اختبار وحدة رابعة عقدية

المستوى الجيد

■ تمرين (1): لدينا الأعداد العقدية التالية:

$Z_1 = 1$ $\quad Z_2 = 2i$ $\quad Z_3 = 1+i$ $\quad Z_4 = 1-\sqrt{3}\,i$

* اكتب Z_1 ، Z_2 ، Z_3 ، Z_4 بالشكلين المثلثي والأسي.
* اكتب $Z = \dfrac{Z_4}{Z_3}$ بالشكل الجبري
* اكتب $Z = \dfrac{Z_4}{Z_3}$ بالشكل المثلثي.
* استنتج $\sin \dfrac{17\pi}{12}$

■ تمرين (2): حل المعادلة التالية:

$$2iZ + \overline{Z} = 3 + 3i$$

■ تمرين (3): حل المعادلة التالية:

$$Z^2 = -3 + 4i$$

■ تمرين (4): Z: عدد عقدي ما

U : عدد عقدي طويلته تساوي الواحد ومختلف عن الواحد

أثبت أن $\dfrac{Z - U\overline{Z}}{1-U}$ حقيقي بحت.

بالتوفيق

م. أحمد عز الدين

حل اختبار المستوى الجيد عشرية

تمرين (1) : $Z_4 = 1-\sqrt{3}i \qquad Z_3 = 1+i \qquad Z_2 = 2i \qquad Z_1 = 1$

- $Z_1 = 1$ | $r = 1$, $\theta = 0$

شكل مثلثي : $Z_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos 0 + i\sin 0$

شكل أسي : $Z_1 = r\cdot e^{i\theta} = e^{0i}$

- $Z_2 = 2i$ | $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

شكل مثلثي : $Z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

شكل أسي : $Z_2 = 2\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

2

- $Z_3 = 1+i$ | $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\theta = \frac{\pi}{4}$

$Z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$Z_3 = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

- $Z_4 = 1-\sqrt{3}i$ | $r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\theta = \frac{5\pi}{3}$

$Z_4 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$Z_4 = 2\cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}$

الشكل الجبري $Z = \frac{Z_4}{Z_3}$

$$Z = \frac{(1-\sqrt{3}i)}{(1+i)}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)}$$

$$= \frac{1 - i - \sqrt{3}i + \sqrt{3}i^2}{1 - i^2} = \underbrace{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}_{\text{قسم حقيقي جبري}} + i\,\underbrace{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}}_{\text{قسم تخيلي جبري}}$$

م. أحمد غزولين

★ الشكل المثلثي : $Z = \frac{Z_4}{Z_3}$

$$Z = \frac{2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$Z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

3

$$Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\sqrt{2}\cos\frac{17\pi}{12}}_{\text{قسم حقيقي مثلثي}} + \underbrace{\sqrt{2}\sin\frac{17\pi}{12}}_{\text{قسم تخيلي مثلثي}}\, i$$

★ استنتاج $\sin\frac{17\pi}{12}$

بالمطابقة بين القسم التخيلي للشكل الجبري
مع " " " المثلثي

نجد :

القسم التخيلي الجبري = القسم التخيلي المثلثي

م. أحمد غزولين

$$\sqrt{2}\sin\frac{17\pi}{12} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

نقسم على $\sqrt{2}$:

$$\sin\frac{17\pi}{12} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

حل تمرين (2) : حل :

$$2iZ + \bar{Z} = 3 + 3i$$

نفرض أن $Z = a + ib$

فيكون $\bar{Z} = a - ib$

$$2i(a+ib) + a - ib = 3 + 3i$$

$\underline{\underline{4}}$

$$2ai + 2bi^2 + a - ib = 3 + 3i$$

$$2ai - 2b + a - ib = 3 + 3i$$

نرتب : $a - 2b + i(2a - b) = 3 + 3i$

م. أحمد [illegible]

نطابق : $a - 2b = 3 \quad (1)$

$2a - b = 3 \quad (2)$

نضرب (1) في (-2) : $-2a + 4b = -6 \quad (3)$

نجمع (2) مع (3) : $3b = -3 \Longrightarrow b = -1$

نعوض في (1) : $a - 2(-1) = 3 \Longrightarrow a + 2 = 3$

$$\Longrightarrow a = 3 - 2 \Longrightarrow a = 1$$

$a = 1$, $b = -1$ $\Longrightarrow Z = 1 - i$

حل تمرين (3) : حل :

$$Z^2 = -3 + 4i$$

$$x^2 - y^2 = -3 \quad (1)$$

$$2xy = +4 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = +5 \quad (3)$$

بجمع (1) مع (3) : $2x^2 = 2 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$

بطرح (1) من (3) : $2y^2 = 8 \Longrightarrow y^2 = 4 \Longrightarrow y = \pm 2$

إشارة المعادلة (2) موجبة $\Longrightarrow$ إما : $Z = 1 + 2i$

أو : $Z = -1 - 2i$

م. أحمد غزاولين

6

حل تمرين رقم (٤) :

Z : عدد عقدي ما

u : عدد عقدي طويلته الواحد ومختلف عن الواحد.

إثبات : $\dfrac{Z - u\overline{Z}}{1 - u}$ حقيقي بحت

نأخذ المرافق : $\overline{\left(\dfrac{Z - u\overline{Z}}{1 - u}\right)} = \dfrac{\overline{Z} - \overline{u} \cdot Z}{1 - \overline{u}}$

u عدد عقدي طويلته الواحد $\Longrightarrow$ نضرب ونقسم u $\Longrightarrow$

م.أحمد عثمان

$$\frac{\overline{Z} - \overline{u} \cdot Z}{1 - \overline{u}} \cdot \frac{u}{u} = \frac{\overline{Z} \cdot u - u \cdot \overline{u} \cdot Z}{u - u \cdot \overline{u}}$$

: $u \cdot \overline{u} = 1$

$$= \frac{\overline{Z} \cdot u - Z}{u - 1}$$

نضرب ونقسم -1 : $\dfrac{\overline{Z}\, u - Z}{u - 1} \cdot \dfrac{-1}{-1} = \dfrac{Z - u \cdot \overline{Z}}{1 - u}$

نلاحظ أن العدد يساوي مرافقه

ومنه العدد حقيقي بحت

اختبار وحدة رائعة عقدية .

المستوى المتفوق

■ تمرين (1): لدينا الأعداد العقدية التالية :

$Z_1 = -1$

$Z_2 = -3i$

$Z_3 = 1+i$

$Z_4 = -\sqrt{3}+i$

$Z_5 = 1+\sqrt{3}\,i$

$Z_6 = 1-\sqrt{3}\,i$

* اكتب الأعداد العقدية بالشكل المثلثي .
* اكتب $Z = \frac{Z_3}{Z_4}$ بالشكل الجبري .
* اكتب $Z = \frac{Z_3}{Z_4}$ بالشكل المثلثي .
* استنتج جتا$\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$
* احسب Z_5^6 ، Z_6^6
* استنتج أن $Z = Z_5^6 + Z_6^6$ عدد حقيقي .

7

■ تمرين (2): حل المعادلة التالية :

$$Z^2 - (1+i)Z + 2 + 2i = 0$$

■ تمرين (3): حل جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} 2iZ + \bar{Z} = 2i \\ 3Z - i\bar{Z} = 1 \end{cases}$$

■ تمرين (4): أوجد العددين p ، q كي تقبل المعادلة :

$Z^2 + pZ + q = 0$ العددين $3-5i$ ، $1+2i$ جذرين لها

بالتوفيق

م. أحمد عزدولين

حل اختبار مستوى متفوق عقدي

حل تمرين رقم (1): كتابة أعداد عقدية مثلثياً

8

• $Z_1 = -1$	$r = 1$, $\theta = \pi$		$Z_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $Z_1 = \cos\pi + i\sin\pi$
• $Z_2 = -3i$	$r = 3$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$		$Z_2 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$
• $Z_3 = 1 + i$	$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$Z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
• $Z_4 = -\sqrt{3} + i$	$r = \sqrt{3+1} = 2$ $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\sin\theta = \frac{1}{2}$	$\theta = \frac{5\pi}{6}$	$Z_4 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$
• $Z_5 = 1 + \sqrt{3}\,i$	$r = \sqrt{1+3} = 2$ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\theta_5 = \frac{\pi}{3}$	$Z_5 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
• $Z_6 = 1 - \sqrt{3}\,i$	$r = 2$, $\theta = \frac{5\pi}{3}$		$Z_6 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

* كتابة $Z = \frac{Z_3}{Z_4}$ جبرياً

$$Z = \frac{1+i}{-\sqrt{3}+i} \cdot \frac{-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i} = \frac{-\sqrt{3}-i-i\sqrt{3}-i^2}{3-i^2} = \frac{1-\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})}{3+1}$$

$$Z = \underbrace{\frac{1-\sqrt{3}}{4}}_{\text{قسم حقيقي جبري}} + i\underbrace{\frac{-1-\sqrt{3}}{4}}_{\text{قسم تخيلي جبري}}$$

9

* كتابة Z مثلثياً :

$$Z = \frac{1+i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos -\frac{7\pi}{12} + i\sin -\frac{7\pi}{12}\right)$$

أ. أحمد غزولي

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos -\frac{7\pi}{12}}_{\text{قسم حقيقي مثلثي}} + i\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin -\frac{7\pi}{12}}_{\text{قسم تخيلي مثلثي}}$$

* استنتاج $\cos -\frac{7\pi}{12}$

بالمطابقة بين القسم الحقيقي للشكل المثلثي
مع " الحقيقي " الجبري

نجد :

القسم الحقيقي الجبري = القسم الحقيقي المثلثي

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{-7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos\frac{-7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$$

* حساب Z_5^6 Z_6^6

- $Z_5 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow Z_5^6 = 2^6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$

$Z_5^6 = 64\left(\cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3}\right) = 64\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right)$

$= 64(1 + 0) = 64$

10

- $Z_6 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow Z_6^6 = 2^6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^6$

$Z_6^6 = 64\left(\cos\frac{30\pi}{3} + i\sin\frac{30\pi}{3}\right)$

$= 64\left(\cos 10\pi + i\sin 10\pi\right) = 64(1+0) = 64$

* استنتاج $Z_5^6 + Z_6^6$ حقيقي

$Z_5^6 + Z_6^6 = 64 + 64 = 128$

ومنه Z حقيقي

د. أحمد عزالدين

حل تمرين رقم (2)

$$Z^2-(1+i)Z+2+2i=0$$

$a=1$

$b=-1-i$

$c=2+2i$

$$\Delta=b^2-4ac=(-1-i)^2-4(1)(2+2i)$$
$$=1+2i+i^2-8-8i$$

$$\Delta=-8-6i$$

$x^2-y^2=-8 \quad (1)$

$2xy=-6 \quad (2)$

$x^2+y^2=\sqrt{64+36}=10 \quad (3)$

م. احمد عبد الحسين

نجمع (1) مع (3) $\quad 2x^2=2 \Longrightarrow x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1$

نطرح (1) من (3) $\quad 2y^2=18 \Longrightarrow y^2=+9 \Longrightarrow y=\pm 3$

$$\sqrt{\Delta}=1-3i$$

اما $\quad Z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+i+1-3i}{2(1)}=\dfrac{2-2i}{2}=1-i$

$$Z_1=1-i$$

او $\quad Z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+i-1+3i}{2(1)}=\dfrac{4i}{2}=2i$

$$Z_2=2i$$

حل التمرين رقم (3) : حل جملة المعادلتين :

12

$$
\begin{cases}
2iZ + Z' = 2i & (1) \\
3Z - iZ' = 1 & (2)
\end{cases}
$$

نضرب (1) في i : $2i^2 Z + iZ' = 2i^2$

$\Longrightarrow -2Z + iZ' = -2 \quad (3)$

نجمع (2) و (3) : $Z = -1$

نعوض في (1) : $2i(-1) + Z' = 2i$

$\Longrightarrow -2i + Z' = 2i$

$\Longrightarrow Z' = 4i$

م. أحمد خزولين

حل التمرين رقم (4)

ايجاد p و q للمعادلة $z^2+pz+q=0$

جذراها: $1+2i$, $3-5i$

13

المجموع: $(1+2i)+(3-5i) = 4-3i$

الجداء: $(1+2i)(3-5i) =$

$3-5i+6i-10i^2 =$

$3+10+i =$

ج $= 13+i$

مج $= 4-3i$

الشكل العام للمعادلة

$z^2 -$ مج $z +$ ج $= 0$

$z^2 + p\,z + q = 0$

بالمطابقة $p = -$مج $= -4+3i$

$q =$ ج $= 13+i$

١٤

اختبار وحدة رابعة عقدية

المستوى المتميز

■ تمرين (1): لدينا العدد العقدي:

$$Z=(1-\sqrt{3})\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

اكتبه بالشكل الأسي.

■ تمرين (2): لدينا كثير الحدود:

$$P(Z)=Z^3+(2-3i)Z^2+(10-6i)Z-30i$$

- أثبت أن: $Z_0=3i$ جذر لكثير الحدود $P(Z)$
- عين كثير الحدود $Q(Z)$ يحقق:

$$P(Z)=(Z-3i)\cdot Q(Z)$$

- حل المعادلة $P(Z)=0$

■ تمرين (3): حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$Z^3-(5+4i)Z^2-6(3-2i)Z+72i=0$$

إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً

■ تمرين (4): Z عدد عقدي طويلته تساوي الواحد ومختلف عن الواحد

ω 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃

أثبت أن $Z=\dfrac{\omega-z}{1-\omega z}$ حقيقي بحت.

بالتوفيق

م. أحمد فوليف

حل اختبار المستوى المتميز عقدية

تمرين رقم (1): كتابة بشكل أسي:

$$Z = (1-\sqrt{3})\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

15

نفرض $Z_1 = 1-\sqrt{3} = (-1)(\sqrt{3}-1) = e^{i\pi}(\sqrt{3}-1)$

نفرض $Z_2 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

نضرب $Z = Z_1 \cdot Z_2 = (\sqrt{3}-1)\cdot e^{i\pi}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$= (\sqrt{3}-1)\cdot e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$Z = (\sqrt{3}-1)\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

م. أحمد زولين

معلومة: $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

حل تمرين رقم (2):

$$P(z) = z^3 + (2-3i)z^2 + (10-6i)z - 30i$$

* إثبات $Z_0 = 3i$ جذر لـ $P(z)$

$$P(z_0) = P(3i) = (3i)^3 + (2-3i)(3i)^2 + (10-6i)(3i) - 30i$$

$$= -27i - 9(2-3i) + 30i - 18i^2 - 30i$$

$$= -27i - 18 + 27i + 18$$

$$= 0$$

16

ومنه $Z_0 = 3i$ جذر لكثير الحدود.

* تعيين كثير الحدود $Q(z)$ يحقق

$$P(z) = (z-3i)\,Q(z)$$

$$\begin{array}{r|l} z^3 + (2-3i)z^2 + (10-6i)z - 30i & z - 3i \\ \mp z^3 \quad \pm 3iz^2 & z^2 + 2z + 10 \\ 0 \quad 2z^2 + (10-6i)z - 30i & \\ \mp 2z^2 \quad \pm 6iz & \\ 10z - 30i & \\ -10z \pm 30i & \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

$$Q(z) = z^2 + 2z + 10$$

* حل المعادلة $P(z) = 0$

$$z^2 + 2z + 10 = 0$$

$$\Delta = 36i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6i$$

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+6i}{2} = -1+3i$$

$$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-6i}{2} = -1-3i$$

$Z_0 = 3i$ $\quad$ $Z_1 = -1+3i$ $\quad$ $Z_2 = -1-3i$

م. [illegible]

حل تمرين رقم (3):

حل:

$$z^3-(3+4i)z^2-6(3-2i)z+72i=0$$

علما يقبل حل تخيلي بحت:

نفرض الحل التخيلي ai: $(ai)^3-(3+4i)(ai)^2-6(3-2i)ai+72i=0$

$$a^3i^3-3a^2i^2-4a^2i^2i-18ai+12ai^2+72i=0$$

$$-a^3i+3a^2+4a^2i-18ai-12a+72i=0$$

17

نرتب: $(3a^2-12a)+i(-a^3+4a^2+72)=0$

$3a^2-12a=0 \Rightarrow 3a(a-4)=0 \Rightarrow$ اما $a=0$ مرفوض

او $a=4$ مقبول

$$\Longrightarrow z_1=4i$$

$$\begin{array}{r|l} & z^3-3z-18 \\ \hline z-4i & z^3-(3+4i)z^2-6(3-2i)z+72i \\ & \mp z^3 \pm 4iz^2 \\ \hline & -3z^2-6(3-2i)z+72i \\ & \pm 3z^2 \mp 12iz \\ \hline & -18z+72i \\ & \pm 18z \mp 72i \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

$$z^3-3z-18=0$$

$$(z-6)(z+3)=0$$

اما $z=+6$

او $z=-3$

مجموعة الحلول: $\{-3,\ 6,\ 4i\}$

م. احمد ...

حل التمرين رقم (٤) : z عدد عقدي طويلته الواحد

w : : : :

اثبات

$$Z = \frac{w - z}{1 - wz}$$ حقيقي بحت

م. أحمد عز الدين

نأخذ المرافق : $$\overline{Z} = \overline{\frac{w - z}{1 - wz}} = \frac{\overline{w} - \overline{z}}{1 - \overline{w}\cdot\overline{z}}$$

نضرب ونقسم على $w.z$: $$\overline{Z} = \frac{\overline{w} - \overline{z}}{1 - \overline{w}\,\overline{z}} \cdot \frac{w.z}{wz} = \frac{w.\overline{w}.z - wz.\overline{z}}{w.z - w.\overline{w}.z.\overline{z}}$$

18

$$= \frac{z - w}{wz - 1}$$

نضرب ونقسم على -1 : $$\overline{Z} = \frac{z - w}{wz - 1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)}$$

$$\overline{Z} = \frac{w - z}{1 - wz} = Z$$

ومنه العدد العقدي يساوي مرافقه

ومنه Z عدد حقيقي بحت