{12}{17}\right)$

غير مرتبطين خطياً

$\vec{AB}(-3,2,0)$

$\vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0$ $AB \perp OC$

$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = \frac{-36}{17} + \frac{36}{17} = 0$ $AB \perp OH$.

ومنه AB يعامد OCH

المسألة الأخيرة:

$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

$A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x_0 - x = 1 - x$

$y_0 = -\frac{1}{4}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$

$1 - x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 0\}$ والشرط الأول محقق

$f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)$

$\ell_1 = f(2x_0 - x) = f(1-x)$

$= \frac{-1+x}{2} + \ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right|$

$= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{-x}{1-x}\right|$

$= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$

$= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$ ---- ①

$2y_0 - f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$ ---- ②

ومنه فالشرط الثاني محقق إذن A نقطة تناظر

2)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

$f = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) &]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\\ -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) &]0, 1[\end{cases}$

$f' = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)} \\ -\frac{1}{2} + \frac{-1}{x(1-x)} < 0 \end{cases}$

$f' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)} = 0$

$x(x-1) = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$x = -1$ $\quad f(-1) = \frac{1}{2} + \ln 2$

$x = 2$ $\quad f(2) = -1 - \ln 2$

x	$-\infty$	-1	0		1		2	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	‖ $-$ ‖		$+$	0	$-$
f	$+\infty \searrow$	$\frac{1}{2}+\ln 2$	$\nearrow +\infty$	‖ $+\infty \searrow -\infty$ ‖		$-\infty \nearrow$	$-1-\ln 2$	$\searrow -\infty$

$f - y_{\Delta_1} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

$\lim_{x \to \pm\infty} (f - y_{\Delta_1}) = 0$

ومنه $y = -\frac{1}{2}x$ مقارب مائل بجوار $\pm\infty$

$f - y_\Delta = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$ $\quad f - y_\Delta = 0$

$\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0 = \ln(1)$

$\left|\frac{x-1}{x}\right| = 1$

إذا $\frac{x-1}{x} = 1 \Rightarrow -1 = 0$ مستحيلة

إذا $\frac{x-1}{x} = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
	$+$	‖	$+ \; 0 \; -$	‖	$-$

الأوضاع النسبية